

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. К. АММОСОВА
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ЯГУ

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1994 ГОДА

ВЫХОДИТ 2 РАЗА В ГОД

Том 19, вып. 1

Январь–Июнь, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Байгонакова Г. А., Медных А. Д. О формуле Бретшнайдера для сферического четырехугольника	3
Байгонакова Г. А., Медных А. Д. О формуле Бретшнайдера для гиперболического четырехугольника	12
Бубякин И. В., Никитина Е. С. О строении одной пары пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве	20
Егоров И. Е., Ефимова Е. С. Оценка погрешности стационарного метода Галёркина для вырождающегося параболического уравнения	27
Лукина Г. А. Краевая задача с нелокальными условиями по временной переменной для ультрапараболических уравнений	34
Марков В. Г. Некоторые свойства незнакоопределенных операторов Штурма — Лиувилля	44
Матвеева И. И., Щеглова А. А. Оценки решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами	60
Николаев Н. Н. Исследование обратной задачи для уравнения третьего порядка	70

Попов Н. С. О разрешимости краевых задач для многомерных псевдопараболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида	82
Попов С. В., Синявский А. Г. Исследование итерированных параболических уравнений высокого порядка с меняющимся направлением времени	96
Прокопьев А. В. Разрешимость обратной задачи для эллиптико-параболического уравнения с интегральным условием переопределения	102
Пятков С. Г., Боричевская А. Г. Об определении функции источника в параболической задаче с данными Коши на части боковой поверхности цилиндра	110
Федоров Ф. М. Неоднородные гауссовы бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ)	124
Федоров Ф. М. Об алгоритме Гаусса для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ)	133
Черников П. В. Абсолютные ω -ретракты и неподвижные точки	141
Математическое моделирование	
Воеводин А. Ф., Гранкина Т. Б. Численное моделирование динамики роста ледяного покрова в пресных и солоноватых водах	147
Григорьев Ю. М., Харбанов М. В. Влияния величины депрессии и расположения горизонтальной скважины на добычу нефти в условиях конусообразования воды	159
Дубко В. А., Карачанская Е. В., Карачанский А. В. Ориентированные стохастические цепи. Модели и применение	171
Аннотации	184

О ФОРМУЛЕ БРЕТШНАЙДЕРА ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА^{*)}

Г. А. Байгонакова, А. Д. Медных

1. Введение

Классическая формула Герона выражает площадь евклидова треугольника через длины его сторон. Индийский математик и астроном Брахмагупта в семнадцатом веке получил аналогичную формулу для выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность. Немецкий математик Карл Бретшнайдер в 1842 г. нашел площадь произвольного евклидова четырехугольника через длины его сторон и сумму двух противоположных углов. Цель настоящей работы получить аналог теоремы Бретшнайдера в сферической геометрии.

Важность затронутой здесь тематики обосновывается следующими причинами. Одним из актуальных направлений современной геометрии является изучение множества состояний механических систем или, что то же самое, геометрических конфигураций. Это множество, как правило, зависит от конечного числа параметров и представляет из себя многообразие с особенностями, которое в настоящее время принято называть коническим многообразием или орбифолдом. Во многих случаях строение орбифолда описывается средствами элементарной евклидовой или неевклидовой геометрий, что и приводит к необходимости восстановления классических теорем указанного выше типа.

^{*)} Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 12-01-00210 и 10-01-00642) и Советом по грантам при президенте Российской Федерации (гранты МК-4447.2012.1 и НШ-921.2012.1).

Это же относится и к геометрии узлов, заложенной в работах Р. Райли и У. Терстона в последней четверти двадцатого века. Данное направление активно развивается новосибирской геометрической школой (см. [1–3]).

Все изложенные ниже факты могут быть использованы также и для вычисления объемов многогранников в пространствах постоянной кривизны (см., например [3–5]).

В следующем пункте приведем некоторые факты из книги [6], написанной в 1886 г. Эта замечательная книга наверняка недоступна большинству читателей. Поэтому для удобства изложим необходимые сведения из указанной монографии, сопроводив их ссылками на современную монографию [7].

2. Стереографическая проекция

Важная модель сферической плоскости получается с помощью *стереографической проекции*. Спроектируем единичную сферу $S^2 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$ в пространстве E^3 из ее южного полюса $\mathbf{O} = (-1, 0, 0)$ на плоскость $E^2 : x_0 = 0$. Если точка на сфере задается координатами $\mathbf{A} = (x_0, x_1, x_2)$, то ее проекция на плоскость имеет вид $\mathbf{a} = (y_1, y_2)$, где

$$y_1 = \frac{x_1}{x_0 + 1}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_0 + 1}. \quad (1)$$

Обозначим указанное проектирование через Φ , полагая $\Phi(\mathbf{A}) = \mathbf{a}$. Пользуясь формулами (1), можно найти метрику в E^2 , индуцированную с помощью Φ метрикой $ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2$ сферы S^2 . Для нее получится выражение [7, с. 40]

$$ds^2 = \frac{dy_1^2 + dy_2^2}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^2}. \quad (2)$$

Формула (2) показывает, что отображение Φ сохраняет углы между кривыми. Это же обстоятельство можно вывести и из того факта, что Φ является ограничением на S^2 инверсии пространства E^3 . Центр этой инверсии — точка \mathbf{O} , а неподвижное множество — сфера радиуса

$\sqrt{2}$ с центром в точке O [6, с. 162; 7, с. 42]. Отсюда, в частности, следует и другое важное свойство отображения Φ : оно переводит окружности на сфере S^2 в окружности или прямые на плоскости E^2 .

3. Стереографическая проекция сферического треугольника

Пусть ABC — сферический треугольник. Обозначим через A' и B' точки, диаметрально противоположные точкам A и B соответственно. Без ограничения общности можем считать, что $A' = O$, т. е. A является «северным полюсом» сферы S^2 . При этом отображение Φ проектирует стороны AB и AC в прямые ab и ac , и сторону BCB' — в дугу окружности $bc b'$. Проведем касательные bt , ct через точки b и c этой окружности. Поскольку Φ — конформное отображение, углы bac , tba и tca равны углам A, B, C соответственно (рис. 1). Проводя хорды bc и $b'c$ и пользуясь теоремой о том, что величина вписанного угла равна половине дуги, на которую он опирается, получим [6, с. 163]

$$A + B + C - \pi = 2tbc = 2bb'c. \quad (3)$$

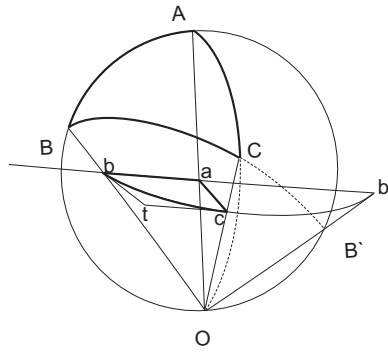


Рис. 1. Сферический треугольник.

Отсюда угол $bb'c$ равен половине сферического избытка треугольнике ABC . Заметим, что поскольку кривизна единичной сферы S^2

равна $+1$, то сферический избыток $A + B + C - \pi$ равен площади треугольника ABC .

Обозначим через a, b, c длины сторон сферического треугольника ABC и выразим через них длины сторон евклидовых треугольников abc и $ab'c$. Учитывая, что радиус сферы S^2 равен 1, имеем

$$ab = \operatorname{tg} AOB = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \quad (4)$$

и

$$ac = \operatorname{tg} AOC = \operatorname{tg} \frac{b}{2}. \quad (5)$$

Замечая, что треугольники BOC и bOc подобны, получим

$$bc = BC \cdot \frac{ob}{OC} = BC \frac{ob \cdot OB}{OB \cdot OC} = \frac{2BC}{OB \cdot OC'},$$

где $Ob \cdot OB = (\sqrt{2})^2 = 2$. Поэтому

$$bc = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}. \quad (6)$$

Пусть ac пересекает окружность bcb' в точке c' . Тогда проекция c' точки C' диаметрально противоположна точке C' . Так как угол BOB' прямой, имеем

$$ab' = \operatorname{tg} AOB' = \cot \frac{c}{2}, \quad (7)$$

и

$$ac' = \operatorname{tg} AOC' = \cot \frac{b}{2}. \quad (8)$$

Поэтому

$$bb' = ab + ab' = 2 \operatorname{cosec} c, \quad (9)$$

и

$$cc' = ac + ac' = 2 \operatorname{cosec} b, \quad (10)$$

а также

$$b'c = \frac{2B'C}{OB' \cdot OC} = \frac{\cos \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}. \quad (11)$$

Ясно, что если $ab'c$ — проекция треугольника $AB'C$, то abc' — проекция ABC' . Следовательно, равенства (7), (8) и (11) следуют из уравнений (4), (5) и (6). Другой способ их доказательства состоит в том, что из равенства $Oa = 1$ выводятся соотношения $ab \cdot ab' = 1$ и $ac \cdot ac' = 1$, а также $bb' = Ob \cdot Ob'$ и $cc' = Oc \cdot Oc'$.

4. Площадь сферического четырехугольника

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, стороны AB , BC , CD , DA соответствуют a, b, c, d . Проведем диагонали AC , BD и обозначим их длины через δ и δ' соответственно.

С помощью стереографической проекции спроектируем четырехугольник на плоскость. Возьмем точку A , диаметрально противоположную центру проекции O . Тогда проекция будет состоять из двух прямолинейных отрезков и двух дуг окружностей. Если проведем касательные bt и ct к дуге bc и касательные ct' , dt' к дуге cd , то в силу (3) получим равенство

$$S = A + B + C + D - 2\pi = 2tcd + 2t'cd = 2bc'd,$$

где s и s' точки пересечения окружности, в которые проектируются BC и CD . Из рассмотрения евклидова треугольника $bc'd$ имеем

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \sin^2 bc'd = \frac{(bd + bc' - dc')(bd + dc' - bc')}{4bc' \cdot dc'}.$$

Воспользуемся равенствами

$$bd = \frac{\sin \frac{\delta'}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{d}{2}}, \quad bc' = \frac{\cos \frac{b}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{\delta'}{2}}, \quad dc' = \frac{\cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{d}{2} \cos \frac{\delta}{2}}.$$

Отсюда площадь S сферического четырехугольника $ABCD$ определяется по формуле [6, с. 165]:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{S}{4} = & \frac{1}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \frac{d}{2}} \\ & \times \left(\sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{\delta'}{2} + \cos \frac{a}{2} \cos \frac{c}{2} - \cos \frac{b}{2} \cos \frac{d}{2} \right) \\ & \times \left(\sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{\delta'}{2} - \cos \frac{a}{2} \cos \frac{c}{2} + \cos \frac{b}{2} \cos \frac{d}{2} \right) \quad (12) \end{aligned}$$

Эта формула выражает площадь сферического четырехугольника через длины его сторон и диагоналей.

5. Теорема Бретшнайдера

Классическая теорема Бретшнайдера [8] утверждает, что площадь S евклидова четырехугольника со сторонами a, b, c, d и противолежащими углами A и C находится по формуле

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{A+C}{2},$$

где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ — полупериметр четырехугольника (см. доказательство в [9, с. 89]).

Отметим, что утверждение теоремы не изменится, если сумму $A+C$ заменить суммой другой пары противоположных углов $B+D$. Это следует из равенства $A+B+C+D = 2\pi$, справедливого для любого евклидова четырехугольника. Поскольку

$$\frac{A+C}{2} = \frac{A+C+2\pi-B-D}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{A-B+C-D}{4},$$

теорему Бретшнайдера можно переписать в следующем, более симметричном виде

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \sin^2 \frac{A-B+C-D}{4}.$$

Именно этот вариант допускает обобщение на случай неевклидова четырехугольника, сумма углов которого уже не равна 2π .

Заметим, что частным случаем приведенной выше формулы является формула Брахмагупты $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$, выражающая площадь вписанного четырехугольника (случай $A+C = B+D$). Ее можно рассматривать как естественное обобщение формулы Герона.

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 1. *Площадь S сферического четырехугольника со сторонами a, b, c, d , углами A, B, C, D и полупериметром $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ находится по формуле*

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{S}{4} = & \frac{\sin \frac{p-a}{2} \sin \frac{p-b}{2} \sin \frac{p-c}{2} \sin \frac{p-d}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \frac{d}{2}} \\ & - \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{d}{2} \sin^2 \frac{A-B+C-D}{4}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим стороны AB и AD сферического четырехугольника до пересечения их в точке A' , стороны CB и CD — до пересечения в точке C' . В результате получим сферический четырехугольник $C'BA'D$ с длинами сторон $\pi - b$, $\pi - a$, $\pi - d$, $\pi - c$ и углами C , $2\pi - B$, A , $2\pi - D$ (рис. 2).

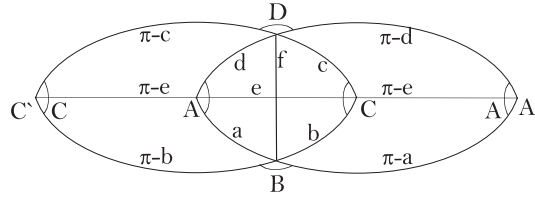


Рис. 2. Сферический четырехугольник.

Длины диагоналей $C'A'$ и $B'D$ этого четырехугольника равны соответственно $2\pi - e$ и f , где e и f — длины диагоналей четырехугольника $ABCD$. Обозначим площадь сферического четырехугольника $C'BA'D$ через S' . Имеем $S' = 2\pi - C - (2\pi - B) - A - (2\pi - D) = -(2\pi + A - B + C - D)$, откуда $\sin^2 \frac{S'}{4} = \cos^2 \frac{A - B + C - D}{4}$. С другой стороны, вычисляя $\sin^2 \frac{S'}{4}$ по формуле (9) и учитывая, что $\sin \frac{\pi - a}{2} = \cos \frac{a}{2}$, а $\sin \frac{2\pi - e}{2} \sin \frac{f}{2} = \sin \frac{e}{2} \sin \frac{f}{2}$, получим

$$\sin^2 \frac{S'}{4} = \frac{(\sin \frac{e}{2} \sin \frac{f}{2})^2 - (\sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} - \sin \frac{b}{2} \sin \frac{d}{2})^2}{4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \sin \frac{d}{2}}.$$

Отсюда

$$\cos^2 \frac{A - B + C - D}{4} = \frac{(\sin \frac{e}{2} \sin \frac{f}{2})^2 - (\sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} - \sin \frac{b}{2} \sin \frac{d}{2})^2}{4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \sin \frac{d}{2}}. \quad (13)$$

и

$$\sin^2 \frac{A - B + C - D}{4} = \frac{-(\sin \frac{e}{2} \sin \frac{f}{2})^2 + (\sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} + \sin \frac{b}{2} \sin \frac{d}{2})^2}{4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \sin \frac{d}{2}}.$$

В тоже время для площади S сферического четырехугольника $ABCD$ имеем

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{(\sin \frac{e}{2} \sin \frac{f}{2})^2 - (\cos \frac{a}{2} \cos \frac{c}{2} - \cos \frac{b}{2} \cos \frac{d}{2})^2}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \frac{d}{2}}. \quad (14)$$

Исключая произведение $(\sin e \sin f)^2$ из формулы (13) и подставляя его в формулу (14), получим

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{1}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \frac{d}{2}} \left(\sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} + \sin \frac{b}{2} \sin \frac{d}{2} \right)^2 - \left(\cos \frac{a}{2} \cos \frac{c}{2} - \cos \frac{b}{2} \cos \frac{d}{2} \right)^2 - 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \sin \frac{d}{2} \sin^2 \frac{K}{2},$$

где $K = \frac{A+B+C-D}{2}$. Поскольку

$$\begin{aligned} & \left(\sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} + \sin \frac{b}{2} \sin \frac{d}{2} \right)^2 - \left(\cos \frac{a}{2} \cos \frac{c}{2} - \cos \frac{b}{2} \cos \frac{d}{2} \right)^2 \\ &= 4 \sin \frac{p-a}{2} \sin \frac{p-b}{2} \sin \frac{p-c}{2} \sin \frac{p-d}{2}, \end{aligned}$$

теорема доказана.

Приведем несколько следствий доказанной теоремы.

Напомним, что сферический четырехугольник с углами A, B, C и D вписан в окружность тогда и только тогда, когда $A + B = C + D$ [10, с. 79], что в наших обозначениях равносильно условию $K = 0$. Это позволяет доказать следующий сферический аналог формулы Брахмагупты.

Следствие 1. *Площадь вписанного сферического четырехугольника со сторонами a, b, c, d находится по формуле [6, с. 164]*

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{p-a}{2} \operatorname{sh} \frac{p-b}{2} \operatorname{sh} \frac{p-c}{2} \operatorname{sh} \frac{p-d}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}},$$

где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Следствие 2. *Если сферический четырехугольник со сторонами a, b, c и d вписан в одну окружность и описан около другой, то его площадь находится по формуле*

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{d}{2}.$$

Доказательство. В случае описанного четырехугольника имеет место следующее соотношение на длины его сторон: $a + c = b + d$, тогда $p - a = c$, $p - b = d$, $p - c = a$, $p - d = b$ и результат вытекает из предыдущего следствия.

Следствие 3. *Сферический четырехугольник со сторонами a, b, c и d имеет максимальную площадь тогда и только тогда, когда он вписан в окружность [10, с. 81].*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 величина $\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4}$ достигает максимального значения тогда и только тогда, когда $K = 0$, что соответствует случаю вписанного четырехугольника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6, N 1. P. 9–24.
2. Mednykh A., Vesnin A. On the volume of hyperbolic Whitehead link cone-manifolds // SCIENTIA. Ser. A: Math. Sci. 2002. V. 8. P. 1–11.
3. Медных А. Д., Байгонакова Г. А. О формуле Милнора для объема гиперболического октаэдра // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 2. С. 3–9.
4. Абросимов Н. В., Годой-Молина М., Медных А. Д. Об объеме сферического октаэдра с симметриями // Современная математика и ее приложения. 2009. Т. 6. С. 211–218.
5. Медных А. Д., Байгонакова Г. А. О геометрических свойствах гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией // Вестник КемГУ 2011, Т. 47, № 3/2. С. 9–14.
6. McClelland W. J., Preston T. A treatise on spherical trigonometry with application to spherical geometry and numerous examples. P. II. London: Macmillan and Co. 1886.
7. Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С. Геометрия пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ. 1988. Т. 29. С. 1–146.
8. Bretschneider C. A. Untersuchung der trigonometrischen Relationen des geradlinigen Viereckes // Arch. Math. 1842. Bd 2. S. 225–261.
9. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 1. Планиметрия. М.: МЦНМО. 2004.
10. Lienhard W. Cyclic polygons in non-Euclidean geometry // Elem. math. 2011. V. 66, N 2. P. 74–82.

О ФОРМУЛЕ БРЕТШНАЙДЕРА
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА^{*)}

Г. А. Байгонакова, А. Д. Медных

1. Введение

Классическая формула Герона выражает площадь евклидова треугольника через длины его сторон. Формула Брахмагупты представляет из себя аналогичную формулу для выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность. Ее обобщение на случай гиперболического четырехугольника получено в работе второго автора [1]. В 1842 г. Карл Бретшнайдер нашел площадь произвольного евклидова четырехугольника через длины его сторон и сумму двух противоположных углов. Сферическая версия теоремы Бретшнайдера найдена в предыдущей работе авторов [2]. Цель настоящей работы — получить аналог указанной теоремы в гиперболической геометрии.

Авторы не исключают возможность, что основные результаты настоящей работы были известны более ста лет назад, но в настоящее время они недоступны для цитирования. В то же время, эти результаты необходимы для современных исследований механических систем или, что то же самое, геометрических конфигураций. Другое важное применение полученных результатов — это вычисление объемов многогранников в пространствах постоянной кривизны. И, наконец, еще

^{*)} Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 12-01-00210 и 10-01-00642) и Советом по грантам при президенте Российской Федерации (гранты МК-4447.2012.1 и НШ-921.2012.1).

одной важной областью их применения является геометрическая теория узлов (см., например, [3–5]).

2. Общие сведения из гиперболической геометрии

В качестве модели гиперболической плоскости рассмотрим единичный круг $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, снабженный метрикой Пуанкаре $ds = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$. Геодезическими (или неевклидовыми прямыми) в этом случае служат дуги окружностей или прямых, ортогональных единичной окружности (рис. 1). Пусть z и w — произвольные точки круга U , а 0 — его центр. Тогда неевклидовы расстояния между указанными точками находятся по следующим формулам [6, с. 122, 123]:

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\rho(z, w)}{2} = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}, \quad \operatorname{th} \frac{\rho(0, z)}{2} = |z|, \quad \operatorname{th} \frac{\rho(0, w)}{2} = |w|. \quad (1)$$

Подставляя две последние формулы в первую, после извлечения квадратного корня получим

$$|z - w| = \frac{\operatorname{sh} \frac{\rho(z, w)}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho(0, z)}{2} \operatorname{ch} \frac{\rho(0, w)}{2}}. \quad (2)$$

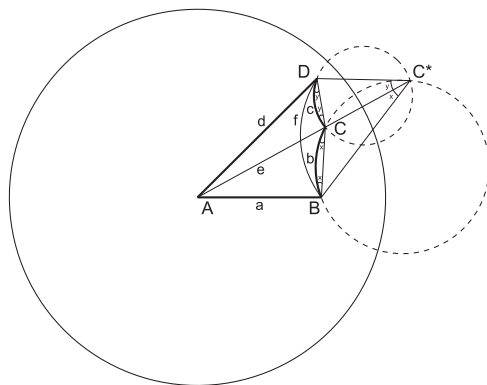


Рис. 1. Гиперболический четырехугольник.

Рассмотрим гиперболический четырехугольник $ABCD$, изображенный на рис. 1. Обозначим неевклидовы длины четырехугольника через a, b, c и d , а длины его диагоналей через e и f . Будем считать, что его вершина A находится в точке 0 . Евклидово расстояние $|A - B|$ между точками A и B будем традиционно обозначать через AB .

Пользуясь формулой (2), выразим длины сторон евклидова четырехугольника $ABCD$ через величины a, b, c, d, e и f . Имеем

$$AB = \operatorname{th} \frac{a}{2}, \quad BC = \frac{\operatorname{sh} \frac{b}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{e}{2}}, \quad CD = \frac{\operatorname{sh} \frac{c}{2}}{\operatorname{ch} \frac{e}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}}, \quad AD = \operatorname{th} \frac{d}{2}. \quad (3)$$

Пусть C^* — точка, симметричная C относительно единичной окружности. Для нахождения евклидовых расстояний BC^* и DC^* воспользуемся равенством $C^* = \frac{1}{C}$ и следующей формулой из неевклидовой геометрии [6, с. 123]:

$$\operatorname{th} \frac{\rho(z, w)}{2} = \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|. \quad (4)$$

В результате из (2) и (4) получим

$$\left| z - \frac{1}{\bar{w}} \right| = \frac{|z - w|}{|w| \operatorname{th} \frac{\rho(z, w)}{2}} = \frac{\operatorname{ch} \frac{\rho(z, w)}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho(0, z)}{2} \operatorname{sh} \frac{\rho(0, w)}{2}}. \quad (5)$$

Отсюда

$$BC^* = \frac{\operatorname{ch} \frac{b}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{e}{2}}, \quad DC^* = \frac{\operatorname{ch} \frac{c}{2}}{\operatorname{ch} \frac{d}{2} \operatorname{sh} \frac{e}{2}} \quad (6)$$

3. Теорема Бретшнайдера

Классическая теорема Бретшнайдера утверждает, что площадь S евклидова четырехугольника со сторонами a, b, c, d и противоположащими углами A и C находится по формуле

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{A + C}{2},$$

где $p = \frac{a + b + c + d}{2}$ — полупериметр четырехугольника (см. [2, с. 89]).

Отметим, что утверждение теоремы не изменится, если сумму $A + C$ заменить суммой другой пары противоположных углов $B + D$. Пользуясь равенством $A + B + C + D = 2\pi$, справедливым для любого евклидова четырехугольника, теорему Бретшнайдера можно переписать в следующем, более симметричном виде

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \sin^2 \frac{A - B + C - D}{4}.$$

Именно этот вариант допускает обобщение на случай гиперболического четырехугольника, сумма углов которого уже не равна 2π .

Важным частным случаем приведенной выше формулы является формула Брахмагупты $S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$, выражающая площадь вписанного четырехугольника (случай $A + C = B + D$). Ее можно рассматривать как естественное обобщение формулы Герона. Гиперболический аналог формулы Брахмагупты получен в работе [1].

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 1. *Площадь S гиперболического четырехугольника со сторонами a, b, c, d , углами A, B, C, D и полупериметром $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ находится по формуле*

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{p-a}{2} \operatorname{sh} \frac{p-b}{2} \operatorname{sh} \frac{p-c}{2} \operatorname{sh} \frac{p-d}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}} - \operatorname{th} \frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2} \operatorname{th} \frac{d}{2} \sin^2 \frac{K}{4},$$

где $K = A - B + C - D$.

Доказательство. Рассмотрим евклидов четырехугольник $ABCD$ и соединим его вершины B и D отрезками евклидовых прямых с вершиной C^* (см. рис. 1). Обозначим углы, образованные дугой \widehat{BC} и хордой \overline{BC} через x , а углы между дугой \widehat{CD} и хордой \overline{CD} — через y . Отметим, что угловая мера дуги \widehat{BC} равна $2x$, а дуги \widehat{CD} — $2y$. Учитывая, что величина вписанного в окружность угла равна половине длины дуги, на которую он опирается, получим, что углы $\angle BC^*C$ и $\angle CC^*D$ равны соответственно x и y . Обозначим через A, B, C и D внутренние углы гиперболического четырехугольника $ABCD$, через $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ и \widehat{D} —

внутренние углы соответствующего ему евклидова четырехугольника $ABCD$. Имеем равенства

$$\widehat{A} = A, \quad \widehat{B} = B + x, \quad \widehat{C} = C + x + y, \quad \widehat{D} = D + y. \quad (7)$$

Напомним, что в гиперболическом четырехугольнике всегда выполнено неравенство $A + B + C + D < 2\pi$, в то время как $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 2\pi$. Из (7) и последнего равенства получим уравнение $A + B + C + D + 2x + 2y = 2\pi$. Откуда

$$x + y = \frac{2\pi - A - B - C - D}{2} = \frac{S}{2}, \quad (8)$$

где S — площадь гиперболического четырехугольника $ABCD$. Найдем величину угла $x + y$ из рассмотрения евклидова треугольника BC^*D . Имеем

$$\sin^2 \frac{x + y}{2} = \sin^2 \frac{S}{4} = \frac{BD^2 - (BC^* - DC^*)^2}{4BC^* \cdot DC^*},$$

откуда, выражая евклидовы длины через неевклидовы по формулам (3) и (6), получим

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{(\operatorname{sh} \frac{e}{2} \operatorname{sh} \frac{f}{2})^2 - (\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} - \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2})^2}{4 \operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}}. \quad (9)$$

Эта формула выражает площадь гиперболического четырехугольника через длины его сторон и диагоналей. Найдем аналогичное выражение для $\sin^2 \frac{K}{4}$, где $K = A - B + C - D$. Для этого воспользуемся соотношением Бретшнейдера для евклидова четырехугольника $ABCD$ (см. [7, с. 85]):

$$(AC \cdot BD)^2 = (AB \cdot CD)^2 + (BC \cdot AD)^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot AD \cdot \cos(\widehat{A} + \widehat{C}).$$

Поскольку

$$\widehat{A} + \widehat{C} = A + C + x + y = \pi + \frac{A - B + C - D}{2},$$

имеем

$$\cos(\widehat{A} + \widehat{C}) = -\cos \frac{A - B + C - D}{2} = -\cos \frac{K}{2}.$$

Это дает

$$\cos \frac{K}{2} = \frac{(AC \cdot BD)^2 - (AB \cdot CD)^2 - (BC \cdot AD)^2}{2AB \cdot BC \cdot CD \cdot AD},$$

откуда

$$\sin^2 \frac{K}{4} = \frac{(AB \cdot CD + BC \cdot AD)^2 - (AC \cdot BD)^2}{4AB \cdot BC \cdot CD \cdot AD}.$$

Как и выше, переходя по формулам (3) и (6) от евклидовых длин к неевклидовым, имеем

$$\sin^2 \frac{K}{4} = \frac{(\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{c}{2} + \operatorname{sh} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{d}{2})^2 - (\operatorname{sh} \frac{e}{2} \operatorname{sh} \frac{f}{2})^2}{4 \operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{c}{2} \operatorname{sh} \frac{d}{2}}. \quad (10)$$

Исключая из формул (9) и (10) величину $(\operatorname{sh} \frac{e}{2} \operatorname{sh} \frac{f}{2})^2$ и пользуясь формулами приведения, окончательно получим

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{p-a}{2} \operatorname{sh} \frac{p-b}{2} \operatorname{sh} \frac{p-c}{2} \operatorname{sh} \frac{p-d}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}} - \operatorname{th} \frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2} \operatorname{th} \frac{d}{2} \sin^2 \frac{K}{4}.$$

Приведем несколько следствий из доказанной теоремы. Напомним, что гиперболический четырехугольник с углами A, B, C и D является вписанным в окружность, орицикл или в одну ветвь эквидистанты тогда и только тогда, когда $A+B = C+D$ [8, 9]. В наших обозначениях это равносильно условию $K = 0$.

Это позволяет доказать следующий гиперболический аналог формулы Брахмагупты (см. также [1]).

Следствие 1. *Площадь S вписанного гиперболического четырехугольника со сторонами a, b, c, d находится по формуле*

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{p-a}{2} \operatorname{sh} \frac{p-b}{2} \operatorname{sh} \frac{p-c}{2} \operatorname{sh} \frac{p-d}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}},$$

где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Еще одно следствие выражает площадь описанного четырехугольника через стороны и сумму противоположных углов.

Следствие 2. Площадь S описанного гиперболического четырехугольника со сторонами a, b, c, d и углами A, B, C, D находится по формуле

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \operatorname{th} \frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2} \operatorname{th} \frac{d}{2} \cos^2 \frac{A - B + C - D}{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае описанного четырехугольника имеют место следующие соотношения на длины его сторон: $a + c = b + d$, тогда $p - a = c$, $p - b = d$, $p - c = a$, $p - d = b$. Учитывая, что $1 - \sin^2 \frac{K}{4} = \cos^2 \frac{K}{4}$, по теореме 1 получим

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{S}{4} &= \operatorname{th} \frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2} \operatorname{th} \frac{d}{2} - \operatorname{th} \frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2} \operatorname{th} \frac{d}{2} \sin^2 \frac{K}{4} \\ &= \operatorname{th} \frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2} \operatorname{th} \frac{d}{2} \cos^2 \frac{K}{4}. \end{aligned}$$

Следствие 3. Если гиперболический четырехугольник со сторонами a, b, c и d вписан в одну окружность и описан около другой, то его площадь находится по формуле

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \operatorname{th} \frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2} \operatorname{th} \frac{d}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для вписанного четырехугольника справедливо равенство $K = A - B + C - D = 0$, результат следует из предыдущего утверждения.

Следующий результат хорошо известен [9–11]. Однако в цитируемых работах он доказывается либо через изопериметрические неравенства, либо с помощью исследования на экстремум функций нескольких переменных. Ниже мы приводим элементарное доказательство.

Следствие 4. Гиперболический четырехугольник со сторонами a, b, c и d имеет максимальную площадь тогда и только тогда, когда он вписан в окружность, орицикл или одну ветвь эквидистанты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 величина $\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4}$ достигает максимального значения тогда и только тогда, когда $K = 0$, что соответствует случаю вписанного четырехугольника.

Аналогично устанавливается и следующее утверждение.

Следствие 5. *Описанный гиперболический четырехугольник имеет максимальную площадь тогда и только тогда, когда он вписан в окружность, орицикл или одну ветвь эквидистанты.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mednykh A. D.* Brahmagupta formula for cyclic quadrilaterals in the hyperbolic plane // *Sib. Electron. Math. Reports*. 2012.
2. *Байгонакова Г. А., Медных А. Д.* О формуле Бретшнайдера для сферического четырехугольника // *Мат. заметки ЯГУ*. 2012, Т. 19, № 1, С. 3–11.
3. *Абросимов Н. В., Годой-Молина М., Медных А. Д.* Об объеме сферического октаэдра с симметриями // *Современная математика и ее приложения*. 2009. Т. 6. С. 211–218.
4. *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны // *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*. М.: ВИНТИ. 1988, Т. 29. С. 1–146.
5. *Milnor J.* Hyperbolic geometry: the first 150 years // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1982. V. 6, N 1. P. 9–24.
6. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. М.: Наука. 1986.
7. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. Т. 1. Планиметрия. М.: МЦНМО. 2004.
8. *Valentine J. E.* An analogue of Ptolemy's theorem in spherical geometry // *Amer. Math. Monthly*. 1970. V. 77, N 1. P. 47–51.
9. *Bezdek K.* Ein elementarer Beweis für die isoperimetrische Ungleichung in der euklidischen und hyperbolischen Ebene // *Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Math.* 1984. V. 27. P. 107–112.
10. *Walter R.* Polygons in hyperbolic geometry 2: Maximality of area // *arXiv:1008.3821v1[math.MG]*.
11. *Lienhard W.* Cyclic polygons in non-Euclidean geometry // *Elem. math*. 2011. V. 66, N 2. P. 74–82.

О СТРОЕНИИ ОДНОЙ ПАРЫ ПЯТИМЕРНЫХ
КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ
В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. В. Бубякин, Е. С. Никитина

Рассмотрим в проективном пространстве P^5 пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей — пятимерный комплекс K^5 . Комплексу K^5 при грассмановом [1] отображении μ соответствует пятимерное многообразие V^5 , принадлежащее алгебраическому многообразию $\Omega(2, 5)$. Многообразие V^5 в каждой своей точке l имеет пятимерную касательную плоскость $T_l V^5$. Проективизация плоскости $T_l V^5$ с центром в точке l представляет собой четырехмерную плоскость $PT_l V^5$. Различным видам взаимного расположения плоскости $PT_l V^5$ и многообразия Сегре $S_l(2, 2)$ [2] соответствуют различные классы комплексов K^5 . Многообразие Сегре $S_l(2, 2)$ представляет собой четырехмерную алгебраическую поверхность шестого порядка, несущую два двухпараметрических семейства двумерных плоских образующих. При этом две образующие, принадлежащие различным семействам, имеют общую точку, а две образующие, принадлежащие одному семейству, не пересекаются. Поскольку многообразие Сегре $S_l(2, 2)$ является алгебраической поверхностью шестого порядка, в общем случае плоскость $PT_l V^5$ пересекает это многообразие в шести точках. Эти точки определяют на многообразии V^5 шесть полей направлений, интегральным кривым которых на комплексе K^5 соответствует шесть семейств торсов [2], образованных двумерными соприкасающимися плоскостями к некоторой кривой. При этом через каждую образующую комплекса K^5 проходит шесть торсов, по одному из каждого семейства. Каждый

торс комплекса определяет в двумерной образующей L комплекса K^5 характеристическую прямую и трехмерную характеристическую плоскость, проходящую через плоскость L .

Пусть ω_i^p ($i = 0, 1, 2$; $p = 3, 4, 5$) — линейные дифференциальные формы, определяющие перемещение плоскости $L = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$ в пространстве P^5 . Тогда поскольку размерность рассматриваемого комплекса K^5 равна пяти, на нем будут выполняться четыре независимых уравнения:

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \quad (1)$$

где $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Эти же уравнения определяют четырехмерную плоскость $PT_i V^5$ в пространстве $P^8 = PT_i \Omega(2, 5)$.

Однопараметрическое семейство двумерных плоскостей L представляет собой трехмерную поверхность с двумерными плоскими образующими. Эта поверхность является торсом, если она тангенциально вырожденная ранга один. Торсу на многообразии $\Omega(2, 5)$ соответствует кривая, касательные к которой служат прямолинейными образующими этой поверхности. Данная кривая совпадает с асимптотической линией многообразия $\Omega(2, 5)$. Поэтому в произвольной точке этой линии выполняется равенство

$$\text{rang}(\omega_i^p) = 1. \quad (2)$$

Следовательно, дифференциальные уравнения торсов в пространстве P^5 можно записать в виде

$$\omega_i^p = a_i x^p dt. \quad (3)$$

Каждый торс, проходящий через плоскость L , определяет на ней характеристическую прямую пересечения двух бесконечно близких образующих и трехмерную характеристическую плоскость, касательную к торсу.

Рассмотрим пару пятимерных комплексов C_1^5 и C_2^5 , для каждой образующей которых четырехмерные плоскости $PT_{l_1} V^5$ и $PT_{l_2} V^5$ пересекают многообразия Сегре $S_{l_1}(2, 2)$ и $S_{l_2}(2, 2)$ по двум двумерным

образующим различных семейств [3]. Обозначим такую пару комплексов через C . Выберем репер так, чтобы вершины A_0, A_1, A_2 принадлежали образующей L_1^2 комплекса C_1^5 , а вершины A_4, A_5, A_6 лежали в образующей L_2^2 комплекса C_2^5 . Тогда уравнения такой пары комплексов можно привести к виду

$$\omega_k^r = 0, \quad \omega_r^k = 0, \quad (4)$$

где $k = 1, 2$; $r = 3, 4$ и формы $\omega_0^r, \omega_k^5, \omega_0^5$ служат однородными координатами точки плоскости $PT_{l_1}V^5$, а формы $\omega_r^0, \omega_5^k, \omega_5^0$ — однородными координатами точки плоскости $PT_{l_2}V^5$. Отсюда следует, что двумерные α - и β -образующие [1] многообразий Сегре $S_{l_1}(2, 2)$ и $S_{l_2}(2, 2)$ соответственно в плоскостях $PT_{l_1}V^5$ и $PT_{l_2}V^5$ определяются уравнениями

$$\omega_k^5 = 0, \quad \omega_0^r = 0 \quad (5)$$

и

$$\omega_5^k = 0, \quad \omega_r^0 = 0. \quad (6)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (4), получим

$$\omega_k^0 \wedge \omega_0^r + \omega_k^5 \wedge \omega_5^r = 0, \quad (7)$$

$$\omega_r^0 \wedge \omega_0^k + \omega_r^5 \wedge \omega_5^k = 0, \quad (8)$$

откуда непосредственно получаем

$$\omega_k^0 = \alpha \omega_k^5, \quad \omega_5^r = -\alpha \omega_0^r, \quad (9)$$

$$\omega_0^k = \beta \omega_5^k, \quad \omega_r^5 = -\beta \omega_r^0, \quad (10)$$

Продолжая эти уравнения, будем иметь

$$(d\alpha + \omega_5^0 + \alpha(\omega_0^0 - \omega_5^5) - \alpha^2 \omega_0^5) \wedge \omega_k^5 = 0, \quad (11)$$

$$(d\alpha + \omega_5^0 + \alpha(\omega_0^0 - \omega_5^5) - \alpha^2 \omega_0^5) \wedge \omega_0^r = 0, \quad (12)$$

и

$$(d\beta + \omega_0^5 + \beta(\omega_5^5 - \omega_0^0) - \beta^2 \omega_5^0) \wedge \omega_5^k = 0, \quad (13)$$

$$(d\beta + \omega_0^5 + \beta(\omega_5^5 - \omega_0^0) - \beta^2\omega_5^0) \wedge \omega_r^0 = 0, \quad (14)$$

Поскольку формы ω_0^r и ω_k^5 линейно независимы на комплексе C_1^5 , а формы ω_r^0 и ω_5^k линейно независимы на комплексе C_2^5 , то соответственно из (11) и (12) следует, что на паре C комплексов C_1^5 и C_2^5 выполняются равенства

$$d\alpha + \omega_5^0 + \alpha(\omega_0^0 - \omega_5^5) - \alpha^2\omega_0^5 = 0, \quad (15)$$

$$d\beta + \omega_0^5 + \beta(\omega_5^5 - \omega_0^0) - \beta^2\omega_5^0 = 0. \quad (16)$$

Уравнения (9), (10) показывают, что для пары C инвариантные трехмерные плоскости $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_5$ и $A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \wedge A_0$ соответственно на комплексах C_1^5 и C_2^5 описывают конгруэнции Q_1 и Q_2 с базисными формами ω_0^3, ω_0^4 и ω_5^1, ω_5^2 , а инвариантные прямые $A_1 \wedge A_2$ и $A_3 \wedge A_4$ соответственно на комплексах C_1^5 и C_2^5 описывают псевдоконгруэнции PQ_1 и PQ_2 , на которых базисными являются формы ω_1^5, ω_2^5 и ω_3^0, ω_4^0 . Конгруэнции Q_1 и Q_2 пересекаются по конгруэнции Q , образующей которой служит прямая $A_0 \wedge A_5$, а базисными являются формы $\omega_0^3, \omega_0^4, \omega_5^1, \omega_5^2$. Линейная оболочка прямолинейных образующих псевдоконгруэнций PQ_1 и PQ_2 представляет собой трехмерную плоскость $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$, которая описывает псевдоконгруэнцию PQ , на которой базисными будут формы $\omega_1^5, \omega_2^5, \omega_3^0, \omega_4^0$. При этом конгруэнция Q такого типа, что на ее образующей имеется два двойных фокуса, описывающих трехмерные фокусные поверхности, касательные трехмерные плоскости которых совпадают с трехмерными плоскостями $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_5$ и $A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \wedge A_0$, пересекающимися по прямой $A_0 \wedge A_5$. Псевдоконгруэнция PQ такова, что через каждую ее трехмерную образующую проходит две двойных фокусных гиперплоскости, характеристическими образами которых являются прямые $A_1 \wedge A_2$ и $A_3 \wedge A_4$, линейная оболочка которых определяет трехмерную плоскость $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$.

На основе грассманова отображения найдем изображение конгруэнции Q на алгебраическом многообразии $\Omega(1, 5) \subset P^{14}$ и псевдоконгруэнции PQ на алгебраическом многообразии $\Omega(3, 5) \subset P^{14}$. Для

конгруэнции Q , определяемой уравнениями (9), пересечение плоскости $PT_{l^1}V^4$ и многообразия Сегре $S_{l^1}(1, 3)$ определяется условием

$$\text{rang} \begin{pmatrix} -\beta\omega_5^k & \omega_0^r \\ \omega_5^k & -\alpha\omega_0^r \end{pmatrix} = 1.$$

Отсюда в общем случае, т. е. если $\alpha\beta - 1 \neq 0$, получаем, что плоскость $PT_{l^1}V^4$ пересекает многообразие Сегре $S_{l^1}(1, 3)$ по двум скрещивающимся прямолинейным образующим:

$$\omega_5^k = 0 \quad \text{и} \quad \omega_0^r = 0.$$

Для псевдоконгруэнции PQ , определяемой уравнениями (10), пересечение плоскости $PT_{l^3}V^4$ и многообразия Сегре $S_{l^3}(3, 1)$ определяется условием:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \alpha\omega_k^5 & \omega_k^5 \\ \omega_r^0 & \beta\omega_r^0 \end{pmatrix} = 1.$$

Отсюда в общем случае, т. е. если $\alpha\beta - 1 \neq 0$, следует, что плоскость $PT_{l^3}V^4$ пересекает многообразие Сегре $S_{l^3}(3, 1)$ по двум скрещивающимся прямолинейным образующим:

$$\omega_k^5 = 0 \quad \text{и} \quad \omega_r^0 = 0.$$

Итак, пара C пятимерных комплексов C_1^5 и C_2^5 , соответственно двумерных плоскостей $L_1 = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$ и $L_2 = A_3 \wedge A_4 \wedge A_5$, определяет такую пару конгруэнции Q и псевдоконгруэнции PQ , для которых плоскости $PT_{l^1}V^4$ и $PT_{l^3}V^4$ пересекают соответственно многообразия Сегре $S_{l^1}(1, 3)$ и $S_{l^3}(3, 1)$ по двум скрещивающимся прямым.

Таким образом, пара C пятимерных комплексов C_1^5 и C_2^5 соответственно двумерных плоскостей $L_1 = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$ и $L_2 = A_3 \wedge A_4 \wedge A_5$ представляет собой пару комплексов, каждая двумерная образующая которой пересекает прямую L_1 конгруэнции Q в точке, отличной от фокуса, а трехмерную плоскость L^3 псевдоконгруэнции PQ по прямой, отличной от ее характеристической прямой. При этом прямая L_1 и трехмерная плоскость L^3 таковы, что они не пересекаются, а их

линейная оболочка определяет пятимерное проективное пространство P^5 .

Докажем обратное утверждение. Выберем репер так, чтобы точки $\alpha A_0 + A_5$, $A_0 + \beta A_5$ были помещены в фокусы конгруэнции Q , а трехмерные плоскости $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_5$ и $A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \wedge A_0$ совместились с касательными трехмерными плоскостями соответствующих фокусных поверхностей. В этом случае уравнения конгруэнции Q примут вид

$$\omega_5^3 + \alpha\omega_0^3 = 0, \quad \omega_5^4 + \alpha\omega_0^4 = 0, \quad \omega_0^1 + \beta\omega_5^1 = 0, \quad \omega_0^2 + \beta\omega_5^2 = 0, \quad (17)$$

а формы $\omega_0^3, \omega_0^4, \omega_5^1, \omega_5^2$ можно выбрать в качестве базисных на конгруэнции Q . Далее специализируем репер так, чтобы гиперплоскости

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 + \alpha A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$$

и

$$\beta A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 + A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$$

являлись фокусными гиперплоскостями псевдоконгруэнции PQ , а прямые $A_1 \wedge A_2$ и $A_3 \wedge A_4$ совпадали соответственно с их характеристическими прямыми. Тогда уравнения псевдоконгруэнции PQ запишутся так:

$$\omega_1^0 - \alpha\omega_1^5 = 0, \quad \omega_2^0 - \alpha\omega_2^5 = 0, \quad \omega_3^5 - \beta\omega_3^0 = 0, \quad \omega_4^5 - \beta\omega_4^0 = 0, \quad (18)$$

где формы $\omega_1^5, \omega_2^5, \omega_3^0, \omega_4^0$ можно принять в качестве базисных на псевдоконгруэнции PQ .

Дифференцируя внешним образом (17) и (18), получим

$$(d\alpha + \omega_5^0 + \alpha(\omega_0^0 - \omega_5^5) - \alpha^2\omega_0^5) \wedge \omega_0^r + (\alpha\beta - 1)\omega_k^r \wedge \omega_5^k = 0,$$

$$(\alpha\beta - 1)\omega_r^k \wedge \omega_0^r + (d\beta + \omega_0^5 + \beta(\omega_5^5 - \omega_0^0) - \beta^2\omega_5^0) \wedge \omega_5^k = 0,$$

$$(d\alpha + \omega_5^0 + \alpha(\omega_0^0 - \omega_5^5) - \alpha^2\omega_0^5) \wedge \omega_k^5 + (1 - \alpha\beta)\omega_k^r \wedge \omega_r^0 = 0,$$

$$(1 - \alpha\beta)\omega_r^k \wedge \omega_k^5 + (d\beta + \omega_0^5 + \beta(\omega_5^5 - \omega_0^0) - \beta^2\omega_5^0) \wedge \omega_r^0 = 0.$$

Ввиду того, что на комплексах C_1^5 и C_2^5 системы форм $\omega_0^3, \omega_0^4, \omega_1^5, \omega_2^5$ и $\omega_5^1, \omega_5^2, \omega_3^0, \omega_4^0$ линейно независимы, из полученных квадратичных

соотношений в общем случае, т. е. если $\alpha\beta - 1 \neq 0$, получим, что на паре комплексов C_1^5 и C_2^5 выполняются уравнения (9), (10) и (15), (16). Эти уравнения определяют пару C комплексов C_1^5 и C_2^5 .

Таким образом, строение пары C пятимерных комплексов двумерных плоскостей можно описать так.

Теорема 1. *Пара пятимерных комплексов двумерных плоскостей является парой C тогда и только тогда, когда каждая ее двумерная образующая пересекает прямую L^1 конгруэнции Q в точке и трехмерную плоскость L^3 псевдоконгруэнции PQ по прямой. При этом точка пересечения с образующей L^1 конгруэнции Q отлична от фокуса, а прямая пересечения с трехмерной образующей L^3 псевдоконгруэнции PQ не совпадает с характеристической прямой.*

Изображение пары C пятимерных комплексов двумерных плоскостей при грасмановом отображении определяется следующим образом.

Теорема 2. *Пара пятимерных комплексов двумерных плоскостей является парой C тогда и только тогда, когда для пары конгруэнции Q и псевдоконгруэнции PQ плоскости PT_1V^4 и PT_3V^4 пересекают соответственно многообразия Сегре $S_1(1, 3)$ и $S_3(3, 1)$ по двум скрещивающимся прямым.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Аквис М. А. К дифференциальной геометрии грасманова многообразия // Tensor. 1982. V. 38. P. 273–282.
2. Akivis M. A., Goldberg V. V. Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam: North-Holland, 1993.
3. Hartshorne R. Algebraic geometry. Berlin: Springer-Verl., 1977.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ
СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА
ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ*)

И. Е. Егоров, Е. С. Ефимова

Параболическим уравнениям с меняющимся направлением времени посвящена обширная литература [1–8]. Метод Галёркина для нестационарных уравнений изучался во многих работах [9], в частности, установлены оценки погрешности метода Галёркина для нестационарных уравнений [10].

Данная работа является продолжением статьи авторов [7]. Для приближенных решений, построенных в [7], установлена оценка погрешности стационарного метода Галёркина для одного вырождающегося параболического уравнения второго порядка.

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с гладкой границей S , $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ для $0 \leq t \leq T$, $S_T = S \times (0, T)$. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим уравнение параболического типа

$$Lu \equiv k(x, t)u_t - \Delta u + c(x, t)u = f(x, t). \quad (1)$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие в \overline{Q} , и введем множества

$$S_0^\pm = \{(x, 0) : k(x, 0) \geq 0, x \in \Omega\}, \quad S_T^\pm = \{(x, T) : k(x, T) \geq 0, x \in \Omega\}.$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (код проекта № 02.740.11.0609).

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{\overline{S}_0^+} = 0, \quad u|_{\overline{S}_T^-} = 0. \quad (2)$$

В работе [7] доказана

Теорема 1. Пусть

$$c - \frac{1}{2}k_t \geq 0, \quad c + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad f \in W_2^{0,1}(Q)$$

и имеет место один из следующих случаев:

$$k(x, 0) \geq 0, \quad k(x, T) \leq 0, \quad f(x, 0) = 0, \quad f(x, T) = 0$$

$$\text{или } k(x, 0) \geq 0, \quad k(x, T) \geq 0, \quad f(x, 0) = 0,$$

$$\text{или } k(x, 0) \leq 0, \quad k(x, T) \geq 0,$$

$$\text{или } k(x, 0) \leq 0, \quad k(x, T) \leq 0, \quad f(x, T) = 0.$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $u(x, t)$ из $W_2^{2,1}(Q)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{2,1} \leq C_1(\|f\| + \|f_t\|), \quad C_1 > 0.$$

Заметим, что решение $u(x, t)$ краевой задачи (1), (2), гарантированное теоремой 1, удовлетворяет условию $u_t \in \overset{\circ}{W}_2^{1,0}(Q)$ [7].

С помощью теоремы 1 ниже докажем теорему о повышении гладкости, которая позволяет получить оценку погрешности стационарного метода Галёркина. Для этого рассмотрим вспомогательную краевую задачу:

$$\tilde{L}v \equiv kv_t - \Delta v + (c + k_t)v = g(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (3)$$

$$v|_{S_T} = 0, \quad v|_{\overline{S}_0^+} = 0, \quad v|_{\overline{S}_T^-} = 0. \quad (4)$$

Через $\widehat{W}_2^{1,1}(Q)$ обозначим подпространство $W_2^{1,1}(Q)$, выделенное краевыми условиями

$$\eta|_{S_T} = 0, \quad \eta|_{\overline{S}_0^-} = 0, \quad \eta|_{\overline{S}_T^+} = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $v(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}_2^{1,0}(Q)$ называется *обобщенным решением краевой задачи* (3), (4), если выполнено тождество

$$\int_Q \left[-kv\eta_t + \sum_{i=1}^n v_{x_i} \eta_{x_i} + cv\eta \right] dQ = (g, \eta) \quad \forall \eta \in \widehat{W}_2^{1,1}(Q),$$

где $g(x, t) \in L_2(Q)$.

Теорема 2. Пусть $c(x, t) \geq c_0 > 0$, $(x, t) \in \overline{Q}$, и имеет место один из следующих случаев: $k(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in \overline{Q}$, или $k(x, t) \leq 0$, $(x, t) \in \overline{Q}$.

Тогда краевая задача (3), (4) может иметь не более одного обобщенного решения из $\overset{\circ}{W}_2^{1,0}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $k(x, t) \geq 0$. В интегральном тождестве из определения 1 положим $g \equiv 0$ и

$$\eta(x, t) = \int_t^T e^{-2\lambda\tau} v(x, \tau) d\tau \in \widehat{W}_2^{1,1}(Q).$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} 0 = \int_Q & \left[ke^{-2\lambda t} v^2 + \lambda e^{2\lambda t} \sum_{i=1}^n \left(\int_t^T e^{-2\lambda\tau} v_{x_i} d\tau \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\lambda c + \frac{1}{2} c_t \right) e^{2\lambda t} \left(\int_t^T e^{-2\lambda\tau} v d\tau \right)^2 \right] dQ \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_0^T e^{-2\lambda\tau} v_{x_i} d\tau \right)^2 + c \left(\int_0^T e^{-2\lambda\tau} v d\tau \right)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Отсюда, выбирая положительное λ так, что $\lambda c + \frac{1}{2} c_t \geq \delta_0 > 0$, получим

$\int_t^T e^{-2\lambda\tau} v d\tau = 0$ в Q . Тем самым $v(x, t) = 0$ для почти всех $(x, t) \in Q$.

Случай $k(x, t) \leq 0$ рассматривается аналогично, если положить

$$\eta(x, t) = \int_0^t e^{2\lambda\tau} v d\tau \in \widehat{W}_2^{1,1}(Q)$$

и выбрать $\lambda > 0$ такое, что $\lambda c - \frac{1}{2}c_t \geq \delta_1 > 0$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия $f \in W_2^{0,2}(Q)$,

$$c \geq c_0 > 0, \quad c - \frac{1}{2}k_t \geq 0, \quad c + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad c + \frac{3}{2}k_t \geq \delta > 0$$

и имеет место один из следующих случаев:

$$k(x, t) \geq 0, \quad k(x, 0) > 0, \quad k(x, T) > 0, \quad f|_{t=0} = f_t|_{t=0} = 0$$

$$\text{или } k(x, t) \leq 0, \quad k(x, 0) < 0, \quad k(x, T) < 0, \quad f|_{t=T} = f_t|_{t=T} = 0.$$

Тогда для решения $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$ краевой задачи (1), (2) имеет место

$$u_t \in W_2^{2,1}(Q), \quad u_{tt} \in \overset{\circ}{W}_2^{1,0}(Q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай

$$k(x, t) \geq 0, \quad k(x, 0) > 0, \quad k(x, T) > 0.$$

В силу теоремы 1 краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$. В уравнении (3) положим $g(x, t) = f_t(x, t) - c_t u(x, t)$. Тогда функция $u_t(x, t)$ является обобщенным решением краевой задачи (3), (4).

Заметим, что краевая задача (3), (4) удовлетворяет всем условиям теоремы 1, следовательно, она имеет единственное решение $v \in W_2^{2,1}(Q)$. В силу теоремы 2 получаем, что $u_t = v$, т. е.

$$u_t \in W_2^{2,1}(Q), \quad u_{tt} \in \overset{\circ}{W}_2^{1,0}(Q).$$

Второй случай рассматривается аналогично. Теорема 3 доказана.

В дальнейшем будем считать, что выполнены все условия теоремы 3. Следуя [7], при $k(x, t) \geq 0$, $k(x, 0) > 0$, $k(x, T) > 0$ в качестве базисных берем функции $\varphi_k(x, t)$, которые являются решением спектральной задачи

$$-\varphi_{ktt} - \Delta\varphi_k = \lambda\varphi_k, \quad (x, t) \in Q, \quad (5)$$

$$\varphi_k|_{S_T} = 0, \quad \varphi_k|_{t=0} = 0, \quad \varphi_{kt}|_{t=T} = 0. \quad (6)$$

При этом функции $\varphi_k(x, t)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$, а соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ и $\lambda_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Во втором случае краевые условия (6) имеют вид

$$\varphi_k|_{S_T} = 0, \quad \varphi_{kt}|_{t=0} = 0, \quad \varphi_k|_{t=T} = 0.$$

Приближенные решения $u^N(x, t)$ краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N \varphi_k(x, t),$$

в котором c_k^N определяются системой линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \quad l = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теоремы 3. Тогда справедлива оценка

$$\|u - u^N\|_{1,0} \leq C_2(\|f\| + \|f_t\| + \|f_{tt}\|)\lambda_{N+1}^{-1/2}, \quad C_2 > 0, \quad (8)$$

где $u(x, t)$ — точное решение краевой задачи (1), (2).

Доказательство. Сначала рассмотрим случай

$$k(x, t) \geq 0, \quad k(x, 0) > 0, \quad k(x, T) > 0.$$

Пусть $u(x, t)$ — точное решение краевой задачи (1), (2), гарантированное теоремой 3. Заметим, что функция $u(x, t)$ представима в виде ряда Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x, t),$$

который сильно сходится в $W_2^1(Q)$ и $L_2(Q)$. При этом $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k \varphi_k$ сильно сходится в $L_2(Q)$ и имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 = \|u_{tt} + \Delta u\|^2 < \infty. \quad (9)$$

В силу равенства (9) и теорем 1, 3 верна оценка

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \lambda_l^2 \leq C_3 [\|f\|^2 + \|f_t\|^2 + \|f_{tt}\|^2], \quad C_3 > 0. \quad (10)$$

С другой стороны, для функции $u(x, t)$ справедливы соотношения

$$(Lu, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \quad l = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Пусть H_N — линейная оболочка элементов $\varphi_1, \dots, \varphi_N$, а P_N — проектор в $L_2(Q)$ на H_N . В силу (7), (11) имеем

$$(Lu^N, \eta) = (f, \eta), \quad (Lu, \eta) = (f, \eta) \quad \forall \eta \in H_N.$$

Отсюда при $\eta = v - u^N$, $v \in H_N$ получаем

$$(L(u - u^N), v - u^N) = 0,$$

или

$$(L(u - u^N), u - u^N) = (L(u - u^N), u - v). \quad (12)$$

В силу леммы 1 в [7] из (12) следует, что

$$\|u - u^N\|_{1,0}^2 \leq C_4 (\|f\| + \|f_t\|) \|u - v\|, \quad C_4 > 0, \quad (13)$$

для всех $v \in H_N$. Справедливо неравенство

$$\|u - P_N u\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \leq \lambda_{N+1}^{-2} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2. \quad (14)$$

Полагая в неравенстве (13) $v = P_N u$ и учитывая (10) и (14), получаем оценку погрешности стационарного метода Галёркина (8). Второй случай рассматривается аналогично. Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что теорема 4 справедлива, если в уравнении (1) оператор Лапласа заменить линейным эллиптическим оператором второго порядка более общего вида [9]. При этом коэффициент $c > 0$ необходимо выбрать достаточно большим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллипτικο-параболических уравнений // Математика. 1963. Т. 7. № 6. С. 99–121.
2. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1971. С. 7–252. (Итоги науки).
3. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
4. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
5. Егоров И. Е., Степанова П. И. О методе Галёркина для эллипτικο-параболических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, вып. 2. С. 19–26.
6. Егоров И. Е. Применение метода Галёркина к третьей краевой задаче для эллипτικο-параболического уравнения // Мат. заметки ЯГУ. 2009. Т. 16, вып. 1. С. 22–27.
7. Егоров И. Е., Ефимова Е. С. Стационарный метод Галёркина для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 41–46.
8. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
9. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
10. Виноградова П. В., Зарубин А. Г. Оценка погрешности метода Галёркина для нестационарных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 9. С. 1643–1651.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ
УСЛОВИЯМИ ПО ВРЕМЕННОЙ
ПЕРЕМЕННОЙ
ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ^{*)}

Г. А. Лукина

Исследование разрешимости нелокальных краевых задач для параболических уравнений привлекает в последнее время внимание многих авторов (см. [1–6]). Краевые задачи с нелокальными условиями наиболее общего вида $u(x, 0) = Bu + u_0(x)$, где B — некоторый линейный оператор, исследованы А. И. Кожановым [7] для линейных параболических уравнений, М. В. Уваровой [8] для эволюционных уравнений. В настоящей работе исследуется краевая задача для ультрапараболических уравнений с нелокальными условиями по одной из временных переменных. Ранее такие задачи не рассматривались.

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с границей Γ , $Q = \Omega \times (0, T_1) \times (0, T_2)$, $0 < T_1 < +\infty$, $0 < T_2 < +\infty$, $G = \Omega \times (0, T_2)$, $S = \partial\Omega \times (0, T_1) \times (0, T_2)$. Далее, пусть $c(x, t, \tau)$, $f(x, t, \tau)$ — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T_1]$, $\tau \in [0, T_2]$, Δ — оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_n , B — линейный оператор, ставящий в соответствие функции $v(x, t, \tau)$ функцию $(Bv)(x, \tau)$, точные условия на который указаны ниже.

^{*)} Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (код проекта № 02.740.11.0609).

Краевая задача. Найти функцию $u(x, t, \tau)$, являющуюся в Q решением уравнения

$$u_t + u_\tau - \Delta u + c(x, t, \tau)u = f(x, t, \tau) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0, \tau) = Bu + u_0(x, \tau), \quad x \in \Omega, \quad \tau \in (0, T_2), \quad (2)$$

$$u(x, t, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T_1), \quad (3)$$

$$u(x, t, \tau)|_S = 0, \quad t \in (0, T_1), \quad \tau \in (0, T_2). \quad (4)$$

Обозначим для краткости

$$V_0 = W_{2,x,t,\tau}^{2,1,1}(Q), \quad V_1 = W_{2,x,t,\tau}^{2,1,2}(Q);$$

нормы в пространствах V_0, V_1 — стандартные нормы в анизотропном соболевском пространстве.

Теорема. Пусть

$$c(x, t, \tau) \in C^1(\bar{Q}), \quad c(x, t, \tau) \geq c_0 > 0 \quad \text{при } (x, t, \tau) \in \bar{\Omega} \times [0, T_1] \times [0, T_2], \quad (5)$$

и пусть оператор B имеет вид $Bu = B_1u + B_2u$, где B_1, B_2 — линейные операторы, определенные на пространстве V_0 , для которых выполняются условия:

$$\|B_1u\|_{L_2(G)}^2 \leq b_1 \|u\|_{L_\infty(0, T_1; L_2(G))}^2; \quad (6)$$

$$\|B_2u\|_{L_2(G)}^2 \leq b_2 \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(0, T_1; L_2(G))}^2 + b_3 \|u\|_{L_2(0, T_1; L_2(G))}^2; \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(Bu) = B_1u_{x_i} + B_2u_{x_i} + B_{3,i}u, \quad (8)$$

$$\|B_{3,i}u\|_{L_2(G)}^2 \leq b_0 (\|u\|_{L_\infty(0, T_1; L_2(G))}^2 + \|u\|_{L_2(Q)}^2);$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(Bu) = B_1u_\tau + B_2u_\tau + B_3u, \quad (9)$$

$$\|B_3u\|_{L_2(G)}^2 \leq b_0 (\|u\|_{L_\infty(0, T_1; L_2(G))}^2 + \|u\|_{L_2(Q)}^2);$$

$Bv = 0$ при $x \in \Gamma$, $\tau \in (0, T_2)$ для любой функции $v(x, t, \tau) \in V_0$ такой, что для нее выполняются условия (4),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}(Bv) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \tau = T_2 \text{ для любой } v(x, t, \tau) \in V_0, \\ Bv = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \tau = 0 \text{ для любой } v(x, t, \tau) \in V_0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$2b_1 < 1, \quad b_2 < 1, \quad b_3 < c_0; \quad (11)$$

$$f(x, t, \tau) \in L_2(Q), \quad f_\tau(x, t, \tau) \in L_2(Q); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} u_0(x, \tau) \in W_2^1(G), \quad u_0(x, 0) = 0, \quad u_{0\tau}(x, T_2) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \\ u_0(x, \tau) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma, \tau \in (0, T_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда краевая задача (1)–(4) имеет решение $u(x, t, \tau)$, принадлежащее пространству V_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разрешимость рассматриваемой краевой задачи для уравнения (1) докажем, используя метод регуляризации.

Пусть ε — фиксированное положительное число. Рассмотрим краевую задачу с параметром ε : найти функцию $u(x, t, \tau)$, являющуюся в Q решением уравнения

$$-\varepsilon u_{\tau\tau} + u_t + u_\tau - \Delta u + c(x, t, \tau)u = f(x, t, \tau) \quad (14_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4) и условие

$$u_\tau(x, t, T_2) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T_1). \quad (15)$$

Разрешимость задачи (14_ε), (2)–(4), (15) при фиксированном ε в пространстве V_1 известна [7]. Для предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ необходимо получить равномерные по ε априорные оценки. Покажем их наличие. Индекс ε у решений задачи (14_ε), (2)–(4), (15) временно опустим.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_G [-\varepsilon u_{\tau\tau} + u_\xi + u_\tau - \Delta u + c(x, \xi, \tau)u] u \, dx d\tau d\xi = \int_0^t \int_G f(x, \xi, \tau) u \, dx d\tau d\xi,$$

откуда, интегрируя по частям, используя указанные выше граничные и начальные условия для функции $u(x, t, \tau)$ и условие (5), применяя неравенство Юнга, а также учитывая вид оператора B , приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_G u^2(x, t, \tau) dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_G u_\tau^2 dx d\tau d\xi + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_G u_{x_i}^2 dx d\tau d\xi \\ & \quad + c_0 \int_0^t \int_G u^2 dx d\tau d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega u^2(x, \xi, T_2) dx d\xi \\ \leq & (1 + \delta_1^2) \left[\int_G (B_1 u)^2 dx d\tau + \int_G (B_2 u)^2 dx d\tau \right] + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\delta_1^2} \right) \int_G u_0^2(x, \tau) dx d\tau \\ & \quad + \frac{\delta_2^2}{2} \int_0^t \int_G u^2 dx d\tau d\xi + \frac{1}{2\delta_2^2} \int_0^t \int_G f^2 dx d\tau d\xi, \end{aligned}$$

в котором δ_1, δ_2 — произвольные положительные числа.

Учитывая условия (6), (7), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_G u^2(x, t, \tau) dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_G u_\tau^2 dx d\tau d\xi + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_G u_{x_i}^2 dx d\tau d\xi \\ & \quad + c_0 \int_0^t \int_G u^2 dx d\tau d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega u^2(x, \xi, T_2) dx d\xi \\ \leq & (1 + \delta_1^2) \left[b_1 \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T_1} \int_G u^2(x, t, \tau) dx d\tau + b_2 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2 dx d\tau \right. \\ & \quad \left. + b_3 \int_Q u^2 dx d\tau \right] + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\delta_1^2} \right) \int_G u_0^2(x, \tau) dx d\tau \\ & \quad + \frac{\delta_2^2}{2} \int_0^t \int_G u^2 dx d\tau d\xi + \frac{1}{2\delta_2^2} \int_0^t \int_G f^2 dx d\tau d\xi. \end{aligned}$$

Поскольку t произвольно, из предыдущего неравенства следует

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} - (1 + \delta_1^2)b_1 \right] \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T_1} \int_G u^2(x, t, \tau) dx d\tau + \varepsilon \int_Q u_\tau^2 dx d\tau \\ & + (1 - b_2) \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2 dx d\tau + \left(c_0 - b_3 - \frac{\delta_2^2}{2} \right) \int_Q u^2 dx d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \int_\Omega u^2(x, t, T_2) dx dt \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\delta_1^2} \right) \int_G u_0^2(x, \tau) dx d\tau + \frac{1}{2\delta_2^2} \int_Q f^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Фиксируя числа $\delta_1 = \left(\frac{1}{4b_1} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$, $\delta_2 = \left(\frac{c_0 - b_3}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$, нетрудно получить оценку

$$\begin{aligned} & \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T_1} \int_G u^2(x, t, \tau) dx d\tau + \varepsilon \int_Q u_\tau^2 dx d\tau \\ & + \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2 dx d\tau + \int_Q u^2 dx d\tau \leq M_1 \quad (16) \end{aligned}$$

с постоянной M_1 , определяемой лишь функциями $c(x, t, \tau)$, $f(x, t, \tau)$, $u_0(x, \tau)$, а также числами b_1, b_2, b_3 .

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & - \int_0^t \int_G [-\varepsilon u_{\tau\tau} + u_\xi + u_\tau - \Delta u + c(x, \xi, \tau)u](\Delta u + u_{\tau\tau}) dx d\tau d\xi \\ & = - \int_0^t \int_G f(\Delta u + u_{\tau\tau}) dx d\tau d\xi, \end{aligned}$$

которое интегрированием по частям можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_G u_{x_i}^2(x, t, \tau) dx d\tau - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_G u_{x_i}^2(x, 0, \tau) dx d\tau \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega u_{x_i}^2(x, \xi, T_2) dx d\xi + (\varepsilon + 1) \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_G u_{x_i\tau}^2 dx d\tau d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_G (\Delta u)^2 dx d\tau d\xi + \frac{1}{2} \int_G u_\tau^2(x, t, \tau) dx d\tau - \frac{1}{2} \int_G u_\tau^2(x, 0, \tau) dx d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega u_\tau^2(x, \xi, 0) dx d\xi + \varepsilon \int_0^t \int_G u_{\tau\tau}^2 dx d\tau d\xi + \int_0^t \int_G c(x, \xi, \tau) u_\tau^2 dx d\tau d\xi \\
& = \int_0^t \int_G c(x, \xi, \tau) u \Delta u dx d\tau d\xi - \int_0^t \int_G c_\tau(x, \xi, \tau) u u_\tau dx d\tau d\xi \\
& - \int_0^t \int_G f \Delta u dx d\tau d\xi + \int_0^t \int_G f_\tau u_\tau dx d\tau d\xi + \int_0^t \int_\Omega f(x, \xi, 0) u_\tau(x, \xi, 0) dx d\xi.
\end{aligned}$$

Используя условия (5)–(9), неравенство Юнга, и оценку (16), а также учитывая вид оператора B , получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_G u_{x_i}^2(x, t, \tau) dx d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega u_{x_i}^2(x, \xi, T_2) dx d\xi \\
& + (\varepsilon + 1) \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_G u_{x_i\tau}^2 dx d\tau d\xi + \int_0^t \int_G (\Delta u)^2 dx d\tau d\xi + \frac{1}{2} \int_G u_\tau^2(x, t, \tau) dx d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega u_\tau^2(x, \xi, 0) dx d\xi + \varepsilon \int_0^t \int_G u_{\tau\tau}^2 dx d\tau d\xi + c_0 \int_0^t \int_G u_\tau^2 dx d\tau d\xi \\
& \leq \left(1 + \frac{\delta_3^2}{2}\right) \sum_{i=1}^n \int_G [(B_1 u_{x_i})^2 + (B_2 u_{x_i})^2 + F_1] dx d\tau \\
& + \left(1 + \frac{\delta_4^2}{2}\right) \int_G [(B_1 u_\tau)^2 + (B_2 u_\tau)^2 + F_2] dx d\tau + \frac{\delta_5^2}{2} \int_0^t \int_G (\Delta u)^2 dx d\tau d\xi \\
& + \frac{M_1}{2\delta_5^2} \max_Q [c^2(x, t, \tau)] + \frac{\delta_5^2}{2} \int_0^t \int_G u_\tau^2 dx d\tau d\xi + \frac{M_1}{2\delta_5^2} \max_Q [c_\tau^2(x, t, \tau)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta_6^2}{2} \int_0^t \int_G (\Delta u)^2 dx d\tau d\xi + \frac{1}{2\delta_6^2} \int_0^t \int_G f^2 dx d\tau d\xi + \frac{\delta_6^2}{2} \int_0^t \int_G u_\tau^2 dx d\tau d\xi \\
& + \frac{1}{2\delta_6^2} \int_0^t \int_G f_\tau^2 dx d\tau d\xi + \frac{\delta_7^2}{2} \int_0^t \int_\Omega u_\tau^2(x, \xi, 0) dx d\xi \\
& + \frac{1}{2\delta_7^2} \int_0^t \int_\Omega f^2(x, \xi, 0) dx d\xi,
\end{aligned}$$

в котором $\delta_j, j = \overline{3, 7}$, — произвольные положительные числа, F_1, F_2 — величины, конечные в силу условий теоремы и оценки (16). С учетом условий (6), (7) имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_G u_{x_i}^2(x, t, \tau) dx d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega u_{x_i}^2(x, \xi, T_2) dx d\xi \\
& + (\varepsilon + 1) \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_G u_{x_i\tau}^2 dx d\tau d\xi + \int_0^t \int_G (\Delta u)^2 dx d\tau d\xi + \frac{1}{2} \int_G u_\tau^2(x, t, \tau) dx d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega u_\tau^2(x, \xi, 0) dx d\xi + \varepsilon \int_0^t \int_G u_{\tau\tau}^2 dx d\tau d\xi + c_0 \int_0^t \int_G u_\tau^2 dx d\tau d\xi \\
& \leq \left(1 + \frac{\delta_3^2}{2}\right) \left[b_1 \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T_1} \sum_{i=1}^n \int_G u_{x_i}^2(x, t, \tau) dx d\tau + b_2 \int_Q (\Delta u)^2 dx dt d\tau \right. \\
& \left. + b_3 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2 dx dt d\tau \right] + \left(1 + \frac{\delta_4^2}{2}\right) \left[b_1 \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T_1} \int_G u_\tau^2(x, t, \tau) dx d\tau \right. \\
& \left. + b_2 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i\tau}^2 dx dt d\tau + b_3 \int_Q u_\tau^2 dx dt d\tau \right] + \frac{\delta_5^2}{2} \int_0^t \int_G (\Delta u)^2 dx dt d\tau \\
& + \frac{M_1}{2\delta_5^2} \max_Q [c^2(x, t, \tau)] + \frac{\delta_5^2}{2} \int_0^t \int_G u_\tau^2 dx d\tau d\xi + \frac{M_1}{2\delta_5^2} \max_Q [c_\tau^2(x, t, \tau)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta_6^2}{2} \int_0^t \int_G (\Delta u)^2 dx d\tau d\xi + \frac{1}{2\delta_6^2} \int_0^t \int_G f^2 dx d\tau d\xi + \frac{\delta_6^2}{2} \int_0^t \int_G u_\tau^2 dx d\tau d\xi \\
& + \frac{1}{2\delta_6^2} \int_0^t \int_G f_\tau^2 dx d\tau d\xi + \frac{\delta_7^2}{2} \int_0^t \int_\Omega u_\tau^2(x, \xi, 0) dx d\xi \\
& + \frac{1}{2\delta_7^2} \int_0^t \int_\Omega f^2(x, \xi, 0) dx d\xi.
\end{aligned}$$

В силу произвольности t из предыдущего неравенства следует

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2} - \left(1 + \frac{\delta_3^2}{2} \right) b_1 \right] \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T_1} \sum_{i=1}^n \int_G u_{x_i}^2(x, t, \tau) dx d\tau \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{T_1} \int_\Omega u_{x_i}^2(x, t, T_2) dx dt + \left[\varepsilon + 1 - \left(1 + \frac{\delta_4^2}{2} \right) b_2 \right] \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i \tau}^2 dx dt d\tau \\
& + \left[1 - \left(1 + \frac{\delta_3^2}{2} \right) b_2 - \frac{\delta_5^2}{2} - \frac{\delta_6^2}{2} \right] \int_Q (\Delta u)^2 dx dt d\tau \\
& + \left[\frac{1}{2} - \left(1 + \frac{\delta_4^2}{2} \right) b_1 \right] \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T_1} \int_G u_\tau^2(x, t, \tau) dx d\tau \\
& + \left[\frac{1}{2} - \frac{\delta_7^2}{2} \right] \int_0^{T_1} \int_\Omega u_\tau^2(x, t, 0) dx dt + \varepsilon \int_Q u_{\tau\tau}^2 dx dt d\tau \\
& + \left[c_0 - \left(1 + \frac{\delta_4^2}{2} \right) b_3 - \frac{\delta_5^2}{2} - \frac{\delta_6^2}{2} \right] \int_Q u_\tau^2 dx dt d\tau \leq \frac{M_1}{2\delta_5^2} \max_Q [c^2(x, t, \tau)] \\
& + \frac{M_1}{2\delta_5^2} \max_Q [c_\tau^2(x, t, \tau)] + \frac{1}{2\delta_6^2} \int_Q f^2 dx dt d\tau \\
& + \frac{1}{2\delta_6^2} \int_Q f_\tau^2 dx dt d\tau + \frac{1}{2\delta_7^2} \int_0^{T_1} \int_\Omega f^2(x, t, 0) dx dt.
\end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом вытекает оценка

$$(\varepsilon + 1) \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i \tau}^2 dx dt d\tau + \int_Q (\Delta u)^2 dx dt d\tau + \varepsilon \int_Q u_{\tau \tau}^2 dx dt d\tau \leq M_2 \quad (17)$$

с постоянной M_2 , определяемой лишь функциями $c(x, t, \tau)$, $f(x, t, \tau)$, $u_0(x, \tau)$, а также числами b_1, b_2, b_3 .

Последняя оценка

$$\int_Q u_t^2 dx dt d\tau \leq M_3 \quad (18)$$

вытекает из доказанных неравенств (16) и (17).

Окончательная оценка имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T_1} \int_G u^2(x, t, \tau) dx d\tau + \varepsilon \int_Q u_{\tau}^2 dx dt d\tau + \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2 dx dt d\tau \\ + \int_Q u^2 dx dt d\tau + (\varepsilon + 1) \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i \tau}^2 dx dt d\tau + \int_Q (\Delta u)^2 dx dt d\tau \\ + \varepsilon \int_Q u_{\tau \tau}^2 dx dt d\tau + \int_Q u_t^2 dx dt d\tau \leq M_0. \quad (19) \end{aligned}$$

Априорной оценки (19) вполне достаточно для перехода в семействе решений задачи (14_ε), (2)–(4), (15) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предельная функция $u(x, t, \tau)$ будет решением краевой задачи (1)–(4), принадлежащим пространству V_0 .

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Примерами операторов, к которым применима доказанная теорема, являются

$$\begin{aligned} Bu = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x, \tau) u(x, t_k, \tau), \quad Bu = \int_0^{T_1} b(x, t, \tau) u(x, t, \tau) dt, \\ Bu = \int_0^{T_1} \left(\int_G b_1(x, t, \tau) u(x, t, \tau) dx d\tau \right) dt. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_k(x, \tau)$, $k = 1, \dots, m$, $b(x, t, \tau)$, $b_1(x, t, \tau)$ — заданные ограниченные функции, имеющие ограниченные производные. Выполнение условий (6)–(11) для этих операторов обеспечивается условиями малости для функций $\alpha_k(x, \tau)$, $k = 1, \dots, m$, $b(x, t, \tau)$, $b_1(x, t, \tau)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогично можно исследовать разрешимость нелокальной краевой задачи для ультрапараболических уравнений (1) с условиями (2), (3) и с заменой условия (4) условием

$$\frac{\partial u(x, t, \tau)}{\partial \nu} + \sigma(x, t, \tau)u(x, t, \tau) \Big|_S = 0, \quad t \in (0, T_1), \quad \tau \in (0, T_2),$$

второй или третьей краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керемов А. А. Нелокальные граничные задачи для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 5, № 1. С. 74–78.
2. Chabrowski J. On nonlocal problems for parabolic equations // Nagoya Math. J. 1984. V. 93. P. 109–131.
3. Chabrowski J. On the nonlocal problem with a functional for parabolic equation // Funkc. Ekvacioj. Ser. Int. 1984. N 27. P. 101–123.
4. Шелухин В. В. Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 2. С. 154–165.
5. Шелухин В. В. Нелокальные по времени задачи для уравнений гидродинамики и вариационные принципы / Дис. . . д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1992.
6. Либман Г. М. Нелокальные задачи для квазилинейных параболических уравнений / Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы: В честь акад. О. А. Ладыженской. Новосибирск, 2002. Т. 1. С. 233–254.
7. Кожанов А. И. Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 51–60.
8. Уварова М. В. О некоторых нелокальных краевых задачах для эволюционных уравнений // Мат. тр. 2010. Т. 13, № 2. С. 179–207.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА
НЕЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ
ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ*)

В. Г. Марков

§ 1. Введение

Мы рассматриваем дифференциальные операторы вида

$$Lu = \frac{1}{g(x)} L_0 u, \quad x \in (a, b), \quad (1.1)$$

где L_0 — обыкновенный дифференциальный оператор порядка $2m$, который определен дифференциальным выражением

$$L_0 u = \sum_{i,j=0}^m \frac{d^i}{dx^i} a_{ik} \frac{d^j u}{dx^j}, \quad x \in (a, b), \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} B_k u &= \sum_{i=0}^{2m-1} (\alpha_{ik} u^{(i)}(a) + \beta_{ik} u^{(i)}(b)) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2m), \\ B_k u &= \sum_{i=0}^{2m-1} \alpha_{ik} u^{(i)}(a) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m), \\ B_k u &= \sum_{i=0}^{2m-1} \beta_{ik} u^{(i)}(b) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (1.3)$$

*) Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК № 02.740.11.0609).

Здесь первое условие используется в случае ограниченного интервала (a, b) , второе — в случае $b = +\infty$, а третье — при $a = -\infty$. Возможен случай $(a, b) = \mathbb{R}$. Вещественная функция $g(x)$ из (1.1), вообще говоря, меняет знак на интервале (a, b) . Будем рассматривать случай, когда оператор L равномерно J -диссипативен в пространстве Крейна $F_0 = L_{2,g}(a, b)$, в котором скалярное произведение и индефинитная метрика определяются с помощью равенств

$$(u, v)_0 = \int_a^b |g(x)|u(x)\overline{v(x)} dx, \quad [u, v]_0 = \int_a^b g(x)u(x)\overline{v(x)} dx.$$

Таким образом, $\operatorname{Re}[-Lu, u]_0 \geq 0$ для всех $u \in D(L)$. Спектральные задачи Штурма — Лиувилля с незнакоопределенной весовой функцией $g(x)$ (и эллиптические задачи этого вида) были предметом многих исследований. Эти проблемы возникают во многих областях физики и прикладной математики. Достаточно полная библиография может быть найдена в [1, 2].

Другие вопросы, возникающие при исследовании дифференциальных операторов вида (1.1) — вопрос о существовании максимальных семидефинитных (т. е. определенного знака) инвариантных подпространств оператора L в пространстве Крейна F_0 и вопрос подобия данного оператора вида (1.1) самосопряженному или нормальному оператору. Эти два вопроса тесно связаны, а в случае самосопряженного оператора L_0 даже эквивалентны [3, предложение 2.2]. В случае, когда оператор L_0 самосопряжен в $L_2(a, b)$ и оператор $R : L_{2,g}(a, b) \rightarrow L_{2,g}(a, b)$, $Ru = L_0^{-1}g(x)u$, вполне непрерывен, вопрос о существовании максимальных семидефинитных подпространств в пространствах Крейна также эквивалентен базисности по Риссу в пространстве $L_{2,g}(a, b)$ собственных функций спектральной задачи $L_0u = \lambda g(x)u$. Особенно трудными являются сингулярные случаи, когда $0 \notin \rho(L)$.

Вопрос о существовании максимальных инвариантных подпространств для операторов, заданных в пространствах Крейна или Понтрягина, начал исследовать Л. С. Понтрягин. Его результаты впоследствии

обобщались многими авторами, в частности, в работах М. Г. Крейна, Г. Х. Лангера, Т. Я. Азизова, А. А. Шкаликова и др. Можно отметить работы [4, 5], содержащие достаточно полную библиографию и ряд интересных результатов. В случае существования этих подпространств оператор допускает разложение на сумму коммутирующих операторов, определенных в соответствующих подпространствах, при определенных условиях эти операторы с точностью до умножения на -1 являются генераторами аналитических полугрупп. Последний факт позволяет исследовать самые разные вопросы, связанные с разрешимостью уравнений, в которых этот оператор входит.

Работ, посвященных приложениям результатов к теории операторов вида (1), крайне мало в силу значительных трудностей, возникающих при исследовании подобных задач. Изучен лишь ряд простейших операторов (см. [6–8]) и зачастую в ситуации, когда оператор L_0 самосопряжен в F_0 . В последние годы возник ряд интересных приложений, связанных с исследованием операторов Шредингера с точечными δ - и δ' -взаимодействиями. В случае $g(x) \equiv 1$ (т. е. рассматривается знакоопределенный случай) этому посвящены, например, работы [19–23], а для функции g , меняющей знак, — работы [6–8]. В последнем случае область определения L содержит, вообще говоря, разрывные функции, удовлетворяющие определенным условиям склейки в точках взаимодействия.

Вопросы, рассматриваемые в данной работе, исследованы частично и лишь в случае самосопряженного оператора L_0 второго порядка. При доказательстве основных теорем будем использовать результаты из [1, 2, 24].

В § 2 содержатся определения и вспомогательные результаты. Для удобства читателя в § 3 приводятся условия регулярности точек поворота из [25–28]. Главные результаты представлены в § 4. Доказано (теорема 4.1), что почти во всех случаях существование максимальных инвариантных подпространств не зависит от вида граничных условий (1.3). Почти все обозначения стандартны (см. [29]).

§ 2. Определения и вспомогательные результаты

Гильбертово пространство H , где наряду с обычным скалярным произведением (\cdot, \cdot) задано также индефинитное скалярное произведение (индефинитная метрика) $[x, y] = (Jx, y)$, где $J = P^+ - P^-$ и P^\pm — ортопроекторы в H , $P^+ + P^- = I$ (см. [31]), называется *пространством Крейна*.

Плотно определенный оператор $A : H \rightarrow H$ назовем *диссипативным* (*строго диссипативным*, *равномерно диссипативным*), если $-\operatorname{Re}(Au, u) \geq 0$ ($-\operatorname{Re}(Au, u) > 0$, $-\operatorname{Re}(Au, u) \geq \delta \|u\|^2$, $\delta > 0$) для всех $u \in D(A)$, и *J-диссипативным* (*строго J-диссипативным*, *равномерно J-диссипативным*), если оператор JA диссипативен (строго диссипативен, равномерно диссипативен). Оператор $A : H \rightarrow H$ назовем *максимальным диссипативным* (*максимальным J-диссипативным*), если он диссипативен (*J-диссипативен*) и не допускает нетривиальных диссипативных (*J-диссипативных*) расширений. Определения соболевских пространств $W_p^k(a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$) и $\overset{\circ}{W}_p^k(a, b)$ ($1 \leq p \leq \infty$), используемых ниже, могут быть найдены в [7]. Если A, B — некоторые банаховы пространства, то под $(A, B)_{\theta, 2}$ понимаем пространство, построенное при помощи метода вещественной интерполяции [15]. Символом $L(A, B)$ будем обозначать пространство линейных ограниченных операторов из A в B . Если $A = B$, то вместо $L(A, A)$ пишем $L(A)$. Область определения и область значений оператора M обозначаются через $D(M)$ и $R(M)$. Пусть H_1, H_0 ($H_1 \subset H_0$) — гильбертовы пространства и вложение H_1 в H_0 плотно. Под H'_1 понимаем негативное пространство к H_1 , т. е. пополнение H_0 относительно нормы $\|u\|_{H'_1} = \sup_{v \in H_1} |(u, v)| / \|v\|_{H_1}$, где скобки (\cdot, \cdot) обозначают скалярное произведение в H_0 . Напомним [29], что

$$(H_1, H'_1)_{1/2, 2} = H_0. \tag{2.1}$$

Пусть J — каноническая симметрия в некотором пространстве Крейна K . Пусть F_1 — гильбертово пространство и вложение $F_1 \subset F_0$ плот-

но. Вместе с негативным пространством можно построить J -негативное пространство как пополнение F_0 относительно нормы

$$\|u\|_{F_{-1}} = \sup_{v \in F_1} |[u, v]_0| / \|v\|_{F_1}.$$

Положим $F_s = (F_1, F_0)_{1-s, 2}$.

Будем использовать следующую лемму (см. [1, леммы 3.17, 4.1; 2, 30]).

Лемма 2.1. *Если существует $s_0 > 0$ такое, что $J \in L(F_{s_0}, F_{s_0})$ ($P^+ \in L(F_{s_0}, F_{s_0})$ или $P^- \in L(F_{s_0}, F_{s_0})$), то*

$$(F_1, F_{-1})_{1/2, 2} = F_0. \quad (2.2)$$

Любое из вложений $(F_1, F_{-1})_{1/2, 2} \subset F_0$, $(F_1, F_{-1})_{1/2, 2} \supset F_0$ влечет (2.2).

Предполагаем, что найдется число $q_0 \in [1, \infty]$ такое, что $g(x) \in L_{q_0}(a, b)$, и существуют открытые подмножества G^+ и G^- множества $G = (a, b)$, состоящие из конечного числа непересекающихся интервалов, такие, что $g(x) > 0$ п. в. в G^+ , $g(x) < 0$ п. в. в G^- и $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = [a, b]$. Точка $x_0 \in \partial G^+ \cap \partial G^-$ называется *точкой поворота*. Обозначим точки поворота через $\{x_i\}_{i=1}^N$. Каноническая симметрия J в пространстве $L_{2, g}(a, b)$ задается равенством $J = \chi_{G^+} - \chi_{G^-}$, где χ_{G^\pm} — характеристические функции соответствующих множеств. Для простоты считаем, что коэффициенты оператора L_0 — достаточно гладкие функции; более точно, $a_{ik} \in W_\infty^{\max(i, k)}(a, b) \forall i, k$, $a_{m, m}, 1/a_{m, m} \in L_\infty(a, b)$ и $(-1)^m a_{m, m} > 0$ п. в. Эти условия гладкости могут быть ослаблены (см., например, [32, 33]). Пусть $\{y_k\}_{k=1}^{N_0}$ — набор точек из (a, b) , часть которых может совпадать с точками поворота. Если $b = \infty$, то считаем, что $N_0 = \infty$, последовательность $\{y_k\}$ неубывающая и $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = b$ (аналогичные условия на точки взаимодействия рассматриваются в [21]). Если $b \neq \infty$, то считаем, что число точек $\{y_k\}$ конечно. Положим $y_0 = a$.

Обозначим через $\widetilde{W}_q^s(a, b)$ пространство функций $u \in L_q(a, b)$ та-

ких, что $u \in W_q^{2m}(y_{i-1}, y_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots$ и

$$\|u\|_{\widetilde{W}_q^s(a,b)}^q = \sum_{i=1}^{N_0} \|u\|_{W_q^s(y_{i-1}, y_i)}^q < \infty.$$

Легко проверить, что $\widetilde{W}_q^s(a, b)$ — банахово пространство. Приведем ряд вспомогательных утверждений. В лемме ниже приведены простейшие интерполяционные неравенства и теоремы вложения для классов разрывных функций $\widetilde{W}_q^s(a, b)$.

Лемма 2.2. Пусть $u \in \widetilde{W}_q^s(a, b)$. Тогда найдется постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|u^{(i)}\|_{L_q(a,b)} \leq c \|u\|_{\widetilde{W}_q^s(a,b)}^\theta \|u\|_{L_q(a,b)}^{1-\theta}, \quad \theta = i/s, \quad s > i.$$

При $q \in [1, \infty)$ и $s \geq 1/q$ имеет место вложение $\widetilde{W}_q^s(a, b) \subset L_p(a, b)$ для всех $p \in [q, \infty]$.

Утверждение леммы доказывается с использованием соответствующих вложений на каждом из интервалов (y_{i-1}, y_i) , замен переменных (растяжения интервала) и суммированием соответствующих оценок.

Обозначим через $D_q(a, b)$ класс функций $u \in L_q(a, b)$ таких, что $u \in \widetilde{W}_q^{2m}(a_1, b_1)$ для каждого ограниченного интервала (a_1, b_1) такого, что $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, u удовлетворяет краевым условиям (2) и условиям склейки

$$U_k u = \sum_{i=0}^{2m-1} (\alpha_{ji}^k u^{(i)}(y_k + 0) - \beta_{ji}^k u^{(i)}(y_k - 0)) = 0, \quad (2.3)$$

где $j = 0, 1, \dots, 2m-1$, $k = 1, 2, \dots$ и матрицы $\{\alpha_{ji}^k\}_{i,j=0}^{2m-1}$, $\{\beta_{ji}^k\}_{i,j=0}^{2m-1}$ невырождены для любого k .

Возьмем $p_0 = 2q_0/(1+q_0)$. Зададим область определения оператора L как класс функций $u \in L_{2,g}(a, b)$ таких, что $u \in \widetilde{W}_2^m(a, b) \cap D_{p_0}(a, b)$ и $Lu \in L_{2,g}(a, b)$. Обозначим норму в $\widetilde{W}_2^m(a, b)$ символом $\|\cdot\|_m$.

Пусть $(u, v) = \int_a^b u(x)\overline{v(x)} dx$. Рассмотрим полуторалинейную форму

$$a(u, v) = \sum_{j,k=0}^m (a_{j,k}u^{(j)}, v^{(k)}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} (U_j^i u v^{(j)}(y_i + 0) - V_j^i u v^{(j)}(y_i - 0)),$$

где каждый из операторов $U_j^i u$, $V_j^i u$ — линейная комбинация величин $(u(y_i + 0), u(y_i - 0), u'(y_i + 0), u'(y_i - 0), \dots, u^{(m-1)}(y_i + 0), u^{(m-1)}(y_i - 0))$. Считаем, что форма $a(u, v)$ удовлетворяет условию

$$[-Lu, v] = a(u, v) \quad (2.4)$$

для всех функций $u, v \in D(L)$, имеющих ограниченный носитель, и найдутся постоянные $\delta_0, c_0 > 0$ такие, что

$$c_0 \|u\|_m^2 \geq \operatorname{Re} a(u, u) \geq \delta_0 \|u\|_m^2 \quad \forall u \in D(L). \quad (2.5)$$

Нетрудно увидеть, что если равенство (2.4) выполнено для всех u, v , имеющих ограниченный носитель, то оно верно и для всех $u, v \in D(L)$. Более того, это равенство будет выполнено, например, и для функций $u \in D_1 \cap \widetilde{W}_2^m(a, b)$. Действительно, пусть, например, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Рассмотрим в (2.4) вместо v функцию вида $v\varphi(x/R)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$, $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq 2$. Интегрируя по частям и затем переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в (2.4), получим требуемое.

Лемма 2.3. *Оператор $L : L_{2,g}(a, b) \rightarrow L_{2,g}(a, b)$ максимальный J -диссипативный, и $0 \in \rho(L)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $0 \in \rho(L)$ (см. [31]). Обозначим через $\widetilde{W}_{02}^m(a, b)$ замыкание $D(L)$ в норме $\|\cdot\|_m$. Для всех $u, v \in D(L)$ выполнено (2.5). Таким образом, форма $a(u, v)$ удовлетворяет условиям теорема Лакса — Мильграма. Отметим, что $f \in F_0$. Имеем оценку

$$|(gf, v)| \leq \|f\|_0 \|v\|_0 \leq \|f\|_0 \|g\|_{L_{q_0}(a,b)} \|v\|_{L_{p_1}(a,b)} \leq c \|v\|_m,$$

где $p_1 = 2q_0/(q_0 - 1)$ и $p_1 = \infty$ при $q_0 = 1$. По теореме Лакса — Мильграма существует единственное решение $u \in \widetilde{W}_{02}^m(a, b)$ задачи

$$a(u, v) = (gf, v)_0 \quad \forall v \in \widetilde{W}_{02}^m(a, b).$$

Используя неравенство Гёльдера, получим $fg \in L_{p_0}(a, b)$. Таким образом, на каждом из интервалов (y_{i-1}, y_i) функция u есть обобщенное решение уравнения $L_0 u = gf \in L_{p_0}(y_{i-1}, y_i)$. Из известных свойств обыкновенных дифференциальных операторов и условий гладкости на коэффициенты L_0 вытекает, что $u \in W_{p_0}^{2m}(y_{i-1}, y_i)$ и $L_0 u = gf$ п. в. на (y_{i-1}, y_i) . Обычным образом, используя формулу Грина (см. [2]), записанную в том числе с учетом условий склейки в точках y_i , показывается, что функция u удовлетворяет краевым условиям и условиям склейки. Тем самым $u \in D(L)$, значит, L — максимальный диссипативный оператор.

Пусть $M \subset (a, b)$ — открытое множество и

$$(u, v)_M = \int_M u(x) \overline{v(x)} dx, \quad [u, v]_M = (g(x)u, v)_M.$$

Если выражение $B_k u$ содержит значения функции u и ее производных только в одной из точек a или b , то называем граничное условие $B_k u = 0$ *локальным*. Если все граничные условия $B_k u = 0$ при $k = 1, \dots, s_0$ локальны (они всегда локальны в случае неограниченного интервала (a, b)), то говорим, что *граничные условия локальны*. В противном случае называем граничные условия *нелокальными*. Пусть $F_1 = \widetilde{W}_{02}^m(a, b)$ и F_{-1} — J -негативное пространство, т. е. пополнение F_0 по норме $\|u\|_{F_{-1}} = \sup_{v \in F_1} |[u, v]_0| / \|v\|_{F_1}$.

Будем использовать следующие результаты из [1, 2] (см. также леммы 9, 10 в [24]).

Теорема 2.1. *При выполнении вышеприведенных условий на коэффициенты уравнения и весовую функцию g оператор L допускает*

выделение максимальных равномерно дефинитных подпространств тогда и только тогда, когда

$$(F_1, F_{-1})_{1/2,2} = F_0. \quad (2.6)$$

Если условие (2.6) выполнено, то существуют максимальные равномерно положительное и равномерно отрицательное подпространства M^\pm пространства F_0 , инвариантные относительно L , такие, что

$$\overline{C^\pm} \subset \rho(L|_{M^\pm}), \quad F_0 = M^+ + M^-,$$

где сумма прямая и операторы $\pm L|_{M^\pm}$ — генераторы аналитических полугрупп.

§ 3. Условия регулярности

Используем условия регулярности точек поворота из [25–28].

(1) Для каждой точки $x_k \in \partial G^+ \cap \partial G^-$ существует правая окрестность $(x_k, x_k + \delta) = I$ или левая окрестность $(x_k - \delta, x_k) = I$ этой точки такие, что $I \subset G^+ \cup G^-$ и для некоторого $\omega \in (0, 1)$ при любых $\eta \in (0, \delta)$ или $\eta \in (-\delta, 0)$ выполнено

$$\left| \int_{x_k}^{x_k + \omega\eta} |g(\tau)| d\tau \right| \leq \frac{1}{2} \left| \int_{x_k}^{x_k + \eta} |g(\tau)| d\tau \right|. \quad (3.1)$$

В некоторых случаях нужно дополнительное условие регулярности граничной точки.

(2) Граничная точка $a \neq -\infty$ ($b \neq \infty$) регулярна в следующих случаях:

(а) существует правая окрестность $I = (a, a + \delta)$ точки a (левая окрестность $I = (b - \delta, b)$ точки b) такая, что для некоторого $\omega \in (0, 1)$ выполнено

$$\int_a^{a + \omega\eta} |g(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{2} \int_a^{a + \eta} |g(\tau)| d\tau \quad \forall \eta \in (0, \delta) \quad (3.2)$$

(соответственно

$$\int_{b-\omega\eta}^b |g(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{2} \int_{b-\eta}^b |g(\tau)| d\tau \quad \forall \eta \in (0, \delta). \quad (3.3)$$

(b) $(a, x_0) \subset G^0$ ($(x_0, b) \subset G^0$) для некоторого $x_0 \in (a, b)$ и существует правая окрестность $I = (x_0, x_0 + \delta)$ точки x_0 (левая окрестность $I = (x_0 - \delta, x_0)$ точки x_0) такая, что $I \subset G^+ \cup G^-$ и для некоторого $\omega \in (0, 1)$ выполнено

$$\int_{x_0}^{x_0+\omega\eta} |g(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+\eta} |g(\tau)| d\tau \quad \forall \eta \in (0, \delta) \quad (3.4)$$

(соответственно

$$\int_{x_0-\omega\eta}^{x_0} |g(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{2} \int_{x_0-\eta}^{x_0} |g(\tau)| d\tau \quad \forall \eta \in (0, \delta). \quad (3.5)$$

Нетрудно проверить, что условия регулярности (1) и (2) намного слабее использованных в [34]. В следующей теореме опишем эквивалентные условия регулярности из [25–28]. Чтобы упростить изложение, формулируем их для точки $x_0 = 0$ и интервала $(0, 1)$. Неравенства (3.1)–(3.5) $f(\eta) = \int_0^\eta |g(\tau)| d\tau$, сформулированное для произвольной точки.

Теорема 3.1. Для неубывающей функции $f : (0, 1) \rightarrow R_+$ следующие условия эквивалентны:

- (a) $\forall \gamma \in (0, 1) \exists \omega \in (0, 1) : \forall \varepsilon \in (0, 1) \quad f(\omega\varepsilon) \leq \gamma f(\varepsilon);$
- (b) $\exists \omega \in (0, 1) : \forall \varepsilon \in (0, 1) \quad f(\omega\varepsilon) \leq f(\varepsilon)/2;$
- (c) $\exists \beta \in (0, 1) \exists \omega \in (0, 1) : \forall \varepsilon \in (0, 1) \quad f(\omega\varepsilon) \leq \beta f(\varepsilon);$
- (d) $\exists c, d > 0 : f \forall 0 < \eta \leq \xi < 1 \quad (\eta) \leq c \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^d f(\xi);$
- (e) не существует последовательностей a_n, b_n таких, что $0 < a_n < b_n < 1$ и

$$a_n/b_n \rightarrow 0, \quad f(a_n)/f(b_n) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Эквивалентность (b), (d) и (e) доказана в теореме 6 из [25]. Полное доказательство может быть найдено в [28].

Пусть $g(x) \in L_1(0, 1)$ и $g(x) > 0$ п. в. на $(0, 1)$. Обозначим через $\overline{W}_2^m(0, 1)$ подпространство $W_2^m(0, 1)$, включающее функции $u(x)$ такие, что $u^{(i)}(0) = 0$ при $0 \leq i \leq m - 1$.

Теорема 3.2. [27, 28] Любое из условий (a)–(e), сформулированное для функции $f(\eta) = \int_0^\eta |g(\tau)| d\tau$, эквивалентно следующему: существует $\theta \in (0, 1)$, для которого

$$(W_2^m(0, 1), L_{2,g}(0, 1))_{1-\theta, 2} = (\overline{W}_2^m(0, 1), L_{2,g}(0, 1))_{1-\theta, 2}.$$

Следствие 3.1. При выполнении условий теоремы 3.2 существует $\theta \in (0, 1)$, для которого

$$(\overset{\circ}{W}_2^m(0, 1), L_{2,g}(0, 1))_{1-\theta, 2} = (\overline{W}_{02}^m(0, 1), L_{2,g}(0, 1))_{1-\theta, 2},$$

где $\overline{W}_{02}^m(0, 1) = \{u \in W_2^m(0, 1) : u^{(i)}(1) = 0, i = 0, 1, \dots, m - 1\}$.

§ 4. Главные результаты

Теорема 4.1. Пусть выполнено одно из следующих условий:

а) граничные условия локальны и каждая из точек x_k ($k = 1, 2, \dots, N$) регулярна;

б) граничные условия нелокальны, одна из граничных точек и каждая из точек x_k ($k = 1, 2, \dots, N$) регулярны.

Тогда существуют максимальные равномерно положительное и равномерно отрицательное подпространства M^\pm пространства F_0 , инвариантные относительно L , такие, что

$$\overline{C}^\pm \subset \rho(L|_{M^\pm}), \quad F_0 = M^+ + M^-,$$

где сумма прямая и операторы $\pm L|_{M^\pm}$ — генераторы аналитических полугрупп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале проведем доказательство для случая локальных краевых условий. Пусть x_k — произвольная точка такая, что $x_k \in \partial G^+ \cap \partial G^-$. Тогда либо на интервале $O_k^- = (x_k - \varepsilon, x_k)$, либо на $O_k^+ = (x_k, x_k + \varepsilon)$ выполнено условие (1) (считаем, что параметр ε меньше, чем δ из условия (1)). Пусть, например, это будет первый из таких интервалов. В случае второго интервала рассуждения не меняются. Тогда, уменьшая ε , если необходимо, можем считать, что $(x_k - \varepsilon, x_k] \in G^+$ или $[x_k - \varepsilon, x_k) \in G^-$, причем $(x_k, x_k + \varepsilon] \in G^-$ или $(x_k, x_k + \varepsilon) \in G^+$ соответственно. Положим $O_k = O_k^+ \cup O_k^- \cup \{x_k\}$, определим пространство W_1 как подпространство функций из $u \in W_2^m(O_k)$ таких, что найдется функция $v \in \widetilde{W}_{02}^m(a, b)$ такая, что $v|_{O_k} = u$. Легко увидеть, что если x_k не является точкой взаимодействия, то $W_1 = W_2^m(O_k)$. Если же x_k — точка взаимодействия, то W_1 состоит из функций $u \in L_{2,g}(O_k)$ таких, что $u \in W_2^m(O_k^+) \cap W_2^m(O_k^-)$ и в точке x_k выполнено определенное количество условий вида (2.3), содержащих лишь производные от u до порядка $m - 1$. Положим $W_s = (W_1, W_0)_{1-s,2}$. Покажем, что найдется $s_0 > 0$ такое, что операторы

$$S_k^\pm u = \begin{cases} u, & x \in G^\pm \cap O_k, \\ 0, & x \in G^\mp \cap O_k, \end{cases}$$

непрерывны как операторы из W_s в W_s при всех $s \in [0, s_0]$. Определим вспомогательные пространства. Положим $A_1 = W_2^m(O_k^-)$, $A_0 = L_{2,g}(O_k^-)$, $A_1^0 = \{u \in A_1 : u^{(l)}(x_k) = 0 \ (l = \overline{0, m-1})\}$. Из следствия 3.1 и условия (1) вытекает, что найдется $s_0 > 0$ такое, что

$$A_s = (A_1, A_0)_{1-s,2} = A_s^0 = (A_1^0, A_0)_{1-s,2}.$$

Определим оператор $P_0 : W_s \rightarrow A_s$, $P_0 u = u|_{O_k^-}$. Очевидно, что $P_0 \in L(W_s, A_s)$ для всех s . Определим также оператор

$$P_1 : A_s^0 \rightarrow W_s, \quad P_1 u = \begin{cases} u, & x \in O_k^-, \\ 0, & x \in O_k^+. \end{cases}$$

Также очевидно, что $P_1 \in L(A_s^0, W_s)$ для всех $s \in [0, 1]$. Тогда $P_1 P_0 \in L(W_s)$ при $s < s_0$. Но по построению $P_1 P_0 u = S_k^- u$ или $P_1 P_0 u = S_k^+ u$.

Тем самым операторы S_k^- и S_k^+ принадлежат классу $L(W_s)$ при всех $s < s_0$.

Построим для каждой точки $x_k \in \partial G^+ \cap \partial G^-$ окрестность O_k с вышеприведенными свойствами. Затем построим функции $\varphi_k \in C_0^\infty(O_k)$ такие, что $\varphi_k = 1$ в некоторой окрестности x_k и $\text{supp } \varphi_k' \in G^+ \cup G^-$. По построению окрестностей O_k это возможно. Без ограничения общности можем считать, что различные окрестности O_k не пересекаются и их замыкания не содержат граничных точек a, b . Покажем, что найдется $s_0 > 0$ такое, что оператор

$$S : u \rightarrow \begin{cases} u, & x \in G^+, \\ 0, & x \in G^-, \end{cases}$$

непрерывен как оператор из F_s в F_s для всех $s < s_0$. Возьмем в качестве s_0 минимальную из тех постоянных s_0 , которые были определены в процессе доказательства. Зафиксируем $s < s_0$. Рассмотрим операторы $S_k u = \varphi_k u$. Очевидно, что $S_k \in L(F_1) \cap L(F_0)$ и, следовательно, $S_k \in L(F_s)$ для всех $s \in [0, 1]$. Кроме того, носители функций $R_k u$ лежат в соответствующих окрестностях O_k . Отсюда $S_k \in L(F_s, W_s)$ (пространства W_s меняются от окрестности к окрестности). Тогда по доказанному $S_k^+, S_k \in L(F_s, W_s)$. Построим функции $\tilde{\varphi}_k \in C_0^\infty(O_k)$ такие, что $\tilde{\varphi}_k = 1$ в некоторых окрестностях $\text{supp } \varphi_k$. Легко увидеть, что операторы $\tilde{S}_k : u \rightarrow \tilde{\varphi}_k u$, где функции $\tilde{\varphi}_k u$ действуют на весь интервал (a, b) , обладают свойством $\tilde{S}_k \in L(W_s, F_s)$. Отсюда $\tilde{S}_k S_k^+ S_k \in L(F_s)$.

Рассмотрим оператор

$$P : u \rightarrow \left(1 - \sum_{k=1}^N \varphi_k \right) u(x).$$

Исходя из определений, легко показать, что $P \in L(F_s)$ для всех $s \in [0, 1]$. Кроме того, из построения вытекает, что $SP \in L(F_s)$ для всех $s \in [0, 1]$. Тогда оператор

$$S = SP + \sum_{k=1}^N \tilde{S}_k S_k^+ S_k$$

обладает свойством $S \in L(F_s)$. Воспользовавшись леммой 2.1 и теоремой 2.1, получим требуемое.

Рассмотрим случай нелокальных краевых условий. Пусть, например, точка $x = a$ регулярна. Пусть $(a, a + \delta)$ — искомая окрестность из определения регулярности. Без ограничения общности считаем, что $(a, a + \delta] \subset G^+$ или $(a, a + \delta] \subset G^-$. Возьмем $\varphi(x) \in C^\infty[a, a + \delta]$ такую, что $\text{supp } \varphi(x) \subset [a, a + \delta]$ и $\varphi(x)$ равна 1 на некотором множестве вида $[a, a + \delta_1]$ ($\delta_1 < \delta$). Покажем, что найдется $s_0 > 0$ такое, что оператор $Su = \varphi(x)u(x)$ непрерывен как отображение из F_s в F_s при $s < s_0$. Построим оператор P_1 , сопоставляющий $u \in F_1$ функцию $\varphi(x)u \in \overline{W}_2^m(a, a + \delta) = \{u \in W_2^m(a, a + \delta) : u^{(i)}(a + \delta) = 0, i = 0, 1, \dots, m - 1\}$. Очевидно, что $P_1 \in L(F_1, \overline{W}_2^m(a, a + \delta)) \cap L(L_{2,g}(a, b), L_{2,g}(a, a + \delta))$. Следовательно, $P_1 \in L(F_s, \overline{W}_2^{ms}(a, a + \delta))$, где

$$\overline{W}_2^r(a, a + \delta) = (\overline{W}_2^m(a, a + \delta), L_{2,g}(a, a + \delta))_{1-r/m, 2}.$$

В силу регулярности a найдется $s_0 > 0$ такое, что $\overline{W}_2^{sm}(a, a + \delta) = \overset{\circ}{W}_2^{sm}(a, a + \delta)$ при всех $s < s_0$. Оператор P_2 , сопоставляющий функции $u \in \overset{\circ}{W}_2^{sm}(a, a + \delta)$ ее продолжение нулем на весь интервал (a, b) , обладает свойством $P_2 \in L(\overset{\circ}{W}_2^{sm}(a, a + \delta), F_s)$ для всех s . Тогда оператор $P_2P_1u = Su$ обладает свойством $S \in L(F_s)$ при всех $s < s_0$. Далее повторяем рассуждения для случая локальных краевых условий. Операторы P и SP , использованные в доказательстве, будут в этом случае обладать свойствами $P, SP \in L(F_s)$ при $s < s_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические операторно-дифференциальные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
2. Pyatkov S. G. Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo: VSP, 2002.
3. Karabash I. M. Abstract kinetic equations with positive collision operators. Spectral theory in inner product spaces and applications // Oper. Theory, Adv. Appl. 2008. V. 188. P. 175–196.
4. Shkalikov A. A. On invariant subspaces of dissipative operators in a space with an indefinite metric // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. V. 248, N 1, P. 287–296.

5. *Shkalikov A. A.* Dissipative operators in the Krein space. Invariant subspaces and properties of restrictions // *Funct. Anal. Appl.* 2007. V. 41, N 2. P. 154–167.
6. *Karabash I. M., Kostenko A. S.* Similarity of $(\text{sign } x(\frac{d^2}{dx^2}) + c\delta)$ -type operators to normal and self-adjoint operators // *Math. Notes.* 2003. V. 74, N 1. P. 127–131.
7. *Karabash I., Kostenko A.* Spectral analysis of differential operators with indefinite weights and a local point interaction // *Oper. Theory, Adv. Appl.* 2007. V. 175. P. 169–191.
8. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* Schrödinger operators with δ' -interactions and the Krein–Stieltjes string // *Dokl. Math.* 2010. V. 81, N 3. P. 342–347.
9. *Faddeev M. M., Shterenberg R. G.* On the similarity of some differential operators to self-adjoint ones // *Math. Notes.* 2002. V. 72, N 2. P. 261–270.
10. *Faddeev M. M., Shterenberg R. G.* Similarity of some singular operators to self-adjoint ones // *J. Math. Sci.* 2003. V. 115, N 2. P. 2279–2286.
11. *Karabash I. M.* On the similarity of J -self-adjoint differential operators of odd order to normal operators // *Math. Notes.* 2002. V. 71, N 3. P. 436–440.
12. *Karabash I. M.* On J -self-adjoint differential operators similar to self-adjoint operators // *Math. Notes.* 2000. V. 68, N 6. P. 943–944.
13. *Karabash I. M., Kostenko A. S.* On the similarity of a J -nonnegative Sturm–Liouville operator to a self-adjoint operator // *Funct. Anal. Appl.* 2009. V. 43, N 1. P. 65–68.
14. *Curgus B., Najman B.* The operator $(\text{sign } x)\frac{d^2}{dx^2}$ is similar to self-adjoint operator in $L_2(\mathbb{R})$ // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1995. V. 123. P. 1125–1128.
15. *Karabash I. M., Hassi S.* Similarity between J -self-adjoint Sturm–Liouville operators with operator potential and self-adjoint operators // *Math. Notes.* 2005. V. 78, N 4. P. 581–585.
16. *Kostenko A. S.* Similarity of indefinite Sturm–Liouville operators with singular potential to a self-adjoint operator // *Math. Notes.* 2005. V. 78, N 1. P. 134–139.
17. *Kostenko A. S.* Similarity of some J -nonnegative operators to self-adjoint operators // *Math. Notes.* 2006. V. 80, N 1. P. 131–135.
18. *Karabash I. M., Malamud M. M.* Indefinite Sturm–Liouville operators $\text{sign } x(\frac{d^2}{dx^2} + q(x))$ with finite-zone potentials // *Operators and Matrices.* 2007. V. 1, N 3. P. 301–368.
19. *Goloschapova N., Oridoroga L.* On the negative spectrum of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions // *Integral Equations Oper. Theory.* 2010. V. 67. P. 1–14.
20. *Ismagilov R. S., Kostyuchenko A. G.* Spectral asymptotics for the Sturm–Liouville operator with point interaction // *Funct. Anal. Appl.* 2010. V. 44, N 4. P. 253–258.
21. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* One-dimensional Schrödinger operator with δ -interactions // *Funct. Anal. Appl.* 2010. V. 44, N 2. P. 151–155.
22. *Голошапова Н. И., Заставный В. П., Маламуд М. М.* Положительно определенные функции и спектральные свойства оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями // *Мат. заметки.* 2011. Т. 90, вып. 1. С. 151–156.
23. *Ismagilova R. S., Kostyuchenko A. G.* Asymptotics of the spectrum of the Sturm–Liouville with local interaction // *Dokl. Math.* 2010. V. 82, N 1. P. 596–598.

24. Пятков С. Г., Абашеева Н. Л. Разрешимость краевых задач для дифференциально-операторных уравнений смешанного типа. Вырожденный случай // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 678–693.
25. Парфенов А. И. Об одном критерии вложения интерполяционных пространств и его приложении к индефинитным спектральным задачам // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 810–819.
26. Парфенов А. И. Об условии Чургуса и индефинитных задачах Штурма — Лиувилля // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 1. С. 153–188.
27. Парфенов А. И. Сжимающий оператор и граничные значения. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, Омега Принт, 2005. Препринт № 155.
28. Парфенов А. И. Базисность по Риссу собственных функций индефинитных эллиптических задач: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2005.
29. Triebel H. Interpolation theory, function spaces, differential operators. Berlin: VEB Deutcher Verlag Wiss, 1977.
30. Pyatkov S. G. Elliptic eigenvalue problems with an indefinite weight function // Sib. Adv. Math. 1994. V. 1, N 2. P. 87–104.
31. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
32. Curgus B., Langer H. A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function // J. Differ. Equations. 1989. V. 7, N 5/6. P. 1241–1252.
33. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
34. Pyatkov S. G. Interpolation of some function spaces and indefinite Sturm–Liouville problems // Oper. Theory Adv. Appl. 1998. V. 102. P. 179–200.

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ
АРГУМЕНТОМ С ПАРАМЕТРАМИ*)

И. И. Матвеева, А. А. Щеглова

Рассмотрим системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mu A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t > \tau > 0, \quad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T -периодическими элементами, т. е.

$$A(t + T) \equiv A(t), \quad B(t + T) \equiv B(t),$$

спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ для любого $t \in [0, T]$, $\mu > 0$ — параметр, $F(t, u, v)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u и

$$\|F(t, u, v)\| \leq q_1 \|u\| + q_2 \|v\|^{1+\omega}, \quad q_1, q_2 \geq 0, \quad \omega > 0 \text{ — постоянные.} \quad (2)$$

Исследуем асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1) в зависимости от параметров μ , q_1 , q_2 , ω . Укажем множество притяжения нулевого решения и получим оценки решений системы (1), характеризующие скорость убывания при $t \rightarrow \infty$.

*) Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 16.740.11.0127), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 10-01-00035, № 10-01-00132), СО РАН (междисциплинарный проект № 80) и Программы Президиума РАН (проект 17.1).

§ 1. Предварительные сведения

В настоящее время имеется очень большое число работ по изучению устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, [1–8] и библиографию в этих источниках). В теории устойчивости активно применяется аппарат функций Ляпунова — Разумихина и функционалов Ляпунова — Красовского, основанный на идеях из работ Б. С. Разумихина [9] и Н. Н. Красовского [10].

Уравнения с переменными коэффициентами представляют отдельный интерес. В [11] введен функционал Ляпунова — Красовского, с использованием которого проведены [11, 12] исследования асимптотической устойчивости решений систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t > \tau > 0,$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы с T -периодическими элементами, вектор-функция $F(t, u, v)$ удовлетворяет оценке

$$\|F(t, u, v)\| \leq q\|u\|^{1+\omega}, \quad q, \omega \geq 0.$$

С учетом результатов из [13, 14] в работах [11, 12] получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения, указаны множества притяжения нулевого решения и установлены оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности. Следует отметить, что величины, характеризующие границы множеств притяжения и скорость убывания решений на бесконечности, вычисляются конструктивно. Поэтому полученные результаты эффективно применяются на практике для исследования конкретных систем уравнений с запаздывающим аргументом.

В настоящей работе продолжим исследования асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с периодическими коэффициентами в линейных членах и параметрах. В [12, 15, 16] рассматривались линейные

системы вида (1):

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mu A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau), \quad t > \tau > 0, \quad (3)$$

где были указаны условия асимптотической устойчивости и получены оценки экспоненциального убывания решений. Для формулировки соответствующих утверждений потребуются ввести некоторые обозначения. Поскольку для любого $t \in [0, T]$ спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости \mathbb{C}_- , согласно критерию Ляпунова для любого фиксированного $t \in [0, T]$ существует решение $H(t) = H^*(t) > 0$ матричного уравнения Ляпунова

$$HA(t) + A^*(t)H = -I.$$

Обозначим $H_{\max} = \max_{t \in [0, T]} \|H(t)\|$, $\nu_{\max} = \max_{t \in [0, T]} \nu(H(t))$, где $\nu(H(t)) = \|H(t)\| \|H^{-1}(t)\|$ — число обусловленности матрицы $H(t)$.

Теорема 1. Пусть N такое, что выполнено неравенство

$$\max_{|t-s| \leq \frac{T}{N}} \|A(t) - A(s)\| \leq \frac{1}{4H_{\max} \sqrt{\nu_{\max}}}. \quad (4)$$

Тогда при всех μ , удовлетворяющих неравенству

$$\mu \left(1 - (\nu_{\max})^N \exp \left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}} \right) \right) > 4e^{\tau/2} H_{\max} (\nu_{\max})^N \max_{t \in [0, T]} \|B(t)\|, \quad (5)$$

нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим для системы (3) следующую начальную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= \mu A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau), \quad t > \tau, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [0, \tau], \quad y(\tau + 0) = \varphi(\tau), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varphi(t) \in C[0, \tau]$ — заданная вектор-функция.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения задачи (6) имеет место оценка

$$\|y(t)\|^2 \leq l_1^{-1}(t) \exp \left(-\int_{\tau}^t \frac{\varepsilon(\xi)}{\|L(\xi)\|} d\xi \right) v(\tau, \varphi), \quad t > \tau,$$

где $L(t)$ — T -периодическое продолжение решения краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}L + \mu LA(t) + \mu A^*(t)L = -I, & 0 < t < T, \\ L(0) = L(T) > 0, \end{cases} \quad (7)$$

$l_1(t) > 0$ — минимальное собственное число матрицы $L(t)$,

$$\varepsilon(t) = \min \left\{ \frac{1}{2} - 2e^\tau \|B(t)\|^2 \|L(t)\|^2, \|L(t)\| \right\} > 0,$$

$$v(\tau, \varphi) = \langle L(\tau)\varphi(\tau), \varphi(\tau) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^\tau e^{-(\tau-s)} \|\varphi(s)\|^2 ds.$$

Следует отметить, что условия теоремы 1 гарантируют однозначную разрешимость краевой задачи (7) для дифференциального уравнения Ляпунова. Действительно, как показано в [15], при всех $\mu > \frac{2NH_{\max}}{T} \ln \nu_{\max}$ нулевое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}y = \mu A(t)y, \quad t > 0,$$

асимптотически устойчиво. Тогда в силу критерия асимптотической устойчивости [13] при таких значениях параметра μ краевая задача (7) имеет единственное решение $L(t) = L^*(t) > 0$. Причем, как показано в [15], имеет место оценка

$$\|L(t)\| \leq \frac{2H_{\max} (\nu_{\max})^N}{\mu} \left(1 - (\nu_{\max})^N \exp\left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}}\right) \right)^{-1}. \quad (8)$$

Очевидно, если μ удовлетворяет неравенству (5), то $\mu > \frac{2NH_{\max}}{T} \ln \nu_{\max}$.

В [16] рассматривались нелинейные системы вида (1), где вектор-функция $F(t, u, v)$ удовлетворяет оценке (2) с $\omega = 0$. На параметры μ , q_1 и q_2 указаны условия, при которых можно гарантировать асимптотическую устойчивость нулевого решения системы, и получены оценки экспоненциального убывания решений. Цель настоящей работы — провести исследования асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), указать множество притяжения нулевого решения и получить оценки решений системы (1), характеризующие скорость убывания при $t \rightarrow \infty$.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Г. В. Демиденко за полезные дискуссии.

§ 2. Основные результаты

В этом параграфе докажем основное утверждение работы.

Теорема 3. Пусть N такое, что выполнено (4), $0 < \alpha < 1$ и параметры μ , q_1 , q_2 удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} & \mu \left(1 - (\nu_{\max})^N \exp \left(- \frac{\mu T}{2H_{\max}} \right) \right) > 2H_{\max} (\nu_{\max})^N \\ & \times \left(\sqrt{(q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2})^2 + \frac{4}{1-\alpha} e^\tau \max_{t \in [0, T]} \|B(t)\|^2} + (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво и множество вещественнозначных функций

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \left\{ \varphi(t) \in C[0, \tau] : \max \left\{ (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \left(\max_{t \in [0, \tau]} \|\varphi(t)\| \right)^{2\omega}, \right. \right. \\ \left. \left. (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \left(\frac{v(\tau, \varphi)}{\min_{t \in [0, T]} l_1(t)} \right)^\omega \right\} \leq \min_{t \in [0, T]} \left(\frac{\alpha e^{-\tau}}{2\|L(t)\|} \right) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

является множеством притяжения нулевого решения. При этом для решения системы (1) с начальными данными $\varphi(t) \in \mathcal{E}$ имеет место оценка

$$\|y(t)\|^2 \leq l_1^{-1}(t) \exp \left(- \int_{\tau}^t \frac{\delta(\xi)}{\|L(\xi)\|} d\xi \right) v(\tau, \varphi),$$

где

$$\delta(t) = \min \left\{ \frac{1}{2} - \frac{2}{1-\alpha} e^\tau \|B(t)\|^2 \|L(t)\|^2 - (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \|L(t)\|, \|L(t)\| \right\}. \quad (11)$$

Доказательство. По аналогии с [12] определим следующий функционал Ляпунова — Красовского:

$$v(t, y) = \langle L(t)y(t), y(t) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t e^{-(t-s)} \|y(s)\|^2 ds, \quad (12)$$

где $L(t)$ — T -периодическое продолжение решения задачи (7). Дифференцируя по t вдоль решения $y(t)$ системы (1), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t, y) \equiv & \left\langle \left(\frac{d}{dt}L(t) + \mu L(t)A(t) + \mu A^*(t)L(t) + \frac{1}{2}I \right) y(t), y(t) \right\rangle \\ & + \langle L(t)B(t)y(t-\tau), y(t) \rangle + \langle B^*(t)L(t)y(t), y(t-\tau) \rangle \\ & - \frac{1}{2}e^{-\tau} \|y(t-\tau)\|^2 - \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t e^{-(t-s)} \|y(s)\|^2 ds \\ & + 2 \operatorname{Re} \langle L(t)F(t, y(t), y(t-\tau)), y(t) \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку $L(t)$ является решением задачи (7), полученное тождество можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t, y) \equiv & - \left\langle C(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ & - \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t e^{-(t-s)} \|y(s)\|^2 ds + 2 \operatorname{Re} \langle L(t)F(t, y(t), y(t-\tau)), y(t) \rangle, \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$C(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I & -L(t)B(t) \\ -B^*(t)L(t) & \frac{1}{2}e^{-\tau}I \end{pmatrix}.$$

В силу (2) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t, y) \leq & - \left\langle C(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle - \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t e^{-(t-s)} \|y(s)\|^2 ds \\ & + (2q_1 \|y(t)\|^2 + 2q_2 \|y(t-\tau)\|^{1+\omega} \|y(t)\|) \|L(t)\|. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что для любого $0 \leq \alpha < 1$

$$C(t) \geq \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - \frac{2}{1-\alpha} e^\tau L(t)B(t)B^*(t)L(t) & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} e^{-\tau}I \end{pmatrix}.$$

Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t, y) \leq & -c_1(t) \|y(t)\|^2 - c_2 \|y(t-\tau)\|^2 - \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t e^{-(t-s)} \|y(s)\|^2 ds \\ & + (2q_1 \|y(t)\|^2 + 2q_2 \|y(t-\tau)\|^{1+\omega} \|y(t)\|) \|L(t)\|, \end{aligned}$$

где

$$c_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{1-\alpha} e^\tau \|B(t)\|^2 \|L(t)\|^2, \quad c_2 = \frac{\alpha}{2} e^{-\tau}. \quad (14)$$

Нетрудно показать, что имеет место оценка

$$\begin{aligned} 2q_1 \|y(t)\|^2 + 2q_2 \|y(t-\tau)\|^{1+\omega} \|y(t)\| \\ \leq (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) (\|y(t)\|^2 + \|y(t-\tau)\|^{2+2\omega}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(t, y) &\leq -c_1(t) \|y(t)\|^2 - c_2 \|y(t-\tau)\|^2 - \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t e^{-(t-s)} \|y(s)\|^2 ds \\ &\quad + (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) (\|y(t)\|^2 + \|y(t-\tau)\|^{2+2\omega}) \|L(t)\| \\ &= -(c_1(t) - (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \|L(t)\|) \|y(t)\|^2 - \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t e^{-(t-s)} \|y(s)\|^2 ds \\ &\quad - (c_2 - (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \|y(t-\tau)\|^{2\omega} \|L(t)\|) \|y(t-\tau)\|^2. \quad (15) \end{aligned}$$

Пусть $t \in [\tau, 2\tau]$. Тогда $y(t-\tau) = \varphi(t-\tau)$. Если $\varphi(t)$ принадлежит множеству \mathcal{E} , определенному в (10), то с учетом обозначений (14)

$$c_2 - (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \|\varphi(t-\tau)\|^{2\omega} \|L(t)\| \geq 0, \quad t \in [\tau, 2\tau].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(t, y) &\leq -(c_1(t) - (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \|L(t)\|) \|y(t)\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t e^{-(t-s)} \|y(s)\|^2 ds, \quad t \in [\tau, 2\tau]. \quad (16) \end{aligned}$$

Заметим, что при выполнении условия (9) справедливо неравенство

$$c_1(t) - (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \|L(t)\| > 0, \quad t \geq 0.$$

Действительно, в силу (8) и (9) при $t \geq 0$ имеем

$$\|L(t)\| < \left(\sqrt{(q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2})^2 + \frac{4}{1-\alpha} e^\tau \|B(t)\|^2} + (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \right)^{-1}.$$

Следовательно, с учетом обозначений (14) получаем

$$c_1(t) - (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \|L(t)\| = \frac{1}{2} - \frac{2}{1-\alpha} e^\tau \|B(t)\|^2 \|L(t)\|^2 - (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \|L(t)\| > 0, \quad t \geq 0.$$

Учитывая определение функционала $v(t, y)$, имеем оценку

$$\frac{d}{dt} v(t, y) \leq -\frac{\delta(t)}{\|L(t)\|} v(t, y),$$

где $\delta(t) > 0$ определено в (11). Отсюда при $t \in [\tau, 2\tau]$ получаем неравенство

$$v(t, y) \leq \exp\left(-\int_{\tau}^t \frac{\delta(\xi)}{\|L(\xi)\|} d\xi\right) v(\tau, \varphi). \quad (17)$$

В силу определения функционала (12) из полученной оценки при $t \in [\tau, 2\tau]$ имеем

$$\|y(t)\|^2 \leq l_1^{-1}(t) \exp\left(-\int_{\tau}^t \frac{\delta(\xi)}{\|L(\xi)\|} d\xi\right) v(\tau, \varphi). \quad (18)$$

Пусть $t \in [2\tau, 3\tau]$. Тогда из указанной выше оценки вытекает неравенство

$$\|y(t-\tau)\|^2 \leq l_1^{-1}(t-\tau) \exp\left(-\int_{\tau}^{t-\tau} \frac{\delta(\xi)}{\|L(\xi)\|} d\xi\right) v(\tau, \varphi). \quad (19)$$

Если $\varphi(t) \in \mathcal{E}$, то нетрудно показать, что

$$c_2 - (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \|y(t-\tau)\|^{2\omega} \|L(t)\| \geq 0. \quad (20)$$

Действительно, в силу (19) получаем

$$\|y(t-\tau)\|^{2\omega} \leq \left(\min_{t \in [0, T]} l_1(t)\right)^{-\omega} v^\omega(\tau, \varphi).$$

Если $\varphi(t) \in \mathcal{E}$, то с учетом обозначений (14) справедлива оценка

$$(q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}) \left(\min_{t \in [0, T]} l_1(t)\right)^{-\omega} v^\omega(\tau, \varphi) \leq \min_{t \in [0, T]} \left(\frac{c_2}{\|L(t)\|}\right).$$

Отсюда получаем (20). Тем самым из (15) следует неравенство

$$\frac{d}{dt}v(t, y) \leqslant -(c_1(t) - (q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2})\|L(t)\|)\|y(t)\|^2 - \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t e^{-(t-s)} \|y(s)\|^2 ds, \quad t \in [2\tau, 3\tau].$$

С учетом (16) оно верно при $t \in [\tau, 3\tau]$. Проводя рассуждения, изложенные выше, при $t \in [\tau, 3\tau]$ получаем (17) и (18).

Повторяя аналогичные рассуждения, получаем оценку (18) при $t \geqslant \tau$, из которой вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1).

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $q_1 = q_2 = 0$, то утверждение теоремы 3 совпадает с утверждениями теорем 1 и 2, поскольку в этом случае можно взять $\alpha = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
3. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
5. Корневский Д. Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наук. думка, 1989.
6. Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D. Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. (Math. Appl.; V. 463.)
7. Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of time-delay systems. Control engineering. Boston: Birkhäuser, 2003.
8. Michiels W., Niculescu S. I. Stability and stabilization of time-delay systems. An eigenvalue-based approach. Philadelphia: Soc. Industr. Appl. Math., 2007. (Adv. Des. Control; V. 12.)
9. Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 4. С. 500–512.

10. Красовский Н. Н. О применении второго метода А. М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 3. С. 315–327.
11. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, вып. 3. С. 20–28.
12. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
13. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.
14. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1271–1284.
15. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об асимптотической устойчивости решений систем дифференциально-разностных уравнений с параметром. Новосибирск, 2009. 14 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 231).
16. Матвеева И. И., Щеглова А. А. Оценки решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 83–92.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА^{*)}

Н. Н. Николаев

Работа посвящена исследованию разрешимости линейных обратных задач для уравнений третьего порядка, называемых *эллиптико-параболическими*, или же $(2l + 1)$ -*параболическими* (при $l = 0$ эти уравнения являются обычными параболическими) [1, 2]. Заметим, что для параболических уравнений линейные и нелинейные обратные задачи хорошо изучены (см., например, [3–7]), но для $(2l + 1)$ -параболических при $l > 0$ это не так.

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой границей Γ , $S = \Gamma \times (0, T)$, Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T . Далее, пусть $h_k(x, t)$, $k = 1, \dots, m$, $h(x, t)$, $c(x)$, $f(x, t)$, $K(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, t_1, \dots, t_m — заданные числа такие, что $0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$.

Обратная задача I. Найти функции $u(x, t)$, $q_1(x), \dots, q_m(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{ttt} + \Delta u - c(x)u = f(x, t) + \sum_{k=1}^m q_k(x)h_k(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ краевых условий

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

^{*)} Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК № 02.740.11.0609).

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (3)$$

а также условий переопределения

$$u(x, t_k) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Обратная задача II. Найти функции $u(x, t)$ и $q(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{ttt} + \Delta u - c(x)u = f(x, t) + q(x)h(x, t), \quad (5)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ краевых условий (2), (3), а также условия переопределения

$$\int_0^T K(t)u(x, t) dt = 0, \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Рассмотрим обратную задачу I. Выполним некоторые формальные действия. Положим в (1) поочередно $t = t_j$, $j = 1, \dots, m$, и пусть определитель матрицы $\{h_k(x, t_j)\}_{k,j=1}^m$ отличен от нуля всюду в $\bar{\Omega}$. Тогда после несложных выкладок нетрудно получить равенства

$$q_k(x) = \alpha_k(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{kj}(x)u_{ttt}(x, t_j), \quad k = 1, \dots, m, \quad (7)$$

с некоторыми вполне определенными функциями $\alpha_k(x)$ и $\beta_{kj}(x)$, вычисляемыми через функции $f(x, t_j)$ и $h_k(x, t_j)$, $k, j = 1, \dots, m$.

Подставляя (7) в (1), получим «нагруженное» [8, 9] уравнение

$$u_{ttt} + \Delta u - c(x)u = f_1(x, t) + \sum_{k=1}^m h_{1k}(x, t)u_{ttt}(x, t_k), \quad (8)$$

где

$$f_1(x, t) = f(x, t) + \sum_{k=1}^m \alpha_k(x)h_k(x, t), \quad h_{1k}(x, t) = \sum_{j=1}^m \beta_{jk}(x)h_j(x, t).$$

Пусть выполняются условия

$$f(x, 0) = f_t(x, 0) = f(x, T) = 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$h_k(x, 0) = h_{kt}(x, 0) = h_k(x, T) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad k = 1, \dots, m.$$

При этом имеют место равенства

$$u_{ttt}(x, 0) = u_{tttt}(x, 0) = u_{ttt}(x, T) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (9)$$

Дифференцируя уравнение (8) трижды по t , обозначая $v(x, t) = u_{ttt}(x, t)$, $\tilde{h}_k(x, t) = h_{1kttt}(x, t)$, а также учитывая равенства (9), приходим к следующей задаче: *найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$v_{ttt} + \Delta v - c(x)v = g(x, t) + \sum_{k=1}^m \tilde{h}_k(x, t)v(x, t_k) \quad (10)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$v(x, 0) = v_t(x, 0) = v(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (11)$$

$$v(x, t)|_S = 0. \quad (12)$$

Покажем, что эта задача разрешима при определенных условиях в пространстве $V = W_2^{2,3}(Q)$. Для этого воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим задачу: *найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$v_{ttt} + \Delta v - c(x)v = g(x, t) + \lambda \left[\sum_{k=1}^m \tilde{h}_k(x, t)v(x, t_k) \right] \quad (13)$$

и такую, что для нее выполняются условия (11) и (12).

Если при $\lambda = 0$ задача разрешима в пространстве V и имеет место априорная оценка в том же пространстве, то задача разрешима при $\lambda \in [0, 1]$ [10].

Для краткости обозначим $\Phi(x, t) = \sum_{k=1}^m \tilde{h}_k(x, t)v(x, t_k)$.

При $\lambda = 0$ задача разрешима в пространстве V [1, 2, 11].

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} (v_{\tau\tau\tau} + \Delta v - c(x)v)(v_{\tau\tau\tau} + \Delta v) dx d\tau \\ &= \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \Phi(v_{\tau\tau\tau} + \Delta v) dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} g(x, \tau)(v_{\tau\tau\tau} + \Delta v) dx d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Применяя формулу интегрирования по частям, а также учитывая краевые условия (11), (12), данное равенство можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} v_{\tau\tau\tau}^2 dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i t}^2(x, T) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x)v_t^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} c(x)v_{x_i}^2 dx d\tau - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta c(x)v^2 dx d\tau \\ &= \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \Phi(v_{\tau\tau\tau} + \Delta v) dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} g(x, \tau)(v_{\tau\tau\tau} + \Delta v) dx d\tau. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга, полученное равенство можем преобразовать в неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} v_{\tau\tau\tau}^2 dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i t}^2(x, T) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x)v_t^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} c(x)v_{x_i}^2 dx d\tau - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta c(x)v^2 dx d\tau \\ &\leq \frac{\delta_1^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} v_{\tau\tau\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_0^T \int_{\Omega} g^2(x, \tau) dx d\tau + \frac{\delta_2^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx d\tau \\ &+ \frac{1}{2\delta_2^2} \int_0^T \int_{\Omega} g^2(x, \tau) dx d\tau + \frac{\delta_3^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} v_{\tau\tau\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2\delta_3^2} \int_0^T \int_{\Omega} \Phi^2 dx d\tau \end{aligned}$$

$$+ \frac{\delta_4^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx d\tau + \frac{1}{2\delta_4^2} \int_0^T \int_{\Omega} \Phi^2 dx d\tau.$$

Положим $h_{k,0} = \max_{\bar{Q}} |\tilde{h}_k(x, t)|$. Тогда

$$\Phi^2 = \left(\sum_{k=1}^m \tilde{h}_k(x, t) v(x, t_k) \right)^2 \leq m \sum_{k=1}^m h_{k,0}^2 v^2(x, t_k),$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \Phi^2 dx d\tau &\leq m \sum_{k=1}^m h_{k,0}^2 \int_0^T \int_{\Omega} v^2(x, t_k) dx dt \\ &= mT \sum_{k=1}^m h_{k,0}^2 \int_{\Omega} v^2(x, t_k) dx. \end{aligned}$$

Имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} v^2(x, t) dx \leq 2T^4 (1 + T^2) \int_0^T \int_{\Omega} v_{\tau\tau\tau}^2 dx d\tau.$$

Учитывая его, получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega} v_{\tau\tau\tau}^2 dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i t}^2(x, T) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x) v_t^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} c(x) v_{x_i}^2 dx d\tau - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta c(x) v^2 dx d\tau \\ &\leq \frac{\delta_1^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} v_{\tau\tau\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_0^T \int_{\Omega} g^2(x, \tau) dx d\tau + \frac{\delta_2^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2\delta_2^2} \int_0^T \int_{\Omega} g^2(x, \tau) dx d\tau + \frac{\delta_3^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} v_{\tau\tau\tau}^2 dx d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\delta_3^2} 2mT^5(1+T^2) \sum_{k=1}^m h_{k,0}^2 \int_0^T \int_{\Omega} v_{\tau\tau\tau}^2 dx d\tau + \frac{\delta_4^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx d\tau \\
 & + \frac{1}{2\delta_4^2} 2mT^5(1+T^2) \sum_{k=1}^m h_{k,0}^2 \int_0^T \int_{\Omega} v_{\tau\tau\tau}^2 dx d\tau.
 \end{aligned}$$

Положим $K_0 = 2mT^5(1+T^2) \sum_{k=1}^m h_{k,0}^2$, и пусть $K_0 < \frac{1}{2}$.

Пусть выполняются условия

$$c(x) \geq c_0 > 0, \quad \Delta c(x) \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Зафиксируем $\delta_1 - \delta_4$:

$$\frac{\delta_1^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - K_0 \right), \quad \frac{\delta_2^2}{2} = \frac{1}{4}, \quad \delta_3 = \delta_4 = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_{\Omega} v_{\tau\tau\tau}^2 dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i t}^2(x, T) dx + \int_{\Omega} v_t^2(x, T) dx \\
 & + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} v_{x_i}^2 dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} v^2 dx d\tau \leq C \|g\|_{L_2(Q)}^2, \quad (15)
 \end{aligned}$$

где C — постоянная, зависящая от функций $\tilde{h}_k(x, t)$, $k = 1, \dots, m$.

Из оценки (15) согласно теореме о методе продолжения по параметру [10] следует, что краевая задача (13), (11), (12) разрешима в пространстве V при всех λ из отрезка $[0, 1]$. В частности, получаем, что разрешимой в пространстве V будет задача (10)–(12).

Покажем, что с помощью решения $v(x, t)$ можно построить решение $\{u(x, t), q_1(x), \dots, q_m(x)\}$ исходной обратной задачи (1)–(4). Имеем

$$v(x, t) = u_{ttt}(x, t),$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u(x, t)|_S = 0.$$

Из этих равенств находим функцию $u(x, t)$. Далее, имеет место равенство

$$\frac{d^3}{dt^3} \left(u_{ttt} + \Delta u - c(x)u - f_1(x, t) - \sum_{k=1}^m h_{1k}(x, t)u_{ttt}(x, t_k) \right) = 0.$$

Положим

$$\omega(x, t) = u_{ttt} + \Delta u - c(x)u - f_1(x, t) - \sum_{k=1}^m h_{1k}(x, t)u_{ttt}(x, t_k).$$

Для $\omega(x, t)$ выполняются соотношения

$$\omega(x, 0) = \omega(x, T) = \omega_t(x, 0) = 0.$$

Отсюда $\omega(x, t) \equiv 0$ в Q . Следовательно, функция $u(x, t)$ является в Q решением уравнения (8).

Выполнение для функции $u(x, t)$ условий переопределения (4) показывается так же, как и в [6].

Тем самым имеет место

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$f(x, t), f_t(x, t), f_{tt}(x, t), f_{ttt}(x, t) \in L_2(Q),$$

$$h_k(x, t), h_{kt}(x, t), h_{ktt}(x, t), h_{kttt}(x, t) \in L_2(Q), \quad k = 1, \dots, m,$$

$$f(x, 0) = f_t(x, 0) = f(x, T) = 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$h_k(x, 0) = h_{kt}(x, 0) = h_k(x, T) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad k = 1, \dots, m,$$

$$c(x) \geq c_0 > 0, \quad \Delta c(x) \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$2mT^5(1 + T^2) \sum_{k=1}^m h_{k,0}^2 < \frac{1}{2},$$

$$|\det (\{h_k(x, t_j)\}_{k,j=1}^m)| \geq m_0 > 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Тогда обратная задача (1)–(4) имеет решение $\{u(x, t), q_1(x), \dots, q_m(x)\}$ такое, что

$$u(x, t) \in V, \quad q_k(x) \in L_2(\Omega), \quad k = 1, \dots, m.$$

Перейдем к обратной задаче II.

Умножим уравнение (5) на $K(t)$ и проинтегрируем его по t . Получим

$$\begin{aligned} \int_0^T K(t)u_{ttt} dt + \int_0^T K(t)\Delta u dt - c(x) \int_0^T K(t)u dt \\ = \int_0^T K(t)f(x,t) dt + q(x) \int_0^T K(t)h(x,t) dt. \end{aligned}$$

Используя условие (6), перепишем полученное равенство в виде

$$\int_0^T K(t)u_{ttt} dt = \alpha_1(x) + q(x)\beta_1(x),$$

где

$$\alpha_1(x) = \int_0^T K(t)f(x,t) dt, \quad \beta_1(x) = \int_0^T K(t)h(x,t) dt.$$

Отсюда найдем $q(x)$:

$$q(x) = \frac{1}{\beta_1(x)} \left(-\alpha_1(x) + \int_0^T K(t)u_{ttt} dt \right) = \tilde{\alpha}(x) + \tilde{\beta}(x) \int_0^T K(t)u_{ttt} dt,$$

где $\tilde{\alpha}(x) = -\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, $\tilde{\beta}(x) = \frac{1}{\beta_1(x)}$ и $\beta_1(x) \neq 0$ при $x \in \bar{\Omega}$. Подставим $q(x)$ в исходное уравнение (5). Получим

$$u_{ttt} + \Delta u - c(x)u = f(x,t) + \left(\tilde{\alpha}(x) + \tilde{\beta}(x) \int_0^T K(t)u_{ttt} dt \right) h(x,t).$$

Обозначим

$$\tilde{f}(x,t) = f(x,t) + \tilde{\alpha}(x)h(x,t), \quad \tilde{h}(x,t) = \tilde{\beta}(x)h(x,t).$$

Тогда получим следующую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{ttt} + \Delta u - c(x)u = \tilde{f}(x,t) + \tilde{h}(x,t) \int_0^T K(\tau)u_{\tau\tau\tau} d\tau, \quad (16)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ краевых условий (2)–(3).

Покажем, что эта задача разрешима при определенных условиях в пространстве $V = W_2^{2,3}(Q)$. Для доказательства ее разрешимости вновь воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{ttt} + \Delta u - c(x)u = \tilde{f}(x, t) + \lambda \tilde{h}(x, t) \int_0^T K(\tau) u_{\tau\tau\tau} d\tau \quad (17)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3).

Если при $\lambda = 0$ задача разрешима в пространстве V и имеет место априорная оценка в том же пространстве, то задача разрешима при $\lambda \in [0, 1]$ [10]. При $\lambda = 0$ задача разрешима в пространстве V [1, 2, 11].

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (u_{ttt} + \Delta u - c(x)u)(u_{ttt} + \Delta u) dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{f}(x, t)(u_{ttt} + \Delta u) dx dt \\ &+ \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{h}(x, t) \left(\int_0^T K(\tau) u_{\tau\tau\tau} d\tau \right) (u_{ttt} + \Delta u) dx dt. \end{aligned}$$

Применяя формулу интегрирования по частям, а также учитывая краевые условия (2), (3), данное равенство можно привести к виду

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u_{ttt}^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, T) dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x) u_i^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} c(x) u_{x_i}^2 dx dt \\ - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta c(x) u^2 dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{f}(x, t)(u_{ttt} + \Delta u) dx dt \end{aligned}$$

$$+ \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{h}(x, t) \left(\int_0^T K(\tau) u_{\tau\tau\tau} d\tau \right) (u_{ttt} + \Delta u) dx dt.$$

Используя неравенства Юнга и Гёльдера, полученное равенство можем преобразовать в неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} u_{ttt}^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, T) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x) u_t^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} c(x) u_{x_i}^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta c(x) u^2 dx dt \\ & \leq \frac{\delta_1^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} u_{ttt}^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{f}^2(x, t) dx dt + \frac{\delta_2^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx dt \\ & \quad + \frac{1}{2\delta_2^2} \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{f}^2(x, t) dx dt + \frac{\delta_3^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} u_{ttt}^2 dx dt \\ & \quad + \frac{1}{2\delta_3^2} \int_{\Omega} \left(\int_0^T \tilde{h}^2(x, t) dt \right) \left(\int_0^T K^2(t) dt \right) \left(\int_0^T u_{ttt}^2(x, t) dt \right) dx \\ & \quad + \frac{\delta_4^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx dt \\ & \quad + \frac{1}{2\delta_4^2} \int_{\Omega} \left(\int_0^T \tilde{h}^2(x, t) dt \right) \left(\int_0^T K^2(t) dt \right) \left(\int_0^T u_{ttt}^2(x, t) dt \right) dx. \end{aligned}$$

Положим

$$H_0 = \max_{\bar{Q}} \int_0^T \tilde{h}^2(x, t) dt, \quad K_0 = \max_{\bar{Q}} \int_0^T K^2(t) dt, \quad M_0 = H_0 K_0,$$

и пусть $M_0 < \frac{1}{2}$. Пусть выполняются условия

$$c(x) \geq c_0 > 0, \quad \Delta c(x) \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Зафиксируем δ_1 – δ_4 :

$$\frac{\delta_1^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - M_0 \right), \quad \frac{\delta_2^2}{2} = \frac{1}{4}, \quad \delta_3 = \delta_4 = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} u_{itt}^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, T) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, T) dx \\ & + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} u_{x_i}^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} u^2 dx dt \leq C_1 \|\tilde{f}\|_{L_2(Q)}^2, \quad (18) \end{aligned}$$

где C_1 — постоянная, зависящая от функции $h(x, t)$ и $K(t)$.

Из оценки (18) согласно теореме о методе продолжения по параметру следует, что краевая задача (17), (2), (3) разрешима в пространстве V при всех λ из отрезка $[0, 1]$. В частности, получаем, что разрешимой в пространстве V будет задача (16), (2), (3). Решение $u(x, t)$ этой задачи и функция $q(x)$, определенная равенством

$$q(x) = \tilde{\alpha}(x) + \tilde{\beta}(x) \int_0^T K(t) u_{ttt} dt,$$

дадут исходное решение обратной задачи II. Выполнение условия переопределения показывается так же, как и в [7].

Обозначим

$$H_0 = \max_{\bar{Q}} \int_0^T \tilde{h}^2(x, t) dt, \quad K_0 = \max_{\bar{Q}} \int_0^T K^2(t) dt.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad h(x, t) \in L_2(Q),$$

$$|\beta_1(x)| \geq \bar{\beta}_1 > 0, \quad c(x) \geq c_0 > 0, \quad \Delta c(x) \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$H_0 K_0 < \frac{1}{2}.$$

Тогда обратная задача (5), (2), (3), (6) имеет решение $u(x, t), q(x)$ такое, что

$$u(x, t) \in V, \quad q(x) \in L_2(\Omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы следует из вышеприведенных рассуждений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубинский Ю. А. Квазилинейные эллипτικο-параболические уравнения // Мат. сб. 1968. Т. 77, № 3. С. 354–389.
2. Дубинский Ю. А. Краевые задачи для некоторых классов дифференциально-операторных уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 1. С. 32–34.
3. Prileko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York; Basel: Marcel Dekker, Inc., 1999.
4. Ivanchoy M. Inverse problems for equations of parabolic type. L'viv: VNTL Publ., 2003.
5. Belov Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
6. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
7. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 6. С. 840–853.
8. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995.
9. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теорет. и прикл. математики, 1995.
10. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
11. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ
ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ
УСЛОВИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА*)

Н. С. Попов

Введение

Нелокальные краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе активно изучаются в последнее время, но при этом в основном рассматривается лишь одномерный по пространственным переменным случай (см. [1–7]). В многомерном случае исследования подобных задач ранее относились к параболическим [8–10] и гиперболическим уравнениям [11]. Многомерные псевдопараболические задачи с интегральным условием на боковой границе ранее не изучались.

Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ ($0 < T < +\infty$), $S = \Gamma \times (0, T)$ — его боковая граница, $a(x, t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ — функции, заданные в цилиндре \overline{Q} , $u_0(x)$ — функция,

*) Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК № 02.740.11.0609).

заданная на множестве $\bar{\Omega}$, $K(x, y, t)$ — функция, заданная при $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial t}(u - \Delta u) - a(x, t)\Delta u + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t) dy \Big|_{(x,t) \in S}. \quad (3)$$

Краевая задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и условие

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} \Big|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t) dy \Big|_{(x,t) \in S}, \quad (4)$$

где $\nu(x) = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке.

Разрешимость краевой задачи I

Определим оператор M по формуле

$$(Mu)(x, t) = u(x, t) - \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t) dy.$$

Оператор M однозначно и непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0, T]$, и существуют положительные постоянные m_1, m_2 такие, что выполняются неравенства

$$m_1 \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} [Mu(x, t)]^2 dx \leq m_2 \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \quad (5)$$

при любых $t \in [0, T]$ и $u(x, t) \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$.

Пусть

$$V = \{v(x, t) : v \in W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)), v_t \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))\}$$

— пространство с нормой

$$\|v\|_V = \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v_t\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))}.$$

Введем обозначения

$$LMu(x, t) - MLu(x, t) = \Phi(x, t, u), \quad w = Mu$$

и будем рассматривать уравнение относительно w :

$$Lw = g(x, t) + \Phi(x, t, M^{-1}w),$$

где $g(x, t) = Mf$, которое, как показано ниже, эквивалентно исходному уравнению (1).

Имеем

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, u) = & \int_{\Omega} [-K_t(x, y, t) + \Delta_x K_t(x, y, t) + a(x, t)\Delta_x K(x, y, t) \\ & - c(x, t)K(x, y, t) + c(y, t)K(x, y, t)]u(y, t) dy \\ & + \int_{\Omega} \Delta_x K(x, y, t)u_t(y, t) dy - \int_{\Omega} K(x, y, t)a(y, t)\Delta_y u(y, t) dy \\ & - \int_{\Omega} K(x, y, t)\Delta_y u_t(y, t) dy. \end{aligned}$$

Пусть

$$w_0(x) = u_0(x) - \int_{\Omega} K(x, y, 0)u_0(y) dy,$$

и введем обозначения

$$\begin{aligned} P_0 &= \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (\Delta_x K)^2(x, y, \tau) dx dy, \\ Q_0 &= \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} K^2(x, y, \tau) dx dy. \end{aligned} \tag{6}$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (5),

$$\begin{aligned} a(x, t), c(x, t) &\in C^1(\bar{Q}), \\ a(x, t) &\geq a_0 > 0, \quad c(x, t) \geq c_0 > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \bar{Q}; \\ K(x, y, t) &\in C^3(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0, T]), \\ 1 - \delta_0^2 - \frac{P_0}{\delta_0^2 m_1} &> 0, \quad 1 - \frac{Q_0}{\delta_0^2 m_1} > 0 \quad \text{при } \delta_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \\ f(x, t) &\in L_2(Q), \quad w_0(x) \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega). \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда краевая задача I имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V , и это решение единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lw = g(x, t) + \Phi_1(x, t, w) \quad (8)$$

и удовлетворяющую условиям

$$w(x, t)|_S = 0, \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

где

$$u(x, 0) - \int_{\Omega} K(x, y, 0)u(y, 0) dy = u_0(x) - \int_{\Omega} K(x, y, 0)u_0(y) dy = w_0(x),$$

$$\Phi_1(x, t, w) = \Phi(x, t, M^{-1}w).$$

Докажем, что при выполнении условий теоремы краевая задача (8), (9) разрешима в классе $W = \{v(x, t) : v(x, t) \in V, w(x, t) = Mv(x, t) \in V\}$ для любой функции $g(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$. Воспользуемся методом продолжения по параметру. Именно, для чисел λ из отрезка $[0, 1]$ определим семейство операторов $\{L_\lambda\}$: $L_\lambda w = g + \lambda\Phi_1(x, t, w)$. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$L_\lambda w = g(x, t) + \lambda\Phi_1(x, t, w) \quad (7_\lambda)$$

при выполнении условий (9). Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача (7 $_{\lambda}$), (9) разрешима в классе W для произвольной функции $g(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$. Покажем, что множество Λ совпадает со всем отрезком $[0, 1]$, а это, в свою очередь, означает разрешимость краевой задачи (8), (9) в требуемом классе.

Убедимся прежде всего, что множество Λ непусто. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lw = g(x, t)$$

при выполнении условий (9).

Как следует из результатов работ [12–14], при выполнении условий теоремы эта задача имеет решение, принадлежащее пространству V .

Пусть $w(x, t)$ — решение краевой задачи (7 $_{\lambda}$), (9) из пространства V . Если имеет место априорная оценка в том же пространстве V , то задача разрешима при $\lambda \in [0, 1]$ (см. [15]).

Для получения априорной оценки умножим уравнение (7 $_{\lambda}$), записанное в переменных x и τ , на функцию $w_{\tau} - \Delta w_{\tau}$ и результат проинтегрируем по области Ω и по переменной τ в пределах от 0 до t . Таким образом, преобразуем равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} L_{\lambda} w (w_{\tau} - \Delta w_{\tau}) dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} (g + \lambda \Phi_1) (w_t - \Delta w_{\tau}) dx d\tau.$$

Интегрируя по частям, с учетом краевых условий (9) придем к равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} \left[(w_{\tau})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (w_{x_i \tau})^2 + (\Delta w_{\tau})^2 \right] dx dt \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta w)^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [a(x, t) + c(x, t)] w_{x_i}^2(x, t) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x, t) w^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} a_{\tau} (\Delta w)^2 dx d\tau \\
 & + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} [(a_{\tau} + c_{\tau}) w_{x_i}^2 - a_{x_i} w_{x_i} w_{\tau} - c_{x_i} w w_{x_i \tau}] dx d\tau \\
 & + \int_0^t \int_{\Omega} c_{\tau} w^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x, 0) w_0^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x, 0) (\Delta w_0)^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [a(x, 0) + c(x, 0)] w_{0x_i}^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (g + \lambda \Phi_1) (w_{\tau} - \Delta w_{\tau}) dx d\tau. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Для получения априорной оценки из равенства (10) рассмотрим оценку интеграла

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_{\tau}^2(y, \tau) dy d\tau$$

через функцию w . Из равенства $w = Mu$ имеем

$$u_{\tau}(y, \tau) - \int_{\Omega} K(y, z, \tau) u_{\tau}(z, \tau) dz = w_{\tau}(y, \tau) + \int_{\Omega} K_{\tau}(y, z, \tau) u(z, \tau) dz.$$

Используя (5) и неравенство Юнга, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} u_{\tau}^2(y, \tau) dy \leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} \left[w_{\tau}(y, \tau) - \int_{\Omega} K_{\tau}(y, z, \tau) u(z, \tau) dz \right]^2 dy \\
 & \leq \frac{1}{m_1} \left[\int_{\Omega} w_{\tau}^2(y, \tau) dy + 2 \int_{\Omega} |w_{\tau}(y, \tau)| \cdot \left| \int_{\Omega} K_{\tau}(y, z, \tau) u(z, \tau) dz \right| dy + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K_{\tau}(y, z, \tau) u(z, \tau) dz \right)^2 dy \right] \leq \frac{1}{m_1} \left[\int_{\Omega} w_{\tau}^2(y, \tau) dy \right. \\
 & \quad \left. + \delta_1^2 \int_{\Omega} w_{\tau}^2(y, \tau) dy + \frac{1}{\delta_1^2} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K_{\tau}(y, z, \tau) u(z, \tau) dz \right)^2 dy \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K_{\tau}(y, z, \tau) u(z, \tau) dz \right)^2 dy \Big] \\
& \leq \frac{1 + \delta_1^2}{m_1} \int_{\Omega} w_{\tau}^2(y, \tau) dy + C(\delta_1) \int_{\Omega} u^2(y, \tau) dy, \quad (11)
\end{aligned}$$

где малое $\delta_1 > 0$ подберем позже, а последний интеграл оценивается через (5).

Для того чтобы оценить в (10) интеграл

$$\int_0^t \int_{\Omega} \Phi_1(w_{\tau} - \Delta w_{\tau}) dx d\tau, \quad (12)$$

рассмотрим оценку интеграла от $\Phi(x, t, u)$ вида

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \Delta_x K(x, y, \tau) u_{\tau}(y, \tau) dy \right) (w_{\tau} - \Delta w_{\tau}) dx d\tau \right| \\
& \leq \int_0^t \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left((\Delta_x K)^2(x, y, \tau) dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} u_{\tau}^2(y, \tau) dy \right)^{\frac{1}{2}} |w_{\tau} - \Delta w_{\tau}| dx d\tau \\
& \leq \frac{\delta_0^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (w_{\tau} - \Delta w_{\tau})^2 dx d\tau \\
& + \frac{1}{2\delta_0^2} \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} (\Delta_x K)^2(x, y, \tau) dy \right) \left(\int_{\Omega} u_{\tau}^2(y, \tau) dy \right) dx d\tau \\
& \leq \frac{\delta_0^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (w_{\tau} - \Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + \frac{P_0}{2\delta_0^2} \int_0^t \int_{\Omega} u_{\tau}^2(y, \tau) dy d\tau, \quad (13)
\end{aligned}$$

где P_0 задано равенством (6).

Продолжая (13), с учетом неравенства Юнга и (11) получим

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \Delta_x K(x, y, \tau) u_{\tau}(y, \tau) dy \right) (w_{\tau} - \Delta w_{\tau}) dx d\tau \right| \\ & \leq \frac{\delta_0^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (w_{\tau} - \Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + \frac{P_0(1 + \delta_1^2)}{2\delta_0^2 m_1} \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2(x, \tau) dx d\tau \\ & \quad + \frac{P_0 C(\delta_1)}{2\delta_0^2} \int_0^t \int_{\Omega} u^2(x, \tau) dx d\tau. \quad (14) \end{aligned}$$

Для того чтобы оценить в (12) интеграл вида

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K(x, y, \tau) \Delta_y u_{\tau}(y, \tau) dy \right) (w_{\tau} - \Delta_x w_{\tau}) dx d\tau,$$

поступаем, как выше. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K(x, y, \tau) \Delta_y u_{\tau}(y, \tau) dy \right) (w_{\tau} - \Delta w_{\tau}) dx d\tau \right| \\ & \leq \frac{\delta_0^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (w_{\tau} - \Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + \frac{Q_0(1 + \delta_1^2)}{2\delta_0^2 m_1} \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta_y u_{\tau})^2(y, \tau) dy d\tau, \quad (15) \end{aligned}$$

где Q_0 задано формулой (6).

Зафиксируем $\delta_0 \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ и потребуем выполнения неравенств (7):

$$p_1 \equiv 1 - \delta_0^2 - \frac{P_0}{\delta_0^2 m_1} > 0, \quad p_2 \equiv 1 - \frac{Q_0}{\delta_0^2 m_1} > 0, \quad (16)$$

которые, очевидно, выполняются при малых $|\Delta_x K(x, y, t)|$ и $|K(x, y, t)|$.

Подбирая малое $\delta_1 > 0$ из неравенств

$$p_1 - \frac{P_0 \delta_1}{\delta_0^2 m_1} > 0, \quad p_2 - \frac{Q_0 \delta_1}{\delta_0^2 m_1} > 0, \quad (17)$$

применяя неравенство Юнга и используя лемму Гронуолла в равенстве (10), получим априорную оценку

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} \left[(w_{\tau})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (w_{x_i \tau})^2 + (\Delta w_{\tau})^2 \right] dx dt \\ & + \int_{\Omega} \left[(\Delta w)^2(x, t) + \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2(x, t) + w^2(x, t) \right] dx \leq K_0 \int_0^T \int_{\Omega} g^2(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (18)$$

с положительной постоянной K_0 , определяемой лишь функциями $a(x, t)$, $c(x, t)$, числами T , a_0 , c_0 , а также областью Ω .

Очевидно, аналогичная оценка имеет место и для функции $u(x, t)$

$$\|u\|_V \leq K_0 \|w\|_V \leq K_1 \|g\|_{L_2(Q)} \quad (19)$$

с положительными постоянными K_0 , K_1 , определяемой теми же величинами, которыми определяются постоянные K_0 .

Из оценок (18), (19) следует открытость и замкнутость множества Λ (см. [1, 11]). Следовательно, краевая задача (8), (9) разрешима в классе W .

Покажем, что с помощью решения вспомогательной краевой задачи (8), (9) можно найти решение исходной краевой задачи (1)–(3). Так как $g(x, t) = Mf(x, t)$ и в силу условия (5) следует, что из принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ функция $Mf(x, t)$ также будет принадлежать пространству $L_2(Q)$, согласно доказанному краевая задача (8), (9) с такой функцией $g(x, t)$ разрешима в пространстве V . Тогда легко показать, что исходное уравнение (1) эквивалентно (8). В самом деле, уравнение (8) имеет вид $LMu = Mf + \Phi$, откуда получим $LMu = Mf + LMu - MLu$, т. е. $M(Lu - f) = 0$. Поскольку оператор M взаимно однозначен (из условия (5)), решение $u(x, t)$ уравнения (8) будет решением уравнения (1). Выполнение условий (2), (3) для функции $u(x, t)$ очевидно.

Единственность решений очевидна — она вытекает, например, из неравенства (19). Теорема доказана.

Разрешимость краевой задачи II

Пусть $K_1(x, y, t)$ — функция, определенная на множестве $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0, T]$ и такая, что при $(x, y, t) \in \Gamma \times \Omega \times (0, T)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial K_1(x, y, t)}{\partial \nu(x)} = K(x, y, t)$$

(как можно построить данную функцию, обсудим ниже). С помощью $K_1(x, y, t)$ определим оператор M_1 и функцию $\tilde{\Phi}(x, t, u)$:

$$(M_1 u)(x, t) = u(x, t) - \int_{\Omega} K_1(x, y, t) u(y, t) dy,$$

$$\tilde{\Phi}(x, t, u) = LM_1 u(x, t) - M_1 Lu(x, t),$$

значение оператора M_1 на функции $u(x, t)$ будем обозначать через $\tilde{w} = M_1 u(x, t)$ и определим начальную функцию $\tilde{w}(x, 0) = w_1(x)$:

$$w_1(x) = u_0(x) - \int_{\Omega} K_1(x, y, 0) u_0(y) dy.$$

Оператор M_1 однозначно и непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0, T]$ и существуют положительные постоянные m_3, m_4 такие, что выполняются неравенства

$$m_3 \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} [M_1 u(x, t)]^2 dx \leq m_4 \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \quad (20)$$

при любых $t \in [0, T]$ и $u(x, t) \in L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(x, t, u) = & \int_{\Omega} [-K_{1t}(x, y, t) + \Delta_x K_{1t}(x, y, t) + a(x) \Delta_x K_1(x, y, t) \\ & - c(x, t) K_1(x, y, t) + c(y, t) K_1(x, y, t)] u(y, t) dy \\ & + \int_{\Omega} \Delta_x K_1(x, y, t) u_t(y, t) dy - \int_{\Omega} K_1(x, y, t) a(y, t) \Delta_y u(y, t) dy \\ & - \int_{\Omega} K_1(x, y, t) \Delta_y u_t(y, t) dy. \end{aligned}$$

Как и выше, введем обозначения

$$\begin{aligned} P_1 &= \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (\Delta_x K_1)^2(x, y, \tau) dx dy, \\ Q_1 &= \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} K_1^2(x, y, \tau) dx dy. \end{aligned} \quad (21)$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия (20),

$$\begin{aligned} a(x, t), c(x, t) &\in C^1(\overline{Q}), \\ a(x, t) &\geq a_0 > 0, \quad c(x, t) \geq c_0 > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q}; \\ K_1(x, y, t) &\in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0, T]), \\ 1 - \delta_0^2 - \frac{P_1}{\delta_0^2 m_3} &> 0, \quad 1 - \frac{Q_1}{\delta_0^2 m_3} > 0 \quad \text{при } \delta_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \\ f(x, t) &\in L_2(Q), \quad w_1(x) \in W_2^1(\Omega), \\ \frac{\partial w_1(x)}{\partial \nu(x)} \Big|_{x \in \Gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда краевая задача II имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V , и это решение единственно.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$L\tilde{w} = g(x, t) + \tilde{\Phi}(x, t, u) \quad (23)$$

и удовлетворяющую условиям

$$\frac{\partial \tilde{w}(x, t)}{\partial \nu(x)} \Big|_S = 0, \quad \tilde{w}(x, 0) = w_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (24)$$

где $g(x, t)$ — заданная функция. Разрешимость данной краевой задачи в пространстве W устанавливается стандартным (в рамках настоящей работы) способом — с помощью метода продолжения по параметру.

Необходимые априорные оценки выводятся из равенств

$$\int_0^t \int_{\Omega} L_{\lambda} \tilde{w} (\tilde{w}_{\tau} - \Delta \tilde{w}_{\tau}) dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} (g + \lambda \tilde{\Phi}_1) (\tilde{w}_t - \Delta \tilde{w}_{\tau}) dx d\tau,$$

где $\tilde{\Phi}_1(x, t, \tilde{w}) = \tilde{\Phi}(x, t, M_1^{-1}\tilde{w})$.

Как и выше, при осуществлении схемы метода продолжения по параметру основная априорная оценка определяется положительной постоянной K_3 в правой части, зависящей лишь от функций $a(x, t)$, $c(x, t)$, чисел T , a_0 , c_0 , а также области Ω . Имеем

$$\|u\|_V \leq K_3 \|g\|_{L_2(Q)}. \quad (25)$$

Как и ранее, с помощью решения вспомогательной краевой задачи (23), (24) строим требуемое решение краевой задачи II, а именно, с помощью выбора функции $g(x, t) = M_1 f(x, t)$ и перехода к уравнению

$$M_1(Lu - f) = 0.$$

Единственность решений краевой задачи II в пространстве V очевидна из априорной оценки (25). Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 1 условия малости на функции $K(x, y, t)$, $\Delta_x K(x, y, t)$ можно заменить условиями симметричности $K(x, y, t) = K(y, x, t)$ и обращения в нуль на границе:

$$K(x, y, t) = K_{y_i}(x, y, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{при } y \in \Gamma.$$

Аналогичное верно для функции $K_1(x, y, t)$ в случае теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теоремах 1 и 2 от условий $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $c(x, t) \geq c_0 > 0$ можно отказаться, но тогда, как и выше, при получении априорных оценок возникнут условия малости на функции $a(x, t)$, $c(x, t)$ и их производные.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Функцию $K_1(x, y, t)$ можно построить, например, как решение второй краевой задачи для оператора Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta K_1(x, y, t) &= \Delta K(x, y, t), \\ \frac{\partial K_1(x, y, t)}{\partial \nu(x)} \Big|_{x \in \Gamma} &= K(x, y, t)|_{x \in \Gamma}, \end{aligned}$$

где переменные y и t являются параметрами.

Заключение

1. Метод доказательства разрешимости краевых задач I и II основан на переходе от задачи с неклассическим краевым условием к задаче с классическим условием, но для неклассического уравнения — так называемого нагруженного [13] уравнения, доказательстве разрешимости полученной задачи с помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок, и далее — к построению решения исходной задачи. Ранее подобные методы в близкой ситуации эффективно использовались в работах [1–7, 9–11].

2. В краевой задаче II условие (4) можно заменить условием

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} + \sigma(x, t)u(x, t) \Big|_{(x, t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t) dy \Big|_{(x, t) \in S}.$$

3. Теоремы 1, 2 остаются справедливыми и для уравнения вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \Delta u) - \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x, t)u_{x_j}) + \sum_{i=1}^n b^i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u = f(x, t)$$

при соответствующих ограничениях на коэффициенты уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А. И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестн. Самарск. ун-та. Естественная сер. 2008. Т. 62, № 3. С. 165–174.
2. Кожанов А. И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Докл. РАН. 2009. Т. 427, № 6. С. 747–749.
3. Кожанов А. И. О разрешимости краевых задач с нелокальным условием Бицадзе — Самарского для линейных гиперболических уравнений // Докл. РАН. 2010. Т. 432, № 6. С. 738–740.
4. Lažetić N. L. On classical solutions to mixed boundary problems for one-dimensional parabolic equation of second order // Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. 2000. V. 67(81). P. 53–75.
5. Попов Н. С. Разрешимость задачи со смещением для псевдопараболического уравнения с нелокальным интегральным краевым условием // II Всерос. науч. конф. и VII Всерос. школа-семинар студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития Северных

- территорий Российской Федерации»: Тез. докл. Якутск: Филиал изд-ва ЯГУ, ИМИ ЯГУ, 2009. С. 68–69.
6. Попов Н. С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Материалы XLVIII Междунар. науч. студенческой конф. «Студент и научно-технический прогресс». Математика / Новосибирск: Новосибирск. гос. ун-т, 2010. С. 58–59.
 7. Попов Н. С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Материалы Междунар. науч. форума «Ломоносов-2010». Математика. Электронный ресурс. М.: Макс Пресс, 2010.
 8. Fridman A. Monotone decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions // Quart. Appl. Math. 1986. V. 44, N 3. P. 401–407.
 9. Кожанов А. И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. 2004. вып. 30. С. 63–69.
 10. Абдрахманов А. М., Кожанов А. И. Задача со смещением для уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика. 2007. № 5. С. 3–26.
 11. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1116–1172.
 12. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
 13. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
 14. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
 15. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИТЕРИРОВАННЫХ
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ
НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ*)

С. В. Попов, А. Г. Сиявский

Пусть

$$Q_T^\pm = \mathbb{R}^\pm \times (0 < t < T), \quad \mathbb{R}^+ = \{\mathbb{R}, x > 0\}, \quad \mathbb{R}^- = \{\mathbb{R}, x < 0\}.$$

В области $Q_T = Q_T^+ \cup Q_T^-$ рассматривается параболическое уравнение с меняющимся направлением времени:

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_k (-1)^m \operatorname{sign} x \cdot \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \right) u = 0, \quad \alpha_k > 0. \quad (1)$$

При $n = m = 1$ краевые задачи для уравнения (1) изучались в [1–3]. При $m = 1$ краевые задачи для уравнения (1) рассматривались в [4–6].

Известно, что в краевых задачах для строго параболических уравнений гладкость начальных и граничных данных без дополнительных условий на данные задачи полностью определяет принадлежность решения гёльдеровским пространствам. В случае уравнений с меняющимся направлением времени гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежность решения таким пространствам. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи указать дополнительно необходимые и

*) Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК № 02.740.11.0609).

достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам $H_{x,t}^{p,p/2m}$ при $p \geq 2m$. Более того, применением единого подхода при общих условиях сопряжения (склеивания) для таких уравнений удается показать, что нецелый показатель $p - [p]$ пространства $H_{x,t}^{p,p/2m}$ может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения уравнения (см. [7, 8]).

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача для итерированных уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени (1) при $m \geq 2$ и уточняются результаты [9] при $m = 2, 3$.

Краевая задача. Найти в Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее

1) начальным условиям:

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial t^s} \right|_{t=0} = \varphi_s(x), \quad x > 0, \quad \left. \frac{\partial^s u}{\partial t^s} \right|_{t=T} = \psi_s(x), \quad x < 0, \quad s = 0, \dots, n-1; \quad (2)$$

2) условиям склеивания:

$$\left. \frac{\partial^{2ml+i} u}{\partial x^{2ml+i}} \right|_{x=+0} = (-1)^l \left. \frac{\partial^{2ml+i} u}{\partial x^{2ml+i}} \right|_{x=-0}, \quad l = 0, \dots, n-1, \quad i = 0, \dots, 2m-1. \quad (3)$$

Пусть $\varphi_s \in H^{2ml(n-s)+\alpha}(\mathbb{R}^+)$, $\psi_s \in H^{2ml(n-s)+\alpha}(\mathbb{R}^-)$, $l \geq 1$ целое. В [9] такая задача исследовалась для различных значений $n \geq 1$, $m \geq 1$ при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Можно показать [9], что разрешимость этой задачи во всех случаях следует из разрешимости задачи при $n = 1$, $m \geq 1$. Обозначим

$$u_s(x, t) = \prod_{k=1}^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_k (-1)^m \operatorname{sign} x \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \right) u = \sum_{l=0}^{n-s} (-1)^{ml} (\operatorname{sign} x)^l \sigma_l(\alpha_{n-s}) \frac{\partial^{2ml}}{\partial x^{2ml}} \frac{\partial^{n-s-l}}{\partial t^{n-s-l}} u,$$

где $\sigma_0 = 1$, σ_l — элементарные симметрические многочлены элементов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-s}$ при $l \geq 1$.

Если решение существует, то

1) при $x > 0$, $0 \leq s \leq n-1$

$$u_s(x, 0) = \sum_{l=0}^{n-s} (-1)^{ml} \sigma_l(\alpha_{n-s}) \frac{\partial^{2ml}}{\partial x^{2ml}} \varphi_{n-s-l}(x) = \Phi_s(x) \in H^{2mls+\alpha}(\mathbb{R}^+), \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial^i u_s}{\partial x^i} \right|_{x=+0} = \sum_{l=0}^{n-s} (-1)^{ml} \sigma_l(\alpha_{n-s}) \frac{\partial^{n-s-l}}{\partial t^{n-s-l}} \frac{\partial^{2ml+i}}{\partial x^{2ml+i}} u \Big|_{x=+0}, \quad (5)$$

$i = 0, \dots, 2m-1$;

2) при $x < 0$, $0 \leq s \leq n-1$

$$u_s(x, T) = \sum_{l=0}^{n-s} (-1)^{(m+1)l} \sigma_l(\alpha_{n-s}) \frac{\partial^{2ml}}{\partial x^{2ml}} \psi_{n-s-l}(x) = \Psi_s(x) \in H^{2mls+\alpha}(\mathbb{R}^-), \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial^i u_s}{\partial x^i} \right|_{x=-0} = \sum_{l=0}^{n-s} (-1)^{(m+1)l} \sigma_l(\alpha_{n-s}) \frac{\partial^{n-s-l}}{\partial t^{n-s-l}} \frac{\partial^{2ml+i}}{\partial x^{2ml+i}} u \Big|_{x=-0}, \quad (7)$$

$i = 0, \dots, 2m-1$. При заданных Φ_s , Ψ_s функции φ_s и ψ_s определяются однозначно.

В силу (3), (5), (7) имеем

$$\left. \frac{\partial^i u_s}{\partial x^i} \right|_{x=+0} = \left. \frac{\partial^i u_s}{\partial x^i} \right|_{x=-0}, \quad i = 0, \dots, 2m-1. \quad (8)$$

Рассмотрим последовательность задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial t} + \alpha_{n-s+1} (-1)^m \operatorname{sign} x \frac{\partial^{2m} u_s}{\partial x^{2m}} &= u_{s-1} \quad \text{в } Q_T, \quad u_0 = 0, \\ u_s|_{t=0} &= \Phi_s(x), \quad x > 0, \quad u_s|_{t=T} = \Psi_s(x), \quad x < 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial^i u_s}{\partial x^i} \right|_{x=+0} = \left. \frac{\partial^i u_s}{\partial x^i} \right|_{x=-0}, \quad i = 0, \dots, 2m-1, \quad s = 1, \dots, n,$$

где предполагаем, что $u_0 = 0$, $u_n = u$.

Пусть $s = 1$. Как показано в [8, 10], при выполнении $2ml$ ($m \geq 4$) условий разрешимости на заданные функции Φ_1 , Ψ_1 задача (9) имеет единственное решение $u_1 \in H_x^{2ml+\alpha, l+\alpha/2m}(Q_T^\pm)$.

Если $\Phi_1 = \Psi_1 = 0$, то $u_1 = 0$. Продолжая этот процесс для $s = 2, \dots, n-1$, получим, что решение задачи (1)–(3) при выполнении $2mnl$ условий вида

$$L_s(\varphi_s, \psi_s) = 0, \quad s = 1, \dots, 2mnl, \quad (10)$$

существует, единственно и $u \in H_x^{2mnl+\alpha, nl+\alpha/2m}(Q_T^\pm)$.

Итак, при целом $m \geq 4$ справедлива

Теорема 1. Пусть

$$\varphi_s(x) \in H^{2ml(n-s)+\alpha}(\mathbb{R}^+), \quad \psi_s(x) \in H^{2ml(n-s)+\alpha}(\mathbb{R}^-).$$

Тогда при выполнении $2mnl$ условий (10) существует единственное решение краевой задачи (1)–(3) из пространства $H_x^{2mnl+\alpha, nl+\alpha/2m}(Q_T^\pm)$.

Уравнения четвертого порядка. Случай $m = 2$. В области $Q_T = Q_T^+ \cup Q_T^-$ рассмотрим итерированное параболическое уравнение четвертого порядка с меняющимся направлением времени:

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_k \operatorname{sign} x \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) u = 0, \quad \alpha_k > 0. \quad (11)$$

Краевая задача. Найти в Q_T решение уравнения (11), удовлетворяющее начальным условиям (2) и условиям склеивания:

$$\frac{\partial^{4l+i} u}{\partial x^{4l+i}} \Big|_{x=+0} = (-1)^l r_i \frac{\partial^{4l+i} u}{\partial x^{4l+i}} \Big|_{x=-0}, \quad l = 0, \dots, n-1, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (12)$$

Как показано в [7], при выполнении $4l$ условий задача (9) при $n = 1, m = 2$ имеет единственное решение $u_1 \in H_x^{4l+\alpha, l+\alpha/4}(Q_T^\pm)$ при малых положительных α . Как и выше, решение задачи (11), (12) при выполнении $4nl$ условий вида (10) существует, единственно и $u \in H_x^{4nl+\alpha, nl+\alpha/4}(Q_T^\pm)$.

Теорема 2. Пусть

$$\varphi_s(x) \in H^{4l(n-s)+\alpha}(\mathbb{R}^+), \quad \psi_s(x) \in H^{4l(n-s)+\alpha}(\mathbb{R}^-).$$

Тогда при выполнении $4nl$ условий вида (10) существует единственное удовлетворяющее условиям (2), (12) решение уравнения (11) из пространства

- 1) $H_{x_t}^{p,p/4}$, $p = 4nl + \alpha$, если $0 < \alpha < 1 - 4\theta$;
- 2) $H_{x_t}^{q,q/4}$, $q = 4nl + 1 - 4\theta$, если $1 - 4\theta < \alpha < 1$;
- 3) $H_{x_t}^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/4}$, если $\alpha = 1 - 4\theta$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Здесь $\theta = \frac{1}{\pi} \arctg \left| \frac{a(r_i)}{b(r_i)} \right| \in (0, \frac{1}{4})$.

Уравнения шестого порядка. Случай $m = 3$. В области $Q_T = Q_T^+ \cup Q_T^-$ рассматривается параболическое уравнение шестого порядка с меняющимся направлением времени:

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_k (-1) \operatorname{sign} x \cdot \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right) u = 0, \quad \alpha_k > 0. \quad (13)$$

Краевая задача. Найти в Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2) и условиям склеивания:

$$\frac{\partial^{6l+i} u}{\partial x^{6l+i}} \Big|_{x=+0} = (-1)^l q_i \frac{\partial^{6l+i} u}{\partial x^{6l+i}} \Big|_{x=-0}, \quad l = 0, \dots, n-1, \quad i = 0, \dots, 5.$$

Как показано в [7, 11], при выполнении $6l$ условий задача (9) при $n = 1$, $m = 3$ имеет единственное решение $u_1 \in H_x^{6l+\alpha, l+\alpha/6}(Q_T^\pm)$ при малых положительных α . В этом случае решение задачи (13), (2), (14) при выполнении $6nl$ условий вида (10) существует, единственно и $u \in H_x^{6nl+\alpha, nl+\alpha/6}(Q_T^\pm)$.

Теорема 3. Пусть $\varphi_s(x) \in H^{6l(n-s)+\alpha}(\mathbb{R}^+)$, $\psi_s(x) \in H^{6l(n-s)+\alpha}(\mathbb{R}^-)$. Тогда при выполнении $6nl$ условий вида (10) существует единственное удовлетворяющее условиям (2), (14) решение уравнения (13) из пространства

- 1) $H_{x_t}^{p,p/6}$, $p = 6nl + \alpha$, если $0 < \gamma < 2 - 6\theta$;
- 2) $H_{x_t}^{q,q/6}$, $q = 6nl + 2 - 6\theta$, если $2 - 6\theta < \gamma < 1$;
- 3) $H_{x_t}^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/6}$, если $\gamma = 2 - 6\theta$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Здесь $\theta = \frac{1}{\pi} \arctg \left| \frac{a(q_i)}{b(q_i)} \right| \in \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Ин-т математики, 1982.
2. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
3. Терсенов С. А. О первой краевой задаче для одного прямо-обратно параболического уравнения // Докл. АН СССР, 1991. Т. 317, № 3. С. 584–588.
4. Ахмедов Х. Х. О некоторых краевых задачах для уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Новосибирск, 1989.
5. Попов С. В. Нелокальные контактные краевые задачи для интегрированных уравнений теплопроводности // Мат. заметки ЯГУ. 1994. Т.1, вып. 2. С. 55–65.
6. Попов С. В. Контактная задача для интегрированного уравнения теплопроводности // Уч. зап. ЯГУ. Сер. математика, физика. Якутск: Изд-во ЯГУ, 1994. С. 24–31.
7. Попов С. В. О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. РАН. 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.
8. Попов С. В., Поталова С. В. Гёльдеровские классы решений $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. РАН. 2009. Т. 424, № 5. С. 594–596.
9. Terseenov S. A. On a method of solving initial boundary value problems for higher order equations // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 1. С. 138–145.
10. Поталова С. В., Попов С. В. Краевая задача для $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции при $n \geq 4$ // Мат. заметки ЯГУ. 2009. Т. 16, вып. 1. С. 32–55.
11. Поталова С. В., Попов С. В. Гёльдеровские классы решений параболических уравнений шестого порядка с меняющимся направлением времени эволюции // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, вып. 1. С. 58–81.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
 ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
 УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ
 УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ*)

А. В. Прокопьев

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой границей Γ , $S = \Gamma \times (0, T)$, Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x, t)$, $f(x, t)$, $h(x, t)$, $K(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

В работе рассматривается эллиптико-параболическое уравнение вида

$$Lu = u_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x)u_{x_j}) + a(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t), \quad (1)$$

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Обратная задача. Найти функции $u(x, t)$, $q(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением (1) и такие, что для функции $u(x, t)$ выполняются начальные и граничные условия:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_S = 0,$$

а также интегральное условие переопределения:

$$\int_{\Omega} K(x, t)u(x, t) dx = 0, \quad t \in [0, T].$$

*) Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК № 02.740.11.0609).

Обратные задачи определения решения и неизвестной правой части для многомерных параболических уравнений рассматривались многими авторами [1–6].

Пусть пространство V — замыкание множества бесконечно дифференцируемых в \bar{Q} функций $v(x, t)$ таких, что $v(x, t)|_S = 0$, по норме

$$\|v\|_V = \left[\int_Q v_t^2(x, t) dxdt + \int_Q \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i}(x, t) v_{x_j}(x, t) dxdt + \int_Q v^2(x, t) dxdt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Введем понятие обобщенного решения рассматриваемой задачи для функций $u(x, t) \in V$, $q(t) \in L_2[0, T]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функции $u(x, t) \in V$, $q(t) \in L_2[0, T]$ называются *обобщенным решением задачи* (1)–(3), если выполнено интегральное равенство

$$\int_Q \left(u_t \eta + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + a u \eta \right) dxdt = \int_Q (f \eta + q h \eta) dxdt$$

для любых $\eta \in C^\infty(\bar{Q})$ и $\eta|_S = 0$.

Введем некоторые необходимые обозначения:

$$f_0(t) = \int_\Omega K(x, t) f(x, t) dx, \quad h_0(t) = \int_\Omega K(x, t) h(x, t) dx,$$

$$L_0 v(x, t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) v_{x_j}(x, t)) - a(x, t) v(x, t),$$

$$L_{0\varepsilon} v(x, t) = L_0 v(x, t) + \varepsilon \Delta v,$$

$$h_1(x, t) = -\frac{L_0 h(x, t)}{h_0(t)}, \quad h_{1\varepsilon}(x, t) = -\frac{L_{0\varepsilon} h(x, t)}{h_0(t)},$$

$$H = \max_{[0, T]} \int_\Omega h_1^2(x, \tau) dx, \quad H_\varepsilon = \max_{[0, T]} \int_\Omega h_{1\varepsilon}^2(x, \tau) dx,$$

$$M_1 = H \max_{[0,T]} \int_{\Omega} K_t^2(y, \tau) dy, \quad M_{1\varepsilon} = H_\varepsilon \max_{[0,T]} \int_{\Omega} K_t^2(y, \tau) dy,$$

$$M_2 = H \max_{[0,T]} \int_{\Omega} K^2(y, \tau) dy, \quad M_{2\varepsilon} = H_\varepsilon \max_{[0,T]} \int_{\Omega} K^2(y, \tau) dy,$$

$$a_1 = \frac{\max}{\bar{Q}} |a_t(x, t)|,$$

где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, ε_0 — малое число, $v(x, t)$ — заданная функция и $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ в точке x .

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$h(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad a(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad a^{ij}(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$K(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad a(x, t) \geq a_0 > 0, \quad \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \nu_i \nu_j > 0, \quad x \in \Gamma; \quad (4)$$

$$K(x, t)|_{\Gamma} = 0, \quad |h_0(t)| \geq \bar{h}_0 > 0, \quad t \in [0, T]; \quad (5)$$

$$\frac{a_0}{2} - \frac{a_0^2 + 1}{2a_0^2} (M_1 + a_1) - M_2 > 0; \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} K(x, 0) u_0(x) dx = 0, \quad f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)). \quad (7)$$

Тогда существует обобщенное решение $u(x, t) \in V$, $q(t) \in L_2[0, T]$ задачи (1)–(3).

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$Lu - \varepsilon \Delta u = f(x, t) + q(t)h(x, t). \quad (8)$$

Умножим (8) на $K(x, t)$ и проинтегрируем по области Ω . После несложных выкладок с учетом (3) и (5) получим

$$q(t) = q_\varepsilon(t) = -\frac{1}{h_0(x)} \left[\int_{\Omega} K_t(x, t) u(x, t) dx + \int_{\Omega} K(x, t) L_{0\varepsilon} u(x, t) dx + f_0(x) \right].$$

Подставляя полученное выражение для $q_\varepsilon(t)$ в (8), имеем

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) u_{x_j}(x, t)) + a(x, t) u(x, t) - \varepsilon \Delta u \\ = f(x, t) - \frac{h(x, t)}{h_0(t)} f_0(t) - \frac{h(x, t)}{h_0(t)} \left[\int_{\Omega} K_t(x, t) u(x, t) dx \right. \\ \left. + \int_{\Omega} K(x, t) L_{0\varepsilon} u(x, t) dx \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Пусть $v(x, t) = L_{0\varepsilon} u(x, t)$. Применим оператор $L_{0\varepsilon}$ к уравнению (9):

$$\begin{aligned} L_\varepsilon v = v_t(x, t) - L_{0\varepsilon} v(x, t) + a_t(x, t) u(x, t) = \tilde{f}_\varepsilon(x, t) \\ + h_{1\varepsilon}(x, t) \left[\int_{\Omega} K_t(x, t) u(x, t) dx + \int_{\Omega} K(x, t) v(x, t) dx \right], \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{f}_\varepsilon(x, t) = L_{0\varepsilon} f(x, t) + h_1(x, t) f_0(t).$$

Положим $v_{0\varepsilon}(x) = L_{0\varepsilon} u_0(x)$ и рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $v(x, t)$, являющуюся решением уравнения (10) и удовлетворяющую условиям:

$$v(x, 0) = v_{0\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega; \quad v(x, t)|_S = 0. \quad (11)$$

Имеет место разрешимость вспомогательной задачи при фиксированном ε и выполнении условий теоремы в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ (см. [7, 8]). Покажем выполнение равномерных по ε априорных оценок.

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} L_\varepsilon v \cdot v(x, \tau) dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} \left[\tilde{f}_\varepsilon(x, \tau) + h_{1\varepsilon}(x, \tau) \left(\int_{\Omega} K_\tau(y, \tau) u(y, \tau) dy \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\Omega} K(y, \tau) v(y, \tau) dy \right) \right] v(x, \tau) dx d\tau, \quad (12) \end{aligned}$$

где t — произвольное число из отрезка $[0, T]$. Интегрируя почленно в левой части равенства (12), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) v_{x_i}(x, \tau) v_{x_j}(x, \tau) dx d\tau \\ & \quad + \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) v^2(x, \tau) dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x, \tau) dx d\tau \\ & \quad = \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{f}_{\varepsilon}(x, \tau) v(x, \tau) dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_{0\varepsilon}^2(x) dx \\ & - \int_0^t \int_{\Omega} a_t(x, \tau) u(x, \tau) v(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} h_{1\varepsilon}(x, \tau) \left(\int_{\Omega} K_{\tau}(y, \tau) u(y, \tau) dy \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega} K(y, \tau) v(y, \tau) dy \right) v(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Применяя в правой части полученного равенства неравенства Юнга и Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) v_{x_i}(x, \tau) v_{x_j}(x, \tau) dx d\tau \\ & \quad + \left(\frac{a_0}{2} - \frac{a_0^2 + 1}{2a_0^2} (M_{1\varepsilon} + a_1) - M_{2\varepsilon} \right) \int_0^t \int_{\Omega} v^2(x, \tau) dx d\tau \\ & \quad + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x, \tau) dx d\tau \leq \frac{1}{2a_0^2} \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{f}_{\varepsilon}^2(x, \tau) dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_{0\varepsilon}^2(x) dx. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, в силу (6) можно считать, что

$$\frac{a_0}{2} - \frac{a_0^2 + 1}{2a_0^2} (M_{1\varepsilon} + a_1) - M_{2\varepsilon} > 0.$$

Тогда из предыдущего неравенства с учетом (6) получим оценку

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) v_{x_i}(x, \tau) v_{x_j}(x, \tau) dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} v^2(x, \tau) dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x, \tau) dx d\tau \leq M_{3\varepsilon} \|f\|_{L_2(Q)}^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где $M_{3\varepsilon}$ зависит от $\varepsilon, a_0, a_1, u_0(x), h(x, t), f(x, t)$ и $K(x, t)$.

Для следующей априорной оценки рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} L_{\varepsilon} v \cdot v_{\tau}(x, \tau) dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} \left[\tilde{f}_{\varepsilon}(x, t) + h_{1\varepsilon}(x, \tau) \left(\int_{\Omega} K_t(y, \tau) u(y, \tau) dy \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\Omega} K(y, \tau) v(y, \tau) dy \right) \right] v_{\tau}(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Интегрируя по частям и используя неравенства Юнга и Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} v_{\tau}^2(x, \tau) dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) v_{x_i}(x, \tau) v_{x_j}(x, \tau) dx \Big|_0^t \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x, \tau) v^2(x, \tau) dx \Big|_0^t + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x, \tau) dx \Big|_0^t \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{f}^2(x, \tau) dx d\tau \\ & + \frac{2a_1^2}{a_0^2} \int_0^t \int_{\Omega} v^2(x, \tau) dx d\tau + \frac{3}{4} \int_0^t \int_{\Omega} v_{\tau}^2(x, \tau) dx d\tau \\ & + \frac{2M_1 + 2a_0^2 M_2}{a_0^2} \int_0^t \int_{\Omega} v^2(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Из предыдущего неравенства с учетом (13) имеем оценку

$$\int_0^t \int_{\Omega} v_{\tau}^2(x, \tau) dx d\tau + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) v_{x_i}(x, t) v_{x_j}(x, t) dx + \int_{\Omega} v^2(x, t) dx + \varepsilon \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x, t) dx \leq M_{4\varepsilon} \|f\|_{L_2(Q)}^2, \quad (15)$$

где $M_{4\varepsilon}$ зависит от $\varepsilon, a(x, t), u_0(x), h(x, t), f(x, t)$ и $K(x, t)$.

В силу малости ε_0 числа $M_{3\varepsilon}, M_{4\varepsilon}$ ограничены некоторым M , зависящим от тех же величин и функций, что и $M_{3\varepsilon}$ и $M_{4\varepsilon}$, за исключением ε .

Поскольку на самом деле функция $v(x, t)$ определяется также параметром ε , из семейства $\{v_{\varepsilon}(x, t)\}$ можно получить семейство функций $\{u_{\varepsilon}(x, t)\}$ с помощью равенств

$$L_{0\varepsilon} u_{\varepsilon}(x, t) = v_{\varepsilon}(x, t), \quad u_{\varepsilon}(x, t)|_S = 0.$$

Тогда для семейства $\{u_{\varepsilon}(x, t)\}$ в целом имеем оценку

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_{\varepsilon\tau}^2(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{\varepsilon x_i}(x, \tau) u_{\varepsilon x_j}(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^2(x, \tau) dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{\varepsilon x_i}^2(x, \tau) dx \leq M_5, \quad (16)$$

где M_5 зависит от тех же величин и функций, что и число M .

Условие переопределения

$$\int_{\Omega} K(x, t) u_{\varepsilon}(x, t) dx = 0 \quad (17)$$

для семейства $\{u_{\varepsilon}(x, t)\}$ выполняется (см., например, [9]). Тогда для семейства $\{u_{\varepsilon}(x, t)\}$ в силу (17) выполняется равенство

$$u_{\varepsilon t}(x, t) - L_{0\varepsilon} u_{\varepsilon} = f(x, t) + q^{\varepsilon}(t) h(x, t), \quad (18)$$

где

$$q^\varepsilon(t) = \frac{1}{h_0(x)} \left[\int_{\Omega} K(x,t) u_{\varepsilon t}(x,t) dx - \int_{\Omega} K(x,t) L_{0\varepsilon} u_\varepsilon(x,t) dx - f_0(x) \right].$$

Умножим (18) на пробную функцию $\eta(x,t)$ и проинтегрируем по Q :

$$\int_Q \left(u_{\varepsilon t} \eta + \varepsilon \sum_{i=1}^n u_{\varepsilon x_i} \eta_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{\varepsilon x_i} \eta_{x_j} + a u_\varepsilon \eta \right) dx dt = \int_Q (f \eta + q^\varepsilon h \eta) dx dt.$$

Из оценки (16) следует, что можно выбрать подпоследовательности $\{\varepsilon_m\}$ и $\{u_m(x,t)\}$ такие, что при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &\rightarrow 0, & u_m(x,t) &\rightarrow u(x,t), & u_{mt}(x,t) &\rightarrow u_t(x,t), \\ a^{ij}(x) u_{mx_i}(x,t) &\rightarrow a^{ij}(x) u_{x_i}(x,t) && \text{слабо в } L_2(Q), \\ \varepsilon_m u_{mx_i}(x,t) &\rightarrow 0 && \text{слабо в } L_2(Q), \\ q^{\varepsilon_m}(t) &\rightarrow q(t) && \text{слабо в } L_2[0,T]. \end{aligned}$$

В пределе получим требуемое обобщенное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. C., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 1999.
2. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Wichita: Springer-Verl., 2000.
3. *Кожанов А. И.* Задача определения решения и правой части специального вида в параболическом уравнении // Обратные задачи и информационные технологии. Югорск. ин-т информационных технологий. 2002. Т. 1, № 3. С. 13–41.
4. *Belov Yu Ya.* Inverse problems for parabolic equations // J. Inverse Ill-posed Probl. 1993. V. 1, N 4. P. 283–305.
5. *Belov Yu Ya.* Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
6. *Ivanchoy M.* Inverse problems for equations of parabolic type. L'viv: VNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10.)
7. *Кожанов А. И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 51–60.
8. *Kozhanov A. I., Safullova R. R.* Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations // J. Inverse Ill-posed Probl. 2010. V. 18, N 1. P. 1–24.
9. *Павлов С. С.* Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 81–93.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА
 В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ
 С ДАННЫМИ КОШИ НА ЧАСТИ БОКОВОЙ
 ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА*)

С. Г. Пятков, А. Г. Боричевская

Введение.

В работе рассматривается параболическое уравнение

$$u_t - Lu = f(x, t), \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где G — ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^n с границей Γ , $S = \Gamma \times (0, T)$ и

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t)u_{x_i} + c(x, t)u$$

— эллиптический оператор, т. е. найдется постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)\xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2 \text{ для всех } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ и } (x, t) \in \bar{Q}.$$

Считаем, что область G — цилиндр вида $G = \Omega \times (0, d)$. Положим $S_0 = \{(x, t) \in \partial Q : x_n = 0\}$, $S_2 = \{(x, t) \in \partial Q : x_n = d\}$, $S_1 = \partial\Omega \times (0, d) \times (0, T)$. Уравнение (1) дополняется начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (2)$$

*) Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта № 12-01-00260а).

данными переопределения

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|_{x_n=0} = \psi(x', t) \quad (x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})) \quad (3)$$

и краевыми условиями

$$u|_{S_0} = \varphi_0(x', t), \quad (4)$$

$$u|_{S_1} = \varphi_1(x, t), \quad u_{x_n}|_{S_2} = \varphi_2(x', t) \quad (5)$$

или

$$u|_{S_1} = \varphi_1(x, t), \quad u|_{S_2} = \varphi_2(x, t). \quad (6)$$

Мы рассматриваем обратную задачу об определении вместе с решением u уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)–(5) или (2)–(4), (6), неизвестной функции $q(x', t)$, входящей в правую часть уравнения вида $f = f_0(x, t)q(x', t) + f_1(x, t)$.

Такие обратные задачи и близкие к ним возникают при описании процессов переноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях. Задачи с условиями переопределения, заданными не на границе цилиндра, а на некоторых внутренних многообразиях (в частности, на плоскостях, пересекающих G), рассматривались в работах Ю. Я. Белова, Ю. Е. Аниконова и ряда других авторов (см. [1–4] и имеющуюся там библиографию). Довольно подробно обратные задачи с данными Коши на боковой поверхности цилиндра рассмотрены в случае $n = 1$ (см. [5–11]), причем как в линейном случае, т. е. в задаче об определении функции источника (правой части), так и в нелинейном случае, т. е. в задаче об определении коэффициентов уравнения. В частности, ряд теорем существования и оценок устойчивости в пространствах Гёльдера могут быть найдены в монографии М. Иванчова [5]. В многомерной ситуации оценки устойчивости для решений обратных задач об определении коэффициентов в уравнении по данным (2)–(5) или (2)–(4), (6) вместе с дополнительными условиями интегрального переопределения имеются в [12]. Близкая постановка также исследована в [13]. Теорема существования решений задачи (2)–(4) в пространствах Гёльдера в случае $\Omega = \mathbb{R}^{n-1}$ и $d = \infty$

приведена в [14]. Ряд результатов по обратным задачам с данными Коши на боковой поверхности цилиндра изложен в [15, 16], где в основном рассматривается случай $n = 1$ и неизвестные коэффициенты или правая часть зависят лишь от пространственных переменных. Отметим также работы [17, 18], где изложено много результатов, касающихся обратных параболических задач, и имеется достаточно полная библиография. Цель настоящей работы — получить теоремы существования решений (u, q) задач (1)–(5) и (1)–(4), (6) в пространствах Соболева.

§ 1. Определения и основные результаты

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G — область в \mathbb{R}^n) обозначается пространство сильно измеримых функций, определенных на G , со значениями в E и конечной нормой $\| \|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ (см. [19]). Также используем пространства $C^k(\overline{G}; E)$, состоящие из функций, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание \overline{G} . Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$ стандартны (см. [19]). При нецелых s пространство Соболева $W_p^s(G; E)$ совпадает с пространством Бесова $B_{p,p}^s(G; E)$. Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{C}$, то последнее пространство обозначаем просто через $B_{p,p}^s(G)$. Аналогично вместо $W_p^s(G; E)$ или $C^k(\overline{G}; E)$ используем обозначение $W_p^s(G)$ или $C^k(\overline{G})$. Для данного интервала $J = (0, T)$ положим $Q = J \times G$ и $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$, соответственно $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$. Здесь используются обозначения Γ, S из введения. Аналогично определяем анизотропные пространства Гёльдера и Бесова (см. [19–21]).

Приведем условия на данные задачи. Считаем, что область Ω ограничена и $\partial\Omega \in C^2$. Обозначим $S_1^\delta = \partial\Omega \times (0, \delta) \times (0, T)$, $G_\delta = \Omega \times (0, \delta)$, $Q_\delta^\gamma = G_\delta \times (0, \gamma)$, $Q^\gamma = G \times (0, \gamma)$, $S_0^\gamma = \partial\Omega \times (0, \gamma)$, $Q_0^\gamma = \Omega \times (0, \gamma)$. Относительно данных предполагаем, что

$$u_0(x) \in B_{p,p}^{2-\frac{2}{p}}(G), \quad \varphi_i \in B_{p,p}^{2-\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{2p}}(S_i) \quad (i = 0, 1), \quad \psi \in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(S_0). \quad (7)$$

В случае, если рассматривается задача (1)–(5), предполагаем, что

$$\varphi_2 \in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(S_2), \quad (8)$$

а в случае задачи (1)–(4), (6) —

$$\varphi_2 \in B_{p,p}^{2-\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{2p}}(S_2). \quad (9)$$

Пусть

$$\exists \delta \in (0, d) : u_{0x_n} \in B_{p,p}^{2-\frac{2}{p}}(G_\delta), \quad \varphi_{1x_n} \in B_{p,p}^{2-\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{2p}}(S_1^\delta). \quad (10)$$

Далее фиксируем величину δ . Чтобы упростить изложенное, запишем условия согласования в виде: существует $\Phi \in W_p^{2,1}(Q)$ такая, что

$$\Phi_{x_n} \in W_p^{2,1}(Q_\delta), \quad (11)$$

и выполнены условия (1)–(5) или соответственно (1)–(4), (6).

Приведем условия на данные задачи. Пусть

$$f_0(x, t) \in L_\infty(Q), \quad f_1(x, t) \in L_p(Q), \quad f_{0x_n} \in L_\infty(Q_\delta), \quad f_{1x_n} \in L_p(Q_\delta), \quad (12)$$

$$\exists \delta_1 > 0 : |f_0(x', 0, t)| \geq \delta_1 \quad (13)$$

при почти всех $(x', t) \in Q_0$. Считаем, что

$$a_{in}(x', d, t) = a_{in}(x', 0, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (x', t) \in Q_0, \quad (14)$$

$$a_{ij} \in C(\overline{Q}), \quad b_i \in L_{r_0}(Q), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad c \in L_{r_1}(Q) \quad (15)$$

для некоторых $r_0 > \max(p, n+2)$, $r_1 > \max(p, \frac{n+2}{2})$ и

$$a_{ijx_n} \in L_\infty(Q_\delta), \quad b_{ix_n} \in L_{r_0}(Q_\delta) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad c_{x_n} \in L_{r_1}(Q_\delta); \quad (16)$$

под производными здесь и далее подразумеваются обобщенные производные в смысле Соболева. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть $p > 1$ и выполнены условия (7)–(16). Тогда существует единственное решение (u, q) задач (1)–(5) и (1)–(4), (6) такое, что

$$u \in W_p^{2,1}(Q), \quad u_{x_n} \in W_p^{2,1}(Q_{\delta_0}) \quad \forall \delta_0 < \delta, \quad q \in L_p(Q_0).$$

§ 2. Доказательство основных результатов

Лемма 1. *Найдется постоянная $c > 0$ такая, что для всех $u \in W_p^{2,1}(Q^\gamma)$ таких, что $u(x, 0) = 0$, выполняется неравенство*

$$\|u\|_{L_p(0,\gamma;W_p^1(G))} \leq c\gamma^{1/2}\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из интерполяционного неравенства

$$\|u\|_{W_p^1(G)} \leq c\|u\|_{W_p^2(G)}^{1/2}\|u\|_{L_p(G)}^{1/2}$$

(см. [19]) и формулы Ньютона — Лейбница.

Лемма 2. *Если $b \in L_q(Q^\gamma)$ при $q > \max(p, \frac{n+2}{2})$, то найдется постоянная $c > 0$ такая, что для всех $u \in W_p^{2,1}(Q^\gamma)$, $u(x, 0) = 0$, выполнено*

$$\|ub\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq c\gamma^{\alpha_1}\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)}, \quad \alpha_1 = 1 - (n+2)/(2q). \quad (17)$$

Если $a \in L_q(Q^\gamma)$ при $q > \max(p, n+2)$, то найдется постоянная $c > 0$ такая, что для всех $u \in W_p^{2,1}(Q^\gamma)$, $u(x, 0) = 0$, выполнено

$$\|\nabla ua\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c\gamma^{\alpha_2}\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)}, \quad \alpha_2 = 1/2 - (n+2)/(2q). \quad (18)$$

Доказательство. Оба утверждения доказываются по одной схеме. Поскольку функции, заданные на G , продолжимы на $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ с сохранением класса (см., например, [19]), без ограничения общности считаем, что $G = \mathbb{R}_+^n$. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\|ub\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq \|b\|_{L_q(Q^\gamma)}\|u\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}(Q^\gamma)} \quad (q > p).$$

Сделаем замену $y = x\sqrt{\gamma}$, $\tau = t/\gamma$ в последнем интеграле, получим

$$\|u(x, t)\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}(Q^\gamma)} = \gamma^{-(\frac{n}{2}+1)\frac{q-p}{pq}}\|\tilde{u}(y, \tau)\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}(Q^1)}, \quad \tilde{u}(y, \tau) = u(y/\sqrt{\gamma}, \tau\gamma).$$

Поскольку $\tilde{u} = \int_0^t \tilde{u}_\tau(y, \tau) d\tau$, имеем $\|\tilde{u}\|_{L_p(Q^1)} \leq c\|\tilde{u}_\tau\|_{L_p(Q^1)}$. Следовательно, в $W_p^{2,1}(Q^1)$ можем использовать эквивалентную норму

$$\|\tilde{u}\|_0^p = \int_{Q^1} (\tilde{u}_\tau)^p + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha \tilde{u}|^p dy dt.$$

В силу теорем вложения (см., например, [21]) имеем оценку

$$\|\tilde{u}\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}(Q^1)} \leq c\|\tilde{u}\|_0, \quad (19)$$

где постоянная c от \tilde{u} не зависит. Сделав замену $y = x\sqrt{\gamma}, t = \gamma\tau$, преобразуем (19) к неравенству

$$\|u\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}(Q^\gamma)} \leq c\gamma^{1-\frac{n+2}{2q}} \|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)},$$

откуда и вытекает утверждение. Оценка (18) получается аналогично.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (14), (15) на коэффициенты оператора L . Тогда для $f \in L_p(Q^\gamma)$ ($\gamma \in (0, T]$, $p > 1$) существует единственное решение $u \in W_p^{2,1}(Q^\gamma)$ задач (1)–(3), (5) и (1)–(3), (6) с однородными краевыми и начальными условиями в цилиндре Q^γ и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq c\|f\|_{L_p(Q^\gamma)}, \quad (20)$$

где постоянная c не зависит от $\gamma \in (0, T]$. Если дополнительно выполнено условие (16) для некоторого $\delta > 0$ и $f_{x_n} \in L_p(Q_\delta^\gamma)$, то полученное решение обладает свойством $u_{x_n} \in W_p^{2,1}(Q_{\delta_0}^\gamma)$ для всех $\delta_0 < \delta$ и справедлива оценка

$$\|u_{x_n}\|_{W_p^{2,1}(Q_{\delta_0}^\gamma)} \leq c(\|f_{x_n}\|_{L_p(Q_\delta^\gamma)} + \|f\|_{L_p(Q^\gamma)}), \quad (21)$$

где постоянная c не зависит от γ , но, вообще говоря, зависит от параметра $\delta_0 < \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем сначала $\gamma = T$. Для доказательства будем использовать четные или нечетные продолжения решения относительно плоскостей $x_n = 0$, $x_n = d$ и сильно упрощенную схему из работы [22]. Пусть

$$G^1 = \Omega \times \left(-\frac{d}{3}, \frac{d}{3}\right), \quad G^2 = \Omega \times \left(\frac{d}{4}, \frac{3d}{4}\right), \quad G^3 = \Omega \times \left(\frac{2d}{3}, \frac{4d}{3}\right).$$

Построим разбиение единицы $\{\varphi_i\}_{i=1}^3$ на \bar{G} , $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такое, что

$$\text{supp } \varphi_1 \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \left(-\frac{d}{3}, \frac{d}{3}\right), \quad \text{supp } \varphi_2 \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \left(\frac{d}{4}, \frac{3d}{4}\right),$$

$$\text{supp } \varphi_3 \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \left(\frac{2d}{3}, \frac{4d}{3} \right),$$

$$\varphi_1(x', -x_n) = \varphi_1(x', x_n), \quad \varphi_3(x', 2d - x_n) = \varphi_3(x', x_n).$$

Построим области G_0^i с границей класса C^2 такие, что область G_0^1 симметрична относительно плоскости $x_n = 0$, область G_0^3 симметрична относительно плоскости $x_n = d$ и $\text{supp } \varphi_i \cap G^i \subset G_0^i \subset G^i$ ($i = 1, 2, 3$). Рассмотрим, например, задачу (1)–(5), задача (1), (4), (6) рассматривается аналогично. Продолжим коэффициенты оператора из области $G^1 \cap G$ в область $G^1 \setminus G$ следующим образом: a_{nn}, a_{ij} при $i, j \leq n-1$, b_i при $i < n$ и c четным образом по переменной x_n (т. е. новый коэффициент a_{ij} в $G^1 \setminus G$ определяется как $a_{ij}(x', -x_n, t)$), a_{in}, a_n при $i = 1, 2, \dots, n-1$ нечетным образом по переменной x_n . В силу (14) получаем, что продолжения коэффициентов a_{ij} ($i, j \leq n$) непрерывны в области G_0^1 . Аналогично продолжим коэффициенты уравнения из области $G^3 \cap G$ в область $G^3 \setminus G$: коэффициенты a_{ij} ($i, j < n$), a_{nn}, b_i ($i < n$), c четным образом относительно плоскости $x_n = d$ (таким образом, новые коэффициенты имеют вид $a_{ij}(x', 2d - x_n, t)$, $x_n \in (d, \frac{4d}{3})$), а коэффициенты a_n, a_{in} ($i \leq n-1$) нечетным образом относительно плоскости $x_n = d$. Имеем задачу

$$L_0 u = u_t - Lu = f, \quad (22)$$

$$u_{x_n}|_{S_0 \cup S_2} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{S_1} = 0. \quad (23)$$

Пусть $g \in L_p(Q)$. Продолжим g четным образом при $x_n < 0$ и четным образом относительно плоскости $x_n = d$, т. е. продолжение \tilde{g} задается при $x_n < 0$ как $\tilde{g}(x', x_n, t) = g(x', -x_n, t)$ и при $x_n > d$ как $\tilde{g}(x', x_n, t) = g(x', 2d - x_n, t)$. Продолжение обозначаем тем же символом $g(x, t)$. Пусть $\psi_i(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi_i(x) \equiv 1$ на $\text{supp } \varphi_i$ и $\text{supp } \psi_i \cap G^i \subset G_0^i$. Ищем решение задачи (22), (23) в виде $u = \sum_{i=1}^3 \psi_i(x) u_i(x, t)$, где $u_i(x, t)$ — решение задачи

$$L_0 u_i(x, t) = \varphi_i g(x, t), \quad u_i|_{t=0} = 0, \quad u_i|_{\partial G_0^i \times (0, T)} = 0, \quad (24)$$

продолженное нулем вне G_0^i . Поскольку каждая из областей G_0^i имеет границу класса C^2 , справедливы стандартные результаты о разрешимости (см, например, [21]) и для любых $g \in L_p(Q)$ существует единственное решение $u_i(x, t) = R_i(g) \in W_p^{2,1}(Q^i)$ ($Q^i = G_0^i \times (0, T)$). Поскольку коэффициенты уравнения и правая часть в областях G_0^1, G_0^3 обладают нужными свойствами четности, в силу теоремы единственности

$$\begin{aligned} u_1(x', x_n, t) &= u_1(x', -x_n, t), \quad (x', x_n) \in G_0^1, \\ u_3(x', 2d - x_n, t) &= u_3(x', x_n, t), \quad (x', x_n) \in G_0^3, \quad x_n > d. \end{aligned}$$

Следовательно, $u_{1x_n}|_{x_n=0} = 0$ и $u_{3x_n}|_{x_n=d} = 0$. Для каждой из функции $u_i(x, t)$ имеем оценку вида

$$\|u_i(x', t)\|_{W_p^{2,1}(Q^i)} \leq c \|\varphi_i g\|_{L_p(Q^i)} \leq c \|g\|_{L_p(Q)}. \quad (25)$$

Функция u удовлетворяет условиям (23). Имеем

$$\begin{aligned} L_0 u &= \sum_{i=1}^3 \psi_i L_0 u_i + \sum_{i=1}^3 [L_0, \psi_i] u_i = \sum_{i=1}^3 \psi_i \varphi_i g + \sum_{i=1}^3 [L_0, \psi_i] u_i \\ &= g + \sum_{i=1}^3 [L_0, \psi_i] u_i = g + R(g), \quad (26) \end{aligned}$$

где $[L_0, \psi_i]v = L_0(\psi_i v) - \psi_i L_0 v$, а выражение $R(g)$ — оператор, сопоставляющий функции g выражение вида $\sum_{i=1}^3 [L_0, \psi_i] u_i$. В силу оценки (25) этот оператор непрерывен. Легко получить оценку

$$\|R(g)\|_{L_p(Q)} \leq c_1 \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{W_p^{1,0}(Q)} + c_1 \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{L_r(Q)}, \quad r = \frac{r_0 p}{r_0 - p}.$$

Чтобы оценить $\|u_i\|_{L_r(Q)}$, используем вложение $W_p^s(Q) \subset L_r(Q)$ ($r \leq \frac{(n+1)p}{(n+1)-sp}$). Поскольку $r_0 > \max(p, n+2)$, можем выбрать $s < 1$ такое, что $\frac{r_0 p}{r_0 - p} \leq \frac{(n+1)p}{(n+1)-sp}$. Таким образом,

$$\|R(g)\|_{L_p(Q)} \leq c_1 \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{W_p^{1,0}(Q)} + c_2 \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{W_p^s(Q)}, \quad (27)$$

где $s < 1$. В силу компактности вложений $W_p^{2,1}(Q) \subset W_p^{1,0}(Q) \cap W_p^s(Q)$ (см. [19]) оператор $R : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$ вполне непрерывен. Надо доказать разрешимость уравнения

$$g + R(g) = f. \quad (28)$$

Если g — решение (28), то функция $\sum_{i=1}^3 u_i \psi_i$ — решение задачи (22), (23). Покажем единственность решений уравнения (28) и сошлемся на альтернативу Фредгольма. Действительно, пусть g — решение (28) с $f = 0$. Тогда соответствующая функция $u = \sum_{i=1}^3 u_i \psi_i$ — решение задачи (22), (23) с $f = 0$. Умножив уравнение (22) на φ_i , получим, что $u \varphi_i = u_i$ — решение задачи (23), где в правой части стоит выражение $-[L_0, \varphi_i]u$. Таким образом, $u_i = L_0^{-1}([L_0, \varphi_i]u)$. Имеем

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{W_p^{2,1}(Q_i^\gamma)} \leq \sum_{i=1}^3 \|L_0^{-1}([L_0, \varphi_i]u)\|_{W_p^{2,1}(Q_i^\gamma)},$$

где $Q_i^\gamma = G_0^i \times (0, \gamma)$. Как при получении оценки (27), используя лемму 1, имеем ($s < 1$)

$$\begin{aligned} \|L_0^{-1}[L_0, \varphi_i]u\|_{W_p^{2,1}(Q_i^\gamma)} &\leq \|[L_0, \varphi_i]u\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq c_1 \|u\|_{W_p^{1,0}(Q^\gamma)} \\ &+ c_2 \|u\|_{W_p^s(Q^\gamma)} \leq c_1 \|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_p(Q^\gamma)}^{\frac{1}{2}} + c_2 \|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)}^s \|u\|_{L_p(Q^\gamma)}^{1-s} \\ &\leq \gamma^{\delta_0} c \|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \quad (\delta_0 > 0). \end{aligned}$$

Таким образом, если $\gamma^{\delta_0} c < 1$, то $u \equiv 0$ в $L_p(Q^\gamma)$. Продолжая рассуждения в $Q_\gamma^{2\gamma} = G \times (\gamma, 2\gamma)$, получим $u \equiv 0$ в $Q_\gamma^{2\gamma}$ и т. д. Оценка (20) легко вытекает из вышеприведенных рассуждений. Оценка (21) получается, если использовать рассуждения, основанные на лемме 4.6 в [21]. Строим четное продолжение решения и оцениваем в Q_δ конечную разность по переменной x_n :

$$\Delta_h u = (u(x + h e_n) - u(x))/h \quad (e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)).$$

Оценка для этой функции влечет нужную оценку (21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть u — решение задачи (1)–(4), (6) из указанного в теореме 1 класса. Сделаем замену неизвестной функции $u = v + \Phi$, где функция Φ взята из условия (11). Получим, что v — решение задачи

$$v_t - Lv = f_0 q(x', t) + g(x, t), \quad g = f_1 - \Phi_t + L\Phi, \quad (29)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v|_S = 0, \quad v_{x_n}|_{S_0} = 0. \quad (30)$$

Полагая в (29) $x_n = 0$, получим

$$-a_{nn} v_{x_n x_n}(x', 0, t) = f_0(x', 0, t) q(x', t) + g(x', 0, t),$$

откуда

$$q(x', t) = -\frac{a_{nn} v_{x_n x_n}(x', 0, t)}{f_0(x', 0, t)} - \frac{g(x', 0, t)}{f_0(x', 0, t)}. \quad (31)$$

Функция v представима в виде суммы $v = v_0 + v_1$, где v_0, v_1 — решения следующих задач:

$$v_{0t} - Lv_0 = g(x, t), \quad v_{0x_n}|_{x_n=0} = 0, \quad v_0|_{S \setminus S_0} = 0, \quad v_0|_{t=0} = 0, \quad (32)$$

$$v_{1t} - Lv_1 = f_0 q(x', t), \quad v_1|_{t=0} = 0, \quad v_{1x_n}|_{x_n=0} = 0, \quad v_1|_{S \setminus S_0} = 0. \quad (33)$$

Тогда равенство (31) перепишется в виде

$$\begin{aligned} q(x', t) &= -\frac{a_{nn} v_{1x_n x_n}(x', 0, t)}{f_0(x', 0, t)} + g_0(x', t), \\ g_0 &= -\frac{g(x', 0, t)}{f_0(x', 0, t)} - \frac{a_{nn} v_{0x_n x_n}(x', 0, t)}{f_0(x', 0, t)} \end{aligned} \quad (34)$$

или в виде $q = g_0 + R(q)$, где $R(q)$ — оператор, сопоставляющий $q \in L_p(Q_0^\gamma)$ функцию

$$R(q) = -(a_{nn}(x', 0, t) v_{1x_n x_n}(x', 0, t)) / f_0(x', 0, t)$$

и v_1 — решение задачи (33). Очевидно, что оператор $R(q)$ линеен. Функция v_1 обладает свойствами, указанными в лемме 3. Оценим $\|R(q)\|_{L_p(Q_0^\gamma)}$ ($\gamma \leq T$):

$$\|R(q)\|_{L_p(Q_0^\gamma)} \leq c \|v_{1x_n x_n}(x', 0, t)\|_{L_p(Q_0^\gamma)}.$$

В силу леммы 3 имеем $v_{1x_n} \in W_p^{2,1}(Q_\delta^\gamma v)$ ($\forall \delta < \delta_0$). В частности, $v_{x_n x_n x_n} \in L_p(Q_\delta^\gamma)$ и $v_{1x_n x_n} \in L_p(Q_{\delta_0}^\gamma)$ для всех $\delta_0 < \delta$. Следовательно, определен след $v_{1x_n x_n}(x', 0, t) \in L_p(Q_0^\gamma)$. В силу теорем вложения [19]

$$\begin{aligned} \|v_{1x_n x_n}(x', 0, t)\|_{L_p(Q_0^\gamma)} &\leq c \|v_{1x_n x_n}\|_{L_p(0, \gamma; W_p^{s_0}(G_{\delta_0}))} \\ &\leq c_1 \|v_{1x_n}\|_{L_p(0, \gamma; W_p^{1+s_0}(G_{\delta_0}))} \quad (s_0 > 1/p). \end{aligned}$$

Фиксируем $\delta_0 < \delta$. Применяя интерполяционные неравенства и используя лемму 3, получим

$$\begin{aligned} \|v_{1x_n}\|_{L_p(0, \gamma; W_p^{1+s_0}(G_{\delta_0}))} &\leq c_2 \|v_{1x_n}\|_{W_p^{2,1}(Q_{\delta_0}^\gamma)}^\theta \|v_{1x_n}\|_{L_p(Q_{\delta_0}^\gamma)}^{1-\theta} \\ &\leq c_2 \|v_{1x_n}\|_{W_p^{2,1}(Q_{\delta_0}^\gamma)}^\theta \|v_{1x_n} t\|_{L_p(Q_{\delta_0}^\gamma)}^{1-\theta} \gamma^{1-\theta} \\ &\leq c_4 \gamma^{1-\theta} (\|f_{0x_n}\|_{L_\infty(Q_\delta)} \|q\|_{L_p(Q_0^\gamma)} + \|f_0\|_{L_\infty(Q)} \|q\|_{L_p(Q_0^\gamma)}) \\ &\leq c_5 \|q\|_{L_p(Q_0^\gamma)} \gamma^{1-\theta}, \quad (35) \end{aligned}$$

или

$$\|R(q)\|_{L_p(Q_0^\gamma)} \leq c_6 \gamma^{1-\theta} \|q\|_{L_p(Q_0^\gamma)}, \quad \theta = (1 + s_0)/2. \quad (36)$$

Таким образом, применима теорема о неподвижной точке, и, значит, уравнение (34) имеет единственное решение q из $L_p(Q_0^\gamma)$ при $c_6 \gamma^{\frac{1-\theta}{2}} < 1$ (постоянная c_6 от γ не зависит). Положим $\tilde{q}(x', t) = \begin{cases} q(x', t), & t \leq \gamma, \\ 0, & t > \gamma. \end{cases}$ Тогда оператор $R(q)$ можем записать в виде $R(q) = R(q - \tilde{q}) + R(\tilde{q})$. Положим $q - \tilde{q} = q_1$. Имеем уравнение

$$q_1 = R(q_1) + g_0 + R(\tilde{q}) - \tilde{q}. \quad (37)$$

Поскольку по доказанному оператор R сжимающий на $(0, \gamma)$ и $R(\tilde{q}) - \tilde{q} + g_0 = 0$ на Q_0^γ , то $q_1 \equiv 0$ при $t < \gamma$. Тогда и $R(q_1) = 0$ при $t < \gamma$. Соответствующая функция v_1 — решение задачи (33), где $q = q_1 = q - \tilde{q}$ также обращается в нуль при $t < \gamma$. Как и ранее, имеем оценку

$$\|R(q_1)\|_{L_p(Q_\delta^{2\gamma})} \leq c_6 \gamma^{1-\theta} \|q_1\|_{L_p(Q_0^{2\gamma})}$$

(в классе функций q_1 , равных нулю при $t < \gamma$). Без ограничения общности считаем, что постоянная c_6 в этом неравенстве та же самая, что

участвовала в оценке (36). Действительно,

$$\begin{aligned} \|R(q_1)\|_{L_p(Q_0^{2\gamma})} &\leq c_1 \|v_{1x_n}\|_{L_p(0,2\gamma;W_p^{1+s_0}(G_\delta))} \\ &\leq c_2 \|v_{1x_n}\|_{W_p^{2,1}(Q_\delta^{2\gamma})}^\theta \|v_{1x_n}\|_{L_p(Q_\delta^{2\gamma})}^{1-\theta}, \end{aligned}$$

где $\theta = \frac{1+s_0}{2}$. Однако, поскольку $v_{1x_n} = 0$ при $t \leq \gamma$, имеем

$$\|v_{1x_n}\|_{L_p(Q_\delta^{2\gamma})}^{1-\theta} \leq \gamma^{1-\theta} \|v_{1x_n t}\|_{L_p(Q_\delta^{2\gamma})}.$$

Таким образом,

$$\|R(q_1)\|_{L_p(Q_0^{2\gamma})} \leq c_6 \gamma^{1-\theta} \|q_1\|_{W_p(Q_0^{2\gamma})}.$$

В силу выбора $c_6 \gamma^{\frac{1-\theta}{2}} < 1$. Тем самым уравнение (37) имеет единственное решение. Сделав обратную замену $q - \tilde{q} = q_1$, получим, что уравнение (34) имеет единственное решение на промежутке $[0, 2\gamma]$. Повторяя рассуждения на промежутке $[0, 3\gamma]$ и т. д., докажем существование решения уравнения (34) и его единственность. Функцию v_1 восстановим как решение задачи (33), используя уже известную функцию $q \in L_p(Q_0)$. Покажем, что функция $v = v_0 + v_1$ удовлетворяет условию $v|_{S_0} = 0$. В этом случае пара u, q ($u = v + \Phi$) будет решением исходной задачи (1)–(4), (6). Действительно, полагая в (29), что $x_n = 0$, получим

$$\begin{aligned} v_t - L'v - a_{nn}v_{x_n x_n} &= f_0(x', 0, t)q + g(x', 0, t), \\ L'v &= \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}v_{x_i x_j} + cv + \sum_{i=1}^{n-1} b_i v_{x_i}. \end{aligned} \quad (38)$$

Слагаемые $\sum_{i=1}^{n-1} a_{ni}v_{x_i x_n}$, $b_n v_{x_n}$ обращаются в 0 при $x_n = 0$ в силу условия $v_{x_n}|_{S_0} = 0$. Функция q удовлетворяет уравнению (31). Таким образом,

$$-a_{nn}v_{x_n x_n} = f_0(x', 0, t)q + g(x', 0, t). \quad (39)$$

Вычитая (38) и (39), получим

$$\begin{aligned} v_t(x', 0, t) - L'v(x', 0, t) &\equiv 0, \\ v(x', 0, t) &\in W_p^{2,1}(Q_0), \quad v|_{t=0} = 0, \quad v|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0. \end{aligned}$$

В силу единственности Q решений параболических задач $v(x', 0, t) \equiv 0$. Доказательство существования решений задачи (1)–(5) осуществляется по той же самой схеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
2. *Anikonov Yu. E., Belov Yu. Ya.* Determining of two unknown coefficients of parabolic type equation // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2001. V. 9, N 5. P. 469–488.
3. *Pyatkov S. G., Tsybikov B. N.* On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // *J. Evol. Equ.* 2011. V. 11, N 1. P. 155–186.
4. *Pyatkov S. G.* On some classes of inverse problems for parabolic equations // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2011. V. 18, N 8. P. 917–934.
5. *Ivanchov M.* Inverse problems for equation of parabolic type. L'viv: VNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10.)
6. *Саяхов Ф. Л., Смирнов Г. П., Фатыхов М. А.* Некоторые задачи теплопроводности и акустическое взаимодействие с электромагнитными диэлектриками // *Инж.-физ. журн.* 1981. Т. 41, № 5. С. 916–921.
7. *Dinh Nho Hào.* A non-characteristic Cauchy problem for linear parabolic equations and related inverse problems: I. Solvability. Inverse problems // *Inverse Probl.* 1994. V. 10. P. 295–315.
8. *He Guo-qiang, Meng Ze-hong.* A Newton type iterative method for heat-conduction inverse problems // *Appl. Math. Mech.* 2007. V. 28, N 2. P. 531–539.
9. *Shidrar A.* An inverse heat conduction problem // *South. Asian Bull. Math.* 2002. V. 26. P. 503–507.
10. *Шишко Н. П.* Обратная задача для параболического уравнения // *Мат. заметки.* 1981. Т. 29, № 1. С. 55–62.
11. *Гольдман Н. Л.* Единственность и свойства сопряженных задач для одного класса параболических уравнений с данными Коши // *Вычисл. методы и программирование.* 2007. Т. 8. С. 184–194.
12. *Iskenderov A. D., Akhundov A. Ya.* Inverse problem for a linear system of parabolic equations // *Dokl. Mat.* 2009. V. 79, N 1. P. 73–75.
13. *Choulli M., Yamamoto M.* Conditional stability in determining a heat source // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2004. V. 12, N 3. P. 233–243.
15. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2006.
14. *Isakov V.* Inverse source problems. Providence: AMS, 1990. (Math. Surv. Monogr.; V. 34.)
16. *Ramm A. G.* Inverse problems. Mathematical and analytical techniques with applications to engineering. Boston: Springer Sci., Business Media, Inc., 2005.
17. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
18. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker Inc., 1999.
19. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
20. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
21. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

-
- 22.** Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. 1964. Т. XIX, вып. 3. С. 53–161.

г. Ханты-Мансийск

10 февраля 2012 г.

Тогда неизвестные x_i выражаются через x_0 следующим образом:

$$x_i = B_{n-i} + \frac{(-1)^{i+1} B_n}{\prod_{p=1}^i S_{n-i+p}} + \frac{(-1)^i x_0}{\prod_{p=1}^i S_{n-i+p}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где

$$B_j = \frac{b_{n-j}}{a_{n-j, n-j}} - \sum_{p=1}^{j-1} \frac{a_{n-j, n-p}}{a_{n-j, n-j}} B_p, \quad B_1 = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1, n-1}}, \quad j = \overline{2, n}, \quad (5)$$

$$S_j = \frac{a_{n-j, n-j+1}}{a_{n-j, n-j}} + \sum_{p=2}^j \frac{(-1)^{p+1} a_{n-j, n-j+p}}{a_{n-j, n-j} \prod_{k=1}^{p-1} S_{j-k}}, \quad S_1 = \frac{a_{n-1, n}}{a_{n-1, n-1}}, \quad j = \overline{2, n}, \quad (6)$$

x_0 — произвольное вещественное число.

Очевидно, рекуррентное соотношение (5) можно переписать в виде

$$B_{n-j} = \frac{b_j}{a_{j,j}} - \sum_{p=1}^{n-j-1} \frac{a_{j, n-p}}{a_{j,j}} B_p = \frac{b_j}{a_{j,j}} - \sum_{p=j+1}^{n-1} \frac{a_{j,p}}{a_{j,j}} B_{n-p}, \quad (7)$$

$$B_1 = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1, n-1}}, \quad j = \overline{0, n-2},$$

Если предположить, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-j} = B(j)$ и возможен предельный переход в выражении (7), то для каждого j имеет место равенство

$$B(j) = \frac{b_j}{a_{j,j}} - \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{a_{j,p}}{a_{j,j}} B(p).$$

Поскольку $a_{j,j} \neq 0$, отсюда, очевидно, следует соотношение

$$\sum_{p=j}^{\infty} a_{j,p} B(p) = b_j. \quad (8)$$

Сравнивая выражение (8) с (2), убеждаемся, что $x_j = B(j)$, т. е. $B(j)$ является частным решением неоднородной бесконечной системы (2),

т. е. (1). Покажем, что $B(j)$ действительно является частным решением (1). Если для решения системы (1) применить метод редукции в узком смысле, как это сделано в [1], то получим

$$\overset{n}{x}_j = B_{n-j}, \quad (9)$$

где B_{n-j} определяется выражением (5).

Если допустить, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-j} = B(j)$, то из (9) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{n}{x}_j = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-j} = B(j)$, т. е. $B(j)$ является решением системы (1). При этом $B(j)$ не может быть одновременно равным нулю для всех j , в противном случае система (1) несовместна, поскольку в силу ее неоднородности хотя бы один свободный член b_j не равен 0.

Таким образом, доказана

Лемма. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-j} = B(j)$ и не все $B(j)$ равны 0, то $B(j)$ является частным решением системы (1) ($j = \overline{0, \infty}$).

Используя коэффициенты и свободные члены системы (1), введем обозначения:

$$b'_{j+p} = \frac{b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}}, \quad p = 0, 1, \dots; \quad a'_{n,j} = \frac{a_{j,n}}{a_{j,j}}, \quad a'_{j,j} = 1, \quad 0 \leq j \leq n-1. \quad (10)$$

Из коэффициентов (10) составим следующий определитель B'_{n-j} порядка $n-j$:

$$B'_{n-j} = \begin{vmatrix} b'_j & b'_{j+1} & b'_{j+2} & \cdots & b'_{n-2} & b'_{n-1} \\ a'_{j+1,j} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a'_{j+2,j} & a'_{j+2,j+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a'_{j+k,j} & a'_{j+k,j+1} & a'_{j+k,j+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n-2,j} & a'_{n-2,j+1} & a'_{n-2,j+2} & \cdots & 1 & 0 \\ a'_{n-1,j} & a'_{n-1,j+1} & a'_{n-1,j+2} & \cdots & a'_{n-1,n-2} & 1 \end{vmatrix}, \quad (11)$$

где $B'_1 = b'_{n-1}$.

Из определителя (11), исключая первую строку, составим бесконечную матрицу $A(j)$:

$$A(j) = \begin{pmatrix} a'_{j+1,j} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \cdot \\ a'_{j+2,j} & a'_{j+2,j+1} & 1 & \dots & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{j+k,j} & a'_{j+k,j+1} & a'_{j+k,j+2} & \dots & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n-2,j} & a'_{n-1,j+1} & a'_{n-2,j+2} & \dots & 1 & 0 & \cdot \\ a'_{n-1,j} & a'_{n-1,j+1} & a'_{n-1,j+2} & \dots & a'_{n-1,n-2} & 1 & \cdot \\ a'_{n,j} & a'_{n,j+1} & a'_{n,j+2} & \dots & a'_{n,n-2} & a'_{n,n-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Допускаем, что бесконечная матрица $A(j)$ порождает бесконечный определитель $|A(j)|$. Из главных миноров определителя $|A(j)|$ составим определители $A_n(j)$ n -го порядка, при этом полагаем, что $A_0(j) = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$A_0(j) = 1, \quad A_1(j) = a'_{j+1,j}, \quad A_2(j) = \begin{vmatrix} a'_{j+1,j} & 1 \\ a'_{j+2,j} & a'_{j+2,j+1} \end{vmatrix},$$

$$A_3(j) = \begin{vmatrix} a'_{j+1,j} & 1 & 0 \\ a'_{j+2,j} & a'_{j+2,j+1} & 1 \\ a'_{j+3,j} & a'_{j+3,j+1} & a'_{j+3,j+2} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

$$A_n(j) = \begin{vmatrix} a'_{j+1,j} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a'_{j+2,j} & a'_{j+2,j+1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a'_{j+n-1,j} & a'_{j+n-1,j+1} & a'_{j+n-1,j+2} & \dots & a'_{j+n-1,j+n-2} & 1 \\ a'_{j+n,j} & a'_{j+n,j+1} & a'_{j+n,j+2} & \dots & a'_{j+n,j+n-2} & a'_{j+n,j+n-1} \end{vmatrix}.$$

Пусть ряд $\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A_p(j)b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}}$ сходится для любого j , при этом он одновременно не равен нулю для всех j . Таким образом, выполняются условия

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A_p(j)b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}} < \infty, \quad j = 0, 1, \dots,$$

и хотя бы для одного j

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A_p(j)b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}} \neq 0, \quad (14)$$

где $A_p(j)$ — определители (13) порядка p .

Теорема 2. При выполнении условий (14) неоднородная гауссова система (1) имеет частное решение x_j вида

$$x_j = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A_p(j)b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (15)$$

где $A_p(j)$ — определители (13) порядка p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [3] показано, что величина B_{n-j} , вычисляемая рекуррентным соотношением (8), равна определителю (11), т. е. $B_{n-j} = B'_{n-j}$. Следовательно, если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-j} = B(j)$, то $B(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} B'_{n-j} = B'(j)$, т. е. он должен быть равным бесконечному определителю, если он существует:

$$B'(j) = \begin{vmatrix} b'_j & b'_{j+1} & b'_{j+2} & \dots & b'_{n-2} & b'_{n-1} & \cdot \\ a'_{j+1,j} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \cdot \\ a'_{j+2,j} & a'_{j+2,j+1} & 1 & \dots & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{j+k,j} & a'_{j+k,j+1} & a'_{j+k,j+2} & \dots & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n-2,j} & a'_{n-1,j+1} & a'_{n-2,j+2} & \dots & 1 & 0 & \cdot \\ a'_{n-1,j} & a'_{n-1,j+1} & a'_{n-1,j+2} & \dots & a'_{n-1,n-2} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Таким образом, надо показать, что бесконечный определитель (16) существует. Для этого по определению бесконечных определителей [4] вычисляем по индукции главные миноры $|B'_n(j)|$ определителя (16). Находим первые миноры:

$$|B'_1(j)| = b'_j = 1 \cdot \frac{b_j}{a_{j,j}} = A_0(j) \frac{b_j}{a_{j,j}},$$

$$\begin{aligned}
 |B'_2(j)| &= 1 \cdot \frac{b_j}{a_{j,j}} - \frac{a_{j,j+1}}{a_{j,j}} \frac{b_{j+1}}{a_{j+1,j+1}} \\
 &= A_0(j) \frac{b_j}{a_{j,j}} - A_1(j) \frac{b_{j+1}}{a_{j+1,j+1}} = \sum_{p=0}^1 (-1)^p A_p(j) \frac{b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Пусть соотношение (17) верно для n , докажем, что оно верно и для $n+1$. Действительно, разлагая минор $|B'_{n+1}(j)|$ по $(n+1)$ -му столбцу и учитывая справедливость (17) при n , т. е.

$$|B'_n(j)| = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{A_p(j) b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}},$$

получим

$$|B'_{n+1}(j)| = \frac{(-1)^{1+n+1} b_{j+n}}{a_{j+n,j+n}} + 1 \cdot |B'_n(j)| = \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{A_p(j) b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, при выполнении условия (14) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |B'_n(j)| = B(j) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A_p(j) b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (18)$$

Согласно лемме теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 вытекает важное для приложений

Следствие 1. Если бесконечная неоднородная гауссова система (1) имеет единственное решение, то этим решением будет выражение (15).

Следствие 2. Если не выполняются условия (14), т. е.

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A_p(j) b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}} = 0$$

для всех j или

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A_p(j) b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}} = \infty$$

хотя бы для одного j , то система (1) несовместна.

Действительно, в первом случае левая часть всех уравнений системы (1) равна нулю, а правая b_j не равна 0 хотя бы для одного j ; противоречие. Во втором случае нарушается само определение бесконечной системы, так как ряд j -го уравнения системы (1) будет расходящимся.

Для примера рассмотрим хорошо изученную неоднородную периодическую систему, причем ее простейший вид — гауссову систему с разностными индексами [1]:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p x_{j+p} = b^j, \quad a_0 = 1, \quad b > 0. \quad (19)$$

Частное решение системы (19) найдено [1] и имеет вид

$$x_i = \frac{b^i}{\sum_{p=0}^{\infty} a_p b^p}. \quad (20)$$

Используя теорему 2, найдем решение (20). В данном случае последовательность определителей (13) будет характеристической последовательностью [1] гауссовой системы (19) и не зависит от индекса j :

$$A_0 = 1, \quad A_1 = a_1, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \dots, \\ A_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}, \dots \quad (21)$$

Заменяя элементы a_n определителей A_n на $(-1)^n a_n$, составим последовательность определителей \bar{A}_n :

$$\bar{A}_0 = 1, \quad \bar{A}_1 = -a_1, \quad \bar{A}_2 = \begin{vmatrix} -a_1 & 1 \\ a_2 & -a_1 \end{vmatrix}, \\ \bar{A}_3 = \begin{vmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & -a_1 & 1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\bar{A}_n = \left| \begin{array}{ccccc} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & -a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1}a_{n-1} & (-1)^{n-2}a_{n-2} & (-1)^{n-3}a_{n-3} & \dots & 1 \\ (-1)^n a_n & (-1)^{n-1}a_{n-1} & (-1)^{n-2}a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{array} \right|, \dots \quad (22)$$

Легко убедиться, что $\bar{A}_n = (-1)^n A_n$ и $(-1)^n \bar{A}_n = A_n$.

Если степенной ряд $f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p x^p$ абсолютно сходится в области $|x| \leq r > 0$ и не имеет в ней нулей, то, как показано в [1], функция $\frac{1}{f(x)}$ разлагается в указанной области в степенной ряд:

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{p=0}^{\infty} A_p x^p, \quad (23)$$

где A_p — характеристические определители (21).

Расписывая решение (15) в случае системы (19) и учитывая соотношения между определителями A_p и \bar{A}_p , а также выражение (23), получим

$$x_j = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_p b^{j+p} = b^j \sum_{p=0}^{\infty} \bar{A}_p b^p = \frac{b^j}{\bar{f}(x)},$$

где A_p и \bar{A}_p — определители (21) и (22) соответственно и

$$\bar{f}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \bar{a}_p b^p.$$

Учитывая $\bar{a}_p = (-1)^p a_p$, имеем

$$\bar{f}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \bar{a}_p b^p = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (-1)^p a_p b^p = \sum_{p=0}^{\infty} a_p b^p.$$

Таким образом, получили соотношение (20).

Из следствия 2 следует, что в случаях

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p b^p = \infty \quad \text{или} \quad \sum_{p=0}^{\infty} a_p b^p = 0$$

разностная гауссова система (19) несовместна.

Действительно, в первом случае получим тривиальное решение приведенной системы (19), что противоречит неоднородности системы. Во втором случае ряды в левой части уравнений системы (19) расходятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. М. Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.
2. Федоров Ф. М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.
3. Федоров Ф. М. К теории гауссовых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 209–217.
4. Каган В. Ф. Основания теории определителей. Киев: Гос. изд-во Украины, 1922.

г. Якутск

18 ноября 2011 г.

ОБ АЛГОРИТМЕ ГАУССА
ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (БСЛАУ)

Ф. М. Федоров

В работах автора [1–3] введены и исследованы некоторые виды гауссовых БСЛАУ. В них по аналогии с конечными системами с верхней треугольной матрицей дается определение гауссовой бесконечной системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если матрица $A(a_{i,j})$ бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

имеет элементы $a_{i,j} = 0$ для всех $i > j$, причем элементы главной диагонали не равны нулю, т. е. $a_{i,i} \neq 0, i = 1, 2, \dots$, то говорим, что такая бесконечная система линейных алгебраических уравнений (1) задана в *гауссовой форме*. Таким образом, если все элементы, расположенные под главной диагональю бесконечной матрицы $A(a_{i,j})$ ($a_{j,j} \neq 0, j = 1, 2, \dots$), равны нулю, то такую матрицу называем *гауссовой матрицей*. А если все элементы, расположенные над главной диагональю, равны нулю, то такую бесконечную матрицу A называем *треугольной матрицей*.

В [3] найдены необходимые и достаточные условия существования нетривиального решения однородной гауссовой бесконечной системы, при выполнении которых указанные решения имеют простой замкнутый вид. Теория некоторых конкретных гауссовых бесконечных систем изложена в монографии автора [1].

Вместе с тем в научной литературе вопросы приведения общих бесконечных систем к системам в гауссовой форме не рассматривались. В данной статье покажем возможность применения метода исключения Гаусса для преобразования бесконечных систем в гауссову форму.

Используем теорию метода Гаусса для конечных систем, изложенную в монографии Ф. Р. Гантмахера [4]. В соответствии с этим введем некоторые обозначения для определителей, составленных из элементов данной конечной матрицы $A(a_{i,k})$:

$$A \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_p \\ k_1 k_2 \dots k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1, k_1} & a_{i_1, k_2} & \dots & a_{i_1, k_p} \\ a_{i_2, k_1} & a_{i_2, k_2} & \dots & a_{i_2, k_p} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i_p, k_1} & a_{i_p, k_2} & \dots & a_{i_p, k_p} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Определитель (2) называется *минором p -го порядка* матрицы A , если $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m$ и $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n$. Прямоугольная $(m \times n)$ -матрица $A(a_{i,k})$ имеет $C_m^p C_n^p$ миноров p -го порядка

$$A \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_p \\ k_1 k_2 \dots k_p \end{pmatrix} \quad \left(\begin{matrix} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m \\ 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n \end{matrix} \right); \quad p \leq m, n. \quad (2')$$

Миноры (2'), у которых $i_1 = k_1, i_2 = k_2, \dots, i_p = k_p$, называются *главными*.

В обозначениях (2) определитель квадратной матрицы $|A(a_{i,k})|_1^n$ запишется так:

$$|A| = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Пусть дана матрица $A(a_{i,k})_1^n$ ранга r . Введем следующие обозначения для последовательных главных миноров этой матрицы:

$$D_k = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Известно [4], что всякая квадратная матрица разлагается на треугольные матрицы.

Теорема 1. *Всякую матрицу $A(a_{i,k})_1^n$ ранга r , у которой первые r последовательных главных миноров отличны от нуля, т. е. $D_k \neq 0$,*

$k = 1, 2, \dots, r$, можно представить в виде произведения нижней треугольной матрицы B на верхнюю треугольную матрицу C :

$$A = BC = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ 0 & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

При этом

$$b_{1,1}c_{1,1} = D_1, \quad b_{2,2}c_{2,2} = \frac{D_2}{D_1}, \dots, \quad b_{r,r}c_{r,r} = \frac{D_r}{D_{r-1}}. \quad (4)$$

Первым r диагональным элементам матриц B и C можно дать произвольные значения, удовлетворяющие условиям (4).

Задание первых r диагональных элементов матриц B и C определяет однозначно элементы первых r столбцов матрицы B и первых r строк матрицы C . Для этих элементов имеют место формулы

$$b_{j,k} = b_{k,k} \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & j \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}}, \quad c_{k,j} = c_{k,k} \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & j \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}}, \quad (5)$$

$$j = k, k+1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

В случае $r < n$ ($|A| = 0$) в последних $n - r$ столбцах матрицы B можно все элементы положить равными нулю, а в последних $n - r$ строках матрицы C всем элементам дать произвольные значения, либо наоборот, последние $n - r$ строк матрицы C заполнить нулями, а последние $n - r$ столбцов матрицы B взять произвольными.

Следствие 1. Если диагональные элементы $b_{k,k}$ матрицы B равны 1 и первые r диагональных элементов $c_{k,k}$ матрицы C равны $D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_r}{D_{r-1}}$, а последние $n - r$ заполнены нулями, то получим метод исключения Гаусса.

Некоторые сведения о бесконечных матрицах приведены в [4–6], а основные понятия о них можно найти в монографии Кука [7]. Например, в этой работе для бесконечных матриц введены понятия умножения матриц, верхних и нижних треугольных матриц, а также определение обратной матрицы. Операция умножения матриц вводится так

же, как и для конечных матриц, но с оговоркой о сходимости соответствующих рядов.

Напомним, что понятия верхних и нижних треугольных матриц (конечных) в случае бесконечных матриц выше заменены соответственно понятиями гауссовых и треугольных матриц. Более подробно об этом можно найти в работе автора [2].

В случае бесконечных матриц также справедливы следующие предложения для конечных матриц [7].

Предложение 1. *Произведение двух треугольных матриц является треугольной матрицей.*

Предложение 2. *Произведение трех треугольных матриц ассоциативно.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если $AB = I$, то B называется *правосторонней обратной для A* , а A — *левосторонней обратной для B* , где I — единичная бесконечная матрица.

В соответствии с определением 2 правосторонняя обратная матрица для A является решением X линейного матричного уравнения $AX = I$.

Бесконечную систему (1) с гауссовой матрицей можно записать в виде

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1')$$

или в матричной форме:

$$AX = F, \quad (1'')$$

где A — гауссова бесконечная матрица, X, F — бесконечные столбцы неизвестных и свободных членов системы соответственно.

Для систем (1) с треугольной матрицей доказана следующая

Теорема 2 [7]. *Бесконечная система (1) с треугольной матрицей имеет единственную правостороннюю обратную матрицу, которая бу-*

дет треугольной матрицей, и все ее элементы, лежащие на главной диагонали, равны $\frac{1}{a_{i,i}}$.

Из доказательства теоремы 2 вытекает

Следствие 2. Если $a_{i,i} = 0$ хотя бы для одного значения i , то матрица системы (1) с треугольной матрицей не имеет правосторонней обратной матрицы.

Поскольку систему (1) в общем случае также можно записать в матричной форме (1''), имеет место

Следствие 3. У бесконечной системы (1) с треугольной матрицей существует единственное решение, которое имеет вид $X = A^{-1}F$, где A^{-1} — правосторонняя обратная матрица.

Также в [7] приведены следующие замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть A — треугольная матрица, для которой $a_{i,i} \neq 0$ для всех i , так что согласно теореме 2 она имеет единственную правостороннюю обратную матрицу X . Тогда X является также левосторонней обратной для A и будет единственной двусторонней обратной матрицей для A .

Однако очень важно

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ниоткуда не следует, что X является единственной левосторонней обратной матрицей для A .

Пусть задана бесконечная матрица $A(a_{i,j})_1^\infty$ с бесконечным определителем [5]. Методом Гаусса приведем матрицу A к гауссовой форме аналогично тому, как это делается для конечных матриц. Предположим, что матрица A имеет бесконечный ранг, т. е. существует ее бесконечный определитель, не равный нулю. Как правило, такие матрицы существуют, например, нормальная матрица имеет бесконечный ранг, если даже ее определитель равен нулю [5], бесконечная ганкелева матрица имеет конечный ранг только при выполнении определенных условий [4]. Пусть главные миноры данной бесконечной матрицы не

равны нулю, т. е. $D_k \neq 0$, $k = 1, \dots, \infty$. Тогда, исходя из коэффициентов $a_{i,k}$ данной матрицы A , по формулам (4) и (5) можем найти числа $b_{j,k}$, $c_{k,j}$ и составить из них бесконечные треугольную матрицу B и гауссову матрицу C соответственно. При этом в формулах (4), (5) $j = k, k + 1, \dots$, $k = 1, 2, \dots$. Покажем, что умножение матрицы B на C дает исходную матрицу A , т. е. $BC = A$. Так как матрица B треугольная, при умножении B на C соответствующие ряды обрываются, т. е. эти ряды сходятся, тем самым операция умножения данных бесконечных матриц осуществима. Иными словами, существует матрица $\bar{A}(\bar{a}_{i,j})$, равная произведению BC . Обозначим через B_n , C_n , \bar{A}_n квадратные матрицы n -го порядка, соответствующие главным минорам n -го порядка матриц B , C и их произведения $\bar{A}(\bar{a}_{i,j})$. Полагая диагональные элементы $b_{k,k}$ матрицы B произвольными и проводя вычисления по формулам (4) и (5), имеем

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{b_{1,1}A\binom{2}{1}}{D_1} & b_{2,2} & 0 & \dots \\ \frac{b_{1,1}A\binom{3}{1}}{D_1} & \frac{b_{2,2}A\binom{13}{12}}{D_2} & b_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{D_1}{b_{1,1}} & \frac{A\binom{1}{2}}{b_{1,1}} & \frac{A\binom{1}{3}}{b_{1,1}} & \dots \\ 0 & \frac{A\binom{12}{12}}{b_{2,2}D_1} & \frac{A\binom{12}{13}}{b_{2,2}D_1} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{A\binom{123}{123}}{b_{3,3}D_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что две первые строки матрицы \bar{A} определены так:

$$\bar{a}_{1,1} = D_1 = A\binom{1}{1} = a_{1,1}, \quad \bar{a}_{1,2} = A\binom{1}{2} = a_{1,2}, \quad \bar{a}_{1,3} = A\binom{1}{3} = a_{1,3}, \dots;$$

$$\bar{a}_{2,1} = A\binom{2}{1} = a_{2,1}, \quad \bar{a}_{2,2} = \frac{A\binom{2}{1}A\binom{1}{2} + D_2}{D_1} = a_{2,2},$$

$$\bar{a}_{2,3} = \frac{A\binom{2}{1}A\binom{1}{3} + A\binom{12}{13}}{D_1} = a_{2,3}, \dots$$

Ясно, что для первых значений n имеет место $\bar{A}_1 = A_1$, $\bar{A}_2 = A_2$. Индуктивно полагая, что $\bar{A}_{n-1} = A_{n-1}$, покажем, что $\bar{A}_n = A_n$. Для этого воспользуемся теоремой 1. Пусть в ней ранг r матрицы A равен ее порядку n . Из структуры треугольной матрицы B следует, что $B_n C_n = \bar{A}_n$, но по построению матриц B и C и по теореме 1 имеем $B_n C_n = A_n$. Следовательно, $A_n = \bar{A}_n$, и по индукции заключаем справедливость соотношения $BC = A$. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Всякую матрицу $A(a_{i,k})_1^\infty$ бесконечного ранга, у которой главные миноры отличны от нуля, т. е. $D_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$, можно представить в виде произведения треугольной матрицы B на гауссову матрицу C :*

$$A = BC = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} & \dots \\ 0 & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{n,n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{pmatrix}.$$

При этом

$$b_{1,1}c_{1,1} = D_1, \quad b_{2,2}c_{2,2} = \frac{D_2}{D_1}, \dots, b_{n,n}c_{n,n} = \frac{D_n}{D_{n-1}} \dots, \quad (7)$$

$$b_{j,k} = b_{k,k} \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & j \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}}, \quad c_{k,j} = c_{k,k} \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & j \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}}, \quad (8)$$

$$j = k, k+1, \dots, \infty; \quad k = 1, 2, \dots, \infty.$$

Диагональным элементам матриц B и C можно присвоить произвольные значения, удовлетворяющие условиям (7).

Следующее утверждение важно для фактического вычисления элементов матриц B и C .

Следствие 4. Элементы столбцов матрицы B и строк матрицы C связаны с элементами матрицы A рекуррентными соотношениями:

$$b_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{i,j}c_{j,k}}{c_{k,k}}, \quad i \geq k, \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad k = 1, 2, \dots, \infty,$$

$$c_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1} b_{i,j}c_{j,k}}{b_{i,i}}, \quad i \leq k, \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad k = 1, 2, \dots, \infty.$$

Следствие 5. Если диагональные элементы $b_{i,i}$, $i = 1, 2, \dots, \infty$, матрицы B равны единице, то получим метод исключения Гаусса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку матрица B треугольная, согласно замечанию 1 она имеет единственную двустороннюю обратную матрицу B^{-1} . Следовательно, исходя из (1'') справедливы соотношения: $AX = BCX = F$ и $B^{-1}BCX = B^{-1}F$, откуда $CX = B^{-1}F$ и, кроме того, на основании теоремы 3 матрица C гауссова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. М. Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.
2. Федоров Ф. М. Замечания о гауссовых бесконечных системах линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 202–208.
3. Федоров Ф. М. К теории гауссовых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 209–217.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
5. Каган В. Ф. Основания теории определителей. Киев: Гос. изд-во Украины, 1922.
6. Riesz F. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris: Gauthier-Villars, 1913.
7. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Физматгиз, 1960.

АБСОЛЮТНЫЕ ω -РЕТРАКТЫ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

П. В. Черников

В статье [1] вводится понятие абсолютного ε -ретракта в классе метрических компактов, обобщающее понятие абсолютного ретракта. Приведем соответствующие определения.

Замкнутое подмножество A компактного метрического пространства X называется ε -ретрактом X , если для всякого $\delta > 0$ существует такое непрерывное отображение $r_\delta : X \rightarrow A$, что $\rho(x, r_\delta(x)) \leq \delta$ для всех $x \in A$.

Компактное метрическое пространство Y называется абсолютным ε -ретрактом, если всякое замкнутое подмножество A любого компактного метрического пространства X , гомеоморфное Y , является ε -ретрактом X .

Совокупность всех абсолютных ε -ретрактов обозначим, следуя [1], через ε -AR.

ПРИМЕР 1. Обозначим через Γ гребенку

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x = 0, 1/n, n = 1, 2, \dots\} \\ \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Гребенка Γ принадлежит ε -AR, $\Gamma \notin AR$.

В [1] доказана

Теорема 1. Если метрический компакт X принадлежит ε -AR, то любое непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет неподвижную точку.

Наша цель — распространить теорему 1 на более широкий класс пространств. Все рассматриваемые далее топологические пространства предполагаются хаусдорфовыми. Сформулируем определение абсолютного ω -ретракта в классе бикомпактных пространств.

Пусть X — некоторое множество, Y — топологическое пространство. Образования $f, g : X \rightarrow Y$ называются α -близкими, где α — открытое покрытие пространства Y , если для каждого $x \in X$ существует элемент $U \in \alpha$ такой, что $f(x) \in U$ и $g(x) \in U$.

Замкнутое подмножество A бикомпакта X называется ω -ретрактом X , если для всякого открытого покрытия α бикомпакта A существует такое непрерывное отображение $r_\alpha : X \rightarrow A$, что отображения $r_\alpha|_A$ и id_A α -близки.

Бикомпакт Y называется абсолютным ω -ретрактом, если всякое замкнутое подмножество A любого бикомпакта X , гомеоморфное Y , является ω -ретрактом X .

Совокупность всех абсолютных ω -ретрактов обозначим через AR_ω .

Далее потребуются

Теорема 2. Пусть Y — компактное метрическое пространство и $Y \in \varepsilon\text{-}AR$, X — нормальное пространство, A — замкнутое подмножество X , $f : A \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Тогда для всякого $\delta > 0$ существует такое непрерывное отображение $f_\delta : X \rightarrow Y$, что $\rho(f(x), f_\delta(x)) \leq \delta$ для всех $x \in A$.

Доказательство. Можно считать, что компакт Y лежит в гильбертовом кубе Q . Существует непрерывное продолжение $g : X \rightarrow Q$ отображения $f : A \rightarrow Y$. Пусть $\delta > 0$. Найдется непрерывное отображение $r_\delta : Q \rightarrow Y$ такое, что $\rho(x, r_\delta(x)) \leq \delta$ для всех $x \in Y$. Положим $f_\delta = r_\delta g$, $f_\delta : X \rightarrow Y$. Если $x \in A$, то

$$\rho(f(x), f_\delta(x)) = \rho(f(x), r_\delta f(x)) \leq \delta.$$

Теорема доказана.

Используя теорему 2, покажем, что имеет место

Теорема 3. *Справедливо включение ε -AR \subset AR $_{\omega}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y \in \varepsilon$ -AR. Покажем, что $Y \in AR_{\omega}$. Пусть X — бикompактное пространство, A — замкнутое подмножество X , гомеоморфное Y . Надо доказать, что A — ω -ретракт X . Пусть α — открытое покрытие метрического компакта A . Обозначим через δ (> 0) число Лебега покрытия α . Рассмотрим отображение $\text{id}_A : A \rightarrow A$. Так как $A \in \varepsilon$ -AR, по теореме 2 существует такое непрерывное отображение $r_{\delta} : X \rightarrow A$, что $\rho(x, r_{\delta}(x)) \leq \delta$ для всех $x \in A$, т. е. отображения $r_{\delta}|_A$ и id_A α -близки. Значит, $Y \in AR_{\omega}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Включение ε -AR \subset AR $_{\omega}$, очевидно, строгое ($I^{\tau} \in AR_{\omega}$, $I^{\tau} \notin \varepsilon$ -AR при больших τ , так как при таких τ куб I^{τ} неметризуем).

Следующая теорема обобщает теорему 1.

Теорема 4. *Если бикompакт X принадлежит AR $_{\omega}$, то любое непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет неподвижную точку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что бикompакт X лежит в тихоновском кубе I^{τ} . Допустим, что непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ не имеет неподвижных точек, т. е. $f(x) \neq x$ для всех $x \in X$. Зафиксируем некоторую точку $x \in X$. Так как пространство X хаусдорфово, найдутся окрестность V_x точки x и окрестность W_x точки $f(x)$ в пространстве X такие, что $V_x \cap W_x = \emptyset$. Отображение $f : X \rightarrow X$ непрерывно, поэтому существует такая окрестность U_x точки x , что $U_x \subset V_x$ и $f(U_x) \subset W_x$. Если $y \in U_x$, то $f(y) \in W_x$ и, значит, $f(y) \notin U_x$.

Рассмотрим открытое покрытие $\alpha = \{U_x\}_{x \in X}$ бикompакта X . Так как $X \in AR_{\omega}$, существует непрерывное отображение $r_{\alpha} : I^{\tau} \rightarrow X$ такое, что отображения $r_{\alpha}|_X$ и id_X α -близки. Рассмотрим отображение $fr_{\alpha} : I^{\tau} \rightarrow X$. Поскольку тихоновский куб обладает свойством неподвижной точки, найдется такая точка $a \in X$, что $f(r_{\alpha}(a)) = a$. Пусть α_0 — множество всех элементов покрытия α , содержащих точку $r_{\alpha}(a)$. Среди них найдется такой элемент $U_b \in \alpha_0$, что $r_{\alpha}(a), a \in U_b$. Но для любого элемента $U \in \alpha_0$ выполнено $f(r_{\alpha}(a)) \notin U$ по построению

покрытия α , значит, $a \notin U_b$; противоречие. Теорема доказана.

Приведем некоторые примеры.

ПРИМЕР 2. Как было отмечено, $I^r \in AR_\omega$.

ПРИМЕР 3. Произведение $\Gamma \times I^r$ принадлежит AR_ω , где Γ — гребенка, поскольку $X_1 \times X_2 \in AR_\omega$, если $X_1, X_2 \in AR_\omega$. Отметим, что пространства I^s и $\Gamma \times I^r$ различны в том смысле, что они не гомеоморфны. Если I^s и $\Gamma \times I^r$ гомеоморфны, то $\Gamma \in AR$, что не так.

ПРИМЕР 4. Сфера S^n не принадлежит AR_ω , так как S^n не обладает свойством неподвижной точки ($n \geq 0$).

В связи с теоремой 1 возникает

Вопрос 1. Существует ли компакт $X \notin \varepsilon\text{-}AR$, $X \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), обладающий свойством неподвижной точки?

Покажем, что для пространств \mathbb{R}^k , $k \geq 2$, ответ на этот вопрос положительный.

Пусть $C = C_0 \cup C_1$, где

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -2 \leq y \leq 1\},$$

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x), 0 < x \leq 1\}.$$

Очевидно, что $C \notin \varepsilon\text{-}AR$.

Справедлива

Теорема 5. Компакт C обладает свойством неподвижной точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f : C \rightarrow C$ — непрерывное отображение. Докажем, что существует такая точка $x_0 \in C$, что $f(x_0) = x_0$. При непрерывном отображении компоненты линейной связности переходят в компоненты линейной связности, поэтому возможны следующие четыре случая:

- 1) $f(C_0) \subset C_0$, $f(C_1) \subset C_1$;
- 2) $f(C_0) \subset C_0$, $f(C_1) \subset C_0$;
- 3) $f(C_0) \subset C_1$, $f(C_1) \subset C_0$;
- 4) $f(C_0) \subset C_1$, $f(C_1) \subset C_1$.

Если выполняется случай 1 или 2, то отображение f имеет, очевидно, неподвижную точку. Поскольку образ компактного связного метрического пространства при непрерывном отображении компактен и связен, случай 3 невозможен. Покажем, что в случае 4 отображение f имеет неподвижную точку. Далее *дугой* будем называть пространство, гомеоморфное отрезку $[0, 1]$. Очевидно, множество $f(C_0)$ — или дуга, или точка, именно, компактная связная часть множества C_1 . Так как $\rho(C_0, f(C_0)) > 0$, существует открытая дуга Γ_0 , т. е. дуга без концов, такая, что $\bar{\Gamma}_0 \subset C_1$ и $\Gamma_0 \supset f(C_0)$. Множество Γ_0 — открытая окрестность множества $f(C_0)$ в пространстве C , поэтому $f^{-1}(\Gamma_0)$ — открытое подмножество C и $f^{-1}(\Gamma_0) \supset C_0$. Найдется такое $\delta > 0$, что

$$\{u \in C : \rho(C_0, u) < \delta\} \subset f^{-1}(\Gamma_0).$$

Отсюда следует, что существует число $t_0 \in (0, 1)$, для которого

$$C_{t_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x), 0 < x < t_0\} \subset f^{-1}(\Gamma_0).$$

Следовательно,

$$f(C_{t_0}) \subset f(f^{-1}(\Gamma_0)) \subset \Gamma_0 \subset \bar{\Gamma}_0.$$

Далее, $f(C_1 \setminus C_{t_0})$ — компактное связное множество, лежащее в C_1 . Найдется, очевидно, дуга $\Gamma_1 \subset C_1$, для которой $\Gamma_1 \supset \bar{\Gamma}_0 \cup f(C_1 \setminus C_{t_0})$, и, значит, $\Gamma_1 \supset f(C_1)$. Отсюда $f(\Gamma_1) \subset \Gamma_1$. Следовательно, у отображения $f|_{\Gamma_1} : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$ есть неподвижная точка. Теорема доказана.

Легко видеть, что в случае прямой \mathbb{R}^1 ответ на вопрос 1 отрицательный.

Отметим, что теорема 4 была доложена на Международной конференции «Современные проблемы анализа и геометрии» (Новосибирск, 2009 г.) [2].

Автор благодарен К. В. Сторожуку за ценные советы по доказательству теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Noguchi H.* A generalization of absolute neighborhood retracts // *Kōdai Math. Sem. Rep.* 1953. V. 5, N 1. P. 20–22.

2. Черников П. В. Абсолютный ω -ретракт обладает свойством неподвижной точки // Междунар. конф. по анализу и геометрии, посвящ. 80-летию Ю. Г. Решетняка. Новосибирск, 14–20 сент. 2009. Тез. конф. Новосибирск, 2009. Доступно на <http://math.nsc.ru/conference/cag09>.

г. Новосибирск

1 сентября 2011 г.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДИНАМИКИ РОСТА ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА
В ПРЕСНЫХ И СОЛОНОВАТЫХ ВОДАХ*)

А. Ф. Воеводин, Т. Б. Гранкина

Введение.

В настоящее время много усилий направляется на изучение и освоение водных ресурсов северных территорий (водоемы, болота, реки) [1]. Данная работа нацелена на изучение режима льдообразования в слабопроточных водоемах [2].

В математическом отношении решение проблемы сводится к интегрированию уравнения теплопроводности в трех областях (рис. 1) с неизвестными подвижными границами (f_1, f_2, f_3) и условиями сопряжения на этих границах, учитывая тепловой баланс и переменную температуру фазового перехода. Для решения используется метод «спрямления фронта», позволяющий решать уравнения в регулярных областях, соответствующих жидкой, твердой фазам вещества и слою снежного покрова. В результате этого преобразования в уравнениях теплопроводности появляется конвективное слагаемое, что наряду с образующимся погранслоем существенно влияет на выбор численного метода. Численно задача реализовывалась с помощью метода встречной прогонки.

*) Работа выполнена при проекта № 4.8 Программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

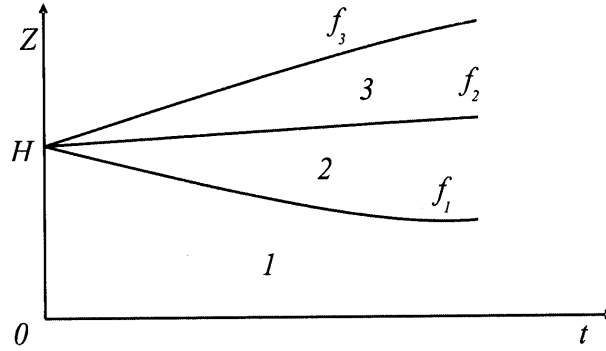


Рис. 1. Область решения задачи: 1 — вода, 2 — лед, 3 — снег

2. Постановка задачи

2.1. Основные уравнения. Рассмотрим слабопроточный водоем глубиной H (см. рис. 1). Распределение температуры и примеси в слое воды $0 \leq z \leq f_1(t)$, в образующихся ледовом $f_1(t) \leq z \leq f_2(t)$ и снежном $f_2(t) \leq z \leq f_3(t)$ покровах описывается уравнениями теплопроводности:

$$\rho_w c_p \frac{\partial T_w}{\partial t} = k_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = d \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_{ic}}{\partial t} = a_{ic}^2 \frac{\partial^2 T_{ic}}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$\rho_{sn} c_p \frac{\partial T_{sn}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{sn} \frac{\partial T_{sn}}{\partial z} \right). \quad (4)$$

Плотность воды изменяется по глубине в зависимости от температуры и концентрации примеси [3]:

$$\begin{aligned} \rho_w(T_w, C) = & 1000,08 + 0,0588T_w + 0,797C - 0,008T_w^2 \\ & - 0,00325T_w C + 0,00013C^2 + 0,0000477T_w^3 \\ & + 0,0000389T_w^2 C + 0,00000288C^2 T_w - 0,00000006C^3. \end{aligned}$$

Плотность снега зависит от толщины снежного покрова и плотности выпадающего снега, определяется следующей зависимостью [4]:

$$\rho_{sn} = \rho_o e^{b(f_3(t)-z)}.$$

Теплопроводность снега зависит от его плотности $k_{sn} = 2,9 \cdot 10^{-6} \rho_{sn}^2 + 0,043$.

Положение подвижных границ раздела сред вода — лед $f_1(t)$, лед — снег $f_2(t)$ и снег — атмосфера $f_3(t)$ находим из соотношений

$$f_1(t) = l_{wa} = H - l_{ic} k_{\rho}, \quad k_{\rho} = \frac{\rho_{ic}}{\rho_w};$$

$$f_2(t) = f_1(t) + l_{ic}; \quad f_3(t) = f_2(t) + l_{sn},$$

где l_w — толщина слоя воды, l_{ic} — искомая толщина слоя льда, l_{sn} — толщина слоя снега.

Высота снежного покрова может быть известна из натуральных измерений. Также ее можно определять из метеорологических данных, через количество свежеснежавших осадков l_{sn}^* (м) или восстанавливать через водный эквивалент W (мм):

$$l_{sn} = \frac{\ln(1 + bl_{sn}^*)}{b}, \quad l_{sn}^* = 0,001W \frac{\rho_w}{\rho_o}.$$

Здесь $T_w(t, z)$, $T_{ic}(t, z)$, $T_{sn}(t, z)$ — температура воды, льда и снега соответственно, °C; $C(t, z)$ — соленость, г/дм³; $b = 1,255$; $\rho_w, \rho_{ic}, \rho_{sn}$ — плотность воды, льда и снега, кг/м³; ρ_o — плотность свежеснежавшего снега, кг/м³; a^2 — коэффициент температуропроводности, м²/с; k_w, k_{ic}, k_{sn} — соответствующие среде коэффициенты теплопроводности, Вт/м°C; d — коэффициент диффузии соли в воде, м²/с.

2.2. Граничные и начальные условия. Для замыкания задачи ставятся краевые условия, определяющие внешнее воздействие на границы области. Считаем, что на дне водоема $z = 0$ отсутствует приток тепла и примеси:

$$\left. \frac{\partial T_w}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

или

$$T_w = \text{const},$$

исходя из глубины водоема и теплофизических свойств донных отложений можно задать теплоприток от дна водоема.

На подвижной границе между водой и льдом $z = f_1(t)$ должно выполняться условие сопряжения:

- 1) классическое условие Стефана, описывающее тепловой баланс:

$$\lambda \rho_{ic} \frac{dl_{ic}}{dt} = k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial z} \right|_{z=f_1} - k_{ic} \left. \frac{\partial T_{ic}}{\partial z} \right|_{z=f_1}; \quad (5)$$

- 2) баланс массы растворенного в воде вещества:

$$C_f \frac{df_1}{dt} = -d \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=f_1}; \quad (6)$$

3) равенство температур сред и условие для температуры замерзания [5]:

$$T_{ice} = T_w = T_f, \quad T_f = T^* - \gamma C_f. \quad (7)$$

Здесь T^* — температура замерзания чистой воды, $T^* = 0^\circ\text{C}$; $T_f(t)$ — фазовая температура (температура замерзания водоема); $C_f(t)$ — значение примеси на границе раздела фаз; γ — равновесный коэффициент распределения примеси, зависящий от химических параметров растворенного в воде вещества [6]; λ — скрытая теплота кристаллизации воды, Дж/кг.

На подвижной границе между льдом и снегом $z = f_2(t)$ задаем равенство тепловых потоков и температур:

$$k_{ic} \left. \frac{\partial T_{ic}}{\partial z} \right|_{z=f_2} = k_{sn} \left. \frac{\partial T_{sn}}{\partial z} \right|_{z=f_2}, \quad T_{ic}|_{z=f_2} = T_{sn}|_{z=f_2}. \quad (8)$$

На верхней границе между снегом и атмосферой $z = f_3(t)$ задаем внешнюю температуру $T_a(t)$, равную температуре воздуха на высоте 2 м над поверхностью снежно-ледового покрова.

В начальный момент времени распределение температуры по толщине в двух фазах задается по линейному закону или равно константе.

Начальное значение концентрации примеси постоянно: $C = C_0$. Температура выпадающего снега постоянна и равна атмосферной.

Одной из особенностей подобных задач является наличие в начальный момент времени только одной фазы — жидкой. Будем считать, что при малых временных параметрах ($t \approx \Delta t$) движение фронта замерзания подчиняется следующему закону:

$$l_{ic}(t) = \alpha\sqrt{t}, \quad V_f = \frac{dl_{ic}}{dt},$$

V_f — скорость движения фронта, α — некоторая константа, вычисляемая по формулам, предложенным А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским [7], зависящая от теплофизических свойств жидкости, начальной температуры жидкости и внешней температуры на границе $z = H$ (атмосферной температуры).

3. Метод численного решения

Для решения воспользуемся методом «спрямления фронта» [8]. Перейдем к новым координатам:

$$\bar{t} = t; \quad 0 < \xi_i < 1; \quad \xi_i = \frac{z - f_{i-1}(t)}{f_i(t) - f_{i-1}(t)} \quad (i = 1, 2, 3);$$

$f_0(t)$ соответствует нижней границе $z = 0$.

Запишем систему уравнений (1)–(4) в новых координатах:

$$l_w^2 \frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{k_w}{\rho_w c_p} \frac{\partial^2 T_w}{\partial \xi_1^2} - v_w \frac{\partial T_w}{\partial \xi_1}, \quad (1')$$

$$l_w^2 \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi_1^2} - v_w \frac{\partial C}{\partial \xi_1}, \quad (2')$$

$$l_{ic}^2 \frac{\partial T_{ic}}{\partial t} = a_{ic}^2 \frac{\partial^2 T_{ic}}{\partial \xi_2^2} - v_{ic} \frac{\partial T_{ic}}{\partial \xi_2}, \quad (3')$$

$$l_{sn}^2 \frac{\partial T_{sn}}{\partial t} = \frac{k_{sn}}{\rho_{sn} c_{p_i}} \frac{\partial^2 T_{sn}}{\partial \xi_3^2} - v_{sn} \frac{\partial T_{sn}}{\partial \xi_3}, \quad (4')$$

где

$$v_w = \xi_1 k_\rho \frac{dl_{ic}}{dt}, \quad v_{ic} = (k_\rho - \xi_2) l_{ic} \frac{dl_{ic}}{dt},$$

$$v_{sn} = (k_\rho - 1)l_{sn} \frac{dl_{ic}}{dt} - \xi_3 \frac{dl_{sn}}{dt} + \frac{1}{\rho_{sn} c_p} \frac{dl_{sn}}{\partial \xi_3}.$$

Здесь v_w, v_{ic}, v_{sn} — скорость изменения температуры и примеси соответственно.

Условия сопряжения на подвижных границах примут вид

$$\frac{dl_{ic}}{dt} = \frac{1}{\lambda \rho_{ic}} \left[\frac{k_w}{l_w} \frac{\partial T_w}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=1} - \frac{k_{ic}}{l_{ic}} \frac{\partial T_{ic}}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=0} \right], \quad (5')$$

$$k_\rho C_f \frac{dl_{ic}}{dt} = \frac{d}{l_w} \frac{\partial C}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=1}, \quad (6')$$

$$\frac{k_{ic} \partial T_{ic}}{l_{ic} \partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=1} = \frac{k_{sn} \partial T_{sn}}{l_{sn} \partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=0}. \quad (8')$$

4. Разностные уравнения

При аппроксимации уравнений полученной системы используются направленные разности для конвективных слагаемых (неявная схема, так как расчет ведется с большими шагами по времени, рассматривается зимний сезон). В результате в каждой области получаем системы разностных уравнений вида

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = K \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h_r^2} - \frac{(v_i - |v_i|)^n u_{i+1}^{n+1} + 2|v_i|^n u_i^{n+1} - (v_i + |v_i|)^n u_{i-1}^{n+1}}{2h_r}, \quad i = 2, \dots, N_r,$$

которые перепишем следующим образом:

$$A_i u_{i-1}^{n+1} - C_i u_i^{n+1} + B_i u_{i+1}^{n+1} = -F_i, \quad (9)$$

где A_i, B_i, C_i, F_i определяются однозначно в зависимости от искомым функций; N_r — количество узлов сетки; $r = (1, 2, 3)$ — номер области, вода — лед — снег, соответственно; h_r — шаг по пространству; τ — шаг по времени; n — номер шага по времени; K — соответствующий для уравнений (1')–(4') коэффициент; u — соответствующая для уравнений (1')–(4') искомая функция; v — соответствующая для уравнений

(1')–(4') скорость. Система уравнений имеет первый порядок аппроксимации по пространству и времени.

В каждой из областей строилась равномерная сетка. Шаг по времени брался постоянным. Для численной реализации задачи использовался метод встречной прогонки [9].

В области 1 решения для T_w и C будем искать в виде

$$u_i^{n+1} = \alpha_{i+1}^{w,c} u_{i+1}^{n+1} + \beta_{i+1}^{w,c}, \quad i = 1, \dots, N_r, \quad (10)$$

где прогоночные коэффициенты считаем по рекуррентным формулам

$$\alpha_{i+1}^{w,c} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i^{w,c} A_i}, \quad \beta_{i+1}^{w,c} = \frac{A_i \beta_i^{w,c} + F_i}{C_i - \alpha_i^{w,c} A_i},$$

согласно граничным условиям (6), (7): $\alpha_2^{w,c} = 1$, $\beta_2^{w,c} = 0$.

В областях 2, 3 осуществляем сквозную прогонку, решение T_{ic}, T_{sn} ищем в виде

$$u_{i+1}^{n+1} = \alpha_{i+1}^{ic,sn} u_i^{n+1} + \beta_{i+1}^{ic,sn}, \quad i = N_r, \dots, 1, \quad (11)$$

здесь коэффициенты

$$\alpha_i^{ic,sn} = \frac{A_i}{C_i - \alpha_{i+1}^{ic,sn} B_i}, \quad \beta_i^{ic,sn} = \frac{B_i \beta_{i+1}^{ic,sn} + F_i}{C_i - \alpha_{i+1}^{ic,sn} B_i},$$

согласно граничным условиям: $\alpha_{N_r+1}^{sn} = 0$, $\beta_{N_r+1}^{sn} = T_a$. Коэффициенты $\alpha_{N_r+1}^{ic}$, $\beta_{N_r+1}^{ic}$ для расчета температуры в слое льда определяем через прогоночные коэффициенты α_1^{sn} , β_1^{sn} . Индексы w, ic, sn соответствуют слою воды, льда, снега.

Соотношения (10) при $i = N_r$ и соотношение (11) при $i = 1$ далее будут использоваться в условиях сопряжения для вычисления потоков тепла на границе $z = f_1(t)$, которые аппроксимируются в первой области

$$\left. \frac{\partial T_w}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} \simeq \frac{T_f - T_{N_r}^w}{h_w} = \frac{T_f(1 - \alpha_{N_r+1}^w) - \beta_{N_r+1}^w}{h_w},$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} \simeq \frac{C_f - C_{N_r}}{h_w} = \frac{C(1 - \alpha_{N_r+1}^c) - \beta_{N_r+1}^c}{h_w},$$

во второй области

$$\left. \frac{\partial T_{ic}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \simeq \frac{T_2^{ic} - T_f}{h_{ic}} = \frac{T_f(\alpha_2^{ic} - 1) + \beta_2^{ic}}{h_{ic}}.$$

Эти выражения для потока тепла и примеси на границе подставим в условия сопряжения (5'), (6'). Тогда получим систему из трех уравнений

$$V_f = A_T T_f + B_T, \quad V_f C_f = A_C C_f + B_C, \quad T_f = T_* - \gamma C_f,$$

из которых следует квадратное уравнение относительно C_f

$$\gamma A_T C_f^2 + (A_C - B_T) C_f + B_C = 0.$$

В результате решения этого уравнения получаем один удовлетворяющий физическим условиям корень [2]

$$C_f = \frac{B_T - A_C + \sqrt{(A_C - B_T)^2 - 4\gamma A_T B_C}}{2\gamma A_T},$$

где

$$A_T = \frac{1}{\lambda \rho_{ic}} \left[\frac{k_w}{l_w h_w} (1 - \alpha_{N_r+1}^w) - \frac{k_{ic}}{l_{ic} h_{ic}} (\alpha_2^{ic} - 1) \right],$$

$$B_T = -\frac{1}{\lambda \rho_{ic}} \left[\frac{k_w}{l_w h_w} \beta_{N_r+1}^w - \frac{k_{ic}}{l_{ic} h_{ic}} \beta_2^{ic} \right],$$

$$A_C = \frac{d(1 - \alpha_{N_r+1}^c)}{h_w l_w k_\rho}, \quad B_C = -\frac{d\beta_{N_r+1}^c}{h_w l_w k_\rho}.$$

Получив значение примеси на границе, из уравнения (7) находим температуру фазового перехода, соответствующую температуре жидкой и твердой фаз на границе. Зная граничные условия, по (10) и (11) восстанавливаем значения температуры и примеси на новом слое. Тем самым заканчивается расчет на одном шаге по времени.

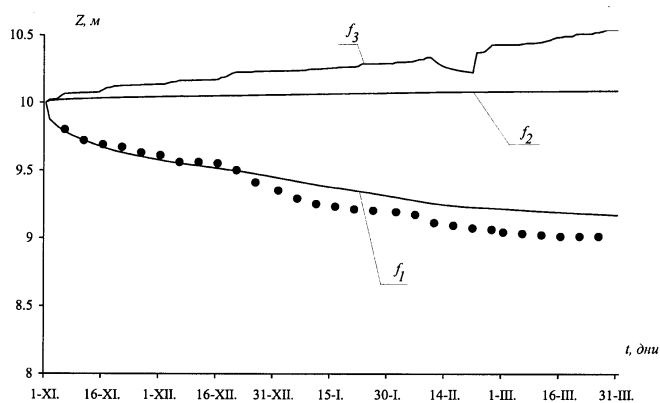


Рис. 2. Расчет толщины снежно-ледового покрова для Новосибирского водохранилища, 1976–1977 гг.

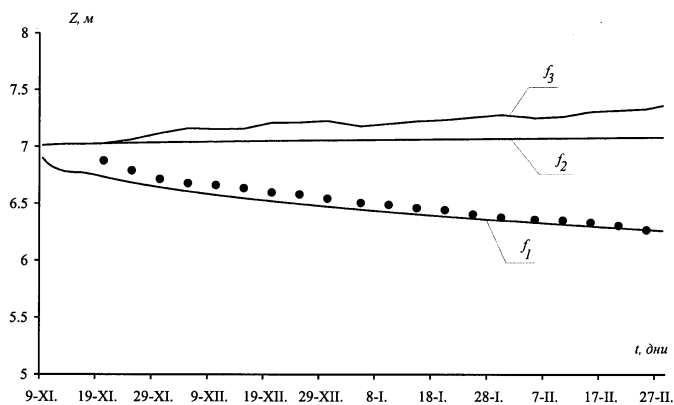


Рис. 3. Расчет толщины снежно-ледового покрова для оз. Яркуль, 1999–2000 г.

5. Результаты расчетов

Требуемые входные данные: шаг по времени τ ; N_r ($r = 1, 2, 3$) — количество узлов сетки в каждой области; H — глубина водоема; $T_a(t)$ — массив метеоданных или функция, определяющая атмосфер-

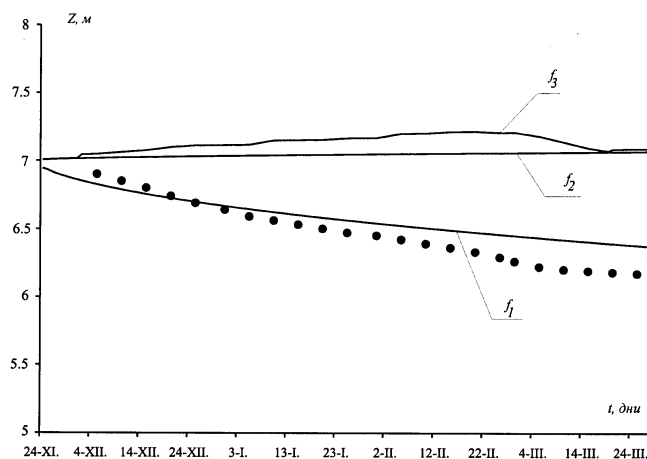


Рис. 4. Расчет толщины снежно-ледового покрова для оз. Яркуль, 2002–2003 гг.

ную температуру; l_{sn} или l_{sn}^* — высота снежного покрова или суточные измерения осадков в водном эквиваленте, или измеренная толщина свежавывавшего снега; расчетное время; требуемые начальные условия — распределение температуры и примеси в средах.

Для расчета были выбраны следующие объекты: пресное Новосибирское водохранилище и минерализованное озеро Яркуль Чановской системы озер. Для определения начальной даты расчета анализировались температура воздуха и скорость ветра за несколько суток, так как общепринятое условие начала ледостава — среднесуточная температура воздуха $T_a < -5^\circ\text{C}$ и скорость ветра меньше 5 м/с.

На рис. 2 приведены результаты расчетов, проведенных по данным метеопоста Ордынское, и сопоставление с натурными измерениями. Средняя глубина водохранилища в районе метеостанции 10 м, средняя скорость течения 0,2 м/с. Расчет толщины ледяного производился в период с ноября по март 1976–1977 гг.

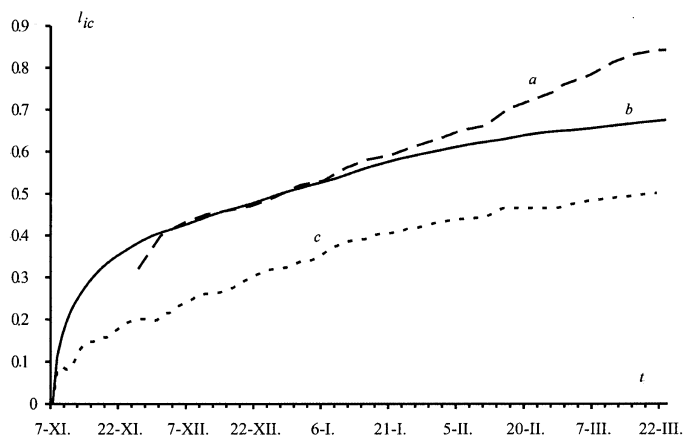


Рис. 5. Расчеты толщины ледового покрова для Новосибирского водохранилища, 1988–1989 гг.

Приведены результаты расчетов процесса формирования ледового покрова оз. Яркуль и сопоставление с натурными измерениями (рис. 3, 4). Входными данными служили метеоданные по метеостанции н.п. Купино зимы 1999–2000 гг. (рис. 3), 2002–2003 гг. (рис. 4). Начальная минерализация оз. Яркуль задавалась равной $C = 5 \text{ г/дм}^3$ [10].

На рис. 5 представлены сравнения натурных измерений толщины ледового покрова для Новосибирского водохранилища (линия *a*) с результатами расчетов по описанной модели (линия *b*) и расчетов по часто используемой упрощенной методике учета снежно-ледового покрова как эквивалентного слоя (линия *c*). На рисунке видно, что расчеты по представленной модели более точно описывают динамику роста ледового покрова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ямал — проблемы развития. Институт проблем освоения Севера СО РАН. Тюмень, 1993.

2. Воеводин А. Ф., Гранкина Т. Б. Численное моделирование роста ледяного покрова в водоеме // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 47–54.
3. *Tenth report of the joint panel on oceanographic tables and standards.* UNESCO Technical Papers in Marine Sci., 1981. No. 36, UNESCO, Paris.
3. Винников С. Д., Проскуряков Б. В. Гидрофизика. Л.: Гидрометеиздат, 1988.
4. Васильев В. И., Максимов А. М., Петров Е. Е., Ципкин Г. Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. М.: Наука. Физматлит, 1997.
5. Гороновский И. Т. и др. Краткий справочник по химии, 1987.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
7. Будак Б. М., Гольдман Н. Л., Успенский А. Б. Разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтовых задач типа Стефана // Докл. АН СССР, 1966. Т. 167, № 4. С. 735–738.
9. Воеводин А. Ф., Леонтьев Н. А., Петрова А. Г. Термодиффузная задача о кристаллизации шара // Динамика сплошной среды, 1982. №5. С. 118–123.
10. Савкин В. М., Двуреченская С. Я., Сапрыкина Я. В., Марусин К. В. Основные гидролого-морфометрические и гидрохимические характеристики озера Чаны // Сиб. экологический журн. 2005. Вып. 2. С. 183–192.

ВЛИЯНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ДЕПРЕССИИ
И РАСПОЛОЖЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ
СКВАЖИНЫ НА ДОБЫЧУ НЕФТИ
В УСЛОВИЯХ КОНУСООБРАЗОВАНИЯ
ВОДЫ

Ю. М. Григорьев, М. В. Харбанов

Введение

При разработке нефтяных месторождений с подошвенной водой одним из основных, а может и главным отрицательным фактором является подтягивание конуса воды. При прорыве конуса воды снижается дебит добываемой нефти, а также появляются дополнительные затраты по подъему на поверхность и утилизации нежелательного флюида.

Максимальная депрессия на пласт, ниже которой подошвенная вода не достигает перфорированной части скважины, называется *критической депрессией*, а дебит при такой депрессии — *критическим дебитом*. Критическая депрессия определяется простым соотношением $\Delta P_{crit} = \Delta \rho gh$, где $\Delta \rho$ — разность плотностей нефти и воды, h — расстояние от ствола скважины до уровня водонефтяного контакта. Ее величина обычно имеет порядок 0.5–3 атм, поэтому для низкопроницаемых пластов такая депрессия не обеспечивает рентабельного дебита нефти. Проблеме конусообразования посвящено множество работ [1–8], в которых рассматриваются вопросы нахождения максимального безводного дебита и времени прорыва воды. Однако, так как величина критического дебита обычно слишком мала, на практике почти всегда работают с депрессией, превышающей критическую.

Пласты с мощной подошвенной водой целесообразно разрабатывать горизонтальными скважинами, пролегающими недалеко под кровлей пласта, что на практике широко делается. Поэтому в данной работе будет рассматриваться влияние депрессии, превышающей критическое значение, на процесс добычи нефти в условиях конусообразования воды именно в горизонтальных скважинах, также ее оптимальное расположение по вертикали, в частности, когда проницаемость вблизи кровли коллектора меньше, чем на нижних участках пласта. Данная работа была сделана с помощью численного моделирования на коммерческом программном продукте — на гидродинамическом симуляторе.

1. Моделирование конусообразования

Для исследования проблемы конусообразования в гидродинамическом симуляторе построена декартова модель однородного пласта размером $1000\text{м} \times 1000\text{м} \times 20\text{м}$ с физико-химическими свойствами флюидов и параметрами пласта, показанными в табл. 1, 2 и характерными для месторождений Западной Сибири.

Модель выбрана двухфазной: нефть и вода, — в силу того, что забойное давление не опускается ниже давления насыщения, равного 144 атм, и поэтому не происходит выделения газа. Кривая относительной фазовой проницаемости нефти и воды выбрана, как показано на рис. 1.

Сетка модели (рис. 2): $31 \times 34 \times 40$ — детализирована больше вблизи скважины для более правильного описания процесса конусообразования. Граничным условием выбрано постоянство давления на контуре питания, т. е. исключается падение пластового давления, притока воды от нагнетательных скважин, а также уровень ВНК со временем не меняется. Модель представляет собой бесконечный пласт. Скважина управляется забойным давлением

В симуляторе решается система уравнений движения двух фаз жидкостей в пористой среде и уравнение неразрывности [9]. Модель считается изотермической, т. е. температура везде одинакова и поэто-

Таблица 1. Параметры пласта

Параметры пласта	
Пористость	0.2
Горизонтальная проницаемость, мД	12
Вертикальная анизотропия	0.1
Сжимаемость породы, $10^{-5} \cdot \text{атм}^{-1}$	0.49
Нефтенасыщенная мощность H_{oil} , м	8
Водонасыщенная мощность H_{wat} , м	12
Связная водонасыщенность, s_{wc}	0.156
Остаточная нефтенасыщенность, s_{or}	0.265
Отн. проницаемость воды при $s_{wc} = s_{or}$	0.14
Начальное пластовое давление P_{ri} , атм.	250

Таблица 2. Свойства флюидов

Свойства флюидов	
Объемный коэффициент нефти, м/м ³	1.189
Вязкость нефти, сПз	1.26
Объемный коэффициент воды, м ³ /м ³	1.02
Вязкость воды, сПз	0.42
Давления насыщения нефти, атм	144
Сжимаемость нефти, $10^{-5} \cdot \text{атм}^{-1}$	15.3
Сжимаемость воды, $10^{-5} \cdot \text{атм}^{-1}$	4.89
Плотность нефти, кг/м ³	850
Плотность воды, кг/м ³	1008
Плотность газа, кг/м ³	0.961

му уравнение теплопроводности не учитывается:

$$\nabla(m\rho_i\vec{w}_i) + \frac{\partial(m\rho_i s_i)}{\partial t} = q_i \quad (1)$$

$$\vec{w}_i = -k \frac{k_i(s)}{\eta_i} \nabla(p + \rho g z) \quad (2)$$

$$s_o + s_w = 1, \quad (3)$$

где m — пористость, i обозначает фазу, может иметь значения o или w (нефть или вода), ρ_i — плотность i -й фазы, \vec{w}_i — вектор скорости

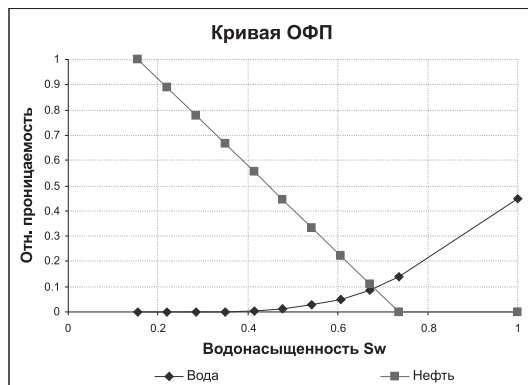


Рис. 1. Кривые ОФП нефти и воды.

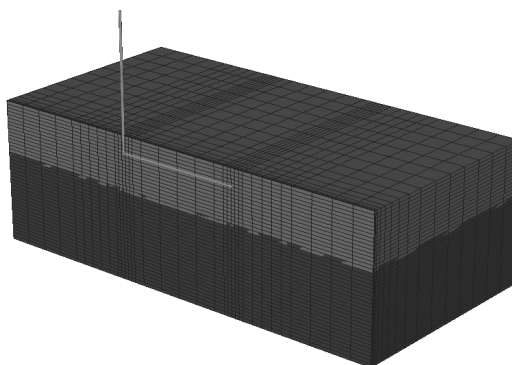


Рис. 2. Трехмерная модель пласта, разрез по скважине.

фильтрации i -й фазы, s_i — насыщение, причем обычно насыщение воды просто обозначают через s , q_i — массовый источник или сток, p — поровое давление, k — абсолютная проницаемость, $k_i(s)$ — относительная фазовая проницаемость i -й фазы, η_i — коэффициент динамической вязкости i -й фазы. Начальные условия водонасыщенности заданы в табл. 1 в виде начальных нефтенасыщенных и водонасыщенных толщин, а также в виде остаточной водонасыщенности. Начальное условие давления в пласте также задано в табл. 1 в виде начального пласто-

вого давления. Граничным условием для скважины, как говорилось выше, является забойное давление в скважине — граничное условие 1-го рода, а на границе постоянства пластового давления. Но в данной работе, чтобы добиться постоянства давления на границе, объем граничных ячеек сетки искусственно увеличивают до больших значений, таким образом граничным условием является условие непротекания на границе — граничное условие 2-го рода. Математически начальные и граничные условия:

$$s_w(\vec{x}, 0) = \begin{cases} s_{wc}, & \text{если } 0 < z \leq H_{oil}, \\ 1, & \text{если } H_{oil} < z < H_{oil} + H_{wat}, \end{cases} \quad (4)$$

$$P(\vec{x}, 0) = P_{ri}, \quad (5)$$

$$P(\vec{x}_{well}, t) = P_{wf}, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\nabla P(\vec{x}, t)|_{\vec{x}=\vec{x}_{boundary}} = 0, \quad t > 0, \quad (7)$$

где z — координата по оси z , причем направлена от кровли пласта вертикально вниз, P_{wf} — забойное давление, \vec{x}_{well} — координата скважины, $\vec{x}_{boundary}$ — координата границ сетки.

2. Влияние величины депрессии на конусообразование

Для исследования работы скважины в зависимости от депрессии выберем расположение горизонтального ствола скважины на расстоянии 2.5 м от кровли коллектора.

На практике определяющей величиной для принятия решения бурения новой скважины или зарезки бокового ствола является накопленная добыча нефти за определенный период времени. На качественном уровне задачей нефтяной компании является максимальная добыча нефти при минимальной добыче воды за определенный период времени. Так как на накопленную добычу непосредственно влияет запускной дебит нефти, в данной работе сначала рассмотрим запускной дебит нефти в зависимости от депрессии, а также время прорыва конуса воды в скважину (рис. 3). В нефтяных компаниях желаемым

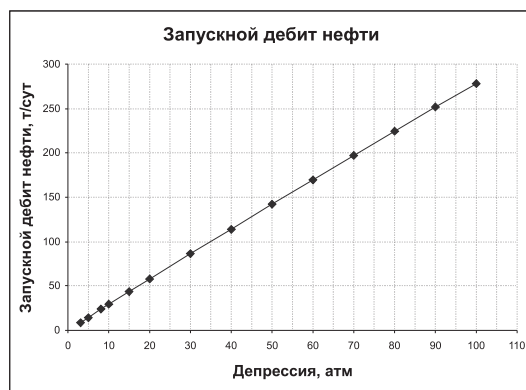


Рис 3. Запускной дебит нефти в зависимости от депрессии.

характерным временем окупаемости скважины является 5 лет, поэтому в данной задаче будем рассматривать накопленную добычу нефти и воды за 5 лет работы скважины (рис. 4), рассчитанные на гидродинамическом симуляторе для разных значений депрессии.

Запускной дебит, как видим из графика, зависит от депрессии прямо пропорционально, т. е. чем больше устанавливается депрессия, тем больше нефти будет при запуске скважины. Но, как мы знаем, чем больше депрессия, тем быстрее подтягивается конус воды, соответственно быстрее обводняется продукция.

Накопленная добыча нефти оказывается все равно больше в случае, когда депрессия выше, хотя уже зависимость нелинейная. Но, в свою очередь, больше и накопленная добыча воды. Тем самым в этом вопросе должна существовать оптимальная точка. В большинстве случаев из-за больших цен на нефть выгодно оказывается устанавливать максимальную депрессию. Важно отметить, что если в пласте между горизонтальной скважиной и водонефтяным контактом (ВНК) присутствуют непроницаемые барьеры (в реальности очень часто встречаются), которые являются дополнительным препятствием для прорыва конуса воды, то максимальная депрессия тоже логична.

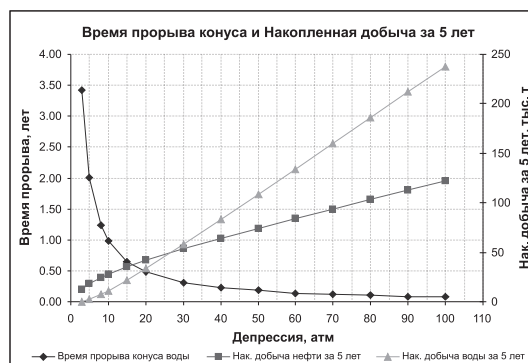


Рис 4. Накопленная добыча и время прорыва конуса воды.

Для более точного определения оптимальной депрессии критерием выбора должен быть максимальный экономический эффект.

3. Влияние расположения горизонтальной скважины по вертикали на добычу

Случай однородного пласта. Как можно видеть из предыдущего раздела, можно говорить о том, что при разработке пластов с подошвенной водой горизонтальными скважинами в большинстве случаев оптимальной депрессией является максимально возможная. Поэтому в данном разделе для исследования влияния расположения горизонтальной скважины по вертикали в модели установим депрессию максимально возможную, при которой в пласте еще не выделяется газ, т. е. забойное давление установим равным давлению насыщения 144 атм. Рассмотрим добычу нефти и воды за 5 лет работы скважины в зависимости от расположения горизонтального ствола по вертикали. Для этого смоделируем работу скважины для восьми различных расположений горизонтального ствола от кровли пласта: 0,5 м, 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 5 м, 6 м, 7 м. Отметим, что нефтенасыщенная толщина пласта 8 м.

Как видим из графика (рис. 5), запускной дебит нефти имеет оптимальное значение расположения горизонтального ствола, причем оно

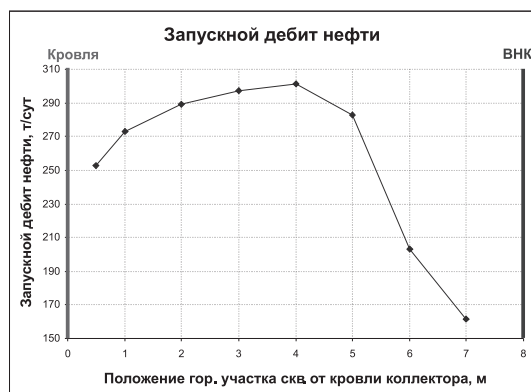


Рис 5. Запускной дебит нефти в зависимости от расположения гор. скважины.

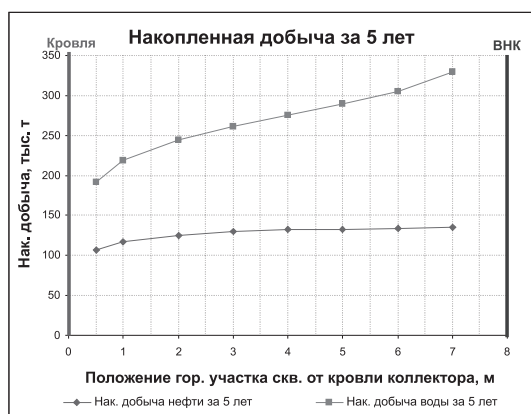


Рис 6. Накопленная добыча в зависимости от расположения гор. скважины.

находится на расстоянии 4 м от кровли коллектора (4 м от ВНК). Но если посмотреть накопленную добычу нефти за 5 лет (рис. 6), само значение не сильно зависит от расположения горизонтальной скважины, а при очень близком расположении к кровле коллектора накопленная добыча даже немного меньше, чем при расположении скважины в от-

далении от кровли. От расположения скважины сильно зависит накопленная добыча воды, чем дальше от кровли коллектора и чем ближе к ВНК, тем больше добыча воды. Поэтому с учетом того, что накопленная добыча нефти зависит от расположения скважины незначительно, а накопленная добыча воды тем меньше, чем ближе к кровле, оптимальной проводкой будет расположить скважину максимально близко к кровле коллектора. На практике горизонтальный ствол располагают порядка в 2 метрах от кровли коллектора. (Следует упомянуть, что в реальности основной причиной расположения скважины близко к кровле является то, что со временем уровень ВНК поднимается. Но в данном исследовании рассматривается бесконечный пласт и ВНК не поднимается, такой вид исследования поможет нам понять выводы следующего раздела.)

Случай неоднородного пласта. В реальности часто встречаются пласты, в которых вблизи кровли коллектора из-за глинизации область толщиной порядка 2 м от кровли коллектора имеет меньшую проницаемость, чем нижняя часть коллектора. Поэтому возникает вопрос, как провести скважину: через область с меньшей проницаемостью или под этой низкопроницаемой областью? Чтобы понять это, рассмотрим все ту же модель пласта и флюидов, что у нас имеется, но проницаемость верхнего пропластка толщиной в 2 м возьмем меньше, чем основная проницаемость. Для исследования выберем следующие отношения проницаемости верхнего пропластка к проницаемости основного пласта (обозначим K): 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.75, — обеспечивающие более равномерные шаги изменения результатов численного моделирования. Рассмотрим добычу при расположении горизонтальной скважины в 1 м от кровли, в области со сниженной проницаемостью и в 2.5 м от кровли, непосредственно под пропластком со сниженной проницаемостью.

Как видим из графиков (рис. 7, 8), в случае самой низкой проницаемости верхнего пропластка $K = 0.1$ при расположении скважины в этой области запускной дебит нефти будет меньше почти в 4 раза,

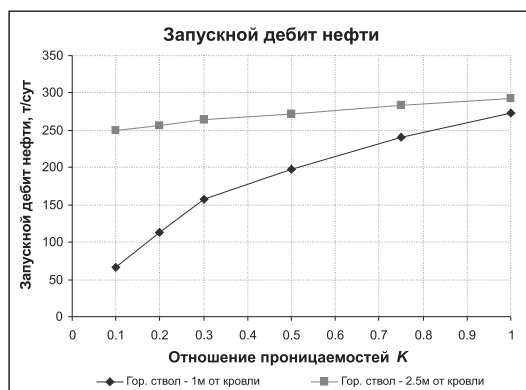


Рис. 7. Запускной дебит нефти в зависимости от отношения проницаемостей.

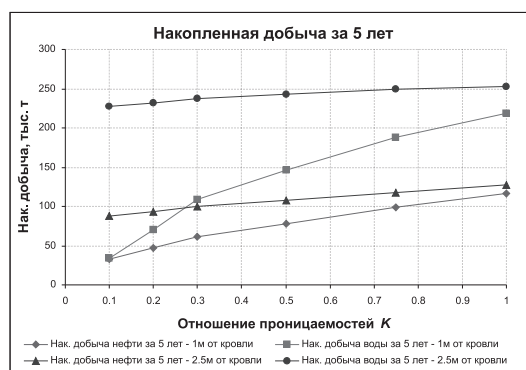


Рис. 8. Накопленная добыча в зависимости от отношения проницаемостей.

чем если расположить скважину ниже этого участка. А накопленная добыча за 5 лет будет меньше в 2.6 раза, но накопленная добыча воды будет меньше уже в 6.7 раза. Далее при увеличении отношения проницаемостей K разница в добыче нефти и воды будет уменьшаться. Для определения оптимальности выбора проводки скважины должен служить максимальный экономический эффект, но в данном случае

из-за высоких цен на нефть можно говорить о том, что оптимальным выбором должна быть проводка под пропластком со сниженной проницаемостью. К такому решению можно было прийти и из результатов предыдущего раздела. Мы узнали, что в случае однородного пласта от расположения скважины накопленная добыча нефти зависит незначительно. Но если верхний участок имеет сниженную проницаемость, то при проводке скважины через нее будет понятно, что добыча нефти упадет, поэтому расположение скважины чуть ниже от этого участка в области с хорошей проницаемостью будет больше и поэтому более выгодной.

Заключение

При разработке нефтяного пласта с подошвенной водой оптимальной депрессией является максимально возможная, которая ограничивается только технологией добычи, насосным оборудованием, так как при росте депрессии растет не только добыча воды, но и добыча нефти, которая приводит к большей экономической эффективности.

В пластах с подошвенной водой и с выдержанной проницаемостью по вертикали оптимальной проводкой горизонтального ствола скважины является расположение скважины максимально близко к кровле коллектора, главным образом из-за того, что в таком случае значительно уменьшается добыча воды. Под выдержанной проницаемостью имеется в виду то, что проницаемость вблизи коллектора может быть меньше в 2 раза относительно среднего значения по пласту, так как такая разница в реальности может определяться неоднозначно. Но если вблизи кровли коллектора проницаемость снижена на порядок, такая разница однозначно определяется по геофизическим исследованиям, оптимальным способом проводки является расположение скважины непосредственно под участком со сниженной проницаемостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Muskat M., Wyckoff R. D. An approximate theory of water coning in oil production. Trans. AIME 1935.
2. Schols R. S. An empirical formula for the critical oil production rate // *Erdoel Erdgas*, Z. V. 88, N 1. P. 6–11. January 1972.
3. Chaperon I. Theoretical study of coning toward horizontal and vertical wells in anisotropic formations: subcritical and critical rates // Paper SPE 15377. 1986. P. 1–12.
4. Hoyland L. A., Papatzacos P., Skjaeveland S. M. Critical rate for water coning: correlation and analytical solution // Paper SPE 15855. 1986. P. 59–64.
5. Giger M. Analytic two-dimensionless models of water cresting before breakthrough for horizontal wells // Paper SPE 15378. 1989. P. 409–416.
6. Abass H. H., Bass D. M. The critical production rate in water-coning systems // Paper SPE 17311. 1988. P. 351–360.
7. Sobocinski D. P., Cornelius A. J. A correlation for predicting water coning time // Paper SPE 894. 1964. P. 594–600.
8. Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидромеханика. М: Недра, 1993.
9. Соловьев И. Г., Казаков А. А. Анализ динамики выработки локальной водоплавающей зоны коллектора. Изв. вузов. Нефть и газ. 2011. № 1. С. 111–117.

г. Якутск

18 ноября 2011 г.

ОРИЕНТИРОВАННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ. МОДЕЛИ И ПРИМЕНЕНИЕ

В. А. Дубко, Е. В. Карачанская,
А. В. Карачанский

Введение

Под *ориентированной цепью* будем понимать последовательное объединение n отрезков-векторов (звеньев) при условии, что начало последующего звена совпадает с окончанием предыдущего. Точку начала построения последовательности звеньев назовем *ведущим элементом*. Возможен вариант, когда ведущий элемент не в начале цепи, а в одной из точек соединения звеньев. В этом случае цепь рассматривается как результат склеивания в этой точке двух ориентированных цепей с числом звеньев n_1, n_2 : $n_1 + n_2 = n$.

При постоянных случайных воздействиях ориентация каждого звена меняется случайным образом, со своим законом распределения, но относительно направления предыдущего звена. Следовательно, поворот предыдущего звена мгновенно ведет к повороту всех последующих звеньев. Этим рассматриваемые модели отличаются от моделей динамики цепей, построенных на основе независимо ориентирующихся звеньев (см., например, [1]), и относятся к классу моделей цепей с коррелированной структурой. Такие цепи будем называть *ориентированными стохастическими цепями*. Длины звеньев могут быть различными, растяжимыми и изменяться со временем. Эти модели могут быть применены для описания каскада турбулентных вихрей, изменения конфигурации полимерных цепей, иерархически организованных систем и расчета их характеристик. В полимерных цепях при наличии

в одном из узлов молекулы более высокой массы, чем в других узлах, более массивную молекулу можно рассматривать как ведущий элемент.

Цель работы: построить аналитическое представление и численную реализацию динамики характеристик моделей такого класса и продемонстрировать возможность их применения для задач диффузии в неклассической постановке. Моделирование изменения конфигураций связываем с полярной, как и в работе [2], и сферической системами координат. Моделируется динамика изменения размеров цепи, как расстояния от начала до конца цепи [3, 4] (динамическая модель изменения размеров полимерного клубка-глобулы). Если первоначально цепь представляла прямую линию, а множество допустимых углов поворота звена было фиксировано, то предложенная модель применима для моделирования реализации случайного блуждания с ограниченной скоростью за n шагов по ребрам пространственной решетки. Рассмотрены две модели движения по решетке с ограничениями на допустимые направления перемещения.

Работа состоит из двух разделов. В первом рассматривается модель динамики цепи в \mathbb{R}^2 и предлагается модель стохастической цепи в \mathbb{R}^3 , во втором приводятся результаты численного моделирования размеров цепи и нетрадиционных моделей диффузии.

1. Динамика пространственной цепи

Рассмотрим ориентированную цепь в \mathbb{R}^2 относительно начала системы координат (рис. 1). В качестве ведущего элемента будем считать точку $O(0, 0)$. Если нас интересует ведущий элемент, расположенный не в крайней точке, то необходимо перенесение начала системы координат в интересующую точку и дальнейшее рассмотрение двух склеенных в этой точке ориентированных цепей.

Динамику цепи можно характеризовать векторами $\vec{L}_j(t)$, каждый из которых связан с началом координат и окончанием j -го сегмента, $j = \overline{1, n}$. Тогда динамика j -го сегмента определяется выражением

$$\vec{r}_j(t) = \vec{L}_j(t) - \vec{L}_{j-1}(t).$$

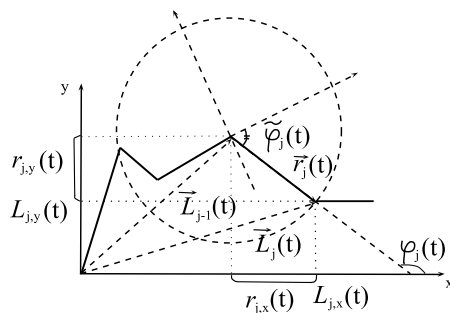


Рис. 1. Стохастическая цепь на плоскости.

По построению (см. рис. 1), в полярных координатах проекции $\vec{L}_j(t)$ имеют вид

$$L_{j,x}(t) = \sum_{i=1}^j |\vec{r}_i(t)| \cos \varphi_j(t), \quad L_{j,y}(t) = \sum_{i=1}^j |\vec{r}_i(t)| \sin \varphi_j(t),$$

где

$$\varphi_j(t) = \sum_{s=1}^j \tilde{\varphi}_s(t),$$

а $\tilde{\varphi}_s(t)$ — угол поворота s -го звена относительно направления $(s-1)$ -го в момент времени t .

Соответственно динамика j -го сегмента определяется выражениями

$$\begin{aligned} r_{j,x}(t) &= |\vec{r}_j(t)| \cos \varphi_j(t) = |\vec{r}_j(t)| \cos \left(\sum_{s=1}^j \tilde{\varphi}_s(t) \right), \\ r_{j,y}(t) &= |\vec{r}_j(t)| \sin \varphi_j(t) = |\vec{r}_j(t)| \sin \left(\sum_{s=1}^j \tilde{\varphi}_s(t) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Если n — число элементов цепи, то $|\vec{L}_n(t)| = L_n(t)$ называют *размером цепи*.

Изменение $\tilde{\varphi}_s(t)$ в дискретные моменты времени t_k будем модели-

ровать в виде суммы:

$$\tilde{\varphi}_s(t_k) = \varphi_s(0) + \sum_{m=1}^k \Delta\varphi_s(m),$$

где $\Delta\varphi_s(m)$ — случайные приращения в момент $t = t_m$; $\varphi_s(0)$ определяет начальный угол s -го звена цепи относительно направления $(s-1)$ -го. Тогда

$$\sum_{s=1}^j \tilde{\varphi}_s(t_k) = \sum_{s=1}^j \varphi_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^j \Delta\varphi_s(m),$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} L_{j,x}(t_k) &= \sum_{i=1}^j |\vec{r}_i(k)| \cos \left(\sum_{s=1}^j \varphi_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^j \Delta\varphi_s(m) \right), \\ L_{j,y}(t_k) &= \sum_{i=1}^j |\vec{r}_i(k)| \sin \left(\sum_{s=1}^j \varphi_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^j \Delta\varphi_s(m) \right), \\ L_j(t_k) &= |\vec{L}_j(t_k)| = \sqrt{L_{j,x}^2(t_k) + L_{j,y}^2(t_k)}, \quad k_0 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдем к рассмотрению цепи в \mathbb{R}^3 . По аналогии с двумерной цепью (1) проекции сегментов $\vec{r}_j(t)$ уже будем описывать в сферической системе координат выражениями (рис. 2)

$$\begin{aligned} r_{j,x}(t) &= |\vec{r}_j(t)| \cos \left(\sum_{s=1}^j \tilde{\varphi}_s(t) \right) \sin \left(\sum_{s=1}^j \tilde{\theta}_s(t) \right), \\ r_{j,y}(t) &= |\vec{r}_j(t)| \sin \left(\sum_{s=1}^j \tilde{\varphi}_s(t) \right) \sin \left(\sum_{s=1}^j \tilde{\theta}_s(t) \right), \\ r_{j,z}(t) &= |\vec{r}_j(t)| \cos \left(\sum_{s=1}^j \tilde{\theta}_s(t) \right). \end{aligned}$$

Изменения углов $\tilde{\varphi}_s(t)$ и $\tilde{\theta}_s(t)$ в дискретные моменты времени t_k будем моделировать, как и для цепи в \mathbb{R}^2 , в виде сумм:

$$\tilde{\varphi}_s(t_k) = \varphi_s(0) + \sum_{m=0}^k \Delta\varphi_s(m), \quad \tilde{\theta}_s(t_k) = \theta_s(0) + \sum_{m=0}^k \Delta\theta_s(m),$$

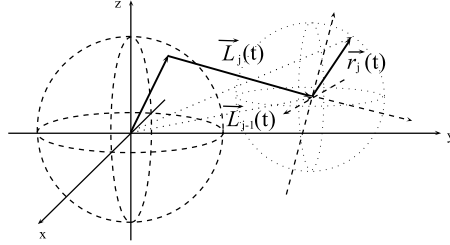


Рис. 2. Случайная пространственная цепь.

где $\Delta\varphi_s(m)$ и $\Delta\theta_s(m)$ — случайные приращения в момент времени $t = t_m$. Следовательно,

$$\sum_{s=1}^j \tilde{\varphi}_s(t_k) = \sum_{s=1}^j \varphi_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^j \Delta\varphi_s(m),$$

$$\sum_{s=1}^j \tilde{\theta}_s(t_k) = \sum_{s=1}^j \theta_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^j \Delta\theta_s(m).$$

Соответственно динамика вектора $\vec{L}_j(t_k)$ описывается на основе проекций:

$$\begin{aligned} L_{j,x}(t_k) &= \sum_{i=1}^j |\vec{r}_i(k)| \cos \left(\sum_{s=1}^i \varphi_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^i \Delta\varphi_s(m) \right) \\ &\quad \times \sin \left(\sum_{s=1}^i \theta_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^i \Delta\theta_s(m) \right), \\ L_{j,y}(t_k) &= \sum_{i=1}^j |\vec{r}_i(k)| \sin \left(\sum_{s=1}^i \varphi_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^i \Delta\varphi_s(m) \right) \\ &\quad \times \sin \left(\sum_{s=1}^i \theta_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^i \Delta\theta_s(m) \right), \\ L_{j,z}(t_k) &= \sum_{i=1}^j |\vec{r}_i(k)| \cos \left(\sum_{s=1}^i \theta_s(0) + \sum_{m=0}^k \sum_{s=1}^i \Delta\theta_s(m) \right), \\ L_j(t_k) &= |\vec{L}_j(t_k)| = \sqrt{L_{j,x}^2(t_k) + L_{j,y}^2(t_k) + L_{j,z}^2(t_k)}, \quad k_0 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Модели вида (2) и (3) позволяют проводить моделирование динамики размеров случайных цепей в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 .

2. Данные численного моделирования

2.1. Моделирование динамики ориентированной стохастической цепи в \mathbb{R}^3 . Используя (3), проведем численный эксперимент. Для численного моделирования использован язык программирования Python, для графического представления — пакет Gnipplot.

В сферической системе координат главные значения сферических углов изменяются в следующих пределах:

$$\varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (4)$$

Поскольку угол θ может принимать значения из промежутка $[0, \pi]$, для возможности применения различных видов распределения приращения $\Delta\theta$ выбираем из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$ с условием $\theta(0) = \theta_0 \neq 0$. Если все рассматриваемые случайные величины-углы могут принимать в соответствии со своим законом распределения все значения из области (4), то при $k = 1, 2, 3, \dots$ будем иметь множество различных реализаций данной цепи.

Данные для моделирования стохастической цепи: $\varphi_1(0) = \pi/2$, $\theta_1(0) = \pi/2$, $\varphi_s(0) = 0$, $\theta_s(0) = 0$ при $s > 1$; $\Delta\varphi_s(m) \sim \mathcal{R}(-\pi, \pi)$, $\Delta\theta_s(m) \sim \mathcal{R}(-\pi/2, \pi/2)$; $\Delta\varphi_{s_1}(m_1)$ и $\Delta\theta_{s_2}(m_2)$ — независимые приращения между собой и при различных парах несовпадающих индексов. Начальные условия соответствует тому, что все звенья в момент $t = 0$ лежат на оси Oy и их направления совпадают с направлением этой оси.

В табл. 1 отражены значения среднего $L_{\text{сред}}(n)$ для длины получившейся стохастической цепи, соединяющей ее начальную и конечную точки, по сериям в 1000 испытаний для случаев $n = 10^\beta$, $\beta = \overline{1, 3}$.

Результаты моделирования согласуются с экспериментальными наблюдениями, показывающими, что цепочка с фиксированным числом звеньев сворачивается [5]. Кроме того, средняя длина получающейся

Таблица 1. Значения $L_{\text{сред}}$

Номер серии	При $n = 10$	При $n = 100$	При $n = 1000$
1	4.5972	16.1930	163.9779
2	4.6006	16.5250	164.4915
3	4.5752	16.3424	162.4362
4	4.6479	16.2865	162.8075
5	4.5884	15.9172	166.4379
6	4.5502	16.2632	164.3773
Среднее по сериям	4.5933	16.2546	164.0881

во всех случаях стохастической цепи согласуется с известными теоретическими выводами для других моделей полимерной цепи о том, что $L_{\text{сред}} \sim n^{1/2}$ [6].

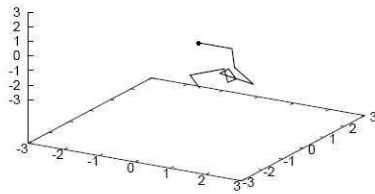


Рис. 3. Реализация случайной цепи из 10 звеньев.

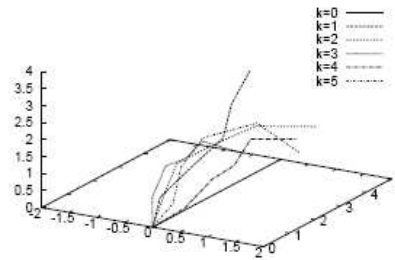


Рис. 4. Стохастическая цепь в динамике.

На рис. 3 представлена одна из реализаций случайной цепи при $n = 10$.

Чтобы говорить о динамике, необходимо изменить области значений, которые могут принимать сферические углы. Например, при переходе к следующей конфигурации они могут принимать значения из промежутков, определяемых следующим образом:

$$\varphi \in [\alpha, \beta), \quad \text{где } 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi - \delta, \quad \delta > 0,$$

$$\theta \in [0, \nu], \quad \text{где } 0 < \nu \leq \pi.$$

При этом $\Delta\varphi \in [-\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ и $\Delta\theta \in [-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}]$.

ДАННЫЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЦЕПИ В ДИНАМИКЕ. $\varphi_1(0) = \pi/2$, $\theta_1(0) = \pi/2$, $\varphi_s(0) = 0$, $\theta_s(0) = 0$ при $s > 1$; $\Delta\varphi_s(m) \sim \mathcal{N}(0, (\pi/6)^2)$, $\Delta\theta_s(m) \sim \mathcal{N}(0, (\pi/9)^2)$; $\Delta\varphi_{s_1}(m_1)$ и $\Delta\theta_{s_2}(m_2)$ — независимые приращения между собой и при различных парах несовпадающих индексов. При $n = 5$ для каждого $k = 1, 2, \dots, 100000$, т. е. для каждого шага динамики, получено $L_{\text{сред}}(k)$ при повторении 100 испытаний для каждого шага. Результаты представлены в табл. 2. На рис. 4 представлена динамика (при $k = \overline{0, 5}$) случайной цепи, состоящей из $n = 5$ звеньев единичной длины.

Таблица 2. Значения $L_{\text{сред}}$ в динамике

k	$L_{\text{сред}}(k)$	k	$L_{\text{сред}}(k)$
1	4.3265	20	2.2594
2	4.1140	50	2.1236
3	3.7510	100	2.1105
4	3.6429	500	2.1134
5	3.3294	1000	2.0496
10	2.9521	10000	2.0157
15	2.5988	100000	2.1065

Как видно из табл. 2, средняя длина цепи со временем стабилизируется, подтверждая [5, 6].

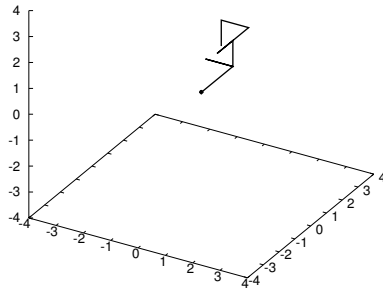


Рис. 5. Эталонная цепь равновероятными направлениями.

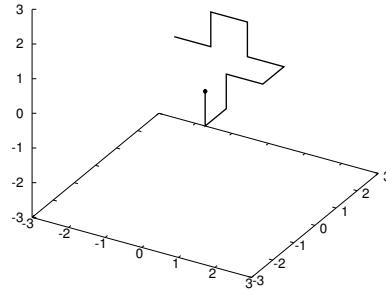


Рис. 6. Случайная цепь с попарно перпендикулярными звеньями.

2.2. Блуждание по пространственной решетке. Рассмотрим три модели случайных блужданий по ребрам пространственных решеток, представляющих собой ребра единичных кубов. В первой (эталонной) алгоритм основан на случайном блуждании без ограничения направления. Во второй и третьей предполагается ограничение на случайный выбор следующего шага: введен запрет обратного движения (для второй) и обязательное изменение направления в каждом узле без возвращения (для третьей). Для эталонной модели с равной вероятностью выбиралось одно из шести возможных направлений, для модели с одним ограничением — с равной вероятностью одно из пяти возможных направлений, для модели с двумя ограничениями — с равной вероятностью одно из четырех. Во всех случаях основой для алгоритма являются процессы вида

$$\begin{aligned}
L_x(t_n) &= \sum_{i=1}^n |\vec{r}_i(1)| \cos \left(\varphi_1(0) + \sum_{s=1}^i \Delta\varphi_s(1) \right) \\
&\quad \times \sin \left(\theta_1(0) + \sum_{s=1}^i \Delta\theta_s(1) \right), \\
L_y(t_n) &= \sum_{i=1}^n |\vec{r}_i(1)| \sin \left(\varphi_1(0) + \sum_{s=1}^i \Delta\varphi_s(1) \right) \\
&\quad \times \sin \left(\theta_1(0) + \sum_{s=1}^i \Delta\theta_s(1) \right), \\
L_z(t_n) &= \sum_{i=1}^n |\vec{r}_i(1)| \cos \left(\theta_1(0) + \sum_{s=1}^i \Delta\theta_s(1) \right) \\
L(t_n) &= |\vec{L}(t_n)| = \sqrt{L_x^2(t_n) + L_y^2(t_n) + L_z^2(t_n)}
\end{aligned} \tag{55}$$

т. е. здесь в качестве реализации случайного блуждания рассматривается изменение цепи только на первом шаге при условии, что первоначально она образовывала линию. Построение множества реализаций траектории связано с выбором для каждой новой реализации $\vec{L}(t_n)$ реализации новой последовательности случайных приращений $\Delta\varphi_s(1)$ и

$\Delta\theta_s(1)$, $s = \overline{1, n}$, входящих в соответствующие суммы проекций. При численной реализации модели полагалось, что в безразмерных единицах $|\vec{r}_i(1)| = 1$ для всех $i = \overline{1, n}$, $\Delta\varphi_s(1) \in \{-\pi/2, 0, \pi/2, \pi\}$, $\Delta\theta_s(1) \in \{-\pi/2, 0, \pi/2\}$, т. е. блуждание происходит по кубической решетке с единичным ребром. Для фиксированных значений $n = 10^\beta$, $\beta = \overline{1, 4}$, было произведено по 10000 испытаний в каждой серии. В табл. 3 представлены значения среднего $L_{\text{сред}}^2(n)$ для квадрата длины получившейся случайной цепи, соединяющей начальную и конечную ее точки.

Таблица 3. Значения $L_{\text{сред}}^2(n)$ и $L_{\text{сред}}^2(n)/n$ по 6 сериям испытаний

Характеристика цепи		Число звеньев			
		$n = 10$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000$
эталон	$L_{\text{сред}}^2(n)$	9.9841	99.9787	1012.9160	9742.1000
	$L_{\text{сред}}^2(n)/n$	0.9984	0.9997	1.0129	0.9742
один	$L_{\text{сред}}^2(n)$	14.4215	149.1510	1499.9932	14876.8081
	$L_{\text{сред}}^2(n)/n$	1.4421	1.4915	1.4999	1.4876
два	$L_{\text{сред}}^2(n)$	10.0293	99.7343	998.7193	10156.3371
	$L_{\text{сред}}^2(n)/n$	1.0029	0.9973	0.9987	1.0156

На рис. 5 представлена реализация эталонной цепи при $n = 10$, на рис. 6 — цепь, в которой допустимы только перемещения, перпендикулярные к направлению предыдущего звена, на рис. 7 — случайная цепь, в которой введен запрет обратного движения по направлению предыдущего звена.

Случайное блуждание (5) (диффузия) по решетке можно ассоциировать с броуновским движением. В нашем случае роль $\overline{(\Delta x(t_n))^2}$ играет $L_{\text{сред}}^2(t_n)$, а n соответствует безразмерному значению времени наблюдения через одинаковые интервалы. Если полагать, что перемещение вдоль ребер происходит с единичной скоростью, то это соответствует модели случайного блуждания с конечной скоростью. Как видно из результатов, представленных в табл. 3, для рассматриваемых видов броуновского движения (эталонная цепь) выполняется закон Эйнштейна [7, с. 116]: $\overline{(\Delta x(t))^2} = 2Dt$, где D — коэффициент диффузии. Для броуновского движения без ограничения значение $D_{\text{сред}}^{\text{эталон}} = 0.4981$;

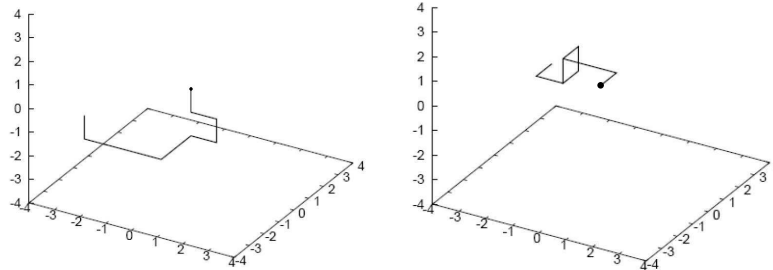


Рис. 7. Пример двух реализаций случайной цепи с запретом обратного движения по направлению предыдущего звена.

случае, когда введен запрет на обратное движение — $D_{\text{сред}}^{\text{эксп},1} = 0.7401$; случае, когда разрешено только перпендикулярное перемещение по отношению к предыдущему — $D_{\text{сред}}^{\text{эксп},2} = 0.5052$.

Таким образом, одно ограничение на направление движения (назад) приводит к новому специфическому виду броуновского движения, для которого коэффициент диффузии отличается от коэффициента модели классической диффузии почти в два раза, учитывая, что только одно из направлений движения запрещено в каждый момент времени. Как было сказано, для эталонной модели с равной вероятностью выбиралось одно из шести возможных направлений, для модели с одним ограничением — с равной вероятностью одно из пяти возможных направлений, для модели с двумя ограничениями — с равной вероятностью одно из четырех.

Подчеркнем, что выбор такой эталонной модели вызван тем, что традиционно моделирование случайных блужданий по решетке применяются для получения реализаций случайной цепи (см., например, [8]) и блужданий с ограниченной скоростью (см., например, [9]). В нашем же случае наоборот, именно моделирование случайной цепи приводит к задачам, подобным [8, 9]. Это дает возможность сопоставлять выводы с известными ранее данными и с новыми результатами по моделиро-

ванию перемещений с ограничениями. В данном рассмотрении результаты численного моделирования не противоречат известным фактам и позволяют сравнивать с неклассическими моделями диффузии.

Можно рассмотреть модели с неравновероятными направлениями для каждой из моделей, но это не прибавляет нового в демонстрацию применения ориентированных стохастических цепей.

Заключение

Традиционные модели реализаций конфигураций цепи как реализаций случайного перемещения по решеткам не приспособлены для отображения изменения ее реализаций при условии корреляции между поворотами звеньев во времени и используются лишь для нахождения вероятностных распределений ее размеров. Введенное представление об ориентированной стохастической цепи дало возможность рассматривать и моделировать новый класс для задач цепей с коррелированными звеньями на основе случайных сумм специального вида в сферической системе координат. Эти модели позволяют моделировать как динамику полимерной цепи, так и блуждание по решетке, в том числе и с ограниченной скоростью, и полученные результаты численного моделирования не противоречат известным выводам. Возможности применения моделей ориентированных стохастических цепей не исчерпываются моделями блужданий. Применение формул (2) и (3) в общем виде охватывает модели траекторий частицы, переносимой каскадом вихрей, дает возможность рассматривать классы задач о случайном блуждании в более широкой трактовке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ferrari F. Paturej J., Vilgis T. A.* Dynamics of a three-dimensional inextensible chain // *Acta Phys. Polonica B.* 2009. V. 40, N 5. P. 1369–1382.
2. *Дубко В. А., Карачанская Е. В.* Классификация и моделирования случайных гармонических процессов на основе SHCS-рядов // *Мат. заметки ЯГУ.* 2011. Т. 18, вып. 1. С. 36–54.
3. *Дубко В. А., Чалых Е. В.* Динамика цепи конечных размеров с бесконечным числом звеньев в \mathbb{R}^2 (Препринт) / *Ин-т прикл. математики ДВО РАН. Владивосток; Хабаровск: Дальнаука, 1998.* 18 с.

4. Karachanskaya (Chalykh) E. Dynamics of random chains of finite size with an infinite number of elements in \mathbb{R}^2 // Theory Stoch. Proc. 2010. V. 16, N 2. P. 58–68.
5. Волькенштейн М. В. Конфигурационная статистика полимерных цепей. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959.
6. Дой М., Эдвардс С. Динамическая теория полимеров. М.: Мир, 1998.
7. Einstein A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen // Ann. Physik. 1905. Bd 322, Heft 8. S. 549–560. (Пер. на рус.: Эйнштейн А. О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты // Броуновское движение / Эйнштейн А., Смолуховский М.: Пер. с нем., фр., с доп. статьями Ю. А. Круткова и Б. И. Давыдова. М.; Л.: ОНТИ. 1936.
8. Де Жен П. Идеи скейлинга в физике полимеров. М.: Мир, 1982.
9. Kolesnik A. D., Turbin A. F. The equation of symmetric Markovian random evolution in a plane // Stoch. proc. appl. 1998. V. 75. P. 67–87.

г. Киев, г. Хабаровск

1 декабря 2011 г.

АННОТАЦИИ

УДК 514.132

О ФОРМУЛЕ БРЕТШНАЙДЕРА ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА. Г. А. Байгонакова, А. Д. Медных. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Классическая формула Герона выражает площадь евклидова треугольника через длины его сторон. Индийский математик и астроном Брахмагупта в семнадцатом веке получил аналогичную формулу для выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность. Немецкий математик Карл Бретшнайдер в 1842 г. нашел площадь произвольного евклидова четырехугольника через длины его сторон и сумму двух противоположных углов. Цель настоящей работы получить аналог теоремы Бретшнайдера в сферической геометрии. Ил. 2, библиогр. 10.

Ключевые слова: сферический четырехугольник, сферическая площадь, теорема Бретшнайдера.

УДК 514.132

О ФОРМУЛЕ БРЕТШНАЙДЕРА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА. Г. А. Байгонакова, А. Д. Медных. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Классическая формула Герона выражает площадь евклидова треугольника через длины его сторон. Индийский математик и астроном Брахмагупта в семнадцатом веке получил аналогичную формулу для выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность. Немецкий математик Карл Бретшнайдер в 1842 году нашел площадь произвольного евклидова четырехугольника через длины его сторон и сумму двух противоположных углов. Цель настоящей работы получить аналог теоремы Бретшнайдера в гиперболической геометрии. Ил. 1, библиогр. 11.

Ключевые слова: гиперболический четырехугольник, гиперболическая площадь, теорема Бретшнайдера.

УДК 514.755

О СТРОЕНИИ ОДНОЙ ПАРЫ ПЯТИМЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. И. В. Бубякин, Е. С. Никитина. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Рассматривается проективно-дифференциальная геометрия одной пары пятимерных комплексов двумерных плоскостей одного и того же типа в проективном пространстве P^5 . Библиогр. 3.

Ключевые слова: грассманово многообразие, грассманово отображение, конус Сегре.

УДК 517.95

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА
ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ.

И. Е. Егоров, Е. С. Ефимова. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

В цилиндрической области $Q \subseteq R^{n+1}$ исследована гладкость решения первой краевой задачи для вырождающегося параболического уравнения второго порядка. Для приближенных решений данной краевой задачи установлена оценка погрешности стационарного метода Галёркина в норме пространства $W_2^{1,0}(Q)$. Библиогр. 10.

Ключевые слова: стационарный метод Галеркина, приближенное решение, неравенство, оценка.

УДК 517.946

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПО ВРЕМЕННОЙ
ПЕРЕМЕННОЙ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Г. А. Лукина. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Для ультрапараболических уравнений исследуется краевая задача с заданием нелокальных условий по временной переменной. Доказывается теорема разрешимости в классах регулярных решений. Библиогр. 8.

Ключевые слова: ультрапараболическое уравнение, нелокальное условие, регулярное решение, существование и единственность.

УДК 517.95

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НЕЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ
ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ. В. Г. Марков. — Мат. заметки ЯГУ, 2012,

т. 19, вып. 1.

Исследуются свойства незнакоопределенных дифференциальных операторов, к области определения которых относятся функции, которые могут иметь разрывы в некотором наборе точек. Предельные значения функции и ее производных в этих точках связана произвольными условиями склейки. Доказано, что почти во всех случаях существование максимальных инвариантных подпространств не зависит от вида граничных условий. Библиогр. 34.

Ключевые слова: пространство Крейна, диссипативный оператор, J -диссипативный оператор, оператор Штурма — Лиувилля.

УДК 517.929.4

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ

АРГУМЕНТОМ С ПАРАМЕТРАМИ. И. И. Матвеева, А. А. Щеглова. — Мат.
заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Рассматривается один класс систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с периодическими коэффициентами в линейных членах и параметрами. С использованием функционала Ляпунова — Красовского

установлены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения, указано множество притяжения нулевого решения и получены оценки экспоненциального убывания решений. Библиогр. 16.

Ключевые слова: уравнение с запаздывающим аргументом, периодические коэффициенты, асимптотическая устойчивость, функционал Ляпунова — Красовского.

УДК 517.956

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА. *Н. Н. Николаев*. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Рассматриваются вопросы разрешимости некоторых линейных обратных задач для эллиптико-параболического уравнения. Неизвестными являются решение и правая часть специального вида, в которой неизвестными являются функции $q_k(x)$. Эллиптико-параболическое уравнение дополняется также условиями первой начально-краевой задачи и условиями переопределения. Найдены условия разрешимости задачи, сформулированы теоремы существования обобщенных решений эллиптико-параболического уравнения при различных условиях переопределения. Библиогр. 11.

Ключевые слова: эллиптико-параболическое уравнение, линейная обратная задача, априорные оценки.

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА. *Н. С. Попов*. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Исследуется разрешимость начально-краевой задачи для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка с заданием на боковой границе условия, связывающего значения решения или же конормальной производной решения со значениями некоторого интегрального оператора от решения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Библиогр. 15.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, пространство Соболева, начально-краевая задача, метод продолжения по параметрам, априорные оценки, регулярное решение.

УДК 517.946.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ИТЕРИРОВАННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ. *С. В. Попов, А. Г. Синявский*. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Рассматривается начально-краевая задача для итерированных уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени высокого порядка. Доказываются теоремы существования и единственности гладких решений в пространстве Гёльдера. Библиогр. 15.

Ключевые слова: итерированное уравнение, параболическое уравнение с меняющимся направлением времени, пространство Гёльдера, начально-краевая задача, сингулярное уравнение, гладкое решение.

УДК 517.956

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ. А. В. Прокопьев. —
Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Рассматривается вопрос разрешимости линейной обратной задачи для эллиптического-параболического уравнения. Неизвестными являются решение и правая часть специального вида, в которой неизвестной является функция $q(t)$. Эллипτικο-параболическое уравнение дополняется также условиями первой начально-краевой задачи и интегральным условием переопределения. Найдены условия разрешимости задачи, сформулирована теорема существования обобщенного решения эллипτικο-параболического уравнения. Библиогр. 9.

Ключевые слова: эллипτικο-параболическое уравнение, линейная обратная задача, обобщенная разрешимость, априорные оценки, внешнее воздействие.

УДК 517.946

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ
ЗАДАЧЕ С ДАННЫМИ КОШИ НА ЧАСТИ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ
ЦИЛИНДРА. С. Г. Пятков, А. Г. Боричевская. — Мат. заметки ЯГУ, 2012,
т. 19, вып. 1.

Рассматривается обратная задача об определении решения параболического уравнения и неизвестной правой части в этом уравнении. Используются стандартные условия первой или смешанной начально-краевой задачи, дополненные условием Неймана на части боковой поверхности цилиндра. При некоторых условиях на данные задачи доказана разрешимость этой задачи в пространствах Соболева. Библиогр. 22.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение второго порядка, краевая задача, условие переопределения.

УДК 512.6:519.61

НЕОДНОРОДНЫЕ ГАУССОВЫ БЕСКОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (БСЛАУ). Ф. М. Федоров. — Мат. заметки
ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Найдено замкнутое частное решение общей гауссовой бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Указаны условия совместности таких систем. Библиогр. 4.

Ключевые слова: гауссова система, неоднородная бесконечная система, линейные алгебраические уравнения, метод редукции.

УДК 512.6:519.61

ОБ АЛГОРИТМЕ ГАУССА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (БСЛАУ). *Ф. М. Федоров*. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Метод исключения Гаусса обобщен для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Библиогр. 7.

Ключевые слова: бесконечная система, гауссова система, линейное уравнение, метод исключения Гаусса.

УДК 517.95

АБСОЛЮТНЫЕ ω -РЕТРАКТЫ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ. *П. В. Черников*. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Доказано, что всякий абсолютный ω -ретракт обладает свойством неподвижной точки. Класс абсолютных ω -ретрактов содержит класс абсолютных ε -ретрактов, для которых это было известно. Библиогр. 2.

Ключевые слова: абсолютный ω -ретракт, неподвижная точка, тихоновский куб.

УДК 519.635.8:532.616

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РОСТА ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА В ПРЭСНЫХ И СОЛОНОВАТЫХ ВОДАХ. *А. Ф. Воеводин, Т. Б. Гранкина*. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Рассматривается задача для расчета динамики роста ледяного покрова на водных объектах. Представлена одномерная математическая модель и ее численная реализация. Модель учитывает минерализацию водоема, связанную с этим постоянной температурой замерзания и влияние снежного покрова. Были проведены тестовые расчеты и ряд расчетов для реальных объектов, сравнения с данными натурных измерений. Примеры расчетов приведены. Ил. 5, библиогр. 10.

Ключевые слова: ледотермика, ледотермический режим водоемов, фазовый переход, задача Стефана, температура замерзания, кристаллизация, метод прогонки, неявная разностная схема.

УДК 51-74

ВЛИЯНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ДЕПРЕССИИ И РАСПОЛОЖЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ НА ДОБЫЧУ НЕФТИ В УСЛОВИЯХ КОНУСООБРАЗОВАНИЯ ВОДЫ. *Ю. М. Григорьев, М. В. Харбанов*. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Исследуются влияния величины депрессии и вертикального расположения горизонтальной скважины на процесс добычи нефти в условиях конусообразования воды в пласте с подошвенной водой. Работа выполнена для пласта с параметрами, характерными для месторождений Западной Сибири, с помощью численного моделирования на гидродинамическом симуляторе. Приводятся выводы об оптимальной

депрессии и оптимальном вертикальном расположении горизонтальной скважины, в частности, в присутствии неоднородности вблизи кровли коллектора в виде слабопроницаемого участка. Ил. 8, табл. 2, библиогр. 9.

Ключевые слова: добыча нефти, численное моделирование, конусообразование воды, депрессия, давление насыщения, кривая относительной фазовой проницаемости.

УДК 519.21+531.19

ОРИЕНТИРОВАННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ. МОДЕЛИ

И ПРИМЕНЕНИЕ. В. А. Дубко, Е. В. Карачанская, А. В. Карачанский. — Мат. заметки ЯГУ, 2012, т. 19, вып. 1.

Рассматриваются модели цепей в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 , элементы которых подвержены постоянным случайным воздействиям. Особенностью моделей является коррелированность элементов цепи (звеньев), вызванной зависимостью отклонения последующего звена от выбранной ориентации предыдущего. На основе предложенной модели рассмотрены три подхода к моделированию случайных перемещений (броуновского движения) с конечной скоростью по пространственной решетке, две из которых — при ограничении на выбор направлений возможных перемещений. Рассмотрена динамическая модель изменения размеров цепи, как расстояния от начала до конца цепи. Приведены результаты численного моделирования. Ил. 7, табл. 3, библиогр. 9.

Ключевые слова: случайный процесс, стохастическая цепь, полимерная цепь, броуновское движение с ограничениями, блуждание по пространственной решетке.

REFERATS

UDC 514.132

On Bretschneider formula for a spherical quadrilateral. *G. A. Baigonakova, A. D. Mednykh* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

The classical Heron formula relates the area of an Euclidean triangle to its side lengths. Indian mathematician and astronomer Brahmagupta, in the seventh century, gave the analogous formulas for a convex cyclic quadrilateral. German mathematician Carl Bretschneider in 1842 related the area of an arbitrary Euclidean quadrilateral to its side lengths and the sum of two opposite angles. The aim of the present paper is to obtain an analog of the Bretschneider theorem for spherical geometry. Il. 2, bibliogr. 10.

KEY WORDS: spherical quadrilateral, spherical area, Bretschneider theorem.

UDC 514.132

On Bretschneider formula for a hyperbolic quadrilateral. *G. A. Baigonakova, A. D. Mednykh* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

The classical Heron formula relates the area of an Euclidean triangle to its side lengths. Indian mathematician and astronomer Brahmagupta, in the seventh century, gave the analogous formulas for a convex cyclic quadrilateral. German mathematician Carl Bretschneider in 1842 related the area of an arbitrary Euclidean quadrilateral to its side lengths and the sum of two opposite angles. The aim of the present paper is to obtain an analog of the Bretschneider theorem for hyperbolic geometry. Il. 1, bibliogr. 11.

KEY WORDS: hyperbolic quadrilateral, hyperbolic area, Bretschneider theorem.

UDC 514.755

To the problem of one pair five-dimensional sets of two-dimensional subspaces in projective space P^5 . *I. V. Bubyakin, E. S. Nikitina* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

The article covers projective-differential geometry of one pair of five-dimensional sets of two-dimensional spaces of the same type in projective space P^5 . Bibliogr. 5.

KEY WORDS: Grassmann manifold, Grassmann map, Segre cone.

UDC 517.95

Error estimation for stationary Galerkin method for degenerating parabolic equation. *I. E. Egorov, E. S. Efimova* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

In a cylindrical domain $Q \subseteq R^{n+1}$ studied the smoothness of the the solution of the first boundary value problem for degenerating parabolic equation of the second order.

For approximate solutions of this boundary value problem is installed estimation of the error of a stationary Galerkin method in the norm of the space $W_2^{1,0}(Q)$. Bibliogr. 10.

KEY WORDS: stationary Galerkin method, approximate solution, inequality, estimation.

UDC 517.946

Boundary value problem with nonlocal conditions with respect to the time variable for the ultraparabolic equations. *G. A. Lukina* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

The boundary value problem with nonlocal conditions with respect to the time variable for the ultraparabolic equations is investigated. We prove the existence and uniqueness theorem in the class of regular solutions. Bibliogr. 8.

KEY WORDS: ultraparabolic equation, nonlocal condition, regular solution, existence, uniqueness.

UDC 517.95

Some properties of the indefinite Sturm–Liouville operators. *V. G. Markov* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

In this paper we investigate the properties some indefinite differential operators. The definition of which includes a function that may have some breaks in the set of points. Limit values of the function and its derivatives at these points is connected by arbitrary matching conditions. It is proved that in almost all cases, the question of the existence of maximal invariant subspaces does not depend on the type of boundary conditions. Bibliogr. 34.

KEY WORDS: Krein space, dissipative operator, j -dissipative operator, Sturm–Liouville operator.

UDC 517.929.4

Estimates of solutions to one class of nonlinear delay differential equations with parameters. *I. I. Matveeva, A. A. Shcheglova* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

One class of systems of nonlinear delay differential equations with periodic coefficients in linear terms and parameters is studied. Using a Lyapunov–Krasovskii functional, we establish sufficient conditions of asymptotic stability of the zero solution, find an attraction domain of the zero solution and obtain estimates of exponential decrease of solutions.

KEY WORDS: delay differential equations, periodic coefficients, asymptotic stability, Lyapunov–Krasovskii functional

Bibliogr. 16.

UDC 517.946

Investigation of the problem for the third order equation. *N. N. Nikolaev* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

This paper is devoted to investigation of the solvability of linear inverse problems for third order equations, called elliptic-parabolic or $(2l + 1)$ -parabolic (for $l = 0$ these

equations are usual parabolic equations). The unknown functions are the solution of the equation and functions $q_k(x)$ is the right part of the equation. The solution of elliptic-parabolic equation also should satisfy to a first initial-boundary problem conditions and to a redefinition condition. Conditions are found for solvability of the problem, the existence theorems of generalized solutions of elliptic-parabolic equation under various conditions of the redefinition formulated are proved. Bibliogr. 11.

KEY WORDS: elliptic-parabolic equation, linear inverse problem, a priori estimates.

UDK 517.946.4

About resolvability of regional problems for the multidimensional pseudo-parabolic equations with nonlocal boundary condition of an integrated kind. N. S. Popov — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

Resolvability of an initial-regional problem for the linear pseudo-parabolic equations of the third order with the task for lateral border of the condition connecting values of the decision or conormal by a derivative of the decision with values of some integrated operator from the decision is investigated. Proving theorems of existence and uniqueness of regular decisions. Bibliogr. 15.

KEY WORDS: the pseudo-parabolic equation, Sobolev space, regional problem, continuation method on parameters, aprioristic estimations, the regular decision.

UDK 517.946.4

The study of iterated parabolic equations higher order with a changing time direction. S. V. Popov, A. G. Sinyavsky — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

In this paper we consider the initial boundary value problem for the iterated parabolic high-order equations with changing time direction. The equations of the fourth, sixth and higher orders, improve the results of [10] for $m = 2, 3$. Prove the existence and uniqueness of smooth solutions in the space of Holder. Bibliogr. 11.

KEY WORDS: iterated equation for a parabolic equation with changing time direction, Holder space, the initial-boundary value problem, singular equation, a smooth solution.

UDC 517.946

The solvability of the inverse problem for elliptic-parabolic equation with integral overdetermination condition. A. V. Prokop'ev — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

In this paper the problem of solvability of linear inverse problem for elliptic-parabolic equation is considered. The unknown functions are the solution of the equation and function $q(t)$ in the right part of the equation. The solution of elliptic-parabolic equation also should satisfy to a first initial-boundary problem conditions and to a integral overdetermination condition. Conditions are found for solvability of the problem, the existence theorem of generalized solution of elliptic-parabolic equation under condition of the overdetermination formulated and proved. Bibliogr. 9.

KEY WORDS: elliptic-parabolic equation, linear inverse problem, the generalized solvability, a priori estimates, the external impact.

UDK 517.946.4

On determining a source function in a parabolic problem with the Cauchy data on a part of the lateral surface of a cylinder. *S. G. Pyatkov, A. G. Borichevskaya* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

We examine an inverse problem on determining a solution to a parabolic equation and an unknown right-hand side in this equation using the conventional conditions of the first or mixed initial-boundary problem supplemented with the Neumann data on a part of the lateral boundary of a cylinder. Under some conditions on the data, we prove the solvability of this problem in the Sobolev spaces. Bibliogr. 22.

KEY WORDS: inverse problem, parabolic equation, boundary value problem, overdetermination condition.

UDC 512.6:519.61

Inhomogeneous Gaussian infinite system of linear algebraic equations (ISLAE). *F. M. Fedorov* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

We have found a closed particular of the Gaussian infinite system of linear algebraic equations and we give conditions for the compatibility of such systems. Bibliogr. 4.

KEY WORDS: Gaussian systems, inhomogeneous, infinite systems, linear, algebraic equations, reduction method.

UDC 512.6:519.61

About the Gauss algorithm for infinite systems of linear algebraic equations (ISLAE). *F. M. Fedorov* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

Method of Gaussian elimination is generalized for infinite system of linear algebraic equation. Bibliogr. 7.

KEY WORDS: Infinite system, Gauss systems, linear equations, method of Gaussian elimination.

UDC 517.95

Absolute ω -retracts and fixed points. *P. V. Chernikov* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

It is proved that an absolute ω -retract has the fixed point property. Bibliogr. 2.

KEY WORDS: absolute ω -retract, fixed point.

UDC 519.635.8:532.616

Numerical simulation of the dynamics of growth ice cover in fresh and saltish water body. *A. F. Voevodin, T. B. Grankina* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

The problem for calculation of dynamics of growth of an ice cover on water objects is considered. The one-dimensional mathematical model and its numerical realization is presented. The model takes into account the salinity of the reservoir associated with this unstable freezing temperatures and the effect of snow cover. Test calculations and a number of calculations for real objects, comparisons with the data of natural measurements have been carried out. Examples of calculations are presented. Il. 5, bibliogr. 10.

KEY WORDS: ice-thermal regime of reservoirs, the phase transition, Stefan problem, freezing temperature, crystallization, and the sweep method, an implicit finite difference scheme.

UDC 51-74

The influence of depression and vertical arrangement of horizontal well on oil performance under coning effect. *Y. M. Grigoriev, M. V. Kharbanov* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

The influence of depression and vertical arrangement of horizontal well on oil performance under coning effect is investigated in a reservoir with bottom water. The study was made for reservoir's parameters corresponding to typical parameters of West Siberia fields by numerical simulation on a hydrodynamical program. Conclusions are given about optimum depression and optimum vertical arrangement of horizontal well particularly when there is a heterogeneity near the top of a reservoir as less permeable region. Tabl. 2, il. 5, bibliogr. 9.

KEY WORDS: oil performance, numerical simulation, coning of water, depression, bubble-point pressure, rock relative permeability curve.

UDC 519.21+531.19

Directed stochastic chains. The models and an application. *V. A. Dubko, E. V. Karachanskaya, A. V. Karachanskiĭ* — Math. notes of YSU. 2012. Vol. 19. No. 1.

We consider the models of the chains in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 , which have elements, subjected to random disturbances. An exception of this models is correlatedness of chain path. There is a position of the next chain element dependence on position of the previous one. On this basis we study the three ways to simulations of a random moving (Brownian motion) with finite velocity on a space lattice. Two models have restrictions on the choice of a possible movement direction. We investigated a dynamical model of a chain size change as the distance between its origin and finite chain points. The numerical simulations that illustrate these results are presented. Tabl. 3, il. 7, bibliogr. 9.

KEY WORDS: random process, stochastic chain, polymer chain, Brownian motion with restrictions, random walk on a space lattice.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Математика

Байгонакова Галия Аманболдыновна

Горно-Алтайский государственный университет
ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
galyaab@mail.ru

Медных Александр Дмитриевич

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
mednykh@math.nsc.ru

Бубякин Игорь Витальевич

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
bubyakiniv@mail.ru

Никитина Екатерина Семеновна

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
bubyakiniv@mail.ru

Егоров Иван Егорович

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
niipmi@sitc.ru

Ефимова Елена Сергеевна

Северо-восточный Федеральный университет им. М. К. Аммосова
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
oslamE@mail.ru

Лукина Галина Александровна

Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова в г. Мирном
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678174
lukina-g@mail.ru

Марков Виктор Гаврильевич

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
bntr@ Rambler.ru

Матвеева Инесса Изотовна

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
matveeva@math.nsc.ru

Щеглова Алла Аркадьевна

Институт динамики систем и теории управления СО РАН
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033,
shcheagl@icc.ru

Николаев Николай Николаевич

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
nuke1987@mail.ru

Попов Николай Сергеевич

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
popovnserg@mail.ru

Попов Сергей Вячеславович

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
madu@sitc.ru

Синявский Александр Георгиевич

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
Sinyavsk_88@mail.ru

Прокопьев Алексей Васильевич

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
кафедра математического анализа
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
vale_cl@mail.ru

Пятков Сергей Григорьевич

Югорский государственный университет
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012, Тюменская обл.
s_pyatkov@ugrasu.ru, pyatkov@math.nsc.ru

Боричевская Альбина Геннадьевна

Югорский государственный университет
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012, Тюменская обл.
a_borichevskaya@ugrasu.ru

Федоров Фома Михайлович

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
niipmi@sitc.ru

Черников Павел Васильевич

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090

Математическое моделирование**Воеводин Анатолий Федорович**

Институт гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН
пр. Ак. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vovodin@hydro.nsc.ru

Гранкина Татьяна Борисовна

Институт водных и экологических проблем СО РАН, Новосибирский филиал

Морской пр., 2, 630090 Новосибирск;

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090

grankina@gmail.com, grankina@ad-sbras.nsc.ru

Григорьев Юрий Михайлович

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Физико-технический институт

ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)

grigyum@yandex.ru

Харбанов Михаил Владимирович

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Физико-технический институт

ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)

mvkharbanov@gmail.com

Дубко Валерий Алексеевич

Национальный авиационный университет

пр. Космонавта Комарова, 1, Киев 03058, Украина

doobko2008@yandex.ru

Карачанская Елена Викторовна

Тихоокеанский государственный университет

ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск 680033

Chalykh@mail.khstu.ru

Карачанский Андрей Владимирович

Тихоокеанский государственный университет

ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск 680033

ansky@mail.khstu.ru

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

К публикации в «Математических заметках ЯГУ» принимаются оригинальные статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

В редакцию представляется рукопись в двух экземплярах объемом не более 1 авторского листа, оформленная согласно стандартным требованиям к авторским оригиналам. К рукописи должны быть приложены два экземпляра аннотации и список ключевых слов на двух языках (русский и английский), шифр УДК. Депонирование рукописи редакцией не осуществляется. Авторы обязаны указать место работы, должность и контактную информацию на двух языках. В случае возвращения статьи для переработки указываются две даты поступления — первоначальная дата и дата получения редакцией окончательного текста.

Основные требования к оформлению рукописи:

1. Текст статьи должен быть напечатан через 2 интервала на одной стороне листа белой писчей бумаги форматом 210 × 300 мм.

2. Рисунки и сложные диаграммы выполняются на отдельных листах с указанием на обороте фамилии автора, название статьи и номера рисунка; их место в тексте указывается на полях статьи.

3. Номер формулы ставится у правого края листа.

4. Рукописи желательно подготовить с использованием наборных систем типа TEX.

5. В рукописях, подготовленных с помощью текстовых редакторов типа Word, должны быть размечены греческие, готические, латинские рукописные буквы, указано использование букв прямого начертания, а также проведена разметка индексов.

6. В авторских оригиналах, подготовленных с использованием наборных систем типа TEX и выданных на лазерном принтере, разметка формул не проводится, однако на полях поясняются буквы готического алфавита.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Список литературы на двух языках печатается в конце текста на отдельном листе. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

Рукописи, оформленные не по стандартам или превышающие указанный выше объем, возвращаются.

Журнал подготовлен с использованием макро-пакета \mathcal{AMS} - \TeX ,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using \mathcal{AMS} - \TeX ,
the American Mathematical Society's \TeX macro system.

Журнал зарегистрирован в Министерстве Российской Федерации
по делам печати, телерадиовещания и средств массовой информации
Свидетельство о регистрации № Я 0118 от 25 ноября 2002 г.

Учредитель: ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный
федеральный университет имени М. К. Аммосова»

Подписано в печать 28.05.2012. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 11,75. Уч.-изд. л. 11,75. Тираж 200 экз. Заказ № 58. Цена договорная.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.