

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. К. АММОСОВА
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ЯГУ

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1994 ГОДА

ВЫХОДИТ 2 РАЗА В ГОД

Том 20, вып. 1

Январь–Июнь, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Бубякин И. В. К проективно-дифференциальной геометрии одной пары пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5	3
Вихрева О. А. О спектре вырождающегося обыкновенного дифференциального оператора второго порядка	12
Егоров И. Е., Захарова Т. И. О фредгольмовости краевой задачи для уравнения смешанного типа	20
Замышляева А. А., Бычков Е. В. О численном исследовании математической модели распространения волн на мелкой воде	27
Кожанов А. И. Краевые задачи для некоторых классов уравнений, не разрешенных относительно временной производной	35
Коробов А. А. Об условиях разрешимости одного семейства уравнений Пелля	44
Павлов В. П., Абдрахманова А. А., Абдрахманова Р. П. Задача расчета стержней одномерным сплайном пятой степени дефекта 2	50
Пинигина Н. Р. Об оценках решений для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений с комплексным параметром	60
Попова Т. С. Жесткое включение в задаче о вязкоупругом теле с трещиной	73

Прокопьев А. В. <i>Нелинейная обратная задача для некоторых классов вырождающихся параболических уравнений</i>	93
Ротанова Т. А. <i>Задача о контакте двух пластин, каждая из которых содержит жесткие включения</i>	102
Рудых Г. А., Киселевич Д. Я. <i>Критерий сильной неустойчивости по Ляпунову семейства траекторий системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно множества</i>	112
Соколова Д. Ю. <i>О существовании евклидовой структуры на узле трилистник с мостом</i>	128
Федоров Ф. М. <i>К теории периодических бесконечных систем линейных алгебраических уравнений</i>	141
Черников П. В. <i>Некоторые свойства элементарных теорий и пространства моделей</i>	153
Шадрина А. И. <i>О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами</i>	160
Математическое моделирование	
Бондарев Э. А., Николаев В. Е., Иванов Г. И. <i>Сравнительный анализ двумерной математической модели отбора идеального и реального газов</i>	182
Васильева М. В., Павлова Н. В. <i>Конечно-элементная реализация задачи замораживания фильтрующих грунтов</i>	195
Григорьев Ю. М., Скрябина О. Е. <i>Учет вязкости в математической модели движений твердого и жидкого ядер Земли, вызванных приливным деформированием</i>	206
Федоров Ф. М., Павлов Н. Н., Иванова О. Ф. <i>Алгоритмы реализации решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений</i>	215
Аннотации	224

К ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ ОДНОЙ ПАРЫ ПЯТИМЕРНЫХ
КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ
В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P^5

И. В. Бубякин

В проективном пространстве P^5 двумерная плоскость L определяется тремя линейно независимыми точками. Из матрицы координат этих точек можно составить $\binom{3}{6} = 20$ определителей третьего порядка, которые называются *грасмановыми координатами плоскости L* . Они связаны системой алгебраических уравнений и определяют биективное отображение грасманова многообразия $G(2, 5)$ двумерных плоскостей пространства P^5 на девятимерное алгебраическое многообразие $\Omega(2, 5)$ проективного пространства P^{19} . Это отображение называется *грасмановым* [1].

Исследуем более детально строение алгебраического многообразия $\Omega(2, 5)$. Рассмотрим в пространстве P^5 две двумерные плоскости, пересекающиеся по прямой. Они порождают линейный пучок плоскостей, т. е. семейство двумерных плоскостей, проходящих через прямую и лежащих в некоторой трехмерной плоскости. Этому линейному пучку на многообразии $\Omega(2, 5)$ соответствует прямолинейная образующая. При этом прямая и проходящая через нее трехмерная плоскость вполне определяют линейный пучок, а следовательно, и прямую на многообразии $\Omega(2, 5)$.

Рассмотрим все двумерные плоскости, лежащие в некоторой фиксированной трехмерной плоскости. Они образуют линейное трехпараметрическое семейство, которому на многообразии $\Omega(2, 5)$ соответству-

ет трехмерная плоская образующая, называемая α -образующей. Поскольку в пространстве P^5 содержится восьмипараметрическое семейство трехмерных плоскостей, многообразие $\Omega(2, 5)$ несет семейство α -образующих, зависящее от восьми параметров.

Пусть в пространстве P^5 фиксирована некоторая прямая. Рассмотрим все двумерные плоскости, проходящие через нее. Такие двумерные плоскости порождают трехпараметрическую связку, которой на многообразии $\Omega(2, 5)$ также соответствует трехмерная плоская образующая, называемая β -образующей. Поскольку пространство P^5 содержит восьмипараметрическое семейство прямых, многообразие $\Omega(2, 5)$ несет семейство α -образующих, зависящее от восьми параметров. Таким образом, многообразие $\Omega(2, 5)$ несет два семейства трехмерных плоских образующих.

Если трехмерная плоскость пространства P^5 содержит фиксированную прямую, то соответствующие α - и β -образующие многообразия $\Omega(2, 5)$ пересекаются по прямой. Если трехмерная плоскость в пространстве P^5 не содержит прямой, то соответствующие им плоские образующие многообразия $\Omega(2, 5)$ общих точек не имеют.

Рассмотрим в пространстве P^5 фиксированную двумерную плоскость L . Через эту плоскость проходит дупараметрическое семейство трехмерных плоскостей. Поэтому через соответствующую плоскости L точку ℓ на многообразии $\Omega(2, 5)$ проходит дупараметрическое семейство α -образующих. В то же время плоскость L содержит дупараметрическое семейство прямых. Следовательно, через точку ℓ проходит дупараметрическое семейство β -образующих многообразия $\Omega(2, 5)$. При этом две образующие различных семейств многообразия $\Omega(2, 5)$, проходящие через точку ℓ , имеют общую прямую, которой в пространстве P^5 соответствует линейный пучок двумерных плоскостей, а две образующие одного семейства имеют единственную общую точку ℓ . Отсюда следует, что все трехмерные плоские образующие, проходящие через точку ℓ , являются плоскими образующими конуса Сегре $C_\ell(3, 3)$ [2, 3] с вершиной в точке ℓ , лежащего на многообразии

$\Omega(2, 5)$. Этот конус представляет собой пересечение касательной плоскости $T_\ell\Omega(2, 5)$ в точке ℓ к многообразию $\Omega(2, 5)$ с самим многообразием. В пространстве P^5 конусу Сегре $C_\ell(3, 3)$ соответствует совокупность двумерных плоскостей, пересекающих двумерную плоскость L по прямым.

Асимптотические направления третьего порядка многообразия $\Omega(2, 5)$, выходящие из точки ℓ , задаются условием

$$d^3\ell = 0 \pmod{T_\ell^3\Omega(2, 5)}, \quad (1)$$

где

$$d^3\ell = 6 \det(\omega_i^p) A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \pmod{T_\ell^2\Omega(2, 5)}. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь проективизацию касательной плоскости $T_\ell\Omega(2, 5)$ с центром в точке ℓ . Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^8 = PT_\ell\Omega(2, 5)$, в котором ω_i^p — однородные координаты произвольной точки. Асимптотические направления третьего порядка многообразия $\Omega(2, 5)$ образуют конус с вершиной в точке ℓ , который обозначается через $B_\ell(3)$. Конус $B_\ell(3)$ определяется в силу (1) и (2) уравнением

$$\det(\omega_i^p) = 0. \quad (3)$$

Ввиду этого конус $B_\ell(3)$ представляет собой гиперконус третьего порядка в касательной плоскости $T_\ell\Omega(2, 5)$ в точке ℓ к многообразию $\Omega(2, 5)$.

Геометрический смысл конуса $B_\ell(3)$ описывается следующим образом. Каждая гиперплоскость в пространстве P^5 , проходящая через плоскость L , содержит шестипараметрическое семейство двумерных плоскостей, которому на алгебраическом многообразии $\Omega(2, 5)$ соответствует подмногообразие $\Omega(2, 4)$, проходящее через точку ℓ . Шестимерные касательные плоскости к этим подмногообразиям образуют одно семейство плоских образующих конуса $B_\ell(3)$, которые называются *α -образующими*. Через каждую точку плоскости L проходит шестипараметрическое семейство двумерных плоскостей, которому на многообразии $\Omega(2, 5)$ соответствует подмногообразие $\Omega^*(2, 4)$, также проходящее

через ℓ . Шестимерные касательные плоскости к таким подмногообразиям образуют второе семейство плоских образующих конуса $B_\ell(3)$, которые называют его β -образующими. Таким образом, конус $B_\ell(3)$ несет два семейства шестимерных плоских образующих. Из (3) следует, что шестимерное подпространство, определяемое в пространстве $T_\ell\Omega(2, 5)$ уравнениями

$$\alpha_p \omega_i^p = 0, \quad (4)$$

принадлежит асимптотическому конусу $B_\ell(3)$. Это подпространство совпадает с α -образующими конуса $B_\ell(3)$. Шестимерное подпространство, определяемое в пространстве $T_\ell\Omega(2, 5)$ уравнениями

$$\beta^i \omega_i^p = 0, \quad (5)$$

также принадлежит асимптотическому конусу $B_\ell(3)$. Оно совпадает с β -образующими конуса $B_\ell(3)$. Легко видеть, что две образующие различных семейств конуса $B_\ell(3)$ пересекаются по четырехмерной плоскости, которой в пространстве P^5 соответствует совокупность двумерных плоскостей, проходящих через некоторую точку и принадлежащих фиксированной гиперплоскости, а две образующие одного семейства пересекаются по трехмерной плоскости, совпадающей с образующей конуса $B_\ell(2)$ асимптотических направлений второго порядка.

Асимптотическому конусу $B_\ell(3)$ в пространстве $P^8 = PT_\ell\Omega(2, 5)$ соответствует кубическая гиперповерхность $PB_\ell(3)$, определяемая тем же уравнением (3), что и конус $B_\ell(3)$ в касательном пространстве $T_\ell\Omega(2, 5)$. Гиперкубика $PB_\ell(3)$ несет семейство α -образующих, полученных при проективизации с центром в точке ℓ α -образующих конуса $B_\ell(3)$, и семейство β -образующих, полученных при проективизации β -образующих конуса $B_\ell(3)$. Отметим, что многообразие Сегре $S_\ell(2, 2)$ представляет собой совокупность двойных точек гиперкубики $PB_\ell(3)$.

Рассмотрим в пространстве P^5 пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей L — пятимерный комплекс K . Комплексу K при грасмановом отображении соответствует пятимерное многообразие V , лежащее на алгебраическом многообразии $\Omega(2, 5)$. Многообра-

зие V в каждой точке ℓ имеет пятимерную касательную плоскость $T_\ell V$. Проективизация плоскости $T_\ell V$ с центром в точке ℓ представляет собой четырехмерную плоскость $PT_\ell V$. Эта четырехмерная плоскость определяется в пространстве $P^8 = PT_\ell \Omega(2, 5)$ теми же уравнениями, что и плоскость $T_\ell V$ в касательном пространстве $T_\ell \Omega(2, 5)$, а именно уравнениями

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \quad (6)$$

где $i = 0, 1, 2, p = 3, 4, 5, \alpha = 1, 2, 3, 4$. Различным видам взаимного расположения плоскости $PT_\ell V$ с кубической гиперповерхностью $PB_\ell(3)$ соответствуют различные классы комплексов. Плоскость $PT_\ell V$ и гиперкубика $PB_\ell(3)$ пересекаются в общем случае по трехмерной кубической поверхности Q , несущей два двухпараметрических семейства прямых образующих, причем через каждую ее точку проходят две образующие различных семейств.

Далее рассмотрим пару пятимерных комплексов G_1^5 и G_2^5 двумерных плоскостей L , для каждой образующей которых кубика Q распадается на конус Q_2 второго порядка с точечной вершиной и трехмерную плоскость, не проходящую через эту вершину и совпадающую с пересечением двух плоских образующих различных семейств гиперкубики $PB_\ell(3)$. Выберем репер так, чтобы вершины A_0, A_1, A_2 принадлежали образующей L_1^2 комплекса G_1^5 , а вершины A_3, A_4, A_5 лежали в образующей L_2^2 комплекса G_2^5 . Тогда уравнения такой пары комплексов можно привести в виду

$$\omega_0^r = 0, \quad \omega_k^5 = 0, \quad (7)$$

$$\omega_5^k = 0, \quad \omega_r^0 = 0, \quad (8)$$

где $k = 1, 2, r = 3, 4$, формы ω_k^r, ω_0^5 линейно независимы на комплексе G_1^5 и являются базисными формами на этом комплексе, а формы ω_r^k, ω_5^0 линейно независимы на комплексе G_2^5 и служат базисными формами на этом комплексе.

Дифференцируя внешним образом уравнения (7) и (8), получим

$$\omega_0^k \wedge \omega_k^r + \omega_0^5 \wedge \omega_5^r = 0, \quad (9)$$

$$\omega_k^0 \wedge \omega_0^5 + \omega_k^r \wedge \omega_r^5 = 0, \quad (10)$$

$$\omega_5^0 \wedge \omega_0^k + \omega_5^r \wedge \omega_r^k = 0, \quad (11)$$

$$\omega_r^k \wedge \omega_k^0 + \omega_r^5 \wedge \omega_5^0 = 0. \quad (12)$$

Из (7) и (8) по лемме Картана имеем

$$\omega_0^k = \lambda^k \omega_0^5, \quad \omega_r^5 = \lambda_r \omega_0^5, \quad (13)$$

$$\omega_5^r = \mu^r \omega_5^0, \quad \omega_k^0 = \mu_k \omega_5^0. \quad (14)$$

Из первых групп уравнений (13) и (14) следует, что дифференциалы точек A_0 и A_5 вычисляются так:

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^5 (\lambda^k A_k + A_5), \quad (15)$$

$$dA_5 = \omega_5^0 (A_0 + \mu^r A_r) + \omega_5^5 A_5. \quad (16)$$

Из этих соотношений следует, что точки A_0 и A_5 описывают кривые линии. При этом касательными к этим кривым являются соответственно прямые:

$$A_0 \wedge (\lambda^k A_k + A_5), \quad (17)$$

$$(A_0 + \mu^r A_r) \wedge A_5. \quad (18)$$

Из вторых групп уравнений (7) и (8) следует, что дифференциалы гиперплоскостей $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ и $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} d(A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4) &= (\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4) A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \\ &+ \omega_0^5 (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 + \lambda_3 A_0 \wedge A_1 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \\ &+ \lambda_4 A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_5), \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5) &= (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 + \omega_5^5) A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \\ &+ \omega_5^0 (A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 + \mu_1 A_0 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \\ &- \mu_2 A_0 \wedge A_1 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5). \quad (20) \end{aligned}$$

Из этих соотношений видно, что гиперплоскости $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ и $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5$ описывают однопараметрические семейства,

трехмерные характеристические образы которых определяются соответственно уравнениями

$$x^0 \omega_0^5 + x^r \omega_r^5 = 0, \quad (21)$$

$$x^k \omega_k^0 + x^5 \omega_5^0 = 0, \quad (22)$$

или в силу вторых групп уравнений (13) и (14) уравнениями

$$x^0 + x^r \omega_r = 0, \quad (23)$$

$$x^k \omega_k + x^5 = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим пару пятимерных комплексов G_1^5 и G_2^5 двумерных плоскостей L , для которых совпадают касательные к кривым, описываемых точками A_0 и A_5 , а также совпадают трехмерные характеристические образы однопараметрических семейств, описываемых гиперплоскостями $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ и $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5$. Обозначим такую пару пятимерных комплексов двумерных плоскостей через G .

Совместим общую касательную к кривым, описываемым точками A_0 и A_5 , с прямой $A_0 \wedge A_5$, а трехмерную характеристическую плоскость однопараметрических семейств, описываемых гиперплоскостями $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ и $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5$, — с 3-плоскостью $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$. Тогда из (17) и (18), а также из (23) и (24) имеем

$$\lambda^k = 0, \quad \mu^r = 0, \quad (25)$$

$$\lambda_r = 0, \quad \mu_k = 0. \quad (26)$$

Следовательно, пара пятимерных комплексов G определяется уравнениями (7), (8) и уравнениями

$$\omega_0^k = 0, \quad \omega_r^5 = 0, \quad (27)$$

$$\omega_5^k = 0, \quad \omega_k^0 = 0. \quad (28)$$

Выясним строение пары комплексов G . С этой целью вычислим дифференциалы инвариантной прямой $A_0 \wedge A_5$ и инвариантной трехмерной плоскости $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$:

$$d(A_0 \wedge A_5) = (\omega_0^0 + \omega_1^1) A_0 \wedge A_5, \quad (29)$$

$$d(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4) = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4) A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4. \quad (30)$$

Отсюда следует, что прямая $A_0 \wedge A_5$ и трехмерная плоскость $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ неподвижны. Таким образом, двумерные образующие $L_1^2 = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$ и $L_2^2 = A_3 \wedge A_4 \wedge A_5$ пары пятимерных комплексов G пересекают неподвижную прямую $A_0 \wedge A_5$ и имеют общую прямую с фиксированной трехмерной плоскостью $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что пара двумерных плоскостей пересекает неподвижную прямую и имеет общую прямую с фиксированной трехмерной плоскостью. Выберем репер так, чтобы вершины A_0 и A_5 лежали на неподвижной прямой, а вершины A_1, A_2, A_3 и A_4 принадлежали фиксированной трехмерной плоскости. В этом случае имеют место соответственно уравнения:

$$\omega_0^k = 0, \quad \omega_0^r = 0, \quad (31)$$

$$\omega_5^k = 0, \quad \omega_5^r = 0, \quad (32)$$

$$\omega_k^0 = 0, \quad \omega_r^0 = 0, \quad (33)$$

$$\omega_k^5 = 0, \quad \omega_r^5 = 0. \quad (34)$$

Ясно, что уравнения

$$\omega_0^r = 0, \quad \omega_k^5 = 0, \quad (35)$$

$$\omega_5^k = 0, \quad \omega_r^0 = 0 \quad (36)$$

определяют пару пятимерных комплексов двумерных плоскостей. Из этих уравнений видно, что для каждого пятимерного комплекса кубика Q распадается на конус Q_2 второго порядка с точечной вершиной и трехмерную плоскость, не проходящую через эту вершину и совпадающую с пересечением двух плоских образующих различных семейств гиперкубики $PB_\ell(3)$. Следовательно, рассматриваемая пара пятимерных комплексов двумерных плоскостей является парой комплексов G .

Итак, строение пары G пятимерных комплексов двумерных плоскостей описывается следующим образом.

Теорема. Пара пятимерных комплексов двумерных плоскостей является парой G тогда и только тогда, когда каждая ее пара двумерных образующих пересекает неподвижную прямую и имеет общую прямую с фиксированной трехмерной плоскостью. При этом прямая и трехмерная плоскость общих точек не имеют.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аквис М. А. К дифференциальной геометрии грасманова многообразия // Tensor. 1982. V. 38. P. 273–282.
2. Akivis M. A., Goldberg V. V. Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam: North-Holland, 1993.
3. Городенцев А. Л. Геометрическое введение в алгебраическую геометрию // <http://wwwwth.itp.ru/gorod>

г. Якутск

19 декабря 2012 г.

О СПЕКТРЕ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ
ОБЫКНОВЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
ВТОРОГО ПОРЯДКА

О. А. Вихрева

Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка

$$\Delta u \equiv -(\varphi u_t)_t + au_t + pu, \quad 0 < t < b, \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная положительная функция при $t > 0$, $\varphi(0) = 0$, a, p — числа.

Основным явлением, подлежащим изучению, оказывается здесь зависимость выбора «правильного» граничного условия при $t = 0$ и члена au_t . Наш подход, близкий в определенном смысле к [1, 2], в сочетании с использованием модельных операторов позволяет сосредоточить внимание на обыкновенном уравнении (a, p — числа). Соответствующая проблематика, ставшая за последние десятилетия весьма распространенной, изобилует большим количеством невыясненных вопросов. Эти задачи окажутся полезными иллюстрациями к некоторым замечаниям, посвященным спектральным характеристикам линейных операторов.

Положим $I = \int_0^b \frac{1}{\varphi(t)} dt$. Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{d\tau}{\varphi}, & I < \infty, \\ \int_t^b \frac{d\tau}{\varphi}, & I = \infty. \end{cases}$$

Пусть $\overset{\circ}{W}_2^1(0, b)$ — замыкание класса $C_0^\infty(0, b)$ по норме

$$\|u\|_1^2 = \int_0^b [u_t^2 + u^2] dt.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{H}_1$ гильбертово пространство, являющееся пополнением $\overset{\circ}{W}_2^1(0, b)$ по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}^2 = \int_0^b \varphi u_t^2 dt.$$

Лемма 1. Для элементов $u(t) \in \overset{\circ}{H}_1$ справедлива оценка

$$|u(t)|^2 \leq \Phi(t) \|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}^2. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $I < \infty$ для $u \in C_0^\infty(0, b)$ имеем

$$|u(t)|^2 = \left| \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \sqrt{\varphi} u_\tau d\tau \right|^2 \leq \int_0^t \frac{d\tau}{\varphi} \|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}^2 \leq \Phi(t) \|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}^2.$$

Аналогично в случае $I = \infty$ для функций $u \in C_0^\infty(0, b)$ получаем

$$|u(t)|^2 = \left| - \int_t^b \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \sqrt{\varphi} u_\tau d\tau \right|^2 \leq \int_t^b \frac{d\tau}{\varphi} \|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}^2 \leq \Phi(t) \|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}^2.$$

Эти неравенства дают оценку (2) в силу плотности $C_0^\infty(0, b)$ в $\overset{\circ}{H}_1$.

Нужные нам для исследования уравнения (1) гильбертовы пространства являются аналогами пространств [3].

Лемма 2. При $\int_0^b \frac{t dt}{\varphi} < \infty$ имеет место вложение $\overset{\circ}{H}_1 \subset L_2(0, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проинтегрировав по t неравенство (2), получим

$$\int_0^b |u(t)|^2 dt \leq \int_0^b \Phi(t) dt \cdot \|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}^2.$$

Отсюда следует утверждение леммы, так как

$$\int_0^b \Phi(t) dt = \int_0^b \frac{t-\tau}{\varphi} d\tau < \infty, \quad I < \infty,$$

$$\int_0^b \Phi(t) dt = \int_0^b \frac{\tau}{\varphi} d\tau < \infty, \quad I = \infty.$$

Лемма 3. При выполнении условий леммы 2 имеет место компактное вложение $\overset{\circ}{H}_1 \in L_2(0, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции из $\overset{\circ}{H}_1$ справедлива оценка (2). Пусть $\varepsilon > 0$ и M — ограниченное в $\overset{\circ}{H}_1$ множество, для которого $\|u\|_{\overset{\circ}{H}_1} \leq C_1 \forall u \in M$.

Для достаточно малого δ на основании (2) имеем

$$\int_0^\delta |u(t)|^2 dt \leq \int_0^\delta \Phi(t) \|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}^2 dt = \int_0^\delta \Phi(t) dt \cdot C_1^2 < \varepsilon^2, \quad u \in M, \quad (3)$$

так как $\int_0^b \Phi(t) dt < \infty$.

Пусть $M_\delta = \{u(t), \delta < t < b; u \in M\} \subseteq W_2^1(\delta, b) \in L_2(\delta, b)$. Для множества M_δ существует сеть $\{u_i(t)\}$ в пространстве $L_2(\delta, b)$. Введем функции

$$\tilde{u}_i(t) = \begin{cases} u_i(t), & t > \delta, \\ 0, & t < \delta. \end{cases}$$

Считая, что $\|u - u_i\|_{L_2(\delta, b)} < \infty$ при некотором i , из неравенства (3) получаем

$$\int_0^b |u(t) - \tilde{u}_i(t)|^2 dt = \int_0^\delta |u(t)|^2 dt + \int_\delta^b |u(t) - u_i(t)|^2 dt < 2\varepsilon^2.$$

Таким образом,

$$\|u(t) - \tilde{u}_i(t)\|_{L_2(0, b)} < \sqrt{2}\varepsilon, \quad \tilde{u}_i \in L_2(0, b).$$

Отсюда следует, что функции $\tilde{u}_i(t)$ образуют конечную $\sqrt{2\varepsilon}$ -сеть для M в $L_2(0, b)$. Стало быть, M — компактное множество в $L_2(0, b)$. Лемма 3 доказана.

Введем функцию $\omega_\delta(t)$, положив

$$\omega_\delta(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \delta, \\ |\ln(\Phi(\delta))|^\varepsilon - |\ln(\Phi(t))|^\varepsilon, & \delta < t \leq \delta_1, \\ 1, & \delta_1 \leq t \leq b. \end{cases}$$

Здесь $0 < \varepsilon < 1/2$, число δ_1 выбирается из соотношения $|\ln(\Phi(\delta))|^\varepsilon - |\ln(\Phi(\delta_1))|^\varepsilon = 1$.

Заметим, что $\delta < \delta_1$ и $\delta_1 \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и $\int_\delta^{\delta_1} \omega_\delta t dt = 1$.

Для любых $u \in \mathring{H}_1$ произведение $\omega_\delta u$ принадлежит $\mathring{W}_2^1(0, b)$ (тем более пространству \mathring{H}_1).

Лемма 4. Для $u \in \mathring{H}_1$ имеет место сходимость $\|\omega_\delta u - u\|_{\mathring{H}_1} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $u \in \mathring{H}_1$ имеем

$$\|\omega_\delta u - u\|_{\mathring{H}_1} \leq \left(\int_\delta^{\delta_1} \varphi \omega_\delta^2 u^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_0^b \varphi (\omega_\delta - 1)^2 u^2 dt \right)^{1/2}. \quad (4)$$

При $I < \infty$ с учетом (2) оценим первый интеграл в неравенстве (4):

$$\begin{aligned} \left(\int_\delta^{\delta_1} \varphi \omega_\delta^2 u^2 dt \right)^{1/2} &\leq \varepsilon \|u\|_{\mathring{H}_1} \left(\int_\delta^{\delta_1} \varphi [-\ln(\Phi(t))]^{2\varepsilon-2} \frac{1}{\varphi^2 \Phi^2} \Phi dt \right)^{1/2} \\ &= \varepsilon \|u\|_{\mathring{H}_1} \left(- \int_\delta^{\delta_1} [-\ln(\Phi(t))]^{2\varepsilon-2} d(-\ln \Phi) \right)^{1/2} \\ &= \frac{\varepsilon \|u\|_{\mathring{H}_1}}{\sqrt{1-2\varepsilon}} ([-\ln(\Phi(\delta_1))]^{2\varepsilon-1} - [-\ln(\Phi(\delta))]^{2\varepsilon-1})^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\delta \rightarrow 0$. Второй интеграл из (4) стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$ в силу стремления ω_δ к единице.

При $I = \infty$ аналогично получаем

$$\left(\int_{\delta}^{\delta_1} \varphi \omega_{\delta t}^2 u^2 dt \right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon \|u\|_{\dot{H}_1}}{\sqrt{1-2\varepsilon}} ([\ln(\Phi(\delta_1))]^{2\varepsilon-1} - [\ln(\Phi(\delta))]^{2\varepsilon-1})^{1/2} \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$. Поэтому первое слагаемое в (4) стремится к нулю и в силу стремления ω_{δ} к единице второе слагаемое стремится к нулю.

Лемма 5. Для любых $u, v \in \dot{H}_1$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \{u, \omega_{\delta} v\}_{\varphi} = \{u, v\}_{\varphi} = \int_0^b \varphi u_t v_t dt.$$

Доказательство. Для $u, v \in \dot{H}_1$ имеем

$$\{u, \omega_{\delta} v\}_{\varphi} = \int_0^b \varphi u_t (\omega_{\delta} v)_t dt = \int_0^b \varphi u_t \omega_{\delta} v_t dt + \int_0^b \varphi \omega_{\delta t} u_t v dt. \quad (5)$$

Оценим второе слагаемое в (5), как при доказательстве леммы 4. При $I < \infty$ получим при $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta}^{\delta_1} \varphi \omega_{\delta t} u_t v dt \right| &\leq \left(\int_{\delta}^{\delta_1} \varphi u_t^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\delta}^{\delta_1} \varphi \omega_{\delta t}^2 v^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \frac{\varepsilon \|v\|_{\dot{H}_1}}{\sqrt{1-2\varepsilon}} ([-\ln(\Phi(\delta_1))]^{2\varepsilon-1} - [-\ln(\Phi(\delta))]^{2\varepsilon-1})^{1/2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

При $I = \infty$ аналогично получаем при $\delta \rightarrow 0$

$$\left| \int_{\delta}^{\delta_1} \varphi \omega_{\delta t} u_t v dt \right|^{1/2} \leq \frac{\varepsilon \|v\|_{\dot{H}_1}}{\sqrt{1-2\varepsilon}} ([\ln(\Phi(\delta_1))]^{2\varepsilon-1} - [\ln(\Phi(\delta))]^{2\varepsilon-1})^{1/2} \rightarrow 0.$$

Первое слагаемое в (5) очевидно стремится к $\{u, v\}_{\varphi}$. Лемма 5 доказана.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение, порожденное оператором (1):

$$\Lambda u = -(\varphi u_t)_t + pu = f, \quad p \geq 0, \quad 0 < t < b. \quad (6)$$

Для $u, v \in \overset{\circ}{H}_1$ рассмотрим билинейную форму

$$B(u, v) = \int_0^b (\varphi u_t v_t + pu v) dt.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $u \in \overset{\circ}{H}_1$ называется *обобщенным решением уравнения (6)*, если выполнено тождество

$$B(u, v) \equiv (f, v) \quad (7)$$

для любой функции $v \in \overset{\circ}{H}_1$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие $\int_0^b \frac{t dt}{\varphi} < \infty$. При $p \geq 0$ для любого $f \in L_2(0, b)$ обобщенное решение уравнения (6) существует и единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив в тождестве (7) $f = 0$, $v = u$, получим

$$\int_0^b [\varphi u_t^2 + pu^2] dt = 0. \quad (8)$$

Отсюда $\|u\|_{\overset{\circ}{H}_1} \leq 0$, следовательно, $u \equiv 0$.

Введем в $\overset{\circ}{H}_1$ новое скалярное произведение: $[u, v] = B(u, v)$, которое эквивалентно скалярному произведению $\{u, v\}_\varphi$. Введем новую норму:

$$\|u\| = \sqrt{[u, u]} = \left(\int_0^b [\varphi u_t^2 + pu^2] dt \right)^{1/2}.$$

Тогда

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}_1} \leq \|u\| \leq C \left(\int_0^b \varphi u_t^2 dt \right)^{1/2} = C \|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}.$$

Оценим по модулю правую часть равенства (7) при $v \in \overset{\circ}{H}_1$:

$$\left| \int_0^b f v dt \right| \leq \|f\|_{L_2(0,b)} \|v\|_{L_2(0,b)} \leq C \|f\|_{L_2(0,b)} \|v\|_{\overset{\circ}{H}_1} \leq C \|f\|_{L_2(0,b)} \|v\|.$$

Следовательно, (f, v) — линейный непрерывный функционал в $\overset{\circ}{H}_1$. Тем самым существует $u \in \overset{\circ}{H}_1$, для которого $(f, v) = [u, v]$ при любых $v \in \overset{\circ}{H}_1$, т. е. $u(t)$ является обобщенным решением уравнения (6).

Элемент $u \in L_2(0, b)$ принадлежит $D(\Lambda)$ (области определения оператора Λ), если $u \in \overset{\circ}{H}_1$ и существует элемент $f \in L_2(0, b)$ такой, что (7) выполняется для всех $v \in \overset{\circ}{H}_1$.

Теорема 2. Оператор $\Lambda : L_2(0, b) \rightarrow L_2(0, b)$, порождаемый приведенным определением обобщенного решения, является при $p \geq 0$ положительным самосопряженным оператором. Оператор $\Lambda^{-1} : L_2(0, b) \rightarrow L_2(0, b)$ вполне непрерывен.

Доказательство. В силу леммы 3 всякое множество, ограниченное в $\overset{\circ}{H}_1$, компактно в $L_2(0, b)$. Следовательно, оператор $\Lambda^{-1} : \overset{\circ}{H}_1 \rightarrow L_2(0, b)$ ограничен и вполне непрерывен.

Из того, что $u \in D(\Lambda)$, следует, что $u \in D(\Lambda^*)$ и, очевидно, $\Lambda^* u = \Lambda u$. В другую сторону, $D(\Lambda^*) \subset D(\Lambda)$, поскольку из того, что $u \in D(\Lambda^*)$, следует, что $u \in \overset{\circ}{H}_1$ и в силу леммы 3 при любых $f \in L_2(0, b)$ уравнение (7) однозначно разрешимо.

Следствие. Спектр оператора Λ чисто точечный, и система его собственных функций полна в $L_2(0, b)$.

Доказательство. Пусть Λ — неограниченный замкнутый оператор, для которого оператор Λ^{-1} существует и вполне непрерывен. Из свойств спектра самосопряженного вполне непрерывного оператора и связи между спектрами операторов Λ , Λ^{-1} следует, что число $\mu \neq 0$ принадлежит спектру Λ тогда и только тогда, когда $\lambda = \mu^{-1}$ принадлежит спектру Λ^{-1} . Отсюда $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ — собственные значения

оператора Λ , а ненулевые решения $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — собственные функции, принадлежащие собственному значению и образующие базис в $L_2(0, b)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, при $I < \infty$ правильная постановка задачи для уравнения (6) заключается в задании двух условий $u(0) = 0$, $u(b) = 0$. При $I = \infty$ сохраняет смысл второе условие $u(b) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дезин А. А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2000. Т. 229. С. 131–141.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
3. Егоров И. Е. Теоремы вложения и компактности для одного класса весовых пространств // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1993. С. 161–168.

г. Якутск

24 января 2013 г.

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА^{*)}

И. Е. Егоров, Т. И. Захарова

Наиболее полная библиография, посвященная обобщенной и фредгольмовой разрешимости различных краевых задач для уравнений смешанного типа, имеется в [1–4]. В данной работе приводятся схемы доказательств теоремы о плотной разрешимости и теоремы о фредгольмовости краевой задачи, которая впервые поставлена и исследована А. Н. Тереховым [5].

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с кусочно гладкой границей S , $\Omega_t = \Omega \times t$ для $0 \leq t \leq T$, $S_t = S \times (0, T)$, $Q = \Omega \times (0, T)$.

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv k(x, t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x)u_{x_i}) + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t) \quad (1)$$

с достаточно гладкими коэффициентами в \bar{Q} . Предположим, что выполнены условия

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \nu > 0.$$

Следуя работам [1–3, 5], введем множества

$$P_0^\pm = \{(x, 0) : k(x, 0) \geq 0, x \in \Omega\}, \quad P_T^\pm = \{(x, T) : k(x, T) \geq 0, x \in \Omega\}.$$

^{*)} Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР за 2012–2014гг. (проект № 4402)

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{\overline{P}_0^+} = 0, \quad u|_{\overline{P}_T^-} = 0. \quad (2)$$

Пусть C_L — класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (2). Через C_{L^*} обозначим класс гладких функций, удовлетворяющих сопряженным краевым условиям

$$v|_{S_T} = 0, \quad v|_{\overline{P}_0^-} = 0, \quad v|_{t=T} = 0, \quad v_t|_{\overline{P}_T^+} = 0. \quad (2^*)$$

Введем следующие обозначения: $\widetilde{W}_2^1(Q)$ ($\widehat{W}_2^1(Q)$) — пополнение класса C_L (C_{L^*}) по норме $\|\cdot\|_1$ пространства Соболева $W_2^1(Q)$. Обозначим через $\widetilde{W}_2^{-1}(Q)$ ($\widehat{W}_2^{-1}(Q)$) пространство линейных непрерывных функционалов над гильбертовым пространством $\widetilde{W}_2^1(Q)$ ($\widehat{W}_2^1(Q)$). При этом $L_2(Q)$ отождествляется с его сопряженным пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u(x, t) \in \widetilde{W}_2^1(Q)$ называется *обобщенным решением краевой задачи* (1), (2), если выполнено интегральное тождество

$$\int_Q \left[-ku_t v_t + (a - k_t)u_t v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + cuv \right] dQ = \langle f, v \rangle \quad (3)$$

для любой функции $v \in \widehat{W}_2^1(Q)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — двойственное соотношение между $\widehat{W}_2^{-1}(Q)$ и $\widehat{W}_2^1(Q)$, $f \in \widehat{W}_2^{-1}(Q)$.

Левая часть равенства (3) равна $\langle Au, v \rangle$, где A линейный ограниченный оператор из $\widetilde{W}_2^1(Q)$ в $\widehat{W}_2^{-1}(Q)$. При этом имеет место равенство

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle \quad \forall u \in \widetilde{W}_2^1(Q), \quad \forall v \in \widehat{W}_2^1(Q). \quad (4)$$

Пусть $H_1^* = H_1^*(\lambda)$ — пополнение $\widehat{W}_2^1(Q)$ по норме

$$\|v\|_{H_1^*}^2 = \int_Q \left[\eta(t) \left(v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + v^2 \right) + e^{4\lambda t} v^2 + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^t e^{2\lambda\tau} v_{x_i} d\tau \right)^2 + \int_0^t e^{2\lambda\tau} v d\tau \right]^2 dQ,$$

где неотрицательная функция $\eta(t)$ строится в ходе доказательства следующей леммы.

Лемма 1. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, выполнено условие

$$a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q},$$

и имеет место один из следующих случаев: $k(x, 0) \geq 0, k(x, T) < 0$ или $k(x, 0) < 0, k(x, T) \geq 0$ или $k(x, 0) \leq 0, k(x, T) < 0$ или $k(x, 0) \geq 0, k(x, T) \geq 0$.

Тогда существует константа $\lambda > 0$ такая, что имеет место неравенство

$$C_1 \|v\|_{H_1^*} \leq \|A^*v\|_{\widetilde{W}_2^{-1}(Q)}, \quad C_1 = C_1(\lambda) > 0,$$

для всех функций $v \in \widehat{W}_2^1(Q)$.

Для любой функции $v \in \widehat{W}_2^1(Q)$ в равенстве (4) положим

$$u(x, t) = \xi(t) \int_0^t e^{2\lambda\tau} v(x, \tau) d\tau + \eta(t)v,$$

где неотрицательные функции ξ, η в каждом случае подбираются так, чтобы функция $u(x, t)$ принадлежала $\widetilde{W}_2^1(Q)$. Сначала выбираем $\lambda > 0$ так, что $a - \frac{1}{2}k_t + \lambda k \geq \frac{\delta}{2}$ в \overline{Q} .

1. Пусть имеют место неравенства $k(x, 0) \geq 0, k(x, T) < 0$. Выберем числа T_0, T_1 так, что $k(x, t) \leq -\delta_1 < 0, t \in [T_0, T], T_0 < T_1 < T$.

Будем считать, что

$$\eta(t) = 0, \quad t \in [0, T_0]; \quad \eta_t \geq 0; \quad \eta(t) = 1, \quad t \in [T_1, T],$$

$$\xi(t) = \mu > 0, \quad t \in [0, T_0];$$

$$\xi_t \leq 0; \quad \xi_t \leq -\xi_0 < 0, \quad t \in [T_1, T]; \quad \xi(T_1) \geq \frac{\mu}{2}, \quad \xi(T) = 0.$$

Тогда получаем, что $u(x, t)$ принадлежит $\widetilde{W}_2^1(Q)$.

2. При $k(x, 0) < 0, k(x, T) \geq 0$ возьмем числа t_0, t_1 такие, что

$$k(x, t) \leq -\delta_1 < 0, \quad t \in [0, t_0], \quad 0 < t_1 < t_0 < T.$$

Положим

$$\eta(t) = 0, \quad t \in [t_0, T]; \quad \eta(t) = 1, \quad t \in [0, t_1]; \quad \xi(t) \equiv \mu.$$

Тогда снова функция $u(x, t)$ принадлежит $\widetilde{W}_2^1(Q)$.

3. При $k(x, 0) < 0, k(x, T) < 0$ будем считать, что

$$k(x, T) \leq -\delta_1 < 0, \quad t \in [0, t_0] \cup [T_0, T].$$

В качестве $\xi(t)$ рассмотрим функцию $\xi(t)$ из п. 1 и положим

$$\eta(t) = 1, \quad t \in [0, t_1] \cup [T_1, T]; \quad \eta(t) = 0, \quad t \in [t_0, T_0].$$

Отсюда получаем, что $u(x, t) \in \widetilde{W}_2^1(Q)$.

4. Пусть $k(x, 0) \geq 0, k(x, T) \geq 0$. В данном случае для построения $u(x, t)$ из $\widetilde{W}_2^1(Q)$ достаточно рассмотреть функции $\xi \equiv 1$ и $\eta \equiv 0$.

Теперь после некоторых преобразований [4], выбирая $\mu > 0$, можно получить неравенство

$$\langle u, A^* v \rangle \geq C_2 \|v\|_{H_1^*}^2, \quad C_2 = C_2(\lambda) > 0.$$

Из последнего неравенства в силу

$$\|u\|_1 \leq C_3 \|v\|_{H_1^*}, \quad C_3 > 0,$$

следует оценка леммы 1.

Из леммы 1 непосредственно вытекает

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 1 и $f \in \widehat{W}_2^{-1}(Q)$.

Тогда уравнение

$$Au = f$$

плотно разрешимо $(\overline{R(A)} = \widehat{W}_2^{-1}(Q))$.

Пусть $H_1 = H_1(\lambda)$ — пополнение $\widetilde{W}_2^1(Q)$ по норме

$$\|u\|_{H_1}^2 = \int_Q \left[\eta(t) \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u^2 \right) + e^{-4\lambda t} u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\int_t^T e^{-2\lambda\tau} u_{x_i} d\tau \right)^2 + \left(\int_t^T e^{-2\lambda\tau} u d\tau \right)^2 \right] dQ,$$

где функция $\eta(t)$ построена в доказательстве леммы 1.

Лемма 2. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, выполнено условие

$$a - \frac{3}{2}k_t \geq 0 > 0,$$

и имеет место один из следующих случаев: $k(x, 0) \geq 0, k(x, T) < 0$ или $k(x, 0) < 0, k(x, T) \geq 0$ или $k(x, 0) < 0, k(x, T) < 0$ или $k(x, 0) \geq 0, k(x, T) \geq 0$.

Тогда существует константа $\lambda > 0$ такая, что имеет место неравенство

$$C_4 \|u\|_{H_1} \leq \|Au\|_{\widehat{W}_2^{-1}(Q)}, \quad C_4 = C_4(\lambda) > 0,$$

для всех функций $u \in \widehat{W}_2^1(Q)$.

Для любой функции $u \in \widehat{W}_2^1(Q)$ в равенстве (4) положим

$$v(x, t) = \psi(t) \int_t^T e^{-2\lambda\tau} u(x, \tau) d\tau + \eta(t)u,$$

где неотрицательная функция $\psi(t)$ строится в каждом случае так, чтобы функция $v(x, t)$ принадлежала $\widehat{W}_2^1(Q)$.

1. При $k(x, 0) \geq 0, k(x, T) < 0$ в качестве функции $\psi(t)$ берем функцию $\psi(t) = \mu > 0, t \in [0, T]$. Тогда функция v принадлежит $\widehat{W}_2^1(Q)$.

2. При $k(x, 0) < 0, k(x, T) \geq 0$ будем считать, что

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \mu > 0, \quad t \in [t_0, T]; \quad \psi'(t) \geq 0; \\ \psi'(t) &\geq \psi_0 > 0, \quad t \in [0, t_1]; \quad \psi(t_1) \geq \frac{\mu}{2}; \quad \psi(0) = 0. \end{aligned}$$

Снова имеем $v \in \widehat{W}_2^1(Q)$.

3. Пусть выполнены неравенства $k(x, 0) < 0, k(x, T) < 0$. В качестве функции $\psi(t)$ рассмотрим $\xi(t)$ из п. 2. Отсюда получаем, что $v(x, t)$ принадлежит $\widehat{W}_2^1(Q)$.

4. При $k(x, 0) \geq 0, k(x, T) \geq 0$ функция $\psi(t) \equiv 1$ и функция $v(x, t)$ будет из $\widehat{W}_2^1(Q)$.

На основании условий леммы 2 найдется число $\lambda > 0$ такое, что

$$a - \frac{3}{2}k_t + \lambda k \geq \frac{\delta}{2}, \quad (x, t) \in \overline{Q}.$$

Утверждение леммы 2 вытекает из априорной оценки

$$\langle Au, v \rangle \geq C_5 \|u\|_{H_1}^2, \quad C_5 = C_5(\lambda) > 0.$$

Отсюда непосредственно следует

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда краевая задача (1), (2) может иметь не более одного обобщенного решения из $\widehat{W}_2^1(Q)$.

Рассмотрим A как оператор из H_1 в $\widehat{W}_2^{-1}(Q)$ с областью определения $D(A) = \widehat{W}_2^1(Q)$. При этом $D(A^*) \subseteq \widehat{W}_2^1(Q)$, равенство (4) и априорная оценка леммы 1 справедливы для функций v из $D(A^*)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия

$$c(x) \geq 0, \quad x \in \overline{\Omega}; \quad a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}.$$

Тогда для первого положительного собственного значения оператора A^* имеет место оценка

$$\gamma_1 \geq \frac{2\delta}{T}.$$

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 3 из [4]. Так же устанавливается

Теорема 4. Ограниченное в H_1 множество компактно в $\widehat{W}_2^{-1}(Q)$.

Через \overline{A} обозначим замыкание оператора A в H_1 . Рассмотрим операторное уравнение

$$(\overline{A} - \gamma)u = f, \quad f \in \widehat{W}_2^{-1}(Q). \quad (5)$$

Справедлива следующая

Теорема 5. Пусть выполнены условия

$$a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad a - \frac{3}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q},$$

и имеет место один из следующих случаев: $k(x, 0) \geq 0, k(x, T) < 0$ или $k(x, 0) < 0, k(x, T) \geq 0$ или $k(x, 0) < 0, k(x, T) < 0$ или $k(x, 0) \geq 0, k(x, T) \geq 0, x \in \overline{\Omega}$.

Тогда существует константа $\lambda > 0$ такая, что уравнение (5) фредгольмово в пространстве $H_1(\lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что при выполнении условий теоремы 5 и

$$k(x, 0) \neq 0, \quad k(x, T) \neq 0, \quad f \in L_2(Q)$$

в § 2.2 работы [3] изучена фредгольмова разрешимость краевой задачи (1), (2) в энергетическом классе $V_L^1 \subseteq \widetilde{W}_2^1(Q) \subseteq H_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
2. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. у-та, 1988.
3. Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990.
4. Егоров И. Е. О фредгольмовой разрешимости одной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 55–64.
5. Терехов А. Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979. С. 128–136.

г. Якутск

17 января 2013 г.

О ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН НА МЕЛКОЙ
ВОДЕ

А. А. Замышляева, Е. В. Бычков

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В цилиндре $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Шоултера — Сидорова

$$P(u(x, 0) - u_0(x)) = 0, \quad P(u_t(x, 0) - u_1(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (0.1)$$

с краевым условием Дирихле

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (0.2)$$

для уравнения Буссинеска

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = k\Delta u + \Delta f(u). \quad (0.3)$$

В одномерном случае уравнение (0.3) описывает распространение длинных волн на поверхности идеальной жидкости [1, 2] с учетом капиллярных эффектов и при сохранении массы в слое в предположении, что дно достаточно плоское. Если $f(u) = u^3$, уравнение (0.3) называется Improved Modified Boussinesque Equation (IMBq) [3]. В работе [3] получено решение невырожденного IMBq уравнения, а в работе [1] исследованы солитонные решения модифицированного уравнения Буссинеска.

Следуя теории относительно спектрально ограниченных операторов [4], задачу (0.1)–(0.3) можно свести к задаче Шоултера — Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \quad P(\dot{u}(0) - u_1) = 0 \quad (0.4)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка

$$L\ddot{u} = Mu + N(u). \quad (0.5)$$

Задача Шоултера — Сидорова является естественным обобщением задачи Коши на случай вырожденных уравнений, а также имеет преимущество при проведении вычислительных экспериментов в моделях, основанных на уравнениях соболевского типа [5].

Целью работы является обобщение полученных в [6] результатов на случай задачи Шоултера — Сидорова — Дирихле для модифицированного уравнения Буссинеска и разработка алгоритма численного решения поставленной задачи. В работе существенно используется теория относительно p -ограниченных операторов и теория дифференцируемых банаховых многообразий [7].

Статья, кроме введения и списка литературы, содержит три пункта. В первом приведены результаты теории относительно p -ограниченных операторов [4], во втором приведено решение задачи Шоултера — Сидорова для неполного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка. Третий пункт содержит основные результаты о разрешимости задачи (0.1)–(0.3) и модельный пример.

1. Относительно p -ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})\}$$

называется *резольвентным множеством* оператора M относительно оператора L (короче, *L -резольвентным множеством* оператора M). Множество $\mathbb{C} \setminus \rho^L(M) = \sigma^L(M)$ называется *спектром* оператора M относительно оператора L (короче, *L -спектром* оператора M).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ называются

соответственно *резольвентой, правой резольвентой, левой резольвентой* оператора M относительно оператора L (короче, *L -резольвентой, правой L -резольвентой, левой L -резольвентой оператора M*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Оператор M называется (L, σ) -ограниченным, если

$$\exists a > 0 \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Лемма 1.1. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\lambda}^L(M) d\lambda, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\lambda}^L(M) d\lambda \quad (1.1)$$

являются проекторами. Здесь $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r > a\}$.

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на подпространство \mathfrak{U}^k , $k = 0, 1$.

Теорема 1.1. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда

- (i) $L_k, M_k : \mathfrak{U}^k \rightarrow \mathfrak{F}^k$, $k = 0, 1$;
- (ii) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0, \mathfrak{U}^0)$;
- (iii) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1, \mathfrak{U}^1)$;
- (iv) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1, \mathfrak{F}^1)$.

В условиях теоремы 1.1 построим операторы $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Точка ∞ называется *устранимой особой точкой, полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$, существенно особой точкой L -резольвенты* оператора M , если соответственно $H \equiv \mathbb{O}$; $H^p \neq \mathbb{O}$, $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$; $H^q \neq \mathbb{O}$ при всех $q \in \mathbb{N}$.

Далее устраняемую особую точку удобно называть *полюсом порядка p нуль*. В дальнейшем (L, σ) -ограниченный оператор M , будем называть (L, p) -ограниченным, если точка ∞ является полюсом порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его L -резольвенты.

**2. Задача Шоуолтера — Сидорова
для полулинейного уравнения соболевского
типа второго порядка**

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ — банаховы пространства. Рассмотрим задачу Шоуолтера — Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \quad P(\dot{u}(0) - u_1) = 0 \quad (2.1)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\ddot{u} = Mu + N(u), \quad (2.2)$$

где $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}), N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}), \mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ — банаховы пространства. Пусть оператор $M(L, 0)$ -ограничен, причем $\ker L \neq \{0\}$, а P — спектральный проектор вдоль ядра оператора L , определенный в (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Вектор-функцию $u \in C^\infty((-\tau, \tau); \mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (2.2) при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$, назовем *решением уравнения* (2.2), а если она удовлетворяет и условию (2.1), то u назовем *решением задачи* (2.1), (2.2).

В силу теоремы 1.1 уравнение (2.2) можно редуцировать к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{cases} 0 = (\mathbb{I} - Q)(M + N)(u), \\ \ddot{u}^1 = L_1^{-1}Q(M + N)(u). \end{cases} \quad (2.4)$$

Пусть выполнено условие

$$(\mathbb{I} - Q)(M - N_{u_0}) : \mathfrak{F}^0 \rightarrow \mathfrak{U}^0 \text{ — топологический изоморфизм.} \quad (2.5)$$

Тогда первое уравнение системы определяет локально фазовое пространство уравнения (2.2) [6].

Теорема 2.1. Пусть оператор $M(L, 0)$ -ограничен и выполнено условие (2.5). Тогда для любых u_0, u_1 существует единственное локальное решение задачи (2.1), (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [6] доказана локальная разрешимость задачи Коши для уравнения (2.2) при условии, что начальные значения лежат в фазовом пространстве уравнения (2.2). В данной задаче проекции начальных значений в силу условия Шоултера — Сидорова автоматически попадают в фазовое пространство заданного уравнения, в отличие от начальных значений в задаче Коши, и задача (2.1), (2.2) однозначно разрешима при любых u_0, u_1 .

3. Математическая модель распространения волн на мелкой воде с условиями Шоултера — Сидорова

Редуцируя задачу (0.1)–(0.3) к задаче (0.4)–(0.5), положим

$$\mathfrak{U} = \{u \in W_2^{l+2}(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = W_2^l(\Omega).$$

Операторы L, M, N зададим формулами

$$L = \lambda - \Delta, \quad M = k\Delta, \quad N(u) = \Delta f(u).$$

При любом $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ операторы L, M принадлежат $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Обозначим через $\sigma(\Delta) = \{\lambda_k\}$ множество собственных значений однородной задачи Дирихле в области Ω для оператора Лапласа Δ , занумерованных по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — семейство соответствующих собственных функций, ортонормированное относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L^2(\Omega)$.

Лемма 3.1 [4, с. 125]. *При любых $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор M является $(L, 0)$ -ограниченным.*

Лемма 3.2. *Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $l > n/2 - 2$. Тогда оператор $N : u \rightarrow \Delta f(u)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы о регулярности [8, с. 282] оператор $F : u \rightarrow f(u)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathfrak{U})$, а следовательно, оператор N принадлежит $C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ как композиция оператора $F : u \rightarrow f(u)$ и оператора Лапласа $\Delta \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Итак, редукция задачи (0.1)–(0.3) к задаче (2.1)–(2.2) закончена. По лемме 1.1 построим проектор

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda \notin \sigma(\Delta), \\ \mathbb{I} - \sum_{\lambda=\lambda_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k & \text{иначе.} \end{cases}$$

Проектор Q имеет тот же вид, но определен на пространстве \mathfrak{F} .

Итак выполнены все условия абстрактной теоремы 2.1, таким образом, имеет место

Теорема 3.1. Пусть $l > n/2 - 2$ и выполнено условие (2.5). Тогда для любых u_0, u_1 при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$ существует решение $u \in C^\infty((-\tau, \tau), \mathfrak{U})$ задачи (0.1)–(0.3).

В качестве модельного примера рассмотрим ИМВq-уравнение на отрезке $\Omega = [0, \pi]$. В цилиндре $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Шоултера — Сидорова — Дирихле

$$(-9 - \Delta)(u(x, 0) - 0, 8 \sin x + 0, 1 \sin 2x - 0, 3 \sin 3x) = 0, \quad (3.1)$$

$$(-9 - \Delta)(u_t(x, 0) - 0, 8 \sin x + 0, 2 \sin 2x) = 0,$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

для уравнения Буссинеска

$$(-9 - \Delta)u_{tt} = 0, 064\Delta u - 0, 11\Delta u^3. \quad (3.3)$$

Поскольку оператор $k\Delta = 0, 064\Delta u$ 0-ограниченный относительно оператора $\lambda - \Delta = -9 - \Delta$, условие (3.3) равносильно условию Шоултера — Сидорова (2.1). Очевидно, что для операторов $M = 0, 64\Delta$ и $N(u) = -0, 11\Delta u^3$ выполняется условие (2.5). Решение задачи (3.1)–(3.3) будем искать в виде

$$\tilde{u}^N = \sum_{n=1}^N u_n(t) \sin(nx). \quad (3.4)$$

Подставим (3.4) в уравнение (3.3), затем, умножая полученное уравнение скалярно на соответствующие собственные функции оператора Лапласа, получим систему для нахождения $u_n(t)$, $n = \overline{1, N}$. Из

полученной системы исключается алгебраическое уравнение, соответствующее $\lambda = \lambda_k$ (в данном случае $\lambda = \lambda_3 = -9$), и его решение относительно $u_3(t)$ подставляется в оставшиеся дифференциальные уравнения. Затем решается система дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты и далее находится $u_3(t)$ из исключенного алгебраического уравнения. Подставив найденные функции $u_n(t)$, $n = \overline{1, N}$, в (3.4), получим решение исходной задачи. На рис. 1 построен график приближенного решения задачи (3.1)–(3.3) при $N = 4$.

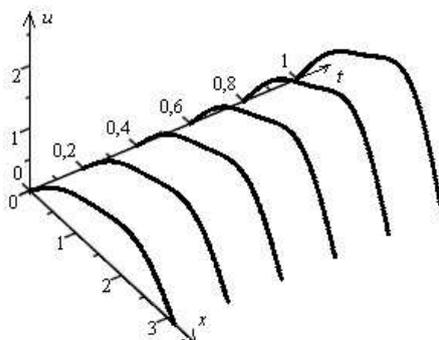


Рис. 1. График функции $\tilde{u}^4(x, t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архипов Д. Г., Хабахпашев Г. А. Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 93, № 8. С. 469–472.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир 1977.
3. Wang S., Chen G. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation // J. Math. Anal. Appl. 2002. V 274. P. 846–866.
4. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semi-groups of operators. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
4. Свиридюк Г. А., Загребина С. А. Задача Шоултера — Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Известия ИГУ. Сер. Математика. 2010. Т. 3, № 1. С. 104–125.
6. Замышляева А. А., Бычков Е. В. Фазовое пространство полулинейного уравнения Буссинеска // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2012. № 18, вып. 12. С. 13–19.
7. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. М.: Мир, 1967.

8. Хассард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.

г. Челябинск

4 апреля 2013 г.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ
КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ
ОТНОСИТЕЛЬНО ВРЕМЕННОЙ
ПРОИЗВОДНОЙ*)

А. И. Кожанов

В работе будут рассмотрены не изучавшиеся ранее краевые задачи для линейных неклассических уравнений, включающих в себя, в частности, линеаризованные уравнения малых продольных возмущений уединенных волн. Для рассматриваемых задач будут доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений. Для простоты ограничиваемся изучением некоторых модельных ситуаций, комментарии по поводу происхождения рассматриваемых задач и возможных обобщений даны ниже.

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}_x^n с границей Γ , G — ограниченная область пространства \mathbb{R}_y^m с границей S ; для простоты будем считать, что границы Γ и S бесконечно дифференцируемы. Далее, пусть Q — цилиндр $\Omega \times G \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $\alpha^k(x, t)$, $b^{ij}(y)$, $k = 1, \dots, n$, $i, j = 1, \dots, m$, $\alpha_0(x, t)$, $b_0(y)$, $f(x, y, t)$, $u_0(x, y)$ — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \bar{G}$, $t \in [0, T]$ соответственно, Δ_x — оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_n , $p \geq 0$ — целое число, A , B и L — дифференциальные операторы, действие которых задается равенствами

$$Au = \alpha^k(x, t)u_{x_k} + \alpha_0(x, t)u, \quad Bu = \frac{\partial}{\partial y_i}(b^{ij}(y)u_{y_j}) + b_0(y)u$$

*) Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-06-00277).

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование: по k в пределах от 1 до n , по i и j — от 1 до m),

$$Lu = Au_t + (-1)^p \Delta_x^p u - Bu.$$

Обозначим $E = \Omega \times G$, $D = \Omega \times (0, T)$.

Краевая задача. Найти функцию $u(x, y, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu = f(x, y, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\frac{\partial^k u(x, y, t)}{\partial \nu_x^k} \Big|_{x \in \Gamma, y \in G, t \in (0, T)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p-1, \quad (2)$$

$$u(x, y, t)|_{x \in \Omega, y \in S, t \in (0, T)} = 0, \quad (3)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in E. \quad (4)$$

Пусть $V(Q)$ — линейное пространство функций $v(x, y, t)$, принадлежащих $L_2(Q)$, имеющих в Q обобщенные производные $v_t(x, y, t)$ и $v_{x_k t}(x, y, t)$, $k = 1, \dots, n$, обобщенные производные по переменным x_1, \dots, x_n до порядка $2p$ включительно, обобщенные производные по переменным y_1, \dots, y_m до второго порядка включительно и таких, что функции $v_{y_i}(x, y, t)$, $i = 1, \dots, m$, имеют обобщенные производные по переменным x_1, \dots, x_n до порядка p включительно, причем все указанные производные являются элементами пространства $L_2(Q)$.

Очевидно, что пространство $V(Q)$ можно наделить структурой гильбертова пространства.

Введем обозначение:

$$\alpha_1(x, t) = \alpha_0(x, t) - \frac{1}{2} \alpha_{x_k}^k(x, t).$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned} \alpha^k(x, t) \in C^1(\overline{D}), \quad k = 1, \dots, n, \quad \alpha_0(x, t) \in C^2(\overline{D}), \\ b^{ij}(y) \in C^2(\overline{G}), \quad i, j = 1, \dots, m, \quad b_0(y) \in C(\overline{G}); \end{aligned} \quad (5)$$

$$b^{ij}(y)\eta_i\eta_j \geq \bar{b}_0|\eta|^2, \quad \bar{b}_0 > 0, \quad y \in \bar{G}, \quad \eta \in \mathbb{R}^m; \quad (6)$$

$$b^{ij}(y) = b^{ji}(y), \quad i, j = 1, \dots, m, \quad y \in \bar{G}; \quad (7)$$

$$\alpha_1(x, t) \geq 0, \quad |\alpha_t^k(x, t)| \leq C\sqrt{\alpha_1(x, t)}, \quad \alpha_{0t}(x, t) \geq 0, \quad \alpha_{0tt}(x, t) \leq 0, \\ C = \text{const}, \quad (x, t) \in \bar{D}; \quad (8)$$

$$f(x, y, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, y, t) \in L_2(Q), \quad f_{tt}(x, y, t) \in L_2(Q), \\ u_0(x, y) \in W_2^{2p, 2}(E); \quad (9)$$

$$\frac{\partial^k u_0(x, y)}{\partial \nu_x^k} = 0, \quad k = 0, \dots, p-1, \quad x \in \Gamma, \quad y \in \bar{G}, \quad (10)$$

$$u_0(x, y) = 0, \quad x \in \Omega, \quad y \in S;$$

$$f(x, y, 0) - (-1)^p \Delta_x^p u_0(x, y) + Bu_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in E. \quad (11)$$

Тогда краевая задача (1)–(4) имеет решение $u(x, y, t)$, принадлежащее пространству $V(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом регуляризации. Пусть ε — положительное число. Обозначим через L_ε дифференциальный оператор, действие которого определяется равенством

$$L_\varepsilon u = \varepsilon(u_{tt} + (-1)^p \Delta_x^p u_t - Bu_t) + Lu.$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, y, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$L_\varepsilon u = f(x, y, t) \quad (1_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), а также условие

$$u_t(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in E. \quad (12)$$

Из общей теории линейных дифференциально-операторных уравнений [1] следует, что при фиксированном ε при принадлежности функции $f(x, y, t)$ пространству $L_2(Q)$ и при выполнении условий (5)–(7), (10), а также условия $u_0(x, y) \in W_2^{2p, 2}(E)$ существует функция $u(x, y, t)$, имеющая все входящие в уравнение (1_ε) производные, причем все эти

производные являются элементами пространства $L_2(Q)$, и являющаяся решением краевой задачи (1_ε) , (2) – (4) , (12) . Более того, из той же теории [1] следует, что при выполнении дополнительного условия $f_t(x, y, t) \in L_2(Q)$ уравнение (1_ε) можно дифференцировать по переменной t и при этом функция $u_t(x, y, t)$ будет иметь все производные, входящие в уравнение (1_ε) , и все эти производные будут принадлежать пространству $L_2(Q)$.

Пусть $u(x, y, t)$ — искомое решение краевой задачи (1_ε) , (2) – (4) , (12) . Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_E L_\varepsilon u u_\tau dx dy d\tau = \int_0^t \int_F f u_\tau dx dy d\tau,$$

являющееся следствием уравнения (1_ε) . Интегрируя по частям в этом равенстве как слева, так и справа, применяя неравенство Юнга, условия (6) – (9) , используя известные оценки решений эллиптических уравнений [2, 3] и, наконец, используя лемму Гронуолла, получим, что для решений краевой задачи (1_ε) , (2) – (4) , (12) выполняется первая априорная оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\{ \int_E u_t^2(x, y, t) dx dy + \int_0^t \int_E \left[\sum_{|\alpha|=0}^p (D_x^\alpha u_\tau)^2 + \sum_{i=1}^m u_{y_i \tau}^2 \right] dx dy d\tau \right\} \\ + \int_E \left\{ \sum_{|\alpha|=0}^p [D_x^\alpha u(x, y, t)]^2 + \sum_{i=1}^m u_{y_i}^2(x, y, t) \right\} dx dy \\ + \int_0^t \int_E \alpha_1 u_\tau^2 dx dy d\tau \leq K_1, \quad (13) \end{aligned}$$

в которой число K_1 определяется функциями $u_0(x, y)$, $f(x, y, t)$, $b^{ij}(y)$, $i, j = 1, \dots, m$, $b_0(y)$, а также числом T и областью Ω .

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_E (L_\varepsilon u)_\tau u_{\tau\tau} dx dy d\tau = \int_0^t \int_E f_\tau u_{\tau\tau} dx dy d\tau,$$

являющееся следствием продифференцированного по t уравнения (1_ε) . Вновь интегрируя по частям, применяя неравенство Юнга, условия (6)–(9), равенство

$$u_{tt}(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in E,$$

являющееся следствием условия (11), и используя доказанную выше оценку (13), оценки из [2, 3] и лемму Гронуолла, получим, что для решений краевой задачи (1_ε) , (2)–(4), (12) выполняется вторая априорная оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\{ \int_E u_{tt}^2(x, y, t) dx dy + \int_0^t \int_E \left[\sum_{|\alpha|=0}^p (D_x^\alpha u_{\tau\tau})^2 + \sum_{i=1}^m u_{y_i\tau\tau}^2 \right] dx dy d\tau \right\} \\ + \int_E \left\{ \sum_{|\alpha|=0}^p [D_x^\alpha u_t(x, y, t)]^2 + \sum_{i=1}^m u_{y_i t}^2(x, y, t) \right\} dx dy \leq K_2, \quad (14) \end{aligned}$$

в которой число K_2 , как и число K_1 , определяется лишь функциями $u_0(x, y)$, $f(x, y, t)$, $b^{ij}(y)$, $i, j = 1, \dots, m$, $b_0(y)$, а также числом T и областью Ω .

Рассмотрим теперь равенство

$$\int_0^t \int_E L_\varepsilon u [(-1)^p \Delta_x^p u - Bu] dx dy d\tau = \int_0^t \int_E f [(-1)^p \Delta_x^p u - Bu] dx dy d\tau.$$

Интегрируя по частям, применяя неравенство Юнга, используя условия теоремы, оценки (13) и (14), а также вновь используя оценки из [2, 3], получим, что для решений краевой задачи (1_ε) , (2)–(4), (12) имеет место оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_E [\Delta_x^p u(x, y, t)]^2 dx dy + \varepsilon \sum_{i=1}^m \sum_{|\alpha|=0}^p \int_E [D_x^\alpha u_{y_i}(x, y, t)]^2 dx dy \\ + \int_0^t \int_E [\Delta_x^p u]^2 dx dy d\tau + \sum_{i=1}^m \sum_{|\alpha|=0}^p \int_0^t \int_E [D_x^\alpha u_{y_i}]^2 dx dy d\tau \\ + \sum_{i,j=1}^m \int_0^t \int_E u_{y_i y_j}^2 dx dy d\tau \leq K_3 \quad (15) \end{aligned}$$

с числом K_3 , определяющимся функциями $u_0(x, y)$, $f(x, y, t)$, $b^{ij}(y)$, $i, j = 1, \dots, m$, $b_0(y)$, а также числом T и областями Ω и G .

Из оценок (13)–(15) и свойства рефлексивности гильбертова пространства следует, что существуют последовательности $\{\varepsilon_l\}$ положительных чисел, $\{u_l(x, y, t)\}$ решений краевых задач (1) $_{\varepsilon_l}$, (2)–(4), (12) и функция $u(x, y, t)$ такие, что при $l \rightarrow \infty$ имеет место числовая сходимость $\varepsilon_l \rightarrow 0$, а также слабые в пространстве $L_2(Q)$ сходимости

$$\varepsilon_l [u_{l_{tt}}(x, y, t) + (-1)^p \Delta_x^p u_{lt}(x, y, t) + Bu_{lt}(x, y, t)] \rightarrow 0,$$

$$u_l(x, y, t) \rightarrow u(x, y, t), \quad u_{lt}(x, y, t) \rightarrow u_t(x, y, t),$$

$$u_{lx_{kt}}(x, y, t) \rightarrow u_{x_{kt}}(x, y, t), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\Delta_x^p u_l(x, y, t) \rightarrow \Delta_x^p u(x, y, t), \quad u_{ly_i}(x, y, t) \rightarrow u_{y_i}(x, y, t), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$D_x^\alpha u_{ly_i}(x, y, t) \rightarrow D_x^\alpha u_{y_i}(x, y, t), \quad |\alpha| \leq p, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$Bu_l(x, y, t) \rightarrow Bu(x, y, t).$$

Из этих сходимостей и выполнимости для функций $u_l(x, y, t)$ условий (2)–(4) следует, что предельная функция $u(x, y, t)$ будет решением краевой задачи (1)–(4). Принадлежность функции $u(x, y, t)$ пространству $V(Q)$ очевидным образом вытекает из известных оценок решений эллиптических уравнений.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (5)–(7), (10) и (11), а также условия

$$\alpha_1(x, t) \geq \bar{\alpha}_1 > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \bar{D}; \quad (8')$$

$$f(x, y, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, y, t) \in L_2(Q), \quad u_0(x, y) \in W_2^{2p, 2}(E). \quad (9')$$

Тогда краевая задача (1)–(4) имеет решение $u(x, y, t)$, принадлежащее пространству $V(Q)$ и такое, что обобщенная производная $u_{tt}(x, y, t)$ существует и принадлежит пространству $L_2(Q)$.

Доказательство проводится почти аналогично доказательству теоремы 1 — отличие лишь в том, что в интегральных равенствах, с помощью которых получены оценки (13) и (14), в интегралах с функцией $f(x, y, t)$ выполнять интегрирование по частям не нужно.

Приведем некоторые комментарии к изложенному выше.

1. Уравнение (1) в случае $n = m = 1, p = 2$ соответствует линейной модели уравнения Кадомцева — Петвиашвили-I малых возмущений уединенных волн [4]. Отметим, что для уравнений Кадомцева — Петвиашвили ранее изучалась разрешимость задачи Коши или краевых задач в полуплоскости или в полуполосе (данные задачи изучались как для уравнения Кадомцева — Петвиашвили-I, так и для уравнения Кадомцева — Петвиашвили-II, линейная модель которых имеет вид $Au_t + \Delta^2 u + Bu = f(x, y, t)$). Краевые же задачи в ограниченной области изучались лишь для линейной модели Кадомцева — Петвиашвили-II [5], краевые задачи типа задачи (1)–(4) для уравнений Кадомцева — Петвиашвили-I, линейных или нелинейных, ранее не изучались.

2. Уравнение (1) в случае $n = 1, p = 1$ соответствует линейной модели уравнения Линя — Рейснера — Цзяня, возникающего в трансзвуковой газовой динамике [10]. Краевые задачи для таких уравнений в некоторых специальных случаях изучались в [11, 12].

3. Граничные условия (2) и (3) в краевой задаче для уравнения (1) можно заменить некоторыми другими условиями — именно, условиями, порождающими корректные краевые задачи для эллиптических операторов порядков $2p$ и 2 соответственно. Например, вместо условий (2) можно задавать условия

$$\Delta^k u(x, y, t)|_{x \in \Gamma, y \in G, t \in (0, T)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p - 1,$$

вместо условия (3) — условие

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial \nu} \Big|_{x \in \Omega, y \in G, t \in (0, T)} = 0.$$

Доказательство разрешимости соответствующих краевых задач для уравнения (1) проводится аналогично доказательству теорем 1 и 2.

4. В уравнении (1) коэффициенты α^k , $k = 1, \dots, m$, α_0 могут зависеть от переменных y_1, \dots, y_m , коэффициенты b^{ij} , $i, j = 1, \dots, m$, b_0 вполне могут зависеть от переменных x_1, \dots, x_n , t . Соответствующие условия будут отличаться от условий теорем 1 и 2 лишь большей громоздкостью. Далее, оператор Δ_x^p в уравнении (1) можно заменить общим эллиптическим оператором порядка $2p$, действующим по переменным x_1, \dots, x_n , оператор B — общим эллиптическим оператором порядка $2q$, $q \in \mathbb{Z}_+$, действующим по переменным y_1, \dots, y_m . Соответствующие граничные условия и условия на коэффициенты легко указать, исходя из идей доказательства теорем 1 и 2 (см. также п. 2 комментариев).

5. В случае $p = 1$ цилиндрическую область E пространства \mathbb{R}^{n+m} можно заменить областью произвольной геометрии с гладкой границей.

6. Вопрос о разрешимости (локальной или глобальной) тех или иных краевых задач в ограниченной области для уравнения Кадомцева — Петвиашвили-I (нелинейных) будет рассмотрен позднее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
2. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М: Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
4. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих средах // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 4. С. 753–756.
5. Takaoka H., Tzvetkov N. On the local regularity of the Kadomtsev–Petviashvili-II equation // Int. Math. Res. Notices. 2001. V. 2. P. 77–114.
6. Мамонтов Е. В. Об уравнениях малых возмущений в нестационарном околозвуковом потоке газа // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1987. Вып. 83. С. 139–143.
7. Ларькин Н. А. Разрешимость краевой задачи для нестационарного ВТ-уравнения // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1980. Вып. 46. С. 71–80.

8. Ларькин Н. А. О линеаризованном уравнении нестационарной газовой динамики. Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. С. 107–118.
9. Molinet L., Saut J.-C., Tzvetkov N. Well-posedness and ill-posedness results for the Kadomtsev–Petviashvili-I equation // Duke Math. J. 2002. V. 115. P. 353–384.
10. Molinet L., Saut J.-C., Tzvetkov N. Global well-posedness for the KP-I equation // Math Ann. 2002. V. 324. P. 255–275.
11. Colliander I., Kenig C., Staffilani G. Low regularity solutions for the Kadomtsev–Petviashvili-I equation // Geom. Funct. Anal. 2003. V. 13. P. 737–794.
12. Абылкаиров У. У. Разрешимость краевой задачи для линейного уравнения Кадомцева — Петвиашвили. Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Сб. трудов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. С. 3–6.
13. Кожанов А. И. О постановке и разрешимости краевой задачи для одного класса уравнений, не разрешенных относительно временной производной. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1987. С. 84–98.

г. Новосибирск

1 апреля 2013 г.

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО
СЕМЕЙСТВА УРАВНЕНИЙ ПЕЛЛЯ

А. А. Коробов

Введение

В статье доказывается следующий результат.

Теорема. Пусть k, m — нечетные натуральные числа, $k > 1$. Если $0 < t < 2\sqrt{k^2m^2 - 4m}$, $t \in \mathbb{N}$ и уравнение $x^2 - y^2(k^2m^2 - 4m) = 4t$ имеет такое решение (x, y) в натуральных числах, что числа x и y взаимно простые, то либо $t = 1$, либо $t = m$, либо $t = km + m + 1$.

Этот результат обобщает основную теорему статьи [1].

Следствие 1. Пусть k — нечетное натуральное число, $k > 1$. Если $t \in \mathbb{N}$, $0 < t < 2\sqrt{k^2 - 4}$ и уравнение $x^2 - y^2(k^2 - 4) = 4t$ имеет такое решение (x, y) в натуральных числах, что числа x и y взаимно простые, то либо $t = 1$, либо $t = k + 2$.

Пользуясь методом статьи [1], можно вывести еще другое следствие из теоремы.

Следствие 2. Пусть a, b — положительные целые числа такие, что $k = (a^2 + b^2)/(ab + 1)$ тоже целое, тогда k является квадратом натурального числа.

Последнее следствие было предложено в качестве задачи на Международной математической олимпиаде 1988 г.

В статье [1] введено понятие промежуточной дроби для данной непрерывной дроби, обобщающее понятие подходящей дроби. Доказательство основного результата получено на основании исследования свойств этого нового понятия.

© 2013 Коробов А. А.

Предварительные определения и результаты

Пусть a, b — произвольные целые неотрицательные числа, d — натуральное число, не являющееся квадратом целого числа. Обозначим числитель и знаменатель i -й подходящей дроби к $\alpha = \frac{1}{2}(a + \sqrt{d} \cdot b)$ через P_i и Q_i соответственно. Напомним, что $P_{-1} = Q_0 = 1, Q_{-1} = 0$. Обозначим

$$\text{Norm}(\alpha) = \frac{a^2}{4} - \frac{db^2}{4}, \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{2}(a - \sqrt{d} \cdot b).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\alpha = \langle a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$. Промежуточной дробью для α называется дробь $\frac{p}{q}$, где $p = mP_n + P_{n-1}, q = mQ_n + Q_{n-1}, 1 \leq m \leq a_{n+1}$.

Предложение [1] Пусть иррациональное число $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ и рациональное число $\frac{r}{s}$ ($(r, s) = 1$) с условием $s \geq \max\{2, Q_1\}$ таковы, что $|\alpha - \frac{r}{s}| < \frac{2}{s^2}$. Пусть $R_k = P_k + 2P_{k-1}, S_k = Q_k + 2Q_{k-1}, U_k = 2P_k - P_{k-1}, V_k = 2Q_k - Q_{k-1}$. Тогда существуют натуральные числа n и m такие, что либо

(1) $r = P_n, s = Q_n;$

либо

(2) $r = mP_n + P_{n-1}, s = mQ_n + Q_{n-1};$

либо

(3) $a_{n+1} = 1, r = R_n, s = S_n;$

либо

(4) $r = U_n, s = V_n.$

Лемма 1. Пусть k, m — нечетные натуральные числа, $k > 1$. Тогда квадратичная иррациональность $\frac{1 + \sqrt{k^2 m^2 - 4m}}{2}$ совпадает с непрерывной дробью $\langle \frac{km-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, km-2} \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем квадратичную иррациональность α , совпадающую с указанной непрерывной дробью. Обозначим числитель и знаменатель i -й подходящей дроби к α через P_i и Q_i соответственно. Ясно, что $[\alpha] = \frac{km-1}{2}$. Обозначим $l = km, \beta = \langle \overline{1, k-2, 1, km-2} \rangle$. Тогда $\beta = \frac{(kl-k-1)\beta+k}{(kl-k-l)\beta+k-1}$. Решая квадратное уравнение относительно β ,

найдем $\beta = \frac{l-2+\sqrt{l^2-4m}}{2(l-m-1)}$. Тогда

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\beta} = \frac{l-1}{2} - \frac{l-2}{2} + \frac{\sqrt{l^2-4m}}{2} = \frac{1 + \sqrt{k^2m^2 - 4m}}{2}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы

Обозначим $l = km$. Пусть (x, y) — решение уравнения из формулировки теоремы. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+y}{2} + \frac{-1 + \sqrt{l^2 - 4m}}{2} y \right) \left(\frac{x+y}{2} - \frac{1 + \sqrt{l^2 - 4m}}{2} y \right) \\ = \frac{x^2}{4} - \frac{(l^2 - 4m)y^2}{4} = t. \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{x+y}{2y} > \frac{1 + \sqrt{l^2 - 4m}}{2}.$$

Поэтому

$$\left| \frac{x+y}{2y} - \alpha \right| = \frac{t}{y^2 \left(\frac{x+y}{2y} + \frac{-1 + \sqrt{l^2 - 4m}}{2} \right)} < \frac{t}{y^2 \sqrt{l^2 - 4m}} < \frac{2}{y^2}.$$

Итак, пара (x, y) натуральных чисел одинаковой четности удовлетворяет ограничению

$$\left| \frac{x+y}{2} \cdot \frac{1}{y} - \alpha \right| < \frac{2}{y^2}.$$

Пусть сначала $y \geq 2$. Так как знаменатель первой подходящей дроби к числу α равен 1, по предложению существует натуральное число n такое, что либо

$$(1) \frac{x+y}{2} = P_n, y = Q_n;$$

либо

$$(2) \frac{x+y}{2} = iP_n + P_{n-1}, y = iQ_n + Q_{n-1}, \text{ где } i \in \mathbb{N} \cap (0, a_{n+1}];$$

либо

$$(3) a_{n+1} = 1, \frac{x+y}{2} = R_n, y = S_n;$$

либо

$$(4) \frac{x+y}{2} = U_n, y = V_n.$$

Предположим, что имеет место первый, третий или четвертый случай. Непосредственно проверяется, что короткий период при разложении квадратичной иррациональности в непрерывную дробь приводит к тому, что последовательность $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ знаменателей подходящих дробей к α удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$x_{j+8} = (kl - 2)x_{j+4} - x_j, \quad (1)$$

и этому же соотношению (1) удовлетворяет последовательность числителей $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ подходящих дробей к α . Поэтому последовательности $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ также удовлетворяют рекуррентному соотношению (1).

Рассмотрим квадратичную иррациональность

$$\varepsilon = \frac{kl - 2}{2} + \frac{k}{2} \sqrt{l^2 - 4m}.$$

Непосредственно проверяется, что $\text{Norm}(\varepsilon) = 1$. Пусть a, b — произвольные целые неотрицательные числа. Из квадратного уравнения на ε выводим, что

$$(\varepsilon^{j+2} - (kl - 2)\varepsilon^{j+1} + \varepsilon^j)(a + \sqrt{l^2 - 4m} \cdot b) = 0. \quad (2)$$

Лемма 2. Для любого целого неотрицательного числа j выполнены равенства

$$\begin{aligned} (2P_0 - Q_0 + Q_0 \sqrt{l^2 - 4m})\varepsilon^j &= 2P_{4j} - Q_{4j} + Q_{4j} \sqrt{l^2 - 4m}, \\ (2P_2 - Q_2 + Q_2 \sqrt{l^2 - 4m})\varepsilon^j &= 2P_{4j+2} - Q_{4j+2} + Q_{4j+2} \sqrt{l^2 - 4m}. \end{aligned}$$

Для доказательства первого из равенств леммы 2 достаточно воспользоваться рекуррентными соотношениями (1) для последовательностей $(2P_j - Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ и $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ для преобразования правой части этого равенства, соотношением (2) для преобразования левой части и индуктивным предположением. Второе равенство доказывается аналогично.

Теперь ввиду мультипликативности нормы из леммы 2 следует, что $\text{Norm}(2P_j - Q_j + Q_j\sqrt{l^2 - 4m}) < 0$ для любого четного числа j .

Предположим, что имеет место первый случай. Тогда число n нечетно. Аналогично предыдущему доказывается следующая

Лемма 3. Для любого целого неотрицательного числа j выполнены равенства

$$(2P_{-1} - Q_{-1} + Q_{-1}\sqrt{l^2 - 4m})\varepsilon^j = 2P_{4j-1} - Q_{4j-1} + Q_{4j-1}\sqrt{l^2 - 4m},$$

$$(2P_1 - Q_1 + Q_1\sqrt{l^2 - 4m})\varepsilon^j = 2P_{4j+1} - Q_{4j+1} + Q_{4j+1}\sqrt{l^2 - 4m}.$$

Тогда $\text{Norm}(x + y\sqrt{l^2 - 4m}) \in \{4, 4m\}$, т. е. $t \in \{1, m\}$.

Можно считать, что $t \neq 1$, $t \neq m$. Выше мы показали, что тогда первый случай не реализуется. Предположим, что реализуется второй случай. Поскольку $a_{2j+1} = 1$, для четного числа n нет разницы между подходящей и промежуточной дробью. Поэтому число n нечетно. Рассмотрим многочлен

$$f(\tau) = ((2P_n - Q_n)\tau + 2P_{n-1} - Q_{n-1})^2 - (l^2 - 4m)(\tau Q_n + Q_{n-1})^2.$$

На концах промежутка $[0, a_{n+1}]$ эта функция принимает отрицательные значения по доказанному выше. Ясно, что

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} = 2((2P_n - Q_n)^2 - (l^2 - 4m)Q_n^2) \in \{8, 8m\}.$$

Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(\tau)$ положителен, поэтому $f(i) < 0$. С другой стороны,

$$f(i) = x^2 - (l^2 - 4m)y^2 = 4t.$$

Полученное противоречие говорит о том, что второй случай не реализуется.

Пусть имеет место третий случай. Тогда $a_{n+1} = 1$. Из разложения числа α в непрерывную дробь заключаем, что n четно. Аналогично предыдущему доказывается следующая

Лемма 4. Для любого целого неотрицательного числа j выполнены равенства

$$(2R_0 - S_0 + S_0\sqrt{l^2 - 4m})\varepsilon^j = 2R_{4j} - S_{4j} + S_{4j}\sqrt{l^2 - 4m},$$

$$(2R_2 - S_2 + S_2\sqrt{l^2 - 4m})\varepsilon^j = 2R_{4j+2} - S_{4j+2} + S_{4j+2}\sqrt{l^2 - 4m}$$

Тогда $\text{Norm}(x + y\sqrt{l^2 - 4m}) = 4(l + m + 1)$ и $t = l + m + 1$.

Теперь можно считать, что $t \notin \{1, m, l + m + 1\}$. Тогда согласно предыдущему имеет место последний случай.

Пусть сначала n — нечетное число. Аналогично предыдущему доказывается следующая

Лемма 5. Для любого целого неотрицательного числа j выполнены равенства

$$(2U_3 - V_3 + V_3\sqrt{l^2 - 4m})\varepsilon^j = 2U_{4j+3} - V_{4j+3} + V_{4j+3}\sqrt{l^2 - 4m},$$

$$(2U_1 - Q_1 + V_1\sqrt{l^2 - 4m})\varepsilon^j = 2U_{4j+1} - V_{4j+1} + V_{4j+1}\sqrt{l^2 - 4m}.$$

Тогда либо

$$\text{Norm}(x + y\sqrt{l^2 - 4m}) = 4(-6l + 4m + 9),$$

либо

$$\text{Norm}(x + y\sqrt{l^2 - 4m}) = 4(-6l + 9m + 4).$$

В первом случае $(6k - 4)m < 9$, т. е. $k < \frac{13}{6}$, что невозможно, а во втором случае $6k < 9 + \frac{4}{m} \leq 13$, что также невозможно.

Итак рассмотрение случая $y \geq 2$ закончено. Пусть теперь $y = 1$. Так как $x^2 - (l^2 - 4m) = 4t$, имеем $\text{Norm}((x + \sqrt{l^2 - 4m})\varepsilon) = 4t$. С другой стороны, натуральное число $\frac{(x + \sqrt{l^2 - 4m})\varepsilon - (x - \sqrt{l^2 - 4m})\bar{\varepsilon}}{2\sqrt{l^2 - 4m}}$ равно $\frac{kl-2}{2}x + \frac{k}{2}$ и строго больше единицы. Согласно предыдущему

$$\text{Norm}((x + \sqrt{l^2 - 4m})\varepsilon) \in \{4, 4m, 4(l + m + 1)\}.$$

Так как $\text{Norm}((x + \sqrt{l^2 - 4m})\varepsilon) = 4t$, теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Luca F., Osgood C.F., Walsh P. G. Diophantine approximations and a problem from the 1988 IMO // Rocky Mountain J. Math. 2006. V. 36, № 2. P. 637-648.

ЗАДАЧА РАСЧЕТА СТЕРЖНЕЙ
ОДНОМЕРНЫМ СПЛАЙНОМ ПЯТОЙ
СТЕПЕНИ ДЕФЕКТА 2

В. П. Павлов, А. А. Абдрахманова,
Р. П. Абдрахманова

1. Состояние вопроса и постановка задачи

К настоящему времени достаточно подробно изучены возможности метода сплайнов пятой степени дефекта 1 для решения задачи об изгибе стержня [1, 2], описываемого дифференциальным уравнением четвертого порядка относительно функции перемещения точек оси стержня. При этом производные от функции перемещения определяют деформацию стержня и действующие в нем силовые факторы:

- первая производная от функции перемещения — угол поворота поперечного сечения;
- вторая производная определяет изгибающий момент и возникающие от него нормальные напряжения;
- третья производная характеризует поперечную силу и касательные напряжения;
- четвертая производная тесно связана с внешней распределенной нагрузкой.

При выборе функции для описания перемещения точек оси будем исходить из следующих рассуждений.

1. Внешняя распределенная нагрузка, действующая на стержень, в общем случае может иметь любой вид. Поэтому допускаем разрывы четвертых производных в узлах сплайна, что не допускается при использовании сплайнов пятой степени дефекта 1.

© 2013 Павлов В. П., Абдрахманова А. А., Абдрахманова Р. П.

2. Сосредоточенная внешняя поперечная сила является идеализированным (не реализуемым в реальных конструкциях) случаем приложения внешней силы в точке оси балки. Эта сила может быть заданной, а может быть реакцией наложенной на стержень связи в виде подвижного или неподвижного шарнира. При решении задач методами сопротивления материалов сосредоточенная сила всегда применяется. Она приводит к разрыву третьей производной функции перемещения. Применяя сплайн дефекта 2, исключим возможность разрыва третьей производной, что приведет к необходимости учета сосредоточенной внешней силы через распределенную нагрузку, действующую на малом отрезке вблизи точки приложения сосредоточенной силы. С точки зрения реальных конструкций это не приведет к потере точности расчетов, но позволит рассчитывать по общей схеме конструкции с разными нагрузками.

3. Сосредоточенная внешняя пара сил является идеализированным (не реализуемым в реальных конструкциях) случаем приложения внешней нагрузки в точке оси балки. Эта пара может быть заданной, а может быть реакцией наложенной на стержень связи в виде защемления. При решении задач методами сопротивления материалов сосредоточенная пара сил всегда применяется. Применяя сплайн дефекта 2, исключим возможность разрыва второй производной, что приведет к необходимости учета сосредоточенной внешней пары сил через распределенную нагрузку, действующую на малом отрезке вблизи точки приложения сосредоточенной пары сил. С точки зрения реальных конструкций это не приведет к потере точности расчетов, но позволит рассчитывать по общей схеме конструкции с разными нагрузками.

Таким образом, ставя задачу расчета стержней методом сплайна пятой степени дефекта 2, необходимо помнить о наших допущениях и при анализе результатов расчетов понимать, как учитываются сосредоточенные внешние силы и пары сил. Были поставлены и решены следующие задачи:

- сформулированы теоретические основы метода сплайна пятой

степени дефекта 2;

- разработан алгоритм применения сплайна пятой степени дефекта 2 для численного решения задачи об изгибе упругого стержня.

2. Расчетные соотношения для одномерного сплайна пятой степени дефекта 2

Рассмотрим алгоритм построения сплайна пятой степени дефекта 2, положив в основу полиномиальные сплайны [3]. Для этих сплайнов на отрезке $[a, b]$ зададим разбиение

$$\Delta : a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b.$$

Через $C^k[a, b]$ обозначим множество k раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, а через $C^{-1}[a, b]$ — множество кусочно непрерывных функций с разрывами первого рода.

Затем, следуя [3], введем в рассмотрение функцию $\mathbf{W}_{n,\nu}(x)$, которую будем называть *сплайном степени n дефекта ν* (n и ν — целые числа, $0 \leq \nu \leq n$) с узлами на сетке Δ , если на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ функция $\mathbf{W}_{n,\nu}(x)$ является многочленом степени n , т. е.

$$\mathbf{W}_{n,\nu}(x) = \sum_{\alpha=0}^n a_{\alpha}^{(i)}(x - x_i)^{\alpha}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.1)$$

при этом $\mathbf{W}_{n,\nu}(x) \in C^{n-\nu}[a, b]$.

Сплайн $\mathbf{W}_{n,\nu}(x)$ однозначно определяется коэффициентами $a_{\alpha}^{(i)}$, общее количество которых равно $N_{\alpha} = (n+1)(N-1)$.

Введем обозначения для производных от сплайн-функции:

$$\mathbf{W}_{n,\nu}^{(s)}(x) = \frac{d^s \mathbf{W}_{n,\nu}(x)}{dx^s} = \sum_{\alpha=s}^n \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_{\alpha}^{(i)}(x - x_i)^{\alpha-s}, \quad (2.2)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad s = 0, \dots, n.$$

Рассмотрим узлы с координатами x_j , $j = 2, \dots, N-1$, являющиеся местом «склейки» соседних многочленов. Условия непрерывности

сплайна (2.1) в этих точках задают $N_{\text{огр}} = (n - \nu + 1)(N - 2)$ ограничительных линейных равенств

$$\mathbf{W}_{n,\nu}^{(s)}(x_j - 0) = \mathbf{W}_{n,\nu}^{(s)}(x_j + 0), \quad s = 0, \dots, n - \nu, \quad j = 2, \dots, N - 1.$$

Таким образом, число степеней свободы сплайна $\mathbf{W}_{n,\nu}(x)$ равно

$$N_s = N_\alpha - N_{\text{огр}} = (n + 1) + \nu(N - 2).$$

Рассмотрим на сетке Δ сплайн-функцию $\mathbf{W}_{5,2}(x)$ степени 5 дефекта 2, имеющую $N_s = 2N + 2$ степеней свободы. В пределах каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ функция $\mathbf{W}_{5,2}(x)$ является многочленом пятой степени

$$\mathbf{W}_{5,2}(x) = \sum_{\alpha=0}^5 a_\alpha^{(i)} (x - x_i)^\alpha, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Удобным является задание сплайна $\mathbf{W}_{5,2}(x)$ совокупностью коэффициентов его многочленов $a_\alpha^{(i)}$, $\alpha = 0, \dots, 5$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, которые сведем в вектор-столбцы

$$\mathbf{A}_\alpha = (a_\alpha^{(i)})^T, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad \alpha = 0, \dots, 5.$$

Общее количество коэффициентов $a_\alpha^{(i)}$ равно $N_\alpha = 6(N - 1)$, что на $4(N - 2)$ превышает число степеней свободы сплайна.

Ввиду того, что в узлах сплайна имеет место непрерывность функции и некоторых ее производных, между коэффициентами вектор-столбцов \mathbf{A}_α есть взаимосвязи, т. е. некоторая их избыточность.

В связи с этим для уменьшения числа параметров, определяющих сплайн, введем в рассмотрение вектор-столбец $\mathbf{P} = (P_k)^T$, $k = 1, 2, \dots, 3N$, где

$$\begin{cases} P_j = \mathbf{W}_{5,2}^{(0)}(x_i), & j = 3i - 2, \\ P_k = \mathbf{W}_{5,2}^{(1)}(x_i), & k = 3i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N. \\ P_m = \mathbf{W}_{5,2}^{(2)}(x_i), & m = 3i, \end{cases} \quad (2.3)$$

Вектор \mathbf{P} имеет на $N - 2$ больше параметров, чем степеней свободы сплайна. Таким образом, и вектор \mathbf{P} обладает избыточностью. Для ее

полного устранения введем в рассмотрение вектор-столбец \mathbf{Q} с размерностью $2N + 2$, равной степени свободы сплайна

$$\mathbf{Q} = (q_k)^T, \quad k = 1, 2, \dots, 2N + 2,$$

компоненты которого

$$\begin{cases} q_1 = \mathbf{W}_{5,2}^{(2)}(x_1), \\ q_k = \mathbf{W}_{5,2}^{(0)}(x_i), \\ q_{k+1} = \mathbf{W}_{5,2}^{(1)}(x_i), \\ q_{2N+2} = \mathbf{W}_{5,2}^{(2)}(x_N) \end{cases} \quad k = 2i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

независимы.

Векторы \mathbf{A}_α , $\alpha = 0, \dots, 5$, коэффициентов сплайна зависят от вектора \mathbf{P} .

Для узловых точек сплайна введем обозначения

$$\begin{cases} f_i = \mathbf{W}_{5,2}^{(0)}(x_i), \\ f_i^{(1)} = \mathbf{W}_{5,2}^{(1)}(x_i), \\ f_i^{(2)} = \mathbf{W}_{5,2}^{(2)}(x_i), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.4)$$

Задание сплайна $\mathbf{W}_{5,2}(x)$ вектором \mathbf{P} само по себе еще не обеспечивает условий «гладкости» третьей производной:

$$\mathbf{W}_{5,2}^{(3)}(x_i - 0) = \mathbf{W}_{5,2}^{(3)}(x_i + 0), \quad i = 2, \dots, N - 1. \quad (2.5)$$

Для выполнения (2.5) на основе (2.2) и (2.3) запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{5,2}^{(3)}(x_i - 0) &= -\frac{60}{h_{i-1}^3} f_{i-1} + \frac{60}{h_{i-1}^3} f_i - \frac{24}{h_{i-1}^2} f_{i-1}^{(1)} - \frac{36}{h_{i-1}^2} f_i^{(1)} \\ &\quad - \frac{3}{h_{i-1}} f_{i-1}^{(2)} + \frac{9}{h_{i-1}} f_i^{(2)}, \\ \mathbf{W}_{5,2}^{(3)}(x_i + 0) &= -\frac{60}{h_i^3} f_i + \frac{60}{h_i^3} f_{i+1} - \frac{36}{h_i^2} f_i^{(1)} - \frac{24}{h_i^2} f_{i+1}^{(1)} \\ &\quad - \frac{9}{h_i} f_i^{(2)} + \frac{3}{h_i} f_{i+1}^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$i = 2, \dots, N - 1.$$

Подставив (2.6) в (2.5), получаем

$$\begin{aligned}
& -\frac{60}{h_{i-1}^3}f_{i-1} + \left(\frac{60}{h_{i-1}^3} + \frac{60}{h_i^3}\right)f_i - \frac{60}{h_i^3}f_{i+1} - \frac{24}{h_{i-1}^2}f_{i-1}^{(1)} \\
& + \left(-\frac{36}{h_{i-1}^2} + \frac{36}{h_i^2}\right)f_i^{(1)} + \frac{24}{h_i^2}f_{i+1}^{(1)} - \frac{3}{h_{i-1}}f_{i-1}^{(2)} \\
& + \left(\frac{9}{h_{i-1}} + \frac{9}{h_i}\right)f_i^{(2)} - \frac{3}{h_i}f_{i+1}^{(2)} = 0, \tag{2.7} \\
& i = 2, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Систему из $N-2$ линейных алгебраических уравнений (2.7) представим в матричной форме:

$$\mathbf{G}\mathbf{P} = 0, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{G} = \|g_{i,j}\|$, $i = 1, \dots, N-2$, $j = 1, \dots, 3N$. Таким образом, задавая сплайн вектором \mathbf{P} с $3N$ компонентами, необходимо учитывать $N-2$ ограничений вида (2.8).

С целью уменьшения числа параметров, определяющих сплайн, добавим к системе (2.7) два очевидных тождества

$$f_1^{(2)} = f_1^{(2)}, \quad f_N^{(2)} = f_N^{(2)}$$

и, представив ее в виде системы из $N+2$ линейных алгебраических уравнений, запишем в матричной форме:

$$\mathbf{B}\Omega = \mathbf{D}\mathbf{Q},$$

где коэффициенты системы (2.7) объединены в матрицы

$$\mathbf{B} = \|b_{i,j}\|, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{D} = \|d_{i,j}\|, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, 2N+2,$$

а вектор $\Omega = (\omega_k)^T$, $k = 1, \dots, N$, имеет компоненты $\omega_k = f_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, N$.

Определим вектор Ω :

$$\Omega = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{Q}. \tag{2.9}$$

Согласно (2.9) введем в рассмотрение матрицу

$$\mathbf{C} = \|C_{i,j}\|, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, 2N + 2,$$

определяемую матричным выражением $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}$. Тогда вектор Ω определится выражением

$$\Omega = \mathbf{C}\mathbf{Q}.$$

В соответствии с формулами (2.4) на основе равенства (2.9) появляется возможность выразить векторы \mathbf{A}_α через \mathbf{Q} посредством матричных равенств $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{C}_\alpha\mathbf{Q}$, $\alpha = 0, \dots, 5$. Здесь введены матрицы

$$\mathbf{C}_\alpha = \|C_{i,j}^{(\alpha)}\|, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, 2N + 2, \quad \alpha = 0, \dots, 5.$$

Построив матричные выражения, определяющие векторы \mathbf{A}_α , $\alpha = 0, \dots, 5$, через векторы \mathbf{P} и \mathbf{Q} , выведем формулы для нахождения значений сплайна и его производных в точке с координатой x .

В соответствии с (2.2) вначале установим отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, содержащий рассматриваемую точку с координатой x .

Значение индекса i , обеспечивающего условие $x \in [x_i, x_{i+1}]$ при разбиении Δ , определим по формуле $i = \mathbf{J}(\Delta, x)$, где

$$\mathbf{J}(\Delta, x) = \sum_{i=1}^{N-1} \text{sign}(x - x_i), \quad x_1 \leq x \leq x_N.$$

С учетом (2.2) запишем

$$\mathbf{W}_{5,2}^{(s)}(x) = \sum_{\alpha=s}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(i)} (x - x_i)^{\alpha-s}, \quad (2.10)$$

$$x \in [x_1, x_N], \quad i = \mathbf{J}(\Delta, x), \quad s = 0, \dots, 5.$$

Таким образом, на основе коэффициентов $a_\alpha^{(i)}$, $i = 1, \dots, N - 1$, $\alpha = 0, \dots, 5$, локальных алгебраических многочленов сплайна соотношения (2.10) определяют значения сплайна и его производных до пятого порядка включительно в произвольной точке с координатой x из заданной области определения $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

3. Дискретный аналог уравнения равновесия

Дифференциальное уравнение равновесия [4] запишем в развернутом виде:

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} + 2 \frac{d(EI_y)}{dx} \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{d^2(EI_y)}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} = q_z(x). \quad (3.1)$$

При замене искомой функции перемещения осевой линии $w = w(x)$ ее сплайновой аппроксимацией $\mathbf{W}_{5,2}(x)$ определяется поперечная нагрузка $\tilde{q}_z = \tilde{q}_z(x)$, при которой сплайн $\mathbf{W}_{5,2}(x)$ является точным решением дифференциального уравнения (3.1):

$$\tilde{q}_z(x) = EI_y \frac{d^4 \mathbf{W}_{5,2}(x)}{dx^4} + 2 \frac{d(EI_y)}{dx} \frac{d^3 \mathbf{W}_{5,2}(x)}{dx^3} + \frac{d^2(EI_y)}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{W}_{5,2}(x)}{dx^2}.$$

При построении дискретного аналога дифференциального уравнения (3.1) воспользуемся известным из теоретической механики принципом Пуансо [5]: *силы, произвольно расположенные в пространстве, можно привести к одной силе, равной их главному вектору и приложенной в центре приведения, и к паре сил с моментом, равным главному моменту всех сил относительно центра приведения.*

Базируясь на принципе Пуансо, для определения сплайн-функции $\mathbf{W}_{5,2}(x)$, близкой к искомому решению $w = w(x)$, использовали условие эквивалентности внешних действующих на балку нагрузок, заключающееся в том, что в пределах каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ точные $q_z = q_z(x)$ и приближенные $\tilde{q}_z = \tilde{q}_z(x)$ распределенные нагрузки приводятся к центру приведения, имеющему координату x_i . В итоге определяются главный вектор $R_z^{(i)}$ и главный момент $M_y^{(i)}$ для заданной внешней нагрузки $q_z = q_z(x)$ и главный вектор $\tilde{R}_z^{(i)}$ и главный момент $\tilde{M}_y^{(i)}$ для приближенной нагрузки $\tilde{q}_z = \tilde{q}_z(x)$ для $N - 1$ узлов:

$$\begin{cases} R_z^{(i)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q_z(x) dx, \\ M_y^{(i)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q_z(x)(x - x_i) dx, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

$$\begin{cases} \widetilde{R}_z^{(i)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{q}_z(x) dx, \\ \widetilde{M}_y^{(i)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{q}_z(x)(x - x_i) dx, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.2)$$

Определить $R_z^{(i)}$ и $M_y^{(i)}$ по заданной распределенной нагрузке $q_z = q_z(x)$ можно как аналитически, так и численно с любой заданной точностью.

Рассмотрим вариант, при котором жесткость поперечного сечения EI_y является сплайном третьей степени дефекта 1 [2]:

$$E(x)I_y(x) = \mathbf{W}_{3,1}(x) = \sum_{\alpha=0}^3 b_\alpha^{(i)}(x - x_i)^\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 b_\alpha^{(i)}\xi^\alpha, \\ \xi = x - x_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Сформируем из значений $\widetilde{R}_z^{(i)}$ и $\widetilde{M}_y^{(i)}$ вектор-столбцы $\widetilde{\mathbf{R}}_z$ и $\widetilde{\mathbf{M}}_y$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{R}}_z &= (\widetilde{R}_z^{(i)})^T, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \widetilde{\mathbf{M}}_y &= (\widetilde{M}_y^{(i)})^T, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение матрицы $\widetilde{\mathbf{K}}$ и $\widetilde{\mathbf{T}}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{K}} &= \|\widetilde{K}_{i,j}\|, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, 2N + 2, \\ \widetilde{\mathbf{T}} &= \|\widetilde{T}_{i,j}\|, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, 2N + 2, \end{aligned}$$

на их основе представим соотношения (3.2) в матричной форме:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{R}}_z = \widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{Q}, \\ \widetilde{\mathbf{M}}_y = \widetilde{\mathbf{T}}\mathbf{Q}. \end{cases}$$

Приравнивая главные векторы $R_z^{(i)}$ и $\widetilde{R}_z^{(i)}$ и главные моменты $M_y^{(i)}$ и $\widetilde{M}_y^{(i)}$, получаем систему из $2N - 2$ алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \widetilde{R}_z^{(i)} = R_z^{(i)}, \\ \widetilde{M}_y^{(i)} = M_y^{(i)}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.3)$$

Добавляя к системе (3.3) четыре уравнения, учитывающие краевые условия, получаем систему из $2N + 2$ алгебраических линейных уравнений, однозначно определяющую вектор \mathbf{Q} , а следовательно, саму сплайн-функцию $\mathbf{W}_{5,2}(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов В. П., Абдрахманова А. А. Расчет изгиба балок методом сплайнов // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, вып. 1. С. 98–104.
2. Павлов В. П. Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел. Уфа, Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2003.
3. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Метод сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
4. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
5. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Ч. 1. Статика. Кинематика. М.: Высш. шк., 1977.

г. Уфа

20 декабря 2012 г.

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО
КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ*)

Н. Р. Пинигина

В работах А. И. Кожанова [1–3] изучалась разрешимость начально-краевых задач для псевдопараболических уравнений

$$Au + Bu_t = f(x, t) \quad (*)$$

с эллиптико-параболическими операторами A и B второго порядка, действующими по пространственным переменным. Метод исследования в указанных работах основан на регуляризации с последующим получением априорных оценок и предельным переходом. Другой подход к исследованию уравнений (*) основан на применении преобразования Лапласа, и этот подход приводит вновь к необходимости получать априорные оценки, но уже для эллиптических уравнений с вырождением, содержащих комплексный параметр. Именно такие уравнения и будут рассмотрены ниже, и целью работы при этом будет доказательство теорем существования регулярных решений (т. е. решений, имеющих все обобщенные производные, входящие в уравнение), а также доказательство наличия необходимых для возможного обращения преобразования Лапласа априорных оценок в зависимости от параметра.

*) Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (соглашение №14.А18.21.0367).

Перейдем к содержательной части работы.

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n переменных x_1, \dots, x_n с компактной и гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ , $a^{ij}(x), b^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$ — заданные действительные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, λ — комплексное число, $f(x, \lambda)$ — заданная комплекснозначная функция, определенная при $x \in \bar{\Omega}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, A и B — дифференциальные операторы, действие которых определяется равенствами

$$Au = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + a_0(x)u, \quad Bu = \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b_0(x)u$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам, если не оговорено противное, ведется суммирование в пределах от 1 до n). Будем считать всюду далее, что операторы A и B симметричны и эллиптико-параболически:

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \quad b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad i, j = 1, \dots, n;$$

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Краевая задача. Найти функцию $u(x)$, являющуюся в области Ω решением уравнения

$$Lu \equiv Au + \lambda Bu = f(x, \lambda) \quad (1)$$

и удовлетворяющую условию

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (1) можно свести к системе уравнений

$$\begin{cases} Au_1(x) + \lambda_1 Bu_1(x) - \lambda_2 Bu_2(x) = f_1(x, \lambda), \\ Au_2(x) + \lambda_1 Bu_2(x) + \lambda_2 Bu_1(x) = f_2(x, \lambda) \end{cases} \quad (3)$$

$$(\lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda, \quad \lambda_2 = \operatorname{Im} \lambda, \quad u_1(x) = \operatorname{Re} u(x), \quad u_2(x) = \operatorname{Im} u(x),$$

$$f_1(x, \lambda) = \operatorname{Re} f(x, \lambda), \quad f_2(x) = \operatorname{Im} f(x, \lambda)),$$

и эта система в дальнейшем будет анализироваться.

Заметим, что в случае $\lambda_2 = 0$ система (3) распадается.

Ниже через $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ будем обозначать вектор внутренней нормали к границе Γ в текущей точке x .

Теорема 1. Пусть $\lambda_1 \geq 0$, оператор $A + B$ эллиптический в Ω , и пусть выполняются условия

$$a^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad b^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad a_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad b_0(x) \in C(\overline{\Omega}); \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (\exists \alpha^i(x), \beta^i(x)) \quad \alpha^i(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \beta^i(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \\ 0 \leq C_1 \alpha^i(x) \xi_i^2 \leq a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq C_2 \alpha^i(x) \xi_i^2, \\ 0 \leq C_1 \beta^i(x) \xi_i^2 \leq b^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq C_2 \beta^i(x) \xi_i^2, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \alpha^i(x) + \beta^i(x) \geq k_0 > 0 \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i = 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left(a_{x_k}^{ij}(x) b_{x_i}^{kl}(x) - \frac{1}{2} (a^{ij}(x) b_{x_i}^{kl}(x))_{x_k} - \frac{1}{2} (a_{x_k}^{ij}(x) b^{kl}(x))_{x_i} \right. \\ \left. - a^{ij}(x) b_0(x) - a_0(x) b^{kl}(x) \right) \xi_i \xi_j + ((a^{ij}(x) b_{0x_i}(x))_{x_j} \\ + (a_{0x_i}(x) b^{ij}(x))_{x_j} + a_0(x) b_0(x)) \xi_0^2 \geq \gamma_0 (\xi_i^2 + \xi_0^2), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\gamma_0 > 0, \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \overline{\Omega} \quad i, j, k, l = 1, \dots, n;$$

$$b^{ij}(x) \nu_i \nu_j = 0 \quad \forall x \in \Gamma; \quad (7)$$

$$|b_{x_k}^{ij}(x)| \leq M \sqrt{\beta^i(x)}, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i, j, k = 1, \dots, n; \quad (8)$$

$$a_0(x) \leq -\bar{a}_0 < 0, \quad b_0(x) \leq -\bar{b}_0 < 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}; \quad (9)$$

$$Af_1(x, \lambda) \in L_2(\Omega), \quad Af_2(x, \lambda) \in L_2(\Omega), \quad f_1|_{\Gamma} = 0, \quad f_2|_{\Gamma} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

Тогда задача (1), (2) имеет решение $\{u_1(x), u_2(x)\}$ такое, что $u_1(x) \in \mathbb{W}_2^2(\Omega)$, $u_2(x) \in \mathbb{W}_2^2(\Omega)$ и при этом для функций $u_1(x)$, $u_2(x)$ при $\lambda_2 \geq 1$ будут выполняться оценки

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \beta^i (u_{1x_i}^2 + u_{2x_i}^2) dx + \int_{\Omega} (u_1^2 + u_2^2) dx \leq \frac{N_1}{\lambda_2^2} \int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [(Au_1)^2 + (Au_2)^2] dx \\
& \leq \frac{N_2}{|\lambda_2|} \left[\int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx + \int_{\Omega} \{(Af_1)^2 + (Af_2)^2\} dx \right], \\
& \int_{\Omega} [(Bu_1)^2 + (Bu_2)^2] dx \leq \frac{N_2}{\lambda_2^2} \int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx, \quad (12) \\
& \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (u_{1x_i x_j}^2 + u_{2x_i x_j}^2) dx \\
& \leq \frac{N_2}{|\lambda_2|} \left[\int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx + \int_{\Omega} \{(Af_1)^2 + (Af_2)^2\} dx \right],
\end{aligned}$$

в которых числа N_1, N_2 определяются функциями $a^{ij}(x), b^{ij}(x), i, j = 1, \dots, n, a_0(x), b_0(x)$, числом λ_1 , а также областью Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом регуляризации. Пусть ε — положительное число. Рассмотрим семейство задач: найти функции $u_1(x), u_2(x)$, являющиеся решением системы уравнений

$$\begin{cases} Au_1(x) + \lambda_1 Bu_1(x) + \varepsilon Bu_1(x) - \lambda_2 Bu_2(x) = f_1(x, \lambda), \\ Au_2(x) + \lambda_1 Bu_2(x) + \varepsilon Bu_2(x) + \lambda_2 Bu_1(x) = f_2(x, \lambda) \end{cases} \quad (3_\varepsilon)$$

и удовлетворяющие условию (2).

Покажем, что задача $(3_\varepsilon), (2)$ при фиксированном ε имеет решение такое, что $u_1(x) \in \mathbb{W}_2^2(\Omega), u_2(x) \in \mathbb{W}_2^2(\Omega)$. Воспользуемся методом продолжения по параметру [4]. Пусть \varkappa — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим краевую задачу: найти решение $\{u_1(x), u_2(x)\}$ системы уравнений

$$\begin{cases} Au_1(x) + \lambda_1 Bu_1(x) + \varepsilon Bu_1(x) - \varkappa \lambda_2 Bu_2(x) = f_1(x, \lambda), \\ Au_2(x) + \lambda_1 Bu_2(x) + \varepsilon Bu_2(x) + \varkappa \lambda_2 Bu_1(x) = f_2(x, \lambda), \end{cases} \quad (3_{\varepsilon, \varkappa})$$

удовлетворяющее условию (2). Как известно [4], для разрешимости задачи $(3_{\varepsilon, \varkappa}), (2)$ при всех \varkappa достаточно установить разрешимость в $\mathbb{W}_2^2(\Omega)$ задачи $(3_{\varepsilon, 0}), (2)$ и доказать наличие априорных оценок всевозможных решений задачи $(3_{\varepsilon, \varkappa}), (2)$ в пространстве $\mathbb{W}_2^2(\Omega)$.

Заметим, что при $\lambda_1 > 0$ оператор $A + \lambda_1 B$ эллиптичен, но его постоянная эллиптичности, вообще говоря, будет определяться числом λ_1 ; эллиптическим будет и оператор $A + \varepsilon B$. Из эллиптичности оператора $A + \varepsilon B$ очевидным образом следует разрешимость задачи $(\mathfrak{Z}_{\varepsilon,0})$, (2) в пространстве $\mathbb{W}_2^2(\Omega)$ [5]. Покажем, что имеют место необходимые оценки.

Умножим первое уравнение системы $(\mathfrak{Z}_{\varepsilon,\varkappa})$ на $u_1(x)$, второе уравнение — на $u_2(x)$ и сложим. Интегрируя в полученном равенстве по частям и используя неравенство Юнга, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a^{ij}(x)(u_{1x_j}u_{1x_i} + u_{2x_j}u_{2x_i}) dx \\ & + (\lambda_1 + \varepsilon) \int_{\Omega} b^{kl}(x)(u_{1x_l}u_{1x_k} + u_{2x_l}u_{2x_k}) dx - \int_{\Omega} [a_0(x) + b_0(x)](u_1^2 + u_2^2) dx \\ & \leq \frac{\delta^2}{2} \int_{\Omega} (u_1^2 + u_2^2) dx + \frac{1}{2\delta^2} \int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx \end{aligned}$$

($\delta > 0$ — произвольное положительное число). Из этого неравенства при выполнении условий (5), (8) и (9) получаем первую априорную оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \alpha^i(x)(u_{1x_i}^2 + u_{2x_i}^2) dx + (\lambda_1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \beta^i(x)(u_{1x_i}^2 + u_{2x_i}^2) dx \\ & + \int_{\Omega} (u_1^2 + u_2^2) dx \leq \frac{1}{2(a_0 + b_0)} \int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx. \quad (13) \end{aligned}$$

Для получения следующей оценки умножим первое уравнение системы $(\mathfrak{Z}_{\varepsilon,\varkappa})$ на $(A + B)u_1(x)$, а второе уравнение — на $(A + B)u_2(x)$ и проинтегрируем. От полученного равенства, учитывая условие (6), нетрудно перейти к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(Au_1)^2 + (Au_2)^2] dx + (\lambda_1 + \varepsilon) \int_{\Omega} [(Bu_1)^2 + (Bu_2)^2] dx \\ & \leq \int_{\Omega} [f_1(A + B)u_1 + f_2(A + B)u_2] dx. \quad (14) \end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга, получим оценку

$$\int_{\Omega} [(Au_1)^2 + (Au_2)^2] dx + \int_{\Omega} [(Bu_1)^2 + (Bu_2)^2] dx \leq C(\delta_1) \int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx, \quad (15)$$

где δ_1 — произвольная положительная постоянная, число $C(\delta_1)$ определяется коэффициентами операторов A , B и числом δ_1 . Из оценки (15) и второго основного неравенства для эллиптических операторов [6] следует оценка

$$\|u_1\|_{\mathbb{W}_2^2(\Omega)} + \|u_2\|_{\mathbb{W}_2^2(\Omega)} \leq C_1 \int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx, \quad (16)$$

в которой число C_1 определяется лишь коэффициентами операторов A , B и числом ε .

Из теоремы о методе продолжения по параметру и оценок (15), (16) получим, что краевая задача $(3_{\varepsilon, \varkappa})$, (2) имеет решение при $\varkappa \in [0, 1]$ такое, что $u_1(x) \in \mathbb{W}_2^2(\Omega)$ и $u_2(x) \in \mathbb{W}_2^2(\Omega)$.

Перейдем к получению следующих оценок. Пусть $\lambda_2 \neq 0$. Умножим первое уравнение системы (3_{ε}) на $-\frac{1}{\lambda_2}u_2(x)$, второе — на $\frac{1}{\lambda_2}u_1(x)$, сложим и проинтегрируем по области Ω . Применяя неравенство Юнга и условия теоремы, нетрудно получить неравенство

$$\int_{\Omega} b^{ij}(u_{1x_j}u_{1x_i} + u_{2x_j}u_{2x_i}) dx + \bar{b}_0 \int_{\Omega} (u_1^2 + u_2^2) dx \leq \frac{\delta^2}{2} \int_{\Omega} (u_1^2 + u_2^2) dx + \frac{1}{2\delta^2|\lambda_2|^2} \int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx.$$

При $\delta = \sqrt{\bar{b}_0}$ получим следующую оценку:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \beta^i (u_{1x_i}^2 + u_{2x_i}^2) dx + \int_{\Omega} (u_1^2 + u_2^2) dx \leq \frac{1}{2\bar{b}_0\lambda_2^2} \int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx. \quad (17)$$

Умножим первое уравнение системы (3_{ε}) на $Au_1(x)$, второе уравне-

ние — на $Au_2(x)$, сложим и проинтегрируем по Ω . Получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(Au_1)^2 + (Au_2)^2] dx + (\varepsilon + \lambda_1) \int_{\Omega} (Au_1 \cdot Bu_1 + Au_2 \cdot Bu_2) dx \\ = \int_{\Omega} [f_1 Au_1 + f_2 Au_2] dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Вследствие условия (6) выполняется

$$\int_{\Omega} (Au_1 \cdot Bu_1 + Au_2 \cdot Bu_2) dx \geq 0$$

(см. [7]). В правой части (18) дважды интегрируем по частям. В силу условия (8) все граничные интегралы, появляющиеся при двукратном интегрировании, будут равны нулю. Используя оценку (17) и неравенство Гёльдера, придем к оценке

$$\int_{\Omega} [(Au_1)^2 + (Au_2)^2] dx \leq \frac{N_2}{|\lambda_2|} \left[\int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx + \int_{\Omega} \{(Af_1)^2 + (Af_2)^2\} dx \right]. \quad (19)$$

Умножим первое уравнение системы (3_ε) на $-\frac{1}{\lambda_2} Bu_2$, второе — на $\frac{1}{\lambda_2} Bu_1$, сложим и проинтегрируем по области Ω . Получим равенство

$$\int_{\Omega} [(Bu_1)^2 + (Bu_2)^2] dx = \frac{1}{|\lambda_2|} \int_{\Omega} (f_1 Bu_2 - f_2 Bu_1) dx.$$

Применяя в правой части неравенство Юнга, нетрудно прийти к оценке

$$\int_{\Omega} [(Bu_1)^2 + (Bu_2)^2] dx \leq \frac{1}{\lambda_2^2} \int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx. \quad (20)$$

Оценки (19), (20), условие эллиптичности оператора $A + B$ и второе основное неравенство для эллиптических операторов [6] дают оценку

$$\|u_1\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_2\|_{W_2^2(\Omega)} \leq \frac{N_2}{|\lambda_2|} \left[\int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx + \int_{\Omega} \{(Af_1)^2 + (Af_2)^2\} dx \right], \quad (21)$$

в которой постоянная N_2 определяется коэффициентами операторов A и B , а также областью Ω . Из оценки (21) следует, что в семействе задач (3_ε) , (2) можно перейти к пределу и тем самым получить решение системы (3), а далее уравнения (1) из пространства $\mathbb{W}_2^2(\Omega)$. Все полученные выше оценки сохраняются.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $0 < |\lambda_2| \leq 1$ имеет место оценка

$$\|u_1\|_{\mathbb{W}_2^2(\Omega)} + \|u_2\|_{\mathbb{W}_2^2(\Omega)} \leq \frac{N_3}{\lambda_2^2} \int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx,$$

в которой постоянная N_3 определяется функциями $a^{ij}(x), b^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_0(x), b_0(x)$ и областью Ω . Доказательство проводится аналогично случаю $\lambda_2 \geq 1$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (4)–(6), (9), (10) теоремы 1 и существуют $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ такие, что

$$\alpha^i(x) \geq \alpha_0 > 0, \quad \beta^i(x) \geq \beta_0 > 0, \quad x \in \Gamma, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7')$$

Тогда существует решение $u(x)$ уравнения (1), принадлежащее $\mathbb{W}_2^2(\Omega)$ и удовлетворяющее условию (2), при этом для функций $u_1(x)$, $u_2(x)$ будут выполняться оценки (11) и

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (u_{1x_i x_j}^2 + u_{2x_i x_j}^2) dx \\ \leq \frac{N_4}{\lambda_2^2} \int_{\Omega} [f_1^2 + f_2^2] dx + \frac{N_5}{|\lambda_2|} \int_{\Omega} [(Af_1)^2 + (Af_2)^2] dx, \quad (12') \end{aligned}$$

в которой числа N_4, N_5 определяются функциями $a^{ij}(x), b^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_0(x), b_0(x)$, числом λ_1 , а также областью Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вновь рассмотрим задачу (3_ε) , (2). Для ее решения также будет справедлива оценка (17). Рассмотрим равенство

(18). После интегрирования по частям получим

$$\int_{\Omega} [(Au_1)^2 + (Au_2)^2] dx + (\varepsilon + \lambda_1) \int_{\Omega} a^{ij} b^{kl} (u_{1x_j x_k} u_{1x_l x_i} + u_{2x_j x_k} u_{2x_l x_i}) dx + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = \int_{\Omega} [f_1 Au_1 + f_2 Au_2] dx + I_{1\Gamma} + I_{2\Gamma}, \quad (22)$$

где

$$I_1 = -\frac{\varepsilon + \lambda_1}{2} \int_{\Omega} (a_{x_k}^{ij} b^{kl})_{x_i} (u_{1x_l} u_{1x_j} + u_{2x_l} u_{2x_j}) dx,$$

$$I_2 = -\frac{\varepsilon + \lambda_1}{2} \int_{\Omega} (a^{ij} b_{x_i}^{kl})_{x_k} (u_{1x_l} u_{1x_j} + u_{2x_l} u_{2x_j}) dx,$$

$$I_3 = (\varepsilon + \lambda_1) \int_{\Omega} a_{x_k}^{ij} b_{x_i}^{kl} (u_{1x_l} u_{1x_j} + u_{2x_l} u_{2x_j}) dx,$$

$$I_4 = -(\varepsilon + \lambda_1) \int_{\Omega} \{a^{ij} b_0 (u_{1x_i} u_{1x_j} + u_{2x_i} u_{2x_j}) - (a^{ij} b_{0x_i})_{x_j} (u_1^2 + u_2^2)\} dx,$$

$$I_5 = -(\varepsilon + \lambda_1) \int_{\Omega} \{b^{ij} a_0 (u_{1x_i} u_{1x_j} + u_{2x_i} u_{2x_j}) - (b^{ij} a_{0x_i})_{x_j} (u_1^2 + u_2^2)\} dx,$$

$$I_6 = (\varepsilon + \lambda_1) \int_{\Omega} a_0(x) b_0(x) (u_1^2 + u_2^2) dx,$$

$$I_{1\Gamma} = (\varepsilon + \lambda_1) \int_{\Gamma} \left[a^{ij} (u_{1x_j} + u_{2x_j}) \frac{\partial}{\partial x_k} (b^{kl} (u_{1x_l} + u_{2x_l})) \nu_i - a^{ij} (u_{1x_j} + u_{2x_j}) \frac{\partial}{\partial x_k} (b^{kl} (u_{1x_l} + u_{2x_l})) \nu_k \right] dS,$$

$$I_{2\Gamma} = \frac{\varepsilon + \lambda_1}{2} \int_{\Gamma} \left[a^{ij}(x) b_{x_i}^{kl}(x) (u_{1x_l} u_{1x_k} + u_{2x_l} u_{2x_k}) \nu_j + a_{x_k}^{ij}(x) b^{kl}(x) (u_{1x_i} u_{1x_j} + u_{2x_i} u_{2x_j}) \nu_l \right] dS.$$

При выполнении условия (6)

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 \geq 0.$$

В силу компактности и гладкости границы Γ существует положительное число ρ такое, что в области $\Omega_\rho = \{x \in \Omega : d(x, \Gamma) < \rho\}$ операторы A и B будут эллиптическими.

Для второго слагаемого (22) имеет место представление

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a^{ij} b^{kl} (u_{1x_j x_k} u_{1x_l x_i} + u_{2x_j x_k} u_{2x_l x_i}) dx \\ &= \int_{\Omega_\rho} a^{ij} b^{kl} (u_{1x_j x_k} u_{1x_l x_i} + u_{2x_j x_k} u_{2x_l x_i}) dx \\ & \quad + \int_{\Omega \setminus \Omega_\rho} a^{ij} b^{kl} (u_{1x_j x_k} u_{1x_l x_i} + u_{2x_j x_k} u_{2x_l x_i}) dx. \end{aligned}$$

Согласно (7') выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \alpha^i \beta^j (u_{1x_i x_j}^2 + u_{2x_i x_j}^2) dx \geq k_0 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_\rho} (u_{1x_i x_j}^2 + u_{2x_i x_j}^2) dx \\ & \quad + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega \setminus \Omega_\rho} \alpha^i \beta^j (u_{1x_i x_j}^2 + u_{2x_i x_j}^2) dx, \quad 0 < k_0 < \alpha_0 \beta_0. \end{aligned}$$

Проанализируем граничные интегралы. В области Ω_ρ для интегралов $I_{1\Gamma}$ ввиду [8] и теорем вложения [6, 9] выполняется неравенство

$$|I_{1\Gamma}| \leq \delta(\varepsilon + \lambda_1) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_\rho} (u_{1x_i x_j}^2 + u_{2x_i x_j}^2) dx + C(\delta) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_\rho} (u_1^2 + u_2^2) dx.$$

Также для интегралов $I_{2\Gamma}$ вследствие теорем вложения [6, 9] выполняется

$$|I_{2\Gamma}| \leq \delta(\varepsilon + \lambda_1) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_\rho} (u_{1x_i x_j}^2 + u_{2x_i x_j}^2) dx + C(\delta) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_\rho} (u_1^2 + u_2^2) dx,$$

где δ — произвольное положительное число, $C(\delta)$ определяется коэффициентами операторов A , B , числом λ_1 и границей Γ .

Проведенные рассуждения позволяют от (22) перейти к неравенству

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [(Au_1)^2 + (Au_2)^2] dx + (\varepsilon + \lambda_1) k_0 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_\rho} (u_{1x_i x_j}^2 + u_{2x_i x_j}^2) dx \\
& \quad + (\varepsilon + \lambda_1) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega \setminus \Omega_\rho} \alpha^i \beta^j (u_{1x_i x_j}^2 + u_{2x_i x_j}^2) dx \\
& \leq \frac{C}{|\lambda_2|} \left[\int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx + \int_{\Omega} \{(Af_1)^2 + (Af_2)^2\} dx \right] \\
& \quad + 2\delta(\varepsilon + \lambda_1) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_\rho} (u_{1x_i x_j}^2 + u_{2x_i x_j}^2) dx + C(\delta) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_\rho} (u_1^2 + u_2^2) dx.
\end{aligned}$$

Подбирая δ малыми и фиксируя, с учетом оценки (17) получим неравенство

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [(Au_1)^2 + (Au_2)^2] dx + \int_{\Omega_\rho} (u_{1x_i x_j}^2 + u_{2x_i x_j}^2) dx \\
& \leq \left(\frac{1}{|\lambda_2|} + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \int_{\Omega} (f_1^2 + f_2^2) dx + \frac{1}{|\lambda_2|} \int_{\Omega} \{(Af_1)^2 + (Af_2)^2\} dx.
\end{aligned}$$

Умножая первое уравнение системы (3_ε) на $-\frac{1}{\lambda_2} Bu_2$, а второе — на $\frac{1}{\lambda_2} Bu_1$, приходим к равенству

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [(Bu_1)^2 + (Bu_2)^2] dx \\
& = \frac{1}{|\lambda_2|} \int_{\Omega} (Au_1 Bu_2 - Au_2 Bu_1) dx + \frac{1}{|\lambda_2|} \int_{\Omega} (f_1 Bu_2 - f_2 Bu_1) dx.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга в правой части, получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [(Bu_1)^2 + (Bu_2)^2] dx \\
& \leq \frac{\delta^2}{2} \int_{\Omega} [(Bu_1)^2 + (Bu_2)^2] dx + \frac{1}{2\delta^2 \lambda_2^2} \int_{\Omega} [(Au_1)^2 + (Au_2)^2] dx
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\delta^2}{2} \int_{\Omega} [(Bu_1)^2 + (Bu_2)^2] dx + \frac{1}{2\delta^2 \lambda_2^2} \int_{\Omega} [f_1^2 + f_2^2] dx.$$

Подбирая δ малым и фиксируя, после применения неравенства (24) получим оценку

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(Bu_1)^2 + (Bu_2)^2] dx + \int_{\Omega} [(Au_1)^2 + (Au_2)^2] dx \\ & \leq \frac{1}{\lambda_2^2} \int_{\Omega} [f_1^2 + f_2^2] dx + \frac{1}{|\lambda_2|} \int_{\Omega} [(Af_1)^2 + (Af_2)^2] dx. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям, завершающим доказательство теоремы 1.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценки теорем 1 и 2 свидетельствуют о поведении решений задачи (1), (2) при $|\lambda_2| \rightarrow \infty$. Именно это необходимо для обращения преобразования Лапласа. Вместе с тем нетрудно получить оценки, свидетельствующие о поведении решения при $\lambda_1 \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А. И. О свойствах решений для одного класса псевдопараболических уравнений // Докл. РАН. 1992. Т. 236, № 5. С. 781–786.
2. Kozhanov A. I. Certain classes of degenerate Sobolev-Galpern equation // Sib. Adv. Math. 1994. V. 4, N 1. P. 65–94.
3. Кожанов А. И. Существование «почти регулярных» решений граничной задачи для одного класса линейных соболевских уравнений нечетного порядка // Мат. заметки ЯГУ. 1997. Т. 4, вып. 1. С. 29–37.
4. Kozhanov A. I. Composite type equation and inverse problem. Utrecht: VSP, 1999.
5. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
7. Кожанов А. И. Линейные обратные задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа // Вестн. Южно-Уральск. ун-та. Мат. моделирование и программирование. 2012. Вып. 11, № 5. С. 33–42.
8. Ладыженская О. А. Об интегральных оценках, сходимости приближенных методов и решений в функционалах для линейных эллиптических операторов // Вестник ЛГУ. 1958. № 7. С. 60–69.

9. *Соболев С. Л.* Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

г. Якутск

21 декабря 2012 г.

ЖЕСТКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ С ТРЕЩИНОЙ^{*)}

Т. С. Попова

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей Γ , $\omega \subset \Omega$ — подобласть с гладкой границей Γ_ρ такая, что $\Gamma_\rho \cap \Gamma = \emptyset$, $\Omega_0 = \Omega \setminus \bar{\omega}$. Обозначим через $n = (n_1, n_2, n_3)$ внешнюю единичную нормаль к Γ , а через $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — нормаль к Γ_ρ , направленную в сторону Ω_0 . При этом область ω соответствует жесткому включению.

Термин «жесткое включение» означает, что перемещения точек тела подобласти ω являются элементами пространства $R(\omega)$ жестких инфинитезимальных перемещений. Это пространство определяется следующим образом:

$$R(\omega) = \{ \rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \mid \rho(x) = Bx + C, x \in \omega \},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c^1, c^2, c^3), \quad b_{ij}, c^j — \text{const}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Одним из неизвестных в задаче является вектор-функция $u = (u_1, u_2, u_3)$ перемещений точек тела. Введем соотношения для компонент тензоров малых деформаций и напряжений по формулам:

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{ij}(u) = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

^{*)} Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект N4402).

Здесь и далее предполагается, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Функции $a_{ijkl}(x) \in L^\infty(\Omega)$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$, — компоненты тензора A модулей упругости, обладающего свойствами симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij},$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0|\xi|^2 \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 — \text{const} > 0.$$

Введем также обозначения

$$w(t, x) = u(t, x) + \int_0^t u(\tau, x) d\tau \quad \forall t \in (0, T), \quad (1)$$

которые будем использовать в уравнениях вязкоупругого состояния и равновесия, выполненных в цилиндре $Q_0 = \Omega_0 \times (0, T)$:

$$-\sigma_{ij,j}(w(t, x)) = f_i(t, x), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_{ij}(w(t, x)) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(w(t, x)), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь $f = (f_1, f_2, f_3)$ — вектор, задающий внешние нагрузки.

Соотношения, аналогичные (1), использованы в постановках задач о трещинах в работах [1, 2]. Исследование разрешимости задач о жестких включениях в упругих пластинах различной геометрии, а также свойств их решений проводились в [3–5]. Метод вариационных неравенств, а также его применение в теории упругости и вязкоупругости рассмотрены в работах [6–11].

1. Задача о жестком включении без трещины.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Задачу о равновесии трехмерного вязкоупругого тела с жестким включением будем рассматривать в следующем виде.

В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ найти функции $u(t, x)$ такие, что $u(t) = \rho^0(t)$ в $\bar{\omega}$, $\rho^0(t) \in R(\omega)$, $t \in (0, T)$, одновременно в цилиндре Q_0 найти функции $\sigma_{ij}(t, x)$, $i, j = 1, 2, 3$, для которых выполняется:

$$-\sigma_{ij,j}(w(t, x)) = f_i(t, x), \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{в } Q_0, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(w(t, x)) = a_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(w(t, x)), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \text{в } Q_0, \quad (3)$$

$$u(t, x) = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, T), \quad (4)$$

$$-\int_{\Gamma_\rho} \sigma_{ij}(w(t, x))\nu_j \cdot \bar{\rho}_i(x) d\Gamma_\rho = \int_\omega f_i(t, x)\bar{\rho}_i(x) d\omega \quad (5)$$

$$\forall \bar{\rho}(x) \in R(\omega) \text{ для п. в. } t \in (0, T).$$

Здесь $f(t, x) = (f_1, f_2, f_3) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$.

Уравнения (2) суть уравнения равновесия при заданных внешних нагрузках f , соотношения (3) — уравнения, описывающие вязкоупругое состояние. В данных уравнениях компоненты тензоров σ и ε зависят от w , т. е. содержат интегралы вида $\int_0^t u(\tau, x) d\tau$. Таким образом, уравнения (2), (3) характеризуют материал «с памятью»: для определения значений компонент тензоров деформаций и напряжений в текущий момент необходимо знать историю нагружения. Квазистационарные краевые задачи, в уравнениях которых использованы соотношения, аналогичные (1), исследовались также в [1, 12, 13]. Краевое условие (4) задает закрепление тела на границе. Условие (5) описывает воздействие внешних нагрузок на жесткую часть.

Для исследования поставленной задачи введем функциональное пространство:

$$H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega) = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in H_0^1(\Omega) \mid v = \rho \text{ в } \omega; \rho \in R(\omega)\}.$$

Пусть V — пространство, сопряженное к $H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega)$. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ скалярное произведение в $L^2(D)$.

Рассмотрим оператор

$$\Lambda : L^2(0, T; H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; V),$$

имеющий вид

$$(\Lambda u, \bar{u}) = \int_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar{u}) \rangle_{\Omega_0} dt, \quad \bar{u} \in L^2(0, T; H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega)).$$

Согласно принятым обозначениям

$$\langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar{u}) \rangle_{\Omega_0} = \int_{\Omega_0} \sigma_{ij} \left(u(t, x) + \int_0^t u(\tau, x) d\tau \right) \varepsilon_{ij}(\bar{u}(t, x)) d\Omega_0.$$

Введем в рассмотрение билинейную форму

$$b(u, \bar{u}) = \langle \sigma_{ij}(u), \varepsilon_{ij}(\bar{u}) \rangle_{\Omega_0}.$$

В силу справедливости первого неравенства Корна [14] в области Ω

$$\langle \varepsilon_{ij}(v), \varepsilon_{ij}(v) \rangle_{\Omega} \geq c_1 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

с постоянной $c_1 > 0$, не зависящей от v , будем иметь

$$b(u, u) \geq c_2 \|u\|_{H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega). \quad (6)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} (\Lambda u, u) &= \int_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(u) \rangle_{\Omega_0} dt = \int_0^T b(w, u) dt \\ &= \int_0^T b \left(u + \int_0^t u d\tau, u \right) dt = \int_0^T b(u, u) dt + \frac{1}{2} b \left(\int_0^T u dt, \int_0^T u dt \right). \end{aligned}$$

Тогда благодаря (6) получим

$$(\Lambda u, u) \geq \|u\|_{L^2(0,T;H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega))}^2. \quad (7)$$

Следовательно,

$$\frac{(\Lambda u, u)}{\|u\|_{L^2(0,T;H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega))}} \rightarrow +\infty, \quad \|u\|_{L^2(0,T;H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega))} \rightarrow +\infty,$$

т. е. Λ — коэрцитивный оператор. Кроме того, оператор Λ монотонен и непрерывен, а значит, псевдомонотонен. Отсюда следует [2, 11], что существует решение задачи

$$u \in L^2(0, T; H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega)), \quad (\Lambda u, v) = \int_0^T \langle f, v \rangle_{\Omega} dt \quad \forall v \in L^2(0, T; H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega)). \quad (8)$$

В силу строгой монотонности оператора решение единственно.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. Докажем, что решение задачи (8) имеет производную по t . Это позволит рассматривать и исследовать задачу (8) на сечениях цилиндров Q и Q_0 при фиксированном t .

Запишем уравнение (8) в виде

$$\int_0^T \langle \sigma_{ij}(w(t)), \varepsilon_{ij}(v(t)) \rangle_{\Omega_0} dt = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle_{\Omega} dt \quad \forall v \in L^2(0, T; H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega)). \quad (9)$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(w(t)), \varepsilon_{ij}(v(t)) \rangle_{\Omega_0} dt \\ & + \int_0^T \left\langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \left(\rho^0(t) + \int_0^t \rho^0(\tau) d\tau \right), \varepsilon_{ij}(v(t)) \right\rangle_{\omega} dt \\ & = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle_{\Omega} dt \quad \forall v \in L^2(0, T; H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega)). \quad (10) \end{aligned}$$

Выберем произвольное $\alpha > 0$ и в качестве пробной функции в (10) возьмем

$$v(\theta) = \begin{cases} \bar{v} - u(t), & \theta \in (t - \alpha, t + \alpha), \\ 0, & \theta \notin (t - \alpha, t + \alpha), \end{cases}$$

где $\bar{v} \in H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega)$ — некоторый фиксированный элемент. Подставим $v(\theta)$ в (10) и разделим на 2α :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\alpha} \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(w(t)), \varepsilon_{ij}(\bar{v} - u(t)) \rangle_{\Omega_0} dt \\ & \frac{1}{2\alpha} \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \left\langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \left(\rho^0(t) + \int_0^t \rho^0(\tau) d\tau \right), \varepsilon_{ij}(\bar{v} - u(t)) \right\rangle_{\omega} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \langle f(t), \bar{v} - u(t) \rangle_{\Omega} dt.$$

Перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ и получим для п. в. t

$$\begin{aligned} & \langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(w(t)), \varepsilon_{ij}(\bar{v} - u(t)) \rangle_{\Omega_0} \\ & + \left\langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \left(\rho^0(t) + \int_0^t \rho^0(\tau) d\tau \right), \varepsilon_{ij}(\bar{v} - u(t)) \right\rangle_{\omega} = \langle f(t), \bar{v} - u(t) \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (11)$$

Перепишем (11) в виде

$$\begin{aligned} b(w(t), \bar{v} - u(t)) + \left\langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \left(\rho^0(t) + \int_0^t \rho^0(\tau) d\tau \right), \varepsilon_{ij}(\bar{v} - u(t)) \right\rangle_{\omega} \\ = \langle f(t), \bar{v} - u(t) \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть $\bar{v} = u(t+h)$, тогда

$$\begin{aligned} & b(w(t), u(t+h) - u(t)) \\ & + \left\langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \left(\rho^0(t) + \int_0^t \rho^0(\tau) d\tau \right), \varepsilon_{ij}(u(t+h) - u(t)) \right\rangle_{\omega} \\ & = \langle f(t), u(t+h) - u(t) \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (13)$$

Запишем (12) в точке $t+h$, а пробной функцией возьмем $\bar{v} = u(t)$:

$$\begin{aligned} & b(w(t+h), u(t) - u(t+h)) \\ & + \left\langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \left(\rho^0(t+h) + \int_0^{t+h} \rho^0(\tau) d\tau \right), \varepsilon_{ij}(u(t) - u(t+h)) \right\rangle_{\omega} \\ & = \langle f(t+h), u(t) - u(t+h) \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем обозначения:

$$d_h v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h}, \quad d_h^{\tau} v(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(\tau) d\tau, \quad h > 0.$$

После сложения (13) и (14) получим

$$b(d_h u(t) + d_h^T u(t), d_h u(t)) + \langle a_{ijkl} (\varepsilon_{kl}(d_h \rho^0(t)) + \varepsilon_{kl}(d_h^T \rho^0(t))), \varepsilon_{ij}(d_h u(t)) \rangle_\omega = \langle d_h f(t), d_h u(t) \rangle_\Omega.$$

Таким образом,

$$\langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(d_h u(t) + d_h^T u(t)), \varepsilon_{ij}(d_h u(t)) \rangle_\Omega = \langle d_h f(t), d_h u(t) \rangle_\Omega. \quad (15)$$

Отметим, что в области Ω справедлива оценка

$$\langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(d_h u(t)), \varepsilon_{ij}(d_h u(t)) \rangle_\Omega \geq c_3 \|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (16)$$

Преобразуем (15) к виду

$$\begin{aligned} & \langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(d_h u(t)), \varepsilon_{ij}(d_h u(t)) \rangle_\Omega \\ &= \langle d_h f(t), d_h u(t) \rangle_\Omega - \langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(d_h^T u(t)), \varepsilon_{ij}(d_h u(t)) \rangle_\Omega. \end{aligned}$$

Используя (16), получим

$$\begin{aligned} \|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{\lambda} \|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|d_h u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \|d_h^T u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \lambda \|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Если $\lambda > 0$ достаточно мало, то существует $c_4 > 0$ такое, что

$$\|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq c_4 (\|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|d_h^T u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2). \quad (17)$$

Заметим, что для любых гладких функций $v(t, x)$ справедливо [2]

$$\int_0^{T-h} \|d_h^T v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (18)$$

Проинтегрируем (17) по t от 0 до $T - h$ и применим (18):

$$\begin{aligned} \int_0^{T-h} \|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt &\leq c_4 \left(\int_0^{T-h} \|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^{T-h} \|d_h^T u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right) \\ &\leq c_4 \left(\int_0^{T-h} \|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right). \quad (19) \end{aligned}$$

Поскольку $f_t(t) \in L^2(Q)$, неравенство (18) можно записать для $v = f_t$:

$$\int_0^{T-h} \|d_h^\tau f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T \|f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{T-h} \|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &= \int_0^{T-h} \left\| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &= \int_0^{T-h} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f_\tau(\tau) d\tau \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \int_0^{T-h} \|d_h^\tau f_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \int_0^T \|f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Следовательно, из (19) получим

$$\int_0^{T-h} \|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq c_4 \left(\int_0^T \|f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right).$$

Пусть h_0 достаточно мало, но $h_0 \geq h$. Тогда

$$\int_0^{T-h_0} \|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq c_4 \left(\int_0^T \|f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right).$$

Переходя к пределу $h \rightarrow 0$, будем иметь

$$\int_0^{T-h_0} \|u_t(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq c_4 \left(\int_0^T \|f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right).$$

Из произвольности $h_0 \geq 0$ следует, что

$$\|u_t(t)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq c_4 (\|f_t(t)\|_{L^2(Q)}^2 + \|u(t)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2). \quad (20)$$

Таким образом, производная $u_t(t, x)$ существует, более того, взяв в (9) $v = u$, получим

$$\int_0^T \langle \sigma_{ij}(w(t)), \varepsilon_{ij}(u(t)) \rangle_{\Omega_0} dt = \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle_{\Omega} dt.$$

С учетом (7) будем иметь

$$\|u(t)\|_{L^2(0,T;H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{\lambda} \|f(t)\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda \|u(t)\|_{L^2(0,T;H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega))}^2$$

или при малых $\lambda > 0$

$$\|u(t)\|_{L^2(0,T;H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega))}^2 \leq c_5 \|f(t)\|_{L^2(Q)}^2.$$

Тогда из (20) следует неравенство

$$\|u_t(t)\|_{L^2(0,T;H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega))}^2 \leq c(\|f(t)_t\|_{L^2(Q)}^2 + \|f(t)\|_{L^2(Q)}^2).$$

Эквивалентность постановок. Докажем, что из соотношений (8) в предположении достаточной гладкости решений можно получить задачу (2)–(5). Поскольку производная u_t существует, функция u имеет след на сечениях Q при п. в. $t \in [0, T]$. Следовательно, решение задачи (9) является решением вариационного неравенства

$$\langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(v) \rangle_{\Omega_0} = \langle f, v \rangle_{\Omega} \quad \forall v \in H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega) \quad \text{для п. в. } t \in (0, T). \quad (21)$$

Таким образом, благодаря существованию производной по t у решения $u(t, x)$ задачу (9) можно рассматривать на сечениях цилиндра Q в виде вариационного неравенства (21).

В этом разделе будем использовать формулу Грина [4, 15]

$$\langle \sigma_{ij}(u), \varepsilon_{ij}(\bar{u}) \rangle_D = \langle \sigma_{ij}(u) \nu_j, \bar{u}_i \rangle_{\gamma} - \langle \sigma_{ij,j}(u), \bar{u}_i \rangle_D.$$

Здесь $D \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, $\partial D = \gamma$ — гладкая граница, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — внешняя нормаль к γ . Индексы D и γ обозначают интегрирование по области D и границе γ соответственно. Формула Грина справедлива для любых гладких в области D функций u, \bar{u} .

Возьмем $v \in H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega)$ такое, что $v = 0$ в $\bar{\omega}$. С помощью формулы Грина из (21) выведем:

$$\langle \sigma_{ij}(w)n_j, v_i \rangle_{\Gamma} - \langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, v_i \rangle_{\Gamma_{\rho}} - \langle \sigma_{ij,j}(w), v_i \rangle_{\Omega_0} = \langle f, v \rangle_{\Omega_0} + \langle f, v \rangle_{\omega}.$$

Значит, в области Ω_0 выполнены уравнения

$$-\langle \sigma_{ij,j}(w), v_i \rangle_{\Omega_0} = \langle f, v \rangle_{\Omega_0}.$$

Из произвольности функции v следует, что

$$-\sigma_{ij,j}(w) = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{в } \Omega_0. \quad (22)$$

Возьмем $v \in H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega)$. Применяя в (20) формулу Грина, с учетом (22) получим

$$-\langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, v_i \rangle_{\Gamma_{\rho}} = \langle f, v \rangle_{\omega}.$$

В силу произвольности v , а также того, что $v = \bar{\rho}$ в ω , $\bar{\rho} \in R(\omega)$, следует

$$-\langle \sigma_{ij}(w(t, x))\nu_j, \bar{\rho}_i(x) \rangle_{\Gamma_{\rho}} = \langle f(t, x), \bar{\rho}(x) \rangle_{\omega} \quad \forall \bar{\rho}(x) \in R(\omega),$$

что при фиксированном t совпадает с (5).

Обратно, умножив уравнение (2) при фиксированном t на произвольную функцию $v \in H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega)$, проинтегрируем полученное соотношение по области Ω_0 и применим формулу Грина:

$$\langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(v) \rangle_{\Omega_0} + \langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, v_i \rangle_{\Gamma_{\rho}} = \langle f, v \rangle_{\Omega_0}$$

С учетом (5) будем иметь

$$\langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(v) \rangle_{\Omega_0} = \langle f, v \rangle_{\Omega}.$$

Таким образом, мы доказали, что из краевой задачи (2)–(5) в предположении достаточной гладкости решений можно получить задачу (9) и обратно, из задачи (9) можно вывести соотношения (2)–(5). Следовательно, краевая задача (2)–(5) эквивалентна задаче (9), а значит, однозначно разрешима.

2. Трещина по краю включения. В этом пункте рассмотрим задачу о равновесии вязкоупругого тела, имеющего частично отслоившееся жесткое включение. При этом зону отслоения будем рассматривать как трещину, проходящую по поверхности жесткого включения.

Постановка задачи. Пусть Ω и Ω_0 — области, определенные в п. 1. Поверхность γ , удовлетворяющая условиям $\gamma \subset \Gamma_\rho$, $\text{meas}(\Gamma_\rho \setminus \gamma) \neq 0$, соответствует трещине на границе включения. Трещина имеет два берега γ^+ и γ^- , определяемые в соответствии с направлением нормали ν таким образом, что нормаль ν^- к γ^- совпадает с ν , тогда $\nu^+ = -\nu$.

Обозначим также $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \gamma$ и соответственно $Q_\gamma = \Omega_\gamma \times (0, T)$.

Поверхность γ можно продолжить до пересечения с Γ таким образом, чтобы область Ω_γ была разбита на две подобласти Ω^+ и Ω^- и при этом $\text{meas}(\Gamma \cap \partial\Omega^\pm) \neq 0$. Будем считать, что области Ω^\pm обозначены так, что $\gamma^+ \subset \partial\Omega^+$ и $\gamma^- \subset \partial\Omega^-$.

Функция $u(x)$ — одно из неизвестных в задаче и может принимать различные значения на берегах трещины. Используя обозначения u^+ и u^- для значений функции u на γ^+ и γ^- соответственно, введем следующее обозначение для скачка функции на γ :

$$[u] = u^+ - u^-.$$

Соотношения для $\varepsilon_{ij}(u)$, $\sigma_{ij}(u)$, $w(t, x)$, а также определение пространства $R(\omega)$ примем прежними.

Краевую задачу поставим в следующем виде.

В цилиндре Q_γ найти функции $u(t, x)$, $u(t) = \rho^0(t)$ в $\bar{\omega}$, $\rho^0(t) \in R(\omega)$, $t \in (0, T)$, одновременно в цилиндре Q_0 найти функции $\sigma_{ij}(t, x)$, $i, j = 1, 2, 3$, для которых выполняется:

$$-\sigma_{ij,j}(w(t, x)) = f_i(t, x), \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{в } Q_0 \quad (23)$$

$$\sigma_{ij}(w(t, x)) = a_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(w(t, x)), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \text{в } Q_0, \quad (24)$$

$$u(t, x) = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, T), \quad (25)$$

$$-\int_{\Gamma_\rho} \sigma_{ij}(w(t, x)) \nu_j \cdot \bar{\rho}_i(x) = \int_\omega f_i(t, x) \bar{\rho}_i(x) \quad (26)$$

$$\forall \bar{\rho}(x) \in R(\omega) \quad \text{для п. в. } t \in (0, T).$$

$$(u(t, x) - \rho^0(t, x)) \nu \geq 0 \quad \text{на } \gamma^+ \times (0, T), \quad (27)$$

$$\sigma_\nu(w) \leq 0, \quad \sigma_\tau(w) = 0 \quad \text{на } \gamma^+ \times (0, T), \quad (28)$$

$$(u(t, x) - \rho^0(t, x)) \nu \cdot \sigma_\nu(w) = 0 \quad \text{на } \gamma^+ \times (0, T). \quad (29)$$

Здесь $f(t, x) = (f_1, f_2, f_3) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, коэффициенты $a_{ijkl}(x)$, как и прежде, удовлетворяют условиям симметричности и положительной определенности, функции σ_ν, σ_τ определяются из соотношений

$$\sigma_\nu = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i, \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \cdot \nu.$$

Для исследования задачи о трещине по краю включения введем следующее функциональное пространство:

$$H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma) = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in H^1(\Omega_\gamma) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma, v = \rho \text{ в } \omega; \rho \in R(\omega)\}.$$

Обозначим

$$K_\gamma = \{v \in H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma) \mid (v - \rho)\nu \geq 0 \text{ п. в. на } \gamma\}.$$

В качестве множества допустимых перемещений возьмем

$$\mathcal{K}_\gamma = \{v(t, x) \in L^2(0, T; H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)) \mid v(t) \in K_\gamma \text{ п. в. } t \in (0, T)\}.$$

Обозначив через V^* пространство, сопряженное к $H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)$, рассмотрим оператор

$$\Lambda^* : L^2(0, T; H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)) \rightarrow L^2(0, T; V^*),$$

имеющий вид

$$(\Lambda^* u, \bar{u}) = \int_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar{u}) \rangle_{\Omega_0}, \quad \bar{u} \in L^2(0, T; H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)).$$

В каждой из областей Ω^+ и Ω^- выполнено первое неравенство Корна, следовательно, это неравенство выполнено и во всей области Ω_γ :

$$\langle \varepsilon_{ij}(v), \varepsilon_{ij}(v) \rangle_{\Omega_\gamma} \geq c_6 \|v\|_{H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)}^2 \quad \forall v \in H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma),$$

где $c_6 = \text{const} > 0$ не зависит от v . Из свойств $a_{ijkl}(x)$ следует

$$b_\gamma(u, u) = \langle a_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(u), \varepsilon_{ij}(u) \rangle_{\Omega_\gamma} \geq c_7 \|u\|_{H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)}^2. \quad (30)$$

Далее рассуждая, как и при выводе (7), можно получить

$$(\Lambda^* u, u) = \int_0^T b(u, u) dt + \frac{1}{2} b \left(\int_0^T u dt, \int_0^T u dt \right) \geq \|u\|_{L^2(0,T;H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma))}^2.$$

Отсюда следует коэрцитивность оператора Λ^* . Учитывая непрерывность и монотонность оператора, заключаем, что Λ^* псевдомонотонен. Тогда существует решение вариационного неравенства

$$u \in \mathcal{K}_\gamma, \quad (\Lambda^* u, v - u) \geq \int_0^T \langle f, v - u \rangle_{\Omega_\gamma} \quad \forall v \in \mathcal{K}_\gamma. \quad (31)$$

Это неравенство можно записать в виде

$$u \in \mathcal{K}_\gamma, \quad \int_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(v - u) \rangle_{\Omega_0} \geq \int_0^T \langle f, v - u \rangle_{\Omega_\gamma} \quad \forall v \in \mathcal{K}_\gamma. \quad (32)$$

Существование производной. Далее, как и в п. 1, докажем, что решение $u(t, x)$ имеет производную $u_t(t, x)$.

В силу

$$\varepsilon_{ij}(w) = \varepsilon_{ij} \left(\rho + \int_0^t \rho d\tau \right) = 0 \text{ в } \omega$$

неравенство (32) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{K}_\gamma, \quad \int_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(v - u) \rangle_{\Omega_0} + \int_0^T \langle a_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(w), \varepsilon_{ij}(v - u) \rangle_\omega \\ \geq \int_0^T \langle f, v - u \rangle_{\Omega_\gamma} \quad \forall v \in \mathcal{K}_\gamma. \end{aligned} \quad (33)$$

Выберем произвольное $\alpha > 0$ и возьмем в (35) пробный элемент вида

$$v(\theta) = \begin{cases} v, & \theta \in (t - \alpha, t + \alpha), \\ u(\theta), & \theta \notin (t - \alpha, t + \alpha), \end{cases}$$

где $v \in K_\gamma$ — некоторый фиксированный элемент. Подставим $v(\theta)$ в (33) и разделим на 2α :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha} \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \langle \sigma_{ij}(w(t)), \varepsilon_{ij}(v - u(t)) \rangle_{\Omega_0} + \frac{1}{2\alpha} \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(w), \varepsilon_{ij}(v - u(t)) \rangle_{\omega} \\ \geq \frac{1}{2\alpha} \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \langle f(t), v - u(t) \rangle_{\Omega_\gamma}. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ и получим для п. в. $t \in (0, T)$

$$\langle \sigma_{ij}(w(t)), \varepsilon_{ij}(v - u(t)) \rangle_{\Omega_0} + \langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(w(t)), \varepsilon_{ij}(v - u(t)) \rangle_{\omega} \geq \langle f(t), v - u(t) \rangle_{\Omega_\gamma}.$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$b(w(t), v - u(t)) + b_\omega(w(t), v - u(t)) \geq \langle f(t), v - u(t) \rangle_{\Omega_\gamma}, \quad (34)$$

где $b_\omega(u, \bar{u}) = \langle a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u), \varepsilon_{ij}(\bar{u}) \rangle_{\omega}$.

Возьмем в (34) $v = u(t + h)$, тогда

$$b(w(t), u(t + h) - u(t)) + b_\omega(w(t), u(t + h) - u(t)) \geq \langle f(t), u(t + h) - u(t) \rangle_{\Omega_\gamma}. \quad (35)$$

Теперь рассмотрим (34) в точке $t + h$, а пробную функцию возьмем $v = u(t)$:

$$\begin{aligned} b(w(t + h), u(t) - u(t + h)) + b_\omega(w(t + h), u(t) - u(t + h)) \\ \geq \langle f(t + h), u(t) - u(t + h) \rangle_{\Omega_\gamma}. \quad (36) \end{aligned}$$

Сложим (35) и (36), разделим на h^2 и получим

$$\begin{aligned} b(d_h u(t) + d_h^\top u(t), d_h u(t)) + b_\omega(d_h \rho^0(t) + d_h^\top \rho^0(t), d_h \rho^0(t)) \\ \leq \langle d_h f(t), d_h u(t) \rangle_{\Omega_\gamma}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & b(d_h u(t), d_h u(t)) + b_\omega(d_h \rho^0(t), d_h \rho^0(t)) \\ & \leq \langle d_h f(t), d_h u(t) \rangle_{\Omega_\gamma} - b(d_h^\tau u(t), d_h u(t)) - b_\omega(d_h^\tau \rho^0(t), d_h \rho^0(t)). \end{aligned}$$

Используя (30), получим

$$\begin{aligned} \|d_h u(t)\|_{H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)}^2 & \leq \frac{1}{\lambda} \|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|d_h u(t)\|_{L^2(\Omega_\gamma)}^2 + \frac{1}{\lambda} \|d_h^\tau u(t)\|_{H^1(\Omega_0)}^2 \\ & \quad + \lambda \|d_h u(t)\|_{H^1(\Omega_0)}^2 + \frac{1}{\lambda} \|d_h^\tau \rho^0(t)\|_{H^1(\omega)}^2 + \lambda \|d_h \rho^0(t)\|_{H^1(\omega)}^2. \end{aligned}$$

При достаточно малых $\lambda > 0$ найдется $c_8 > 0$ такое, что

$$\|d_h u(t)\|_{H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)}^2 \leq c_8 (\|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|d_h^\tau u(t)\|_{H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\Gamma)}^2). \quad (37)$$

Проинтегрируем (37) по t от 0 до $T - h$ и применим (18):

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-h} \|d_h u(t)\|_{H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)}^2 dt \\ & \leq c_8 \left(\int_0^{T-h} \|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^{T-h} \|d_h^\tau u(t)\|_{H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)}^2 dt \right) \\ & \leq c_8 \left(\int_0^{T-h} \|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)}^2 dt \right). \quad (38) \end{aligned}$$

Поскольку $f_t(t) \in L^2(Q)$, неравенство (18) можно записать для $v = f_t$, тогда из (38) получим

$$\int_0^{T-h} \|d_h u(t)\|_{H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)}^2 dt \leq c_8 \left(\int_0^T \|f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)}^2 dt \right).$$

Пусть h_0 достаточно мало, но $h_0 \geq h$. Тогда, переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, будем иметь

$$\int_0^{T-h_0} \|u_t(t)\|_{H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)}^2 dt \leq c_8 \left(\int_0^T \|f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)}^2 dt \right).$$

Из произвольности h_0 следует

$$\|u_t(t)\|_{L^2(0,T;H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma))}^2 \leq c_8 (\|f_t(t)\|_{L^2(Q)}^2 + \|u(t)\|_{L^2(0,T;H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma))}^2). \quad (39)$$

Таким образом, производная $u_t(t, x)$ существует, более того, взяв в (32) $v = 0$, получим

$$\int_0^T \langle \sigma_{ij}(w(t)), \varepsilon_{ij}(u(t)) \rangle_{\Omega_0} dt = \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle_{\Omega_\gamma} dt.$$

С учетом (30) будем иметь

$$\|u(t)\|_{L^2(0,T;H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma))}^2 \leq \frac{1}{\lambda} \|f(t)\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda \|u(t)\|_{L^2(0,T;H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma))}^2$$

или при малых $\lambda > 0$

$$\|u(t)\|_{L^2(0,T;H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma))}^2 \leq c_9 \|f(t)\|_{L^2(Q)}^2.$$

Тогда из (39) следует

$$\|u_t(t)\|_{L^2(0,T;H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma))}^2 \leq C (\|f_t(t)\|_{L^2(Q)}^2 + \|f(t)\|_{L^2(Q)}^2).$$

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПОСТАНОВОК. Покажем, что исследованная задача (32) эквивалентна задаче (23)–(29) в следующем смысле: при условии достаточной гладкости решений из вариационного неравенства можно вывести все соотношения (23)–(29), и наоборот из краевой задачи можно получить вариационное неравенство. Тем самым будет доказана однозначная разрешимость поставленной в начале раздела задачи.

Поскольку производная u_t существует, мы можем рассматривать задачу (32) на сечениях цилиндров Q_γ и Q_0 при некотором фиксированном значении t . Поэтому запишем вариационное неравенство (32) в виде

$$u \in K_\gamma, \quad \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(v - u) \rangle_{\Omega_0} \geq \langle f, v - u \rangle_{\Omega_\gamma} \quad \forall v \in K_\gamma, \quad (40)$$

где w, v, u — соответственно сокращения обозначений для $w(t), v(t), u(t)$ при фиксированном t .

Возьмем в (40) в качестве пробной функции $v = u \pm \theta$, где $\theta \in H_0^1(\Omega_\gamma)$ и $\theta = 0$ в ω , получим

$$\langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\theta) \rangle_{\Omega_0} = \langle f, \theta \rangle_{\Omega_0}.$$

Применяя формулу Грина, выведем

$$-\langle \sigma_{ij,j}(w), \theta_i \rangle_{\Omega_0} = \langle f, \theta \rangle_{\Omega_0}.$$

Следовательно, в Ω_0 в смысле распределений выполнены уравнения равновесия:

$$-\sigma_{ij,j}(w) = f_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (41)$$

Далее, возьмем функции $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, $\tilde{u} = \bar{\rho}$ в ω , $\bar{\rho} \in R(\omega)$ и в качестве пробного элемента в (40) подставим $v = u \pm \tilde{u}$. Тогда

$$\langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\tilde{u}) \rangle_{\Omega_0} = \langle f, \tilde{u} \rangle_{\Omega_\gamma}.$$

Применяя формулу Грина в последнем равенстве, учитываем выбранное направление нормали ν :

$$-\langle \sigma_{ij,j}(w), \tilde{u}_i \rangle_{\Omega_0} - \langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, \tilde{u}_i \rangle_{\Gamma_\rho^+} = \langle f, \tilde{u} \rangle_{\Omega_\gamma}.$$

С учетом выведенных уравнений (41)

$$-\langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, \tilde{u}_i \rangle_{\Gamma_\rho} = \langle f, \tilde{u} \rangle_\omega.$$

Поскольку $\tilde{u} = \bar{\rho}$ на Γ_ρ , отсюда следует справедливость (26). Выберем в качестве пробного элемента в (40) $v = u + \bar{u}$, где $\bar{u} \in H_\Gamma^{1,\omega}(\Omega_\gamma)$, $\bar{u} = 0$ в ω , $\bar{u}\nu \geq 0$ на γ^+ . Применим формулу Грина, тогда

$$-\langle \sigma_{ij,j}(w), \bar{u}_i \rangle_{\Omega_0} - \langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, \bar{u}_i \rangle_{\Gamma_\rho^+} \geq \langle f, \bar{u} \rangle_{\Omega_\gamma}.$$

Принимая во внимание уже выведенные соотношения (23) и (26), получим

$$-\langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, \bar{u}_i \rangle_{\gamma^+} \geq 0.$$

Используем представление для функций \bar{u} и $\sigma_{ij}(w)\nu_j$ вида

$$\sigma_{ij}(w)\nu_j = \sigma_\nu(w)\nu + \sigma_\tau(w), \quad \bar{u} = \bar{u}_\nu\nu + \bar{u}_\tau.$$

Тогда последнее неравенство можно переписать в виде

$$-\langle \sigma_\nu(w)\nu + \sigma_\tau(w), \bar{u}_\nu\nu + \bar{u}_\tau \rangle_{\gamma^+} \geq 0.$$

В силу произвольности \bar{u} заключаем, что

$$\sigma_\tau(w) = 0 \quad \text{на } \gamma^+.$$

Тогда

$$-\langle \sigma_\nu(w), \bar{u}_\nu \rangle_{\gamma^+} \geq 0.$$

Поскольку $\bar{u} = \rho$, $\rho \in R(\omega)$, $\rho = 0$ в ω , то

$$\bar{u}_\nu \geq 0 \quad \text{на } \gamma^+.$$

Значит,

$$\sigma_\nu(w) \leq 0 \quad \text{на } \gamma^+.$$

Таким образом, установлена справедливость соотношений (28). Выведем теперь (29).

Рассмотрим некоторую точку x_0 на поверхности γ , и в окрестности этой точки рассмотрим случаи возможного контакта берегов трещины.

Пусть вначале в точке x_0 выполнено условие

$$(u - \rho^0)\nu > 0. \quad (42)$$

Данное условие интерпретируется как отсутствие контакта берегов трещины. Тогда найдется окрестность данной точки $U(x_0)$, в которой условие (42) также выполнено. Возьмем достаточно гладкую функцию ψ , имеющую носитель в \bar{U}^+ , где $U^+ = U(x_0) \cap \Omega^+$, Ω^+ — область, введенная в начале п. 2. При указанных условиях функция $v = u \pm \lambda\psi$ является элементом множества K_γ , если λ достаточно мало. Подставив $v = u \pm \lambda\psi$ в (40), получим

$$\langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\psi) \rangle_{\Omega_0} = \langle f_i, \psi_i \rangle_{\Omega_\gamma}.$$

Отсюда благодаря формуле Грина

$$\langle \sigma_\nu^+(w), \psi_\nu \rangle_{\gamma \cap \bar{U}^+} = 0.$$

Следовательно, $\sigma_\nu^+(w) = 0$ на $\gamma \cap \bar{U}^+$. Пусть теперь $\sigma_\nu^+(w) < 0$ в точке x_0 . Тогда по доказанному $(u(x_0) - \rho^0(x_0))\nu(x_0) = 0$. Условие (29) выведено.

Обратно, рассмотрим краевую задачу (23)–(29) при фиксированном t . Умножим уравнения (23) на $v - u(t)$, где $v \in K_\gamma$, проинтегрируем по Ω_0 и применим формулу Грина:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(v - u(t)) \rangle_{\Omega_0} + \langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, v_i - u_i(t) \rangle_{\gamma^+} \\ + \langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, \rho_i - \rho_i^0(t) \rangle_{\Gamma_\rho \setminus \gamma} = \langle f(t), v - u(t) \rangle_{\Omega_0}. \end{aligned}$$

Отсюда можем записать

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(v - u(t)) \rangle_{\Omega_0} + \langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, v_i - u_i(t) \rangle_{\gamma^+} \\ + \langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, \rho_i - \rho_i^0(t) \rangle_{\Gamma_\rho} - \langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, \rho_i - \rho_i^0(t) \rangle_{\gamma^-} \\ = \langle f(t), v - u(t) \rangle_{\Omega_\gamma} - \langle f(t), \rho_i - \rho_i^0(t) \rangle_\omega. \end{aligned}$$

С учетом условия (26) будем иметь

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(v - u(t)) \rangle_{\Omega_0} - \langle f(t), v - u(t) \rangle_{\Omega_\gamma} \\ = -\langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, (v_i - u_i(t)) - (\rho_i - \rho_i^0(t)) \rangle_\gamma. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства необходимо показать, что правая часть полученного равенства неотрицательна. Второе из условий (28) дает

$$\begin{aligned} -\langle \sigma_{ij}(w)\nu_j, (v_i - u_i(t)) - (\rho_i - \rho_i^0(t)) \rangle_\gamma \\ = -\langle \sigma_\nu(w), (v - \rho)\nu \rangle_\gamma + \langle \sigma_\nu(w), (u(t) - \rho^0(t))\nu \rangle_\gamma. \end{aligned}$$

Используя первое из условий (28), соотношение (29) и свойства функции $v \in K_\gamma$, получим, что правая часть последнего соотношения неотрицательна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khludnev A. M.* On equilibrium problem for a plate having a crack under the creep condition // Control and Cybernetics. 1996. V. 25, N 5, P. 1015–1030.

2. *Khludnev A. M., Kovtunenkov V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
3. *Khludnev A. M., Leugering G.* On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2010. V. 33, N 16. P. 1955–1967.
4. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
5. *Хлуднев А. М.* Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2010. № 5. С. 98–110.
6. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
7. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
8. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
9. *Кицдерлерер Д., Стампакья Г.* Введение в неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
10. *Кравчук А. С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во Моск. гос. академии приборостроения и информатики, 1997.
11. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
12. *Ророва Т. С.* The equilibrium problem for a linear viscoelastic body with a crack // *Мат. заметки ЯГУ.* 1998. Т. 5, вып. 2. С. 118–134.
13. *Попова Т. С.* Метод фиктивных областей в задаче Синьорини для вязкоупругих тел // *Мат. заметки ЯГУ.* 2006. Т. 13, вып. 1. С. 105–120.
14. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
15. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

НЕЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
 ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
 ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
 УРАВНЕНИЙ^{*)}

А. В. Прокопьев

Целью работы будет исследование разрешимости нелинейной обратной задачи для вырождающегося параболического уравнения. Заметим, что нелинейные обратные задачи для невырождающихся параболических уравнений изучены достаточно хорошо (см. [1–5] и имеющуюся в них библиографию), в случаях вырождающегося уравнения это уже не так.

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0, T)$, $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x, t)$, $f(x, t)$, $K(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Пусть выполняются условия

$$k_0 \rho^\alpha(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq k_1 \rho^\alpha(x) |\xi|^2, \quad a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \quad (*)$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 < k_0 \leq k_1$, $\alpha \geq 0$, $\rho(x) = \text{dist}(x, \Gamma; x \in \overline{\Omega})$, $i, j = 1, \dots, n$.

В работе рассматривается эллиптико-параболическое уравнение

^{*)} Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (Проекты № 4402, № 5562)

вида

$$u_t(x, t) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) u_{x_j}(x, t)) + a(x, t) u(x, t) + q(x) u(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

Обратная задача. Найти функции $u(x, t)$, $q(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением (1) и такие, что для функции $u(x, t)$ выполняется начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

а также условие переопределения

$$\int_0^T K(t) u(x, t) dt = \mu(x). \quad (3)$$

Введем пространства

$$V = \left\{ v(x, t) : \int_Q \left(v^2(x, t) + v_t^2(x, t) + \sum_{i=1}^n \rho^\alpha(x) v_{x_i}^2(x, t) \right) dx dt < +\infty \right\},$$

$$V_0 = V \cap L_\infty(Q),$$

Нормы в пространствах V и V_0 зададим следующим образом:

$$\|v\|_V = \left[\int_Q \left(v^2(x, t) + v_t^2(x, t) + \sum_{i=1}^n \rho^\alpha(x) v_{x_i}^2(x, t) \right) dx dt \right]^{1/2},$$

$$\|v\|_{V_0} = \|v\|_V + \operatorname{vrai} \max_Q |v|.$$

Введем понятие обобщенного решения рассматриваемой задачи для функций $u(x, t) \in V_0$, $q(x) \in L_2(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функции $u(x, t) \in V$, $q(x) \in L_2(\Omega)$ называются *обобщенным решением задачи* (1)–(3), если выполнено интегральное равенство

$$\int_Q \left(u_t \eta + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + a u \eta + q u \eta \right) dx dt = \int_Q f \eta dx dt$$

для любых $\eta \in C^\infty(\bar{Q})$.

Введем понятие срезающей функции: Пусть M_0 есть положительное число. Определим срезающую функцию $G(\xi)$:

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq M_0; \\ M_0, & \text{если } \xi > M_0; \\ -M_0, & \text{если } \xi < -M_0. \end{cases}$$

Пусть $w(x, t)$ — функция из пространства $C^2(\bar{Q})$ такая, что $w(x, 0) = u_0(x)$.

Введем необходимые ниже обозначения:

$$\tilde{\mu}(x) = \mu(x) - \int_0^T K(t)w(x, t) dt,$$

$$f_1(x, t) = f(x, t) - w_t(x, t) - a(x, t)w(x, t) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x)w_{x_j}(x, t)),$$

$$f_0(x) = \int_0^T K(t)f_1(x, t)dt + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x)\tilde{\mu}_{x_j}(x)),$$

$$K_1(x, t) = K(t)a(x, t) - K'(t),$$

$$F_0 = \max_{\bar{\Omega}} |f_0(x)|, \quad K_0 = \max_{\bar{\Omega}} \int_0^T K_1^2(x, t) dt$$

$$\varphi(x, v) = \frac{1}{\mu(x)} \left[f_0(x) - \int_0^T K_1(x, t)v(x, t) dt - K(T)v(x, T) \right],$$

$$\psi(x, v) = \frac{w(x, t)}{\mu(x)} \left[\int_0^T K_1(x, t)v(x, t) dt + K(T)v(x, T) \right],$$

$$\tilde{f}(x, t) = f_1(x, t) - \frac{f_0(x)}{\mu(x)}w(x, t), \quad A = \frac{1}{a_0 - M_0} \operatorname{vrai} \max_{\bar{Q}} |\tilde{f}(x, t)|,$$

$$C_1 = \frac{w_0}{a_1 \mu_0} \left(\int_0^T |K_1(x, t)| dt + |K(T)| \right) \operatorname{vrai\,max}_{\overline{Q}} |v|,$$

$$\lambda_1 = 1 - \frac{w_0 T}{\delta_1^2 \mu_0} K^2(T), \quad \lambda_2 = a_1 - \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{2} - \frac{w_0 T K_0}{2 \delta_2^2 \mu_0},$$

где δ_1, δ_2 — положительные числа.

$$N_1 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \int_Q \tilde{f}^2(x, t) dx dt, \quad N_2 = \frac{1}{\lambda_2^2} \int_Q \tilde{f}^2(x, t) dx dt,$$

$$N_3 = \frac{1}{2 \lambda_2} \int_Q \tilde{f}^2(x, t) dx dt,$$

$$N_4 = 4 \left(\int_Q \tilde{f}^2(x, t) dx dt + \frac{w_0 K_0 T}{\mu_0} N_2 + \frac{w_0 T}{\mu_0} K^2(T) N_1 \right),$$

$$N_5 = \operatorname{vrai\,max}_{\overline{Q}} |v| \leq \frac{A}{1 - C_1}, \quad N_6 = \frac{1}{\mu_0} [F_0 + N_5 K_0 + |K(T)| N_5],$$

где w_0, μ_0 положительные числа.

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned} a(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad a^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad i, j = 1, \dots, n, \\ K(t) \in C^1[0, T], \quad 0 \leq \alpha < n - 1, \quad a(x, t) \geq a_0 > M_0 > 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$C_1 < 1, \quad N_6 < M_0, \quad (5)$$

и пусть существуют положительные числа $w_0, \mu_0, \delta_1, \delta_2$ такие, что

$$w^2(x, t) \leq w_0, \quad (x, t) \in \overline{Q}, \quad \mu^2(x) \geq \mu_0 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0. \quad (6)$$

Тогда существует обобщенное решение $u(x, t) \in V_0, q(x) \in L_2(\overline{\Omega})$ задачи (1)–(3).

Доказательство. Положим $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$. Тогда выполняется условие $v(x, 0) = 0$ при $x \in \Omega$. Умножим уравнение (1) на

$K(t)$ и проинтегрируем от 0 до T . После несложных выкладок с учетом (3), получим

$$q(x) = \varphi(x, v) = \frac{1}{\mu(x)} \left[f_0(x) - \int_0^T K_1(x, t)v(x, t)dt - K(T)v(x, T) \right].$$

Подставив это выражение для $q(x)$ в уравнение (1), имеем

$$\begin{aligned} v_t(x, t) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x)v_{x_j}(x, t)) + a(x, t)v(x, t) + \varphi(x, v)v(x, t) \\ = \tilde{f}(x, t) + \psi(x, v) \end{aligned} \quad (1')$$

Рассмотрим новую задачу: найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1') и такую, что для нее выполняются условия

$$v(x, 0) = 0, \quad (2')$$

Для доказательства разрешимости данной задачи воспользуемся методами регуляризации и срезающих функций.

Пусть ε — положительное число. Рассмотрим начально-краевую задачу: найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\begin{aligned} L_\varepsilon v = v_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x)v_{x_j}) - \varepsilon \Delta v \\ + (a(x, t) + G(\varphi(x, v)))v = \tilde{f}(x, t) + \psi(x, v) \end{aligned} \quad (7)$$

и удовлетворяющую условиям

$$v(x, 0) = 0, \quad v(x, t)|_S = 0. \quad (8)$$

Имеет место разрешимость вспомогательной задачи при фиксированном ε в пространстве $W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(Q)$ (см. [3]). Покажем выполнение равномерных по ε априорных оценок.

Умножим (7) на $v(x, t)$ и проинтегрируем по Q . Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2(x, t) dx \Big|_0^T + \int_Q \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) v_{x_i}(x, t) v_{x_j}(x, t) dx dt \\ & + \varepsilon \int_Q \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x, t) dx dt + \int_Q (a + G(\varphi)) v^2(x, t) dx dt \\ & = \int_Q \tilde{f}(x, t) dx dt + \int_Q \psi(x, v) v(x, t) dx dt. \quad (9) \end{aligned}$$

Применяя в правой части (9) неравенства Гёльдера и Юнга, а также условие (4), получим (см. [5])

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{w_0 T}{2\delta_1^2 \mu_0} K^2(T) \right) \int_{\Omega} v^2(x, T) dx \\ & + \int_Q \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) v_{x_i}(x, t) v_{x_j}(x, t) dx dt + \varepsilon \int_Q \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x, t) dx dt \\ & + \left(a_1 - \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}{2} - \frac{w_0 T K_0}{2\delta_2^2 \mu_0} \right) \int_Q v^2(x, t) dx dt \leq \frac{1}{2\delta_3^2} \int_Q \tilde{f}^2(x, t) dx dt. \quad (10) \end{aligned}$$

Положим $\delta_3^2 = \lambda_2$. Тогда (10) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} v^2(x, T) dx + \int_Q \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) v_{x_i}(x, t) v_{x_j}(x, t) dx dt \\ & + \varepsilon \int_Q \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x, t) dx dt + \frac{\lambda_2}{2} \int_Q v^2(x, t) dx dt \leq \frac{1}{2\lambda_2} \int_Q \tilde{f}^2(x, t) dx dt. \quad (11) \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v^2(x, T) dx \leq N_1, \quad \int_Q v^2(x, t) dx dt \leq N_2, \\ & \sum_{i,j=1}^n \int_Q a^{ij}(x) v_{x_i}(x, t) v_{x_j}(x, t) dx dt + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_Q v_{x_i}^2(x, t) dx dt \leq N_3. \quad (12) \end{aligned}$$

Для получения следующей априорной оценки рассмотрим равенство

$$\int_Q L_\varepsilon v \cdot v_t(x, t) \, dxdt = \int_Q \tilde{f}(x, t)v_t(x, t) \, dxdt + \int_Q \psi(x, v)v_t(x, t) \, dxdt. \quad (13)$$

Интегрируя по частям и используя неравенства Гёльдера и Юнга, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_Q v_t^2(x, t) \, dxdt + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a^{ij} v_{x_i}(x, T)v_{x_j}(x, T) \, dx \\ + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega v_{x_i}^2(x, T) \, dx \leq \int_Q \tilde{f}^2(x, t) \, dxdt \\ + \frac{w_0 K_0 T}{\mu_0} \int_Q v^2(x, t) \, dxdt + \frac{w_0 T}{\mu_0} K^2(T) \int_\Omega v^2(x, T) \, dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда с учетом (12) имеем

$$\begin{aligned} \int_Q v_t^2(x, t) \, dxdt \leq N_4, \\ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i}(x, T)v_{x_j}(x, T) \, dx + \varepsilon \int_\Omega v_{x_i}^2(x, T) \, dx \leq \frac{N_4}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из равенства (7) следует

$$\begin{aligned} \operatorname{vrai\,max}_Q |v| &\leq \frac{1}{a_0 - M_0} \operatorname{vrai\,max}_Q |\tilde{f}(x, t)| + \frac{1}{a_0 - M_0} \operatorname{vrai\,max}_Q |\psi(x, v)| \\ &\leq \frac{1}{a_0 - M_0} \operatorname{vrai\,max}_Q |\tilde{f}(x, t)| \\ &+ \frac{w_0}{a_1 \mu_0} \left(\int_0^T |K_1(x, t)| dt + |K(T)| \right) \operatorname{vrai\,max}_Q |v| = A + C_1 \operatorname{vrai\,max}_Q |v|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{vrai\,max}_Q |v| \leq \frac{A}{1 - C_1} = N_5,$$

Оценим

$$|\varphi(x, v)| = \frac{1}{|\mu(x)|} \left| f_0(x) - \int_0^T K_1(x, t)v(x, t)dt - K(T)v(x, T) \right|$$

$$\leq \frac{1}{\mu_0} [F_0 + N_5 K_0 + |K(T)|N_5] = N_6,$$

Поскольку на самом деле функция $v(x, t)$ определяется также параметром ε , из семейства $\{v_\varepsilon(x, t)\}$ можно получить семейство функций $\{u_\varepsilon(x, t)\}$ с помощью равенств

$$u_\varepsilon(x, t) = v_\varepsilon(x, t) + w(x, t), \quad u_\varepsilon(x, t)|_S = 0.$$

Тогда для семейства $\{u_\varepsilon(x, t)\}$ в целом имеем оценку

$$\int_Q \left(u^2(x, t) + u_t^2(x, t) + \sum_{i=1}^n \rho^\alpha(x) u_{x_i}^2(x, t) \right) dx dt + \operatorname{vrai} \max_Q |u| < N_7. \quad (16)$$

Условие переопределения

$$\int_0^T K(t) u_\varepsilon(x, t) dx = \mu(x) \quad (17)$$

для семейства $\{u_\varepsilon(x, t)\}$ выполняется (см., например, [4]). Тогда для семейства $\{u_\varepsilon(x, t)\}$ в силу (17) выполняется равенство

$$u_{\varepsilon t}(x, t) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) u_{\varepsilon x_j}(x, t))$$

$$+ a(x, t) u_\varepsilon(x, t) + q_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x, t) = f(x, t), \quad (18)$$

где

$$q_\varepsilon(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[f_0(x) - \int_0^T K_1(x, t)(u_\varepsilon(x, t) - w(x, t)) dt \right.$$

$$\left. - K(T)(u_\varepsilon(x, T) - w(x, T)) \right].$$

Умножим (18) на пробную функцию $\eta(x, t)$ и проинтегрируем по Q :

$$\int_Q (u_{\varepsilon t} \eta + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{\varepsilon x_i} \eta_{x_j} + a u_{\varepsilon} \eta + q u_{\varepsilon} \eta) dx dt = \int_Q f \eta dx dt.$$

Из оценки (16) и из [5] следует, что можно выбрать подпоследовательности $\{\varepsilon_m\}$ и $\{u_m(x, t)\}$ такие, что при $m \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_m \rightarrow 0$$

$$u_m(x, t) \rightarrow u(x, t), \quad u_{mt}(x, t) \rightarrow u_t(x, t) \text{ почти всюду в } Q,$$

$$u_m(x, T) \rightarrow u(x, T) \text{ почти всюду в } \Omega.$$

В пределе получим нужное нам обобщенное решение, что и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. Prilepko A. I., Orlovsky D. C., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Dekker, 1999.
2. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. Mathematical studies. Monograph series. 2003. V. 10.
3. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
4. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853.
5. Кудрявцев Л. Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Тр. МИАН СССР, 1959. Т. 55. С. 3–182.

ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ ДВУХ ПЛАСТИН,
КАЖДАЯ ИЗ КОТОРЫХ СОДЕРЖИТ
ЖЕСТКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ*)

Т. А. Ротанова

Задачи о контакте упругих тел со свободной границей с каждым годом привлекают все большее внимание математиков. Задачи со свободными границами — это задачи, в которых неизвестная заранее функция в разных частях области удовлетворяет качественно различным условиям. Область контакта определяется в процессе самого решения задачи. Ограничения, накладываемые на решения задач данного класса, носят вид неравенств и являются условиями взаимного непроникания контактирующих тел. Таким образом, краевые условия имеют вид системы равенств и неравенств.

В связи с активным изучением композитных материалов в настоящее время представляет огромный интерес исследование нового класса контактных задач со свободной границей, а именно задач о контакте упругих тел, содержащих жесткие включения. Одной из особенностей, возникающих при анализе пластин, содержащих жесткие включения, является то, что в области жесткого включения не выполняется уравнение равновесия. При этом внешние силы приложены ко всем точкам пластин. Таким образом, математическая постановка данного класса задач требует принципиально нового подхода. В ряде недавних работ А. М. Хлуднева, Г. В. Алексеева, Г. Лейдеринга, Е. М. Рудого,

*) Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК № 02.740.11.0609).

Н. В. Неустроевой, А. Новотны, Я. Соколовски, А. Зоковски (см. [1–7]), посвященных описанию и анализу двумерных задач о равновесии и контакте упругих тел, содержащих трещины и жесткие включения, был предложен метод, позволяющий выписать полную систему краевых условий на границе жесткого включения. Особый интерес представляет собой случай двух и более жестких включений с заданным на их границах условием непроникания.

В задачах такого рода условие равновесия жестких подобластей пластин описывается с помощью равенства и неравенства в соответствии с принципом виртуальных перемещений, смысл которого состоит в следующем: работа внутренних сил на допустимых перемещениях точек тела не меньше, чем работа внешних сил, а на истинных перемещениях работа обращается в нуль. Оказывается, что принцип виртуальных перемещений в точности эквивалентен вариационному принципу.

Задачи о контакте двух упругих пластин, расположенных под углом α друг к другу, под действием внешних сил (модель Кирхгофа — Лява), можно найти в работах [8–10]. Особенностью данной работы является то, что каждая из пластин содержит жесткое включение, выходящее на область возможного контакта.

1. Геометрия задачи. Пусть две упругие пластины расположены под углом α друг к другу, где $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$. В естественном состоянии пластины контактируют по линии γ . Полагаем, что ограниченные области $\Omega, G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкими границами Γ и ∂G соответствуют срединным плоскостям пластин. Пусть $\gamma \subset \partial G$, $\gamma \cap \Gamma = \emptyset$ и $\partial G = \gamma \cup \bar{\gamma}_0$. Считаем, что γ не содержит концевых точек. При этом нижняя пластина G деформируется в своей плоскости, а точки верхней пластины Ω допускают перемещение только в вертикальном направлении. Обозначим через $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ вектор внешней нормали к границе Γ , $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — вектор нормали к γ , расположенный в плоскости верхней пластины Ω , $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внутренней нормали к ∂G , распо-

ложенный в плоскости нижней пластины G (рис. 1). Кроме того,

$$w_\nu = \frac{\partial w}{\partial \nu}, \quad w_q = \frac{\partial w}{\partial q}.$$

Пусть также $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$, $g_i \in L^2(G)$, $i = 1, 2$, — заданные функции, описывающие действие внешних сил на верхнюю и нижнюю пластины соответственно.

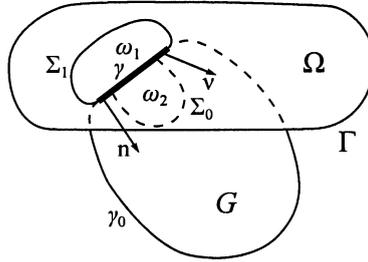


Рис. 1. Контакт пластин с жесткими включениями.

Будем рассматривать пространство $H_{\gamma_0}^1(G) \times H_0^2(\Omega)$, где

$$H_{\gamma_0}^1(G) = \{\mathbf{u} \in [H^1(G)]^2 \mid \mathbf{u} = 0 \text{ на } \gamma_0\},$$

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ w \in H^2(\Omega) \mid w = \frac{\partial w}{\partial q} = 0 \text{ на } \Gamma \right\},$$

и следующую билинейную форму:

$$a_\Omega(w, v) = \int_\Omega (w_{,11}v_{,11} + w_{,22}v_{,22} + \varkappa(w_{,11}v_{,22} + w_{,22}v_{,11}) + 2(1 - \varkappa)w_{,12}v_{,12}).$$

Здесь \varkappa — коэффициент Пуассона верхней пластины Ω . Введем обозначения для изгибающего момента верхней пластины:

$$m(w) = \varkappa \Delta w + (1 - \varkappa) \frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2},$$

и перерезающей силы

$$t^\nu(w) = \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\Delta w + (1 - \varkappa) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right), \quad s = (s_1, s_2) = (-\nu_2, \nu_1).$$

Для описания нижней пластины введем тензор модулей упругости $B = \{b_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$. Пусть имеет место положительная определенность коэффициентов $b_{ijkl} \in L^\infty(G)$:

$$b_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0|\xi|^2 \quad \text{для любых } \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 > 0,$$

а также их симметричность: $b_{ijkl} = b_{klij} = b_{jikl}$, $i, j, k, l = 1, 2$. Также введем тензоры деформаций $\varepsilon(\mathbf{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\}$ и напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, соответственно, $\sigma \mathbf{n} = (\sigma_{1j}n_j, \sigma_{2j}n_j)$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, $i, j = 1, 2$. Все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Для верхней пластины жесткое включение — это подобласть ω_1 с границей $\partial\omega_1 = \gamma \cup \Sigma_1$, где Σ_1 — кривая класса $C^{1,1}$, и $\partial\omega_1 \cap \Gamma = \emptyset$. Тогда $\Omega \setminus \bar{\omega}_1$ соответствует упругой части пластины. Перемещения точек жесткой подобласти ω_1 представляют собой элементы пространства аффинных непрерывных функций:

$$L(\omega_1) = \{l \mid l(\mathbf{y}) = a_0 + a_1y_1 + a_2y_2, \quad a_i = \text{const}, \quad i = 0, 1, 2; \\ \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \omega_1\}.$$

Жесткое включение в нижней пластине — подобласть $\omega_2 \subset G$ с границей $\partial\omega_2 = \gamma_2 \cup \Sigma_0$, где Σ_0 является кривой класса $C^{0,1}$, при этом область возможного контакта пластин разбивается на три части: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$. Тогда $G \setminus \bar{\omega}_2$ соответствует упругой части пластины. Перемещения точек жесткой подобласти ω_2 принадлежат пространству инфинитезимальных жестких перемещений:

$$R(\omega_2) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Cx + D, \quad x \in \omega_2\},$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \quad D = (d^1, d^2), \quad \text{где } c, d^1, d^2 = \text{const}.$$

Определим функционал энергии на $H_{\gamma_0}^1(G) \times H_0^2(\Omega)$:

$$E(\mathbf{u}, w) = \frac{1}{2} \int_G \sigma(\mathbf{u})\varepsilon(\mathbf{u}) - \int_G \mathbf{g}\mathbf{u} + \frac{1}{2} a_\Omega(w, w) - \int_\Omega fw.$$

Функции $w(\mathbf{y})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in G$ описывают перемещения точек верхней и нижней пластин соответственно.

2. Разрешимость задачи. Рассмотрим вариационную постановку исходной задачи. Вариационный подход позволит нам исследовать вопросы существования и единственности решений. Для этого введем множество допустимых перемещений:

$$K_{\omega_1, \omega_2} = \{(\mathbf{u}, w) \in H_{\gamma_0}^1(G) \times H_0^2(\Omega) \mid \mathbf{u} \mathbf{n} \sin \alpha + w \geq 0 \text{ на } \gamma; w|_{\omega_1} \in L(\omega_1), \mathbf{u}|_{\omega_2} \in R(\omega_2)\}.$$

Теорема 1 *Задача минимизации функционала $E(\mathbf{u}, w)$ на множестве K_{ω_1, ω_2} имеет решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Покажем, что выполнены все условия обобщенной теоремы Вейерштрасса, и задача минимизации имеет решение.

Исходное пространство функций $H_{\gamma_0}^1(G) \times H_0^2(\Omega)$ рефлексивно. Функционал $E(\mathbf{u}, w)$ слабо полунепрерывен снизу и коэрцитивен.

Множество K_{ω_1, ω_2} выпукло. Рассмотрим последовательность (\mathbf{u}_k, w_k) из K_{ω_1, ω_2} , сходящуюся к $(\mathbf{u}, w) \in H_0^1(G) \times H_0^2(\Omega)$. В силу непрерывности функций из пространств $L(\omega_1)$ и $R(\omega_2)$ для предельных функций выполнено $w|_{\omega_1} \in L(\omega_1)$, $\mathbf{u}|_{\omega_2} \in R(\omega_2)$. Используя теорему вложения Соболева для следов, убеждаемся, что множество K_{ω_1, ω_2} замкнуто и, следовательно, слабо замкнуто.

Теорема 1 доказана.

В силу выпуклости и дифференцируемости функционала $E(\mathbf{u}, w)$ задача минимизации $E(\mathbf{u}, w)$ на множестве K_{ω_1, ω_2} эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$(\mathbf{u}, w) \in K_{\omega_1, \omega_2}, \quad (1)$$

$$\int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \sigma(\mathbf{u}) \varepsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) - \int_G \mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) + a_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1}(w, \bar{w} - w) - \int_{\Omega} f(\bar{w} - w) \geq 0 \quad \forall (\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) \in K_{\omega_1, \omega_2}. \quad (2)$$

Отметим, что решение задачи (1), (2) единственно.

3. Дифференциальная постановка задачи. Сформулируем дифференциальную постановку задачи. Граничные условия в дифференциальной постановке задачи являются естественными и выводятся из вариационного неравенства (1), (2) в предположении достаточной гладкости решения.

Чтобы получить уравнения равновесия пластин, необходимо подставить в (2) в качестве пробных функций $(\mathbf{u} \pm \varphi, w \pm \psi)$, где $(\varphi, \psi) \in [C_0^\infty(G \setminus \bar{\omega}_2)]^2 \times C_0^\infty(\Omega \setminus (\bar{\omega}_1 \cup \bar{\gamma}))$ и φ, ψ продолжаются нулем в ω_2 и ω_1 соответственно. Уравнения равновесия будут выполнены в смысле распределений:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(B\varepsilon(\mathbf{u})) &= \mathbf{g} \text{ в } G \setminus \bar{\omega}_2, \\ \Delta^2 w &= f \text{ в } \Omega \setminus \bar{\omega}_1. \end{aligned}$$

Из определения множества допустимых перемещений K_{ω_1, ω_2} вытекают следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 0 \text{ на } \gamma_0, \quad w = w_q = 0 \text{ на } \Gamma, \\ \mathbf{u}|_{\omega_2} &= \rho_0, \text{ где } \rho_0 \in R(\omega_2), \quad w|_{\omega_1} = l_0, \text{ где } l_0 \in L(\omega_1), \\ \mathbf{u}n \sin \alpha + w &\geq 0, \quad [w] = [w_\nu] = 0 \text{ на } \gamma. \end{aligned}$$

Отметим при этом, что

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \rho_0 \text{ на } \gamma_2 \cup \Sigma_0, \\ w &= l_0 \text{ на } \gamma \cup \Sigma_1, \\ w_{y_i} &= (l_0)_{y_i} \text{ на } \gamma \cup \Sigma_1, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Последние условия описывают поведение функций и их производных на границах жестких включений исходя из условий: $\mathbf{u} \in H_{\gamma_0}^1(G)$ в целом в области G и $w \in H_0^2(\Omega)$ в области Ω .

Для того чтобы вывести оставшиеся краевые условия, воспользуемся формулами Грина. Первая из них справедлива для области $\Omega \setminus \bar{\omega}_1$

и достаточно гладкой функции w , обращающейся в нуль на внешней границе Γ :

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1} \varphi \Delta^2 w = a_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1}(w, \varphi) - \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} t^\nu(w)^+ \varphi + \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} m(w)^+ \varphi_\nu \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega). \quad (3)$$

Вторая имеет место для области с границей класса $C^{0,1}$ и достаточно гладкой функции \mathbf{u} . Выпишем ее в применении к области $G \setminus \bar{\omega}_2$ с внутренней нормалью \mathbf{n} к границе:

$$\int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \sigma(\mathbf{u}) \varepsilon(\psi) = - \int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) \psi - \int_{\partial(G \setminus \bar{\omega}_2)} \sigma \mathbf{n} \cdot \psi \quad \forall \psi \in H^1(G \setminus \bar{\omega}_2). \quad (4)$$

Подставим в вариационное неравенство (2) пробные функции

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) = (\mathbf{u} + \psi, w + \varphi), \quad (\psi, \varphi) \in K_{\omega_1, \omega_2}.$$

Применяя формулы Грина (3) к $\Omega \setminus \bar{\omega}_1$ и (4) к $G \setminus \bar{\omega}_2$, получим следующее соотношение:

$$- \int_{\Sigma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_3} \sigma \mathbf{n} \cdot \psi + \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} t^\nu(w)^+ \varphi - \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} m(w)^+ \varphi_\nu \geq \int_{\omega_2} \mathbf{g} \psi + \int_{\omega_1} f \varphi.$$

Здесь мы воспользовались выполнением уравнений равновесия в упругих областях пластин. При подстановке в (2) пробных функций $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) = (0, 0)$ и $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) = 2(\mathbf{u}, w)$ получим соответствующее равенство, выполненное на решении (\mathbf{u}, w) . Таким образом, дифференциальная постановка задачи имеет следующий вид. Найти функции \mathbf{u} , w , определенные в G и Ω соответственно, такие, что

$$- \operatorname{div}(B\varepsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{g} \text{ в } G \setminus \bar{\omega}_2, \quad (5)$$

$$\Delta^2 w = f \text{ в } \Omega \setminus \bar{\omega}_1, \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \gamma_0, \quad w = w_q = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}|_{\omega_2} = \rho_0, \text{ где } \rho_0 \in R(\omega_2), \quad (8)$$

$$w|_{\omega_1} = l_0, \text{ где } l_0 \in L(\omega_1), \quad (9)$$

$$\mathbf{un} \sin \alpha + w \geq 0, [w] = [w_\nu] = 0 \text{ на } \gamma, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Sigma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_3} \sigma \mathbf{n} \cdot \psi + \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} t^\nu(w)^+ \varphi - \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} m(w)^+ \varphi_\nu \\ \geq \int_{\omega_2} \mathbf{g} \psi + \int_{\omega_1} f \varphi \quad \forall (\psi, \varphi) \in K_{\omega_1, \omega_2}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Sigma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_3} \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} + \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} t^\nu(w)^+ w - \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} m(w)^+ w_\nu \\ = \int_{\omega_2} \mathbf{g} \mathbf{u} + \int_{\omega_1} f w. \quad (12) \end{aligned}$$

Теперь в предположении гладкости решения получим из (5)–(12) вариационное неравенство (1), (2) и покажем тем самым, что задачи эквивалентны. Для этого домножим уравнение равновесия (5) на $\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$ и проинтегрируем по области $G \setminus \bar{\omega}_2$, а уравнение равновесия (6) — на $\bar{w} - w$ и проинтегрируем по области $\Omega \setminus \bar{\omega}_1$. Применяя далее формулы Грина (3), (4) и складывая полученные выражения, имеем

$$\begin{aligned} \int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \sigma(\mathbf{u}) \varepsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) - \int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) + a_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1}(w, \bar{w} - w) \\ - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1} f(\bar{w} - w) = - \int_{\Sigma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_3} \sigma \mathbf{n}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \\ + \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} t^\nu(w)^+(\bar{w} - w) - \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} m(w)^+(\bar{w}_\nu - w_\nu). \quad (13) \end{aligned}$$

При этом из (11) находим

$$- \int_{\Sigma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_3} \sigma \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} t^\nu(w)^+ \bar{w} - \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} m(w)^+ \bar{w}_\nu \geq \int_{\omega_2} \mathbf{g} \bar{\mathbf{u}} + \int_{\omega_1} f \bar{w},$$

а из (12) следует

$$\int_{\Sigma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_3} \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} - \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} t^\nu(w)^+ w + \int_{\Sigma_1 \cup \gamma} m(w)^+ w_\nu = - \int_{\omega_2} \mathbf{g} \mathbf{u} - \int_{\omega_1} f w.$$

Подставляя полученные соотношения в правую часть (13), получим в точности неравенство (2). Доказан следующий результат.

Теорема 2 Пусть граница подобласти ω_1 включает в себя всю область возможного контакта γ . Если решение вариационного неравенства (1), (2) достаточно гладкое, то оно удовлетворяет системе (5)–(12). Гладкое решение краевой задачи (5)–(12) является также решением вариационного неравенства (1), (2).

Таким образом, существует единственное решение краевой задачи (5)–(12).

Отметим, что на $\gamma_1 \cup \gamma_3$, где осуществляется контакт упругой части нижней пластины с жестким включением ω_1 , из вариационного неравенства можно извлечь дополнительные краевые условия. Эти условия родственны условиям в классической задаче Синьорини (см. [11]):

$$\sigma_n \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_n(\mathbf{un} \sin \alpha + w) = 0.$$

Другие интересные случаи расположения жестких включений относительно линии возможного контакта γ для задачи о контакте двух пластин, каждая из которых содержит жесткое включение, можно найти в [12, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Г. В., Хлуднев А. М. Трещина в упругом теле, выходящая на границу под нулевым углом // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 2. С. 15–29.
2. Лойгеринг Г., Хлуднев А. М. О равновесии упругих тел, содержащих тонкие жесткие включения // Докл. РАН. 2010. Т. 430, № 1. С. 1–4.
3. Рудой Е. М. Формула Гриффитса и интеграл Черепанова — Райса для пластины с жестким включением и трещиной // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 2. С. 98–117.
4. Хлуднев А. М. Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Изв. РАН. 2010. № 5. С. 98–110.
5. Khludnev A. M. On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks. Preprint. Friedrich-Alexander-University. Erlangen-Nuremberg, 2009. N 327. P. 1–29.
6. Неустроева Н. В. Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 51–64.

7. *Khudnev A. M., Novotny A. A., Sokolowski J., Zochowski A.* Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions // *J. Mechanics Physics of Solids*. 2009. V. 57, N 10. P. 1718–1732.
8. *Неустроева Н. В.* Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2009. Т. 12, № 4. С. 92–105.
9. *Ротанова Т. А.* Задача об одностороннем контакте двух пластин, одна из которых содержит жесткое включение // *Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика*. 2011. Т. 11, № 1. С. 87–98.
10. *Хлуднев А. М.* Об одностороннем контакте двух пластин, расположенных под углом друг к другу // *Прикл. математика техн. физика*. 2008. Т. 49, № 4. С. 553–567.
11. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
12. *Ротанова Т. А.* Контакт пластин, жесткие включения в которых выходят на границу // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Сер. математика и механика*. 2011. Т. 15, № 3. С. 99–107.
13. *Ротанова Т. А.* О постановках и разрешимости задач о контакте двух пластин, содержащих жесткие включения // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2012. Т. 15, № 2. С. 107–118.

КРИТЕРИЙ СИЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ПО ЛЯПУНОВУ СЕМЕЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ
СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ОТНОСИТЕЛЬНО МНОЖЕСТВА

Г. А. Рудых, Д. Я. Киселевич

§ 1. Введение

Рассмотрим нелинейную неавтономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{x} = X(x, t), \quad x(t)|_{t=s} = x^0, \quad (1.1)$$

где $x, X(x, t)$ — векторы из \mathbb{R}^n ; $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — открытое множество; $G = \Omega \times I$; $I = \{t : s \leq t < t_*\}$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, являющаяся проекцией G в \mathbb{R}^n ; $X(x, t) \in C^1(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$; t_* — число на полупрямой $t > s$ или символ $+\infty$.

В дальнейшем относительно системы ОДУ (1.1) будем использовать два предположения. Будем говорить, что для системы ОДУ (1.1) *выполняется предположение А*, если $X_i(x, t) \in C_{xt}^{(1,1)}(G)$, решения последней продолжимы до бесконечности и остаются в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ при их продолжении как вправо, так и влево по t . Будем говорить, что для системы ОДУ (1.1) *выполняется предположение В*, если все ее решения с начальными условиями $x^0 \in \Omega_s \subset \Omega$ не стремятся к границе $\partial\Omega$ области Ω при $t \rightarrow \infty$, где $\Omega_s \subset \Omega$ — компактное множество положительной меры Лебега $\text{mes } \Omega_s > 0$.

Введем ряд обозначений, используемых ниже: $\rho(x, z)$ — расстояние между элементами $x, z \in \mathbb{R}^n$; $\chi(x, t) = \nabla \cdot X(x, t)$ — дивергенция векторного поля $X(x, t)$ системы ОДУ (1.1); $\chi(x(x^0, s, t), t) =$

$\nabla \cdot X(x, t)|_{x=x(x^0, s, t)}$ — дивергенция векторного поля $X(x, t)$, вычисленная вдоль ее решения $x = x(x^0, s, t)$; $\Omega_t = \{x(x^0, s, t) = T(t, s)x^0 : x^0 \in \Omega_s\}$ — множество переменной структуры из \mathbb{R}^n ; $T(t, s)$ — оператор сдвига [1] вдоль траекторий системы ОДУ (1.1); $\text{mes } \Omega_t$ — мера Лебега множества $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$; $D(x(x^0, s, t), t) = \det \left\| \frac{\partial x(x^0, s, t)}{\partial x^0} \right\|$ — якобиан отображения $x^0 \rightarrow x(x^0, s, t)$; $S(x, t) = \det \left\| \frac{\partial x^0(x, t, s)}{\partial x} \right\|$ — якобиан отображения $x(x^0, s, t) \rightarrow x^0$.

В работе устанавливается связь теоремы Лиувилля [2] для системы ОДУ (1.1) с устойчивостью движения по Ляпунову [3]. В частности, получены достаточные условия, обеспечивающие сильную неустойчивость по Ляпунову семейства траекторий $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ системы ОДУ (1.1) относительно компактного множества $\Omega_s \subset \mathbb{R}^n$ ее начальных состояний. С использованием теоремы Лиувилля введены в рассмотрение и оценены снизу функции, характеризующие локальную расходимость и неограниченную сгущаемость траекторий системы ОДУ (1.1). Полученные результаты применяются к задаче о входе космического летательного аппарата в атмосферу планеты с неработающим двигателем (пассивный спуск).

§ 2. Теорема Лиувилля для неавтономной системы ОДУ

В дальнейшем систему ОДУ (1.1) будем трактовать как закон движения изображающей точки x в фазовом пространстве \mathbb{R}^n . *Ансамблем Гиббса* назовем множество идентичных систем вида (1.1) с одинаковыми правыми частями и отличающимися друг от друга лишь начальными состояниями. Итак, если систему ОДУ (1.1) трактовать как закон движения изображающей точки x в \mathbb{R}^n , то ансамблю Гиббса системы (1.1) будет соответствовать в \mathbb{R}^n ансамбль изображающих точек. Пусть $\Omega_s \subset \Omega$ — компактное множество положительной меры Лебега $\text{mes } \Omega_s > 0$, занимаемое ансамблем изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в начальный момент времени $t = s$. Каждая из изображающих точек $x^0 \in \Omega_s$, двигаясь по траекториям си-

стемы ОДУ (1.1), переместится за время от s до t в новое состояние $x(x^0, s, t) = T(t, s)x^0 \in \Omega_t \subset \Omega$, где $T(t, s)$ — оператор сдвига [1] по траекториям системы ОДУ (1.1); Ω_t — образ множества Ω_s в силу системы ОДУ (1.1); $\Omega_t = T(t, s)\Omega_s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество переменной структуры $\Omega_t \subset \Omega$ назовем *равномерно стягивающимся к точке* $x^* \in \Omega$, если

$$\sup_{x \in \Omega_t} \rho(x^*, x) \rightarrow 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ назовем *непрерывным в точке* $z \in D$ *относительно множества* D , если для любой ε -окрестности $K(x, \varepsilon)$ точки $x = Fz$ существует δ -окрестность $K(z, \delta)$ точки z такая, что для всех точек, принадлежащих множеству $K(z, \delta) \cap D$, справедливо включение

$$F(K(z, \delta) \cap D) \subset K(x, \varepsilon).$$

Ниже будем использовать уравнение Лиувилля (уравнение неразрывности) [4]

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = Lf(x, t), \quad f(x, t)|_{t=s} = f_0(x), \quad (2.1)$$

соответствующее системе ОДУ (1.1) и выражающее закон сохранения ансамбля изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1). Здесь

$$L \cdot = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [X_i(x, t) \cdot] = -\nabla \cdot [X(x, t) \cdot] \quad (2.2)$$

— оператор Лиувилля, действующий по формуле $L : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$; $f_0(x) = f(x, s)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$f_0(x) \geq 0, \quad f_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) dx = 1.$$

При этом $f_0(x)$ трактуется как начальная функция плотности распределения ансамбля изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в множестве Ω_s . Текущее значение функции плотности распределения

$f(x, t)$ определяется из задачи Коши (2.1) и характеризует состояние ансамбля изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в образе Ω_t множества Ω_s . Уравнение Лиувилля (2.1) с учетом (2.2) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}f(x, t) = -\chi(x, t)f(x, t), \quad f(x, t)|_{t=s} = f_0(x), \quad (2.1)'$$

где $\frac{d}{dt}f(x, t)$ — полная производная в силу системы ОДУ (1.1). Из уравнения Лиувилля (2.1)' следует зависимость

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}D(x(x^0, s, t), t) &= \chi(x(x^0, s, t), t)D(x(x^0, s, t), t), \\ D(x(x^0, s, t), t)|_{t=s} &= 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В работе [5] показано, что функция $S(x, t)$ определяется из решения задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}S(x, t) = LS(x, t), \quad S(x, t)|_{t=s} = 1, \quad (2.4)$$

где L — оператор Лиувилля, определяемый согласно (2.2).

Теорема 1. Пусть для системы ОДУ (1.1) выполняется предположение **A**. Пусть $\Omega_s \subset \Omega$ — компактное множество положительной меры Лебега $\text{mes } \Omega_s > 0$, занимаемое ансамблем изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в начальный момент времени $t = s$. Пусть каждая из изображающих точек $x^0 \in \Omega_s$, двигаясь по траекториям системы ОДУ (1.1), переместится за время от s до t в новое состояние $x(x^0, s, t) = T(t, s)x^0 \in \Omega_t$. Пусть $\Omega_t = \{x(x^0, s, t) = T(t, s)x^0 : x^0 \in \Omega_s\}$ — образ множества Ω_s в силу системы ОДУ (1.1). Тогда оператор сдвига $T(t, s)$ по траекториям системы ОДУ (1.1) определяет гомеоморфизм множества $\Omega_s \subset \Omega$ в множество $\Omega_t = T(t, s)\Omega_s$. Кроме того, $\Omega_t \subset \Omega$ является компактным множеством положительной меры Лебега $\text{mes } \Omega_t > 0$ и обладает свойствами

$$\text{mes } \Omega_t = \int_s^t \int_{\Omega_t} \chi(x, \tau) dx d\tau + \text{mes } \Omega_s, \quad (2.5)$$

$$\lim_{\Omega_t \rightarrow x^*} \frac{d}{dt} \ln \text{mes } \Omega_t = \chi(x^*, t). \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для системы ОДУ (1.1) выполняется предположение **A**, решения $x(t) = x(x^0, s, t)$ последней являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями класса C^2 по t и класса C^1 по x^0, s . Тогда отображение $T(t, s) : \Omega_s \rightarrow \Omega_t$, осуществляемое оператором сдвига $T(t, s)$ по траекториям $x(t) = x(x^0, s, t)$ системы ОДУ (1.1), является взаимно однозначным, причем $T(t, s)x^0 \in C^1$ по совокупности x^0, s, t для любой точки $x^0 \in \Omega_s$ и $t \in I$. При этом $\Omega_t = \{T(t, s)x^0 : x^0 \in \Omega_s\} = T(t, s)\Omega_s$ — множество, занимаемое ансамблем изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в текущий момент времени $t \in I$. Поэтому отображение $T(t, s) : \Omega_s \rightarrow \Omega_t$, задаваемое соотношениями $x(t) = x(x^0, s, t)$, дифференцируемо, а следовательно, и непрерывно в любой точке $x^* \in \Omega_s$, причем линейный ограниченный оператор

$$V = \left\| \frac{\partial x(x^0, s, t)}{\partial x^0} \Big|_{x^0=x^*} \right\|,$$

действующий из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n , является производной Фреше нелинейного оператора $T(t, s)$ в точке $x^* \in \Omega_s$ [1, 6]. Далее, так как непрерывный образ компакта есть компакт, из компактности $\Omega_s \subset \Omega$ следует компактность $\Omega_t \subset \Omega$. Из непрерывности и взаимной однозначности отображения $T(t, s) : \Omega_s \rightarrow \Omega_t$ следует, что оператор сдвига $T(t, s)$ определяет гомеоморфизм множества Ω_s в множество Ω_t . При этом в силу того, что отображение, осуществляемое оператором сдвига $T(t, s) : \Omega_s \rightarrow \Omega_t$, непрерывно дифференцируемо и $D(x(x^0, s, t), t) \neq 0$, для любой точки $x \in \Omega_t$ существует единственное непрерывно дифференцируемое обратное отображение $x^0 = T^{-1}(t, s)x$, якобиан которого $S(x, t)$ удовлетворяет задаче Коши (2.4).

Рассмотрим обратное отображение $T^{-1}(t, s) : \Omega_t \rightarrow \Omega_s$. Покажем, что $T^{-1}(t, s)$ является непрерывным отображением в произвольной точке $\bar{x} \in \Omega_t$ относительно Ω_t . Иначе для любой ε -окрестности $K(\bar{x}^0, \varepsilon)$ точки $\bar{x}^0 = T^{-1}(t, s)\bar{x}$ существует δ -окрестность $K(\bar{x}, \delta)$ точки \bar{x} такая, что для всех точек $x \in K(\bar{x}, \delta) \cap \Omega_t$ выполняется соотношение

$T^{-1}(t, s) \in K(\bar{x}^0, \varepsilon)$. Поскольку любое замкнутое подмножество компакта есть компакт, множество $\Omega_s \setminus K(\bar{x}^0, \varepsilon)$ замкнуто, а следовательно, компактно. Поэтому в силу непрерывности отображения $T(t, s)$ подмножество $D = T(\Omega_{t_0} \setminus K(\bar{x}^0, \varepsilon)) \subset \Omega_t$ является компактным, а значит, и замкнутым подмножеством множества Ω_t . С другой стороны, так как отображение $T(t, s)$ взаимно однозначно, точка \bar{x} не принадлежит D . Поэтому существует δ -окрестность $K(\bar{x}, \delta)$ точки \bar{x} , в которой не содержится ни одной точки из множества D . Но тогда множество $T^{-1}(K(\bar{x}, \delta) \cap \Omega_t)$ не содержит ни одной точки из $T^{-1}D$, т. е. из множества $\Omega_s \setminus K(\bar{x}^0, \varepsilon)$. Тем самым справедливо включение

$$T^{-1}(K(\bar{x}, \delta) \cap \Omega_t) \subset K(\bar{x}^0, \varepsilon).$$

Иначе для всех $x \in K(\bar{x}, \delta) \cap \Omega_t$ имеет место соотношение $T^{-1}(t, s)x \in K(\bar{x}^0, \varepsilon)$. Наконец, в силу произвола выбора точки $\bar{x} \in \Omega_t$ следует непрерывность отображения $T^{-1}(t, s)$ на множестве Ω_t . Итак, оператор сдвига $T(t, s)$, удовлетворяющий соотношению $\Omega_t = T(t, s)\Omega_s$, определяет гомеоморфизм множества $\Omega_s \subset \mathbb{R}^n$ в множество $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$. Таким образом, $T(t, s)$ — биективное отображение и $T(t, s)$, $T^{-1}(t, s)$ — непрерывные отображения.

Теперь покажем справедливость формул (2.5), (2.6). Тот факт, что множество $\Omega_t = T(t, s)\Omega_s$ обладает положительной мерой Лебега $\text{mes } \Omega_t > 0$, следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \text{mes } \Omega_t &= \int_{\Omega_t} dx = \int_{\Omega_s} D(x(x^0, s, t), t) dx^0 \\ &= \int_{\Omega_s} \exp \left(\int_s^t \chi(x(x^0, s, \tau), \tau) d\tau \right) dx^0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Очевидно, что выражение (2.7) приводит к зависимости

$$\frac{d}{dt} \text{mes } \Omega_t = \int_{\Omega_t} \chi(x, t) dx. \quad (2.8)$$

Интегрируя соотношение (2.8) по переменной t в пределах от s до t и учитывая, что $(\text{mes } \Omega_t)|_{t=s} = \text{mes } \Omega_s$, приходим к формуле (2.5). Доказательство предельного равенства (2.6) очевидно, если учесть, что соотношение (2.8) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d}{dt} \ln \text{mes } \Omega_t = \frac{\int_{\Omega_t} \chi(x, t) dx}{\int_{\Omega_t} dx}. \quad (2.9)$$

Теорема полностью доказана.

Ниже будем использовать выражение

$$\text{mes } \Omega_t = (\text{mes } \Omega_s) \cdot \exp \left(\int_s^t \chi(x(x^0, s, \tau), \tau) d\tau \right), \quad (2.10)$$

справедливость которого следует из (2.7) и интегральной теоремы о среднем, где x^0 — некоторая точка из компакта Ω_s .

§ 3. Достаточные условия сильной неустойчивости по Ляпунову семейства траекторий системы ОДУ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Систему ОДУ (1.1), обладающую в области $G = \Omega \times I$ положительно (отрицательно) определенной дивергенцией

$$\chi(x, t) \geq a(x) > 0 \quad (\chi(x, t) \leq -b(x) < 0),$$

назовем *расширяющейся* (*сжимающейся*), если $\chi(x, t) \leq 0$, то нерасширяющейся.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Семейство траекторий

$$\Omega_t = \{x(x^0, s, t) = T(t, s)x^0 : x^0 \in \Omega_s\}, \quad s \leq t < t_*,$$

системы ОДУ (1.1) назовем *сильно неустойчивым по Ляпунову относительно множества* $\Omega_s \subset \Omega$, если каким бы большим ни было число $\varepsilon > 0$ и каким бы малым ни было число $\delta > 0$, среди множества траекторий Ω_t существуют по крайней мере две такие траектории

$\bar{x}(t) = x(\bar{x}^0, s, t)$, $\bar{\bar{x}}(t) = x(\bar{\bar{x}}^0, s, t)$, $\bar{x}^0, \bar{\bar{x}}^0 \in \Omega_s$, и такой момент времени $\tau = \tau(\varepsilon, \delta, \bar{x}^0, \bar{\bar{x}}^0)$, $s < \tau < t_*$, что

$$0 < \rho(\bar{x}^0, \bar{\bar{x}}^0) \leq \delta, \quad \rho(\bar{x}(t), \bar{\bar{x}}(t)) > \varepsilon.$$

Ясно, что сколь угодно сильная подверженность задачи Коши (1.1) малым возмущениям ее начального состояния $x^0 \in \Omega_s$ является более сильным свойством, чем неустойчивость ее траекторий по Ляпунову [6]. Действительно, в определении 4 речь идет о неограниченном возрастании расстояния между состояниями системы ОДУ (1.1) на возмущенной и невозмущенной траекториях.

Теорема 2. *Для того чтобы семейство траекторий Ω_t системы ОДУ (1.1) было сильно неустойчивым по Ляпунову относительно множества $\Omega_s \subset \Omega$, достаточно, чтобы последняя принадлежала классу расширяющихся систем и для нее выполнялись предположения А и В.*

Итак, для системы ОДУ (1.1) выполняется цепочка неравенств $\nabla \cdot X(x, t) = \chi(x, t) \geq a(x) > 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ из условия, чтобы ε -окрестность $S^*(x^0)$ траектории $x(t) = x(x^0, s, t)$ целиком лежала в области Ω , т. е. имело место строгое включение $S^* \subset \Omega$. Существование ε -окрестности $S^*(x^0)$ и числа $\varepsilon > 0$ вытекает из предположения В. Далее, пусть $S(x^0, \delta_0/2) = \{\hat{x}^0 : \rho(x^0, \hat{x}^0) \leq \delta_0/2\}$ — максимальный замкнутый шар с центром в точке x^0 радиуса $\delta_0/2$ такой, что $S \subset \Omega_s$. Тогда для шара S и его образа $\tilde{S} = T(t, s)S$ в силу формулы (2.10) выполняется соотношение

$$\text{mes } \tilde{S} \geq (\text{mes } S) \cdot \exp \left(\int_s^t \chi(x(x^0, s, \tau), \tau) d\tau \right) - \frac{\varepsilon}{4},$$

где $x(x^0, s, t)$ — решение системы ОДУ (1.1); $S = S(x^0, \delta_0/2)$; $\delta_0 > 0$ — число, не превосходящее заданного $\delta > 0$. При этом образ \tilde{S} шара S при отображении $\tilde{S} = T(t, s)S$, как показано выше, является компактным множеством при любом фиксированном $t \in I$. Кроме того, для образа \tilde{S} шара S справедлива оценка

$$\text{mes } \tilde{S} \leq (d(\tilde{S}))^n,$$

где

$$d(\tilde{S}) = \sup_{x', x'' \in \tilde{S}} \rho(x', x'') = \rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$$

— диаметр множества $\tilde{S} \subset \Omega$; $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \partial\tilde{S}$. В силу предположения **A** решение задачи Коши (1.1) существует, единственно и непрерывно зависит от начальных состояний $x^0 \in \Omega_s$. Следовательно, существует единственная функция $\chi(x(x^0, s, t), t)$. При этом отображение $x(x^0, s, t) = T(t, s)x^0$ непрерывно, взаимно однозначно и имеет непрерывное обратное отображение $T^{-1}(t, s)$. Далее, так как $\bar{x} = T(t, s)\bar{x}^0$, $\bar{\bar{x}} = T(t, s)\bar{\bar{x}}^0$ и $\rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) \leq \delta_0 < \delta$, из соотношений $\bar{x}^0 = T^{-1}(t, s)\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}^0 = T^{-1}(t, s)\bar{\bar{x}}$ следует, что $\bar{x}^0, \bar{\bar{x}}^0 \in \partial S$, где $S = S(x^0, \delta_0/2)$ — замкнутый шар. С другой стороны, известно, что мера Лебега (объем) n -мерного шара S диаметра $\partial(S)$ определяется формулой

$$\text{mes } S = c_n(d(S))^n, \quad c_n = \frac{(2^{1-n}\pi^{n/2})}{n\Gamma(n/2)}, \quad (3.1)$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ — гамма-функция. Таким образом, имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} d(\tilde{S}) &\geq (\text{mes } \tilde{S})^{1/n} \geq (c_n)^{1/n} \cdot d(S) \cdot \exp\left(n^{-1} \int_s^t \chi(\tau) d\tau\right) - \frac{\varepsilon}{4} \\ &= (c_n)^{1/n} \sup_{x^0, \tilde{x}^0 \in S} \rho(x^0, \tilde{x}^0) \cdot \exp\left(n^{-1} \int_s^t \chi(\tau) d\tau\right) - \frac{\varepsilon}{4} \\ &\geq (c_n)^{1/n} \rho(x^0, \tilde{x}^0) \cdot \exp\left(n^{-1} \int_s^t \chi(\tau) d\tau\right) - \frac{\varepsilon}{4} \\ &\quad (c_n)^{1/n} \rho(x^0, \tilde{x}^0) \cdot \exp(n^{-1}(t-s)) \inf_{x \in S^*} a(x) - \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Далее, так как $\inf_{x \in S^*} a(x) > 0$, существуют по крайней мере две точки $x(t), \tilde{x}(t) \in \tilde{S}$ такие, что выполняется неравенство

$$\rho(x(t), \tilde{x}(t)) \geq (c_n)^{1/n} \rho(x^0, \tilde{x}^0) \exp(a_*(t-s)/n) - \varepsilon/4,$$

где $a_* = \inf_{x \in S^*} a(x)$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Тривиальное решение $x = 0$ задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t), \quad x(t)|_{t=s} = x^0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \\ f(x, t) &\in C_{xt}^{(1,1)}(\mathbb{R}^1 \times I), \quad f(0, t) \equiv 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

обладает асимптотической устойчивостью по Ляпунову, если ОДУ (3.2) является сжимающимся, т. е. $\nabla \cdot f(x, t)|_{x=0} \leq -c < 0$.

Этот результат следует из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению [6]. Кроме того, скалярные сжимающиеся ОДУ вида (3.2) характерны тем, что их решения асимптотически устойчивы по Ляпунову при $\nabla \cdot f(x, t)|_{x=0} \leq -c < 0$, а множество начальных состояний, заданных в \mathbb{R}^1 , стремится к многообразию Σ_0 размерности нуль в \mathbb{R}^1 . Другими словами, многообразие начальных состояний ОДУ (3.2) стягивается в точку. Однако не всякая сжимающаяся система ОДУ будет устойчивой или, тем более, асимптотически устойчивой по Ляпунову, хотя $\text{mes } \Omega_t$ (фазовый объем) будет сжиматься.

В качестве примера рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \omega_0^2 x_1 - 2hx_2, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0,$$

где $h > 0$, $\omega_0^2 > 0$. Дивергенция векторного поля этой системы ОДУ равна $-2h < 0$, а ее решение имеет вид

$$x_1(t) = \{x_1^0(\gamma(t) + \omega^{-1}h\lambda(t)) + x_2^0\omega^{-1}\lambda(t)\} \exp(-ht),$$

$$x_2(t) = \{x_1^0(\omega - \omega^{-1}h^2)\lambda(t) + x_2^0(\gamma(t) - \omega^{-1}h\lambda(t))\} \exp(-ht),$$

где $\omega^2 = \omega_0^2 + h^2$, $\gamma(t) = \text{ch}(\omega t)$, $\lambda(t) = \text{sh}(\omega t)$. Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \infty$$

для всех начальных состояний, кроме случая, когда $x_1^0 = x_2^0 = 0$. Заметим, что для решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t)/x_1(t) = \omega - h, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [x_2(t) - (\omega - h)x_1(t)] = 0.$$

Таким образом, исследуемая система ОДУ неустойчива по Ляпунову. Однако множество начальных состояний рассматриваемой задачи Коши, заданных в \mathbb{R}^2 , стремится при $t \rightarrow \infty$ к многообразию $\Sigma_1 \subset \mathbb{R}^1$, т. е. вырождается в прямую $x_2 = (\omega - h)x_1$.

По-видимому, тот факт, что множество начальных состояний, заданных в \mathbb{R}^n , стремится по крайней мере к многообразию Σ_{n-1} или к многообразию Σ_{n-k} , является одной из форм устойчивости движения по Ляпунову. В связи с этим назовем величину $l = k/n$ *коэффициентом сжатия многообразия* Σ_n . Тогда сжимающаяся динамическая система, обладающая коэффициентом сжатия $l = n/n = 1$, для которой соответствующая приведенная система имеет нуль изолированной точкой покоя, является асимптотически устойчивой по Ляпунову.

§ 4. Функции, характеризующие локальную расходимость и неограниченную сгущаемость траекторий неавтономной системы ОДУ

Введем в рассмотрение и оценим снизу функции $\alpha(x(x^0, s, t), t)$, $\beta(x(x^0, s, t), t)$, характеризующие соответственно локальную расходимость и неограниченную сгущаемость траекторий системы ОДУ (1.1).

Итак, пусть $\tilde{S} = T(t, s)S(\tilde{x}^0, \delta_0/2)$ — образ замкнутого шара

$$S(\tilde{x}^0, \delta_0/2) = \{x^0 : \rho(x^0, \tilde{x}^0) \leq \delta_0/2\},$$

где $\delta_0 = d(S)$; $S \subset \Omega_s \subset \Omega$. Предположим, что $\delta_t = d(\tilde{S})$. Введем в рассмотрение функцию

$$\alpha(x(x^0, s, t), t) = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \delta_t / \delta_0, \quad (4.1)$$

характеризующую локальную расходимость ансамбля траекторий Гиббса системы ОДУ (1.1), выходящих из окрестности точки $\tilde{x}^0 \in \Omega_s$. Очевидно, что чем больше $\alpha(x(x^0, s, t), t)$, тем сильнее расходятся траектории из ансамбля. Оценим снизу функцию $\alpha(x(x^0, s, t), t)$. Согласно формуле (2.10) имеем

$$\text{mes } \tilde{S} = \text{mes } S(\tilde{x}^0, \delta_0/2) \cdot \exp \left(\int_s^t \chi(x(x^0, s, \tau), \tau) d\tau \right).$$

Принимая во внимание тот факт, что $\text{mes } \tilde{S} \leq (\delta_t)^n$, получим следующую оценку снизу функции (4.1):

$$\alpha(x(x^0, s, t), t) \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} B_n \cdot \exp \left(\frac{1}{n} \int_s^t \chi(x(x^0, s, \tau), \tau) d\tau \right), \quad (4.2)$$

где $B_n = [2/n\Gamma(n/2)]^{1/n}$. Таким образом, если

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \int_s^t \chi(x(x^0, s, \tau), \tau) d\tau = \infty,$$

то из формулы (4.2) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \alpha(x(x^0, s, t), t) = \infty.$$

С другой стороны, пусть $S(\tilde{x}, \varepsilon_t/2) = \{x : \rho(x, \tilde{x}) \leq \varepsilon_t/2\} \subset \Omega_t$ — замкнутый шар с центром в произвольной точке $\tilde{x} \in \Omega_t \subset \Omega$ диаметра $d(S(\tilde{x}, \varepsilon_t/2)) = \varepsilon_t$. Тогда для каждой точки $x \in S(\tilde{x}, \varepsilon_t/2)$ существует единственная точка $x^0 = T^{-1}(t, s)x \in \Omega_s$, где $T^{-1}(t, s) : x \rightarrow x(x^0, s, t)$, $t \in I$. Пусть S — образ шара $S(\tilde{x}, \varepsilon_t/2)$ при отображении $S = T^{-1}S(\tilde{x}, \varepsilon_t/2)$, причем $d(S) = \varepsilon_0$, $d(S(\tilde{x}, \varepsilon_t/2)) = \varepsilon_t$. Введем в рассмотрение функцию

$$\beta(x(x^0, s, t), t) = \lim_{\varepsilon_t \rightarrow 0} \varepsilon_0/\varepsilon_t, \quad (4.3)$$

которая характеризует, как сильно к текущему моменту времени $t \in I$ сгущаются (сближаются) между собой траектории системы ОДУ (1.1), берущие начало в окрестности точки $\tilde{x}^0 \in \Omega_s$. Иначе говоря, функция (4.3) характеризует сгущаемость ансамбля траекторий Гиббса системы ОДУ (1.1). Далее, из соотношения $S = T^{-1}S(\tilde{x}, \varepsilon_t/2)$ и формулы (2.10) следует зависимость

$$\text{mes } S = \text{mes } S(\tilde{x}, \varepsilon_t/2) \cdot \exp \left(- \int_s^t \chi(x(x^0, s, \tau), \tau) d\tau \right),$$

где x^0 — некоторая точка из множества S . Так как $(\varepsilon_0)^n \geq \text{mes } S$, т. е. $\varepsilon_0 \geq (\text{mes } S)^{1/n}$, с учетом формулы (3.1) получим, что

$$\varepsilon_0 \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} B_n \varepsilon_t \cdot \exp \left(-\frac{1}{n} \int_s^t \chi(x(x^0, s, \tau), \tau) d\tau \right),$$

где $B_n = [2/n\Gamma(n/2)]^{1/n}$. Тем самым для функции (4.3) имеет место следующая оценка снизу:

$$\beta(x(x^0, s, t), t) \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} B_n \cdot \exp \left(-\frac{1}{n} \int_s^t \chi(x(x^0, s, \tau), \tau) d\tau \right). \quad (4.4)$$

Кроме того, если

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \int_s^t \chi(x(x^0, s, \tau), \tau) d\tau = -\infty,$$

то из формулы (4.4) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \beta(x(x^0, s, t), t) = +\infty.$$

Итак, функция

$$L(t, x^0, s) = \int_s^t \chi(x(x^0, s, \tau), \tau) d\tau \quad (4.5)$$

характеризует как локальную расходимость, когда $\lim_{t \rightarrow t_*} L(t, x^0, s) = \infty$, так и неограниченную сгущаемость, когда $\lim_{t \rightarrow t_*} L(t, x^0, s) = -\infty$, траекторий системы ОДУ (1.1), где $x^0 \in \Omega_s$. Итак, имеет место следующий результат

Теорема 3. Пусть для системы ОДУ (1.1) выполняются предположения **А**, **В** и $\lim_{t \rightarrow t_*} L(t, x^0, s) = \infty$ для $x^0 \in \Omega_s$. Тогда семейство траекторий Ω_t системы ОДУ (1.1) является сильно неустойчивым по Ляпунову относительно множества $\Omega_s \subset \Omega$.

§ 5. Пример, связанный с оценкой снизу функции сгущаемости траекторий

Рассмотрим движение космического летательного аппарата с неработающим двигателем (пассивный спуск) на основном участке траектории входа в атмосферу планеты [7–9]. Основным участком траектории входа в атмосферу планеты характерен тем, что именно на нем аэродинамические нагрузки и интенсивность теплопередачи достигают своих максимальных значений. В работе [7] показано, что при определенных предположениях система ОДУ, описывающая плоское движение космического летательного аппарата на основном участке траектории входа в атмосферу планеты, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dv} &= -f(h, v)\theta, \quad f(h, v) = \left[\frac{c_x s \rho_0}{2m} v e^{-\lambda h} \right]^{-1}, \\ v \frac{d\theta}{dv} &= -\frac{c_y}{c_x} + \frac{g - v^2/r}{v} f(h, v). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь $v = v(t)$ — скорость аппарата в текущий момент времени t ; h — высота аппарата над поверхностью планеты; θ — угол наклона траектории аппарата к плоскости местного горизонта; ρ_0 — плотность атмосферы планеты на высоте $h = 0$; r — радиус планеты; m — масса аппарата; g — ускорение силы тяжести; s — характерная площадь аппарата; c_x — коэффициент лобового сопротивления; c_y — коэффициент подъемной силы; λ — логарифмический градиент плотности атмосферы.

Введем в рассмотрение новое независимое переменное $u(t) = v(t_0) - v(t)$, где $v(t_0) = v_0$ — скорость аппарата в начальный момент времени $t = t_0$. Тогда исследуемая система ОДУ (5.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dh}{du} &= f(h, u)\theta, \quad f(h, u) = \left[\frac{c_x s \rho_0}{2m} (v_0 - u) e^{-\lambda h} \right]^{-1}, \\ (v_0 - u) \frac{d\theta}{du} &= \frac{c_y}{c_x} - \frac{g - (v_0 - u)^2/r}{v_0 - u} f(h, u), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $u(t) = v(t_0) - v(t)$ — монотонно возрастающая по времени t функция; $u(t_0) = u_0 = 0$, $0 \leq u < v_0 - v$, $v_0 = v(t_0)$. Пусть $h(u_0) = h_0$,

$\theta(u_0) = \theta_0$ — начальные условия для системы ОДУ (5.2). Тогда истинные (фактические) траектории космического летательного аппарата на основном участке входа в атмосферу планеты могут отличаться от модельных (расчетных) в силу ряда причин. Анализ этих причин приводит к задаче о локальной расходимости, рассеивании траекторий системы ОДУ (5.2). Одна из причин локальной расходимости траекторий системы ОДУ (5.2) заключается в сколь угодно сильной подверженности модели (5.2) малым возмущениям ее начальных состояний h_0, θ_0 .

Теперь с помощью формулы (4.4) оценим снизу функцию сгущаемости (4.3) траектории системы ОДУ (5.2) с начальными условиями $h(0) = h_0, \theta(0) = \theta_0$. С этой целью вычислим функцию (4.5) для системы ОДУ (5.2). Итак, из (5.2) следует, что справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} L(u, h_0, \theta_0, 0) &= \lambda \int_0^{v_0-v} f(h(u), u) \theta(u) du = \lambda \int_0^u dh(\tau) \\ &= \lambda[h(u, h_0, \theta_0) - h_0] = -\lambda[h_0 - h(u, h_0, \theta_0)], \end{aligned} \quad (5.3)$$

где h_0 — начальная высота входа в атмосферу планеты; $h(u) = h(u, h_0, \theta_0)$ — высота, соответствующая текущему значению независимой переменной u . Так как $\lambda > 0$ и $h_0 - h(u, h_0, \theta_0) > 0$, из формулы (5.3) следует, что $L(u, h_0, \theta_0, 0) < 0$. Тем самым из соотношений (4.3), (4.4) следует, что сам факт снижения на основном участке траектории космического летательного аппарата в атмосферу планеты оказывает стабилизирующий эффект. Действительно, в этом случае уменьшаются возмущения траекторий системы ОДУ (5.2), связанные с возмущениями ее начальных состояний h_0, θ_0 , причем из формулы (5.3) следует, что данный стабилизирующий эффект тем больше, чем больше логарифмический градиент плотности атмосферы $\lambda > 0$ и перепад высот $h_0 - h(u, h_0, \theta_0) > 0$.

Пусть, например, космический летательный аппарат снижается в атмосферу Земли и $h_0 - h(u, h_0, \theta_0) = 84$ км. В случае снижения в ат-

мосферу Земли можно считать, что $\lambda \approx (1/7000) \text{ м}^{-1}$, $v_0 \approx 7850 \text{ м/сек}$. В этом случае $L(u, h_0, \theta_0, 0) = -12$. Тогда по формуле (4.4) для $n = 2$ получим следующую оценку: $\beta(u, h_0, \theta_0, 0) \geq 357$.

Настоящая работа дополняет исследования, проведенные в [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
2. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 2003.
4. Steeb W. H. Generalized Liouville equation, entropy, and dynamic systems containing limit cycles // *Physica A*. 1979. V. 95, N 1. P. 181–190.
5. Рудых Г. А., Киселевич Д. Я. Свойства интегральной кривой и решения неавтономной системы дифференциальных уравнений // *Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та*. 2012. С. 7–17.
6. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
7. Ярошевский В. А. Приближенный расчет траектории входа в атмосферу. I // *Космические исследования*. 1964. Т. 2, № 4. С. 507–531.
8. Ярошевский В. А. Приближенный расчет траектории входа в атмосферу. II // *Космические исследования*. 1964. Т. 2, № 5. С. 679–697.
9. Ярошевский В. А. Вход в атмосферу космического летательного аппарата. М.: Наука, 1988.
10. Рудых Г. А., Киселевич Д. Я. Уравнение Лиувилля в исследовании устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Мат. заметки ЯГУ*. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 125–139.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЕВКЛИДОВОЙ СТРУКТУРЫ НА УЗЛЕ ТРИЛИСТНИК С МОСТОМ

Д. Ю. Соколова

1. Введение

Теория узлов возникла около 1867 г. в Шотландии в результате исследований трех физиков: Максвелла, Тэйта и Томсона (Лорда Кельвина), детали см. в [1, 2]. Интерес Максвелла к узлам тесно связан с его теорией электромагнетизма. Например, в [3] им дается важная интерпретация интегральной формулы Гаусса для коэффициента зацепления двух узлов в трехмерном пространстве: он равен работе, проделанной магнитным полем при передвижении вдоль одного узла при условии, что через второй узел проходит электрический ток. Другой удивительный факт состоит в том, что поверхность Зейферта, границей которой является некоторый данный узел, была представлена Тэйтом на основании физического исследования. Благодаря усилиям Листинга, Райдемайстера, Дэна теория узлов воплотилась в более общую теорию трехмерных многообразий. Было введено понятие фундаментальной группы, и теория групп стала одним из наиболее мощных инструментов в теории узлов. В 1975 г. Райли [4] обнаружил примеры гиперболических структур на некоторых узлах и дополнениях зацеплений в трехмерной сфере. Позднее, весной 1977 г., Терстон представил теорему существования для римановой метрики постоянной отрицательной кривизны на трехмерных многообразиях. На практике оказалось, что дополнения простых узлов, исключая торические и сателлитные, допускают гиперболическую структуру. Это обстоятельство

дает возможность представить теорию узлов как раздел геометрии и теории клейновых групп. Начиная с работ Александэра [5], инварианты многочленов становятся удобным инструментом для исследований узлов. Много разных видов таких многочленов были изучены за последние 30 лет. Среди них многочлены Джона, Кауфмана, ХОМФЛИПТ, А-полиномы (Jones-, Kaufmann-, HOMFLY-PT, A-polynomials) и др. [2, 6, 7]. Это обстоятельство связывает теорию узлов с алгеброй и алгебраической геометрией.

Целью настоящей работы является изучение евклидовых структур на узлах и зацеплениях. В этом направлении известны следующие результаты: евклидова структура на узле «восьмерка» 4_1 возникает, когда его конический угол α равен $\frac{2\pi}{3}$. Этот результат получен Терстоном [8]. Явная конструкция фундаментального множества для конического многообразия $4_1(\alpha)$ в E^3 предложена в работе А. Д. Медных и А. А. Рассказова [9]. Это фундаментальное множество представляет собой невыпуклый двадцатигранник, вершины которого задаются целочисленными координатами. Вопрос существования евклидовой структуры на зацеплении Уайтхеда изучен в работе Р. Н. Шматкова [10]. Цель настоящей работы — исследовать основные геометрические инварианты евклидова конического многообразия, сингулярным множеством которого является узел трилистник с мостом, а носителем — трехмерная сфера. Мы установим условия существования такого объекта, найдем длины его сингулярных геодезических и вычислим объем.

2. Предварительные сведения

Трехмерным коническим многообразием называется метрическое пространство, полученное из набора непересекающихся 3-симплексов в пространстве постоянной секционной кривизны k путем изометрического отождествления их граней. При этом предполагается, что образованное в результате такого отождествления топологическое пространство (пространство-носитель) является многообразием.

Такое многообразие обладает римановой метрикой постоянной сек-

ционной кривизны k на объединении клеток размерностей 2 и 3. В случае $k = 0$ будем говорить, что соответствующее коническое многообразие *имеет* (или *допускает*) *евклидову структуру*. Аналогично определяются конические многообразия со сферической ($k = +1$) и гиперболической ($k = -1$) структурами.

Метрическая структура вокруг каждой 1-клетки определяется *коническим углом*, который является суммой двугранных углов при ребрах, дающих после отождествления эту клетку.

Сингулярным множеством конического многообразия назовем замыкание всех 1-клеток, конический угол вокруг которых не равен 2π .

Следует отметить также, что точка сингулярного множества с коническим углом α имеет окрестность, изометричную окрестности точки, лежащей на ребре клина с углом раствора α , грани которого попарно отождествлены посредством поворота трехмерного пространства вокруг ребра клина. Условно коническое многообразие можно представить как трехмерную сферу с вложенным в нее графом, на котором происходит искажение метрики. При этом если измерить длину окружности бесконечно малого радиуса вокруг компоненты графа, вместо стандартного $2\pi\varepsilon$ она будет равна $\alpha\varepsilon$, где α — конический угол вдоль компоненты графа.

Дадим определение *группы голономий* для геометрического орби-фолда. Пусть \mathcal{O} — геометрический орби-фолд, обладающий (G, X) -структурой [8]. Рассмотрим ассоциированное с ним (G, X) -многообразие $M = \mathcal{O} \setminus \Sigma$, где Σ — сингулярное множество орби-фолда \mathcal{O} . Пусть области U_1, U_2, \dots и отображения $\varphi_i : U_i \rightarrow X$ задают локальные системы координат на M с функциями перехода

$$\gamma_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j).$$

По определению (G, X) -многообразия каждое отображение γ_{ij} локально действует как элемент из G , так что γ_{ij} можно рассматривать как локально постоянное отображение со значениями в G . После композиции с φ_j получаем локально постоянное отображение $U_i \cap U_j \rightarrow G$, которое будем также обозначать через γ_{ij} .

Предположим теперь, что две карты (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) покрывают одну и ту же точку x . Тогда можно так изменить отображение φ_j (рассмотрев ее композицию с γ_{ij}), что оно будет совпадать с отображением φ_i вблизи точки x . На самом деле, если пересечение $U_i \cap U_j$ связно, то эти отображения будут совпадать на всем пересечении, так что получится отображение $U_i \cap U_j \rightarrow X$, продолжающее φ_i . Но, вообще говоря, пытаясь таким образом продолжить координатное отображение на все многообразие, мы придем к несогласующимся значениям. Для того чтобы избежать несогласованности, надо перейти к универсальной накрывающей.

Выберем отмеченную точку $x_0 \in M$ и карту (U_0, φ_0) , покрывающую эту точку. Пусть $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ — универсальная накрывающая пространства M . Будем представлять \widetilde{M} как пространство гомотопических классов путей в M с началом в отмеченной точке x_0 и рассмотрим путь α , представляющий гомотопический класс $[\alpha] \in \widetilde{M}$ (так что $\alpha(1) = \pi([\alpha])$). Разобьем путь α промежуточными точками

$$x_0 = \alpha(t_0), x_1 = \alpha(t_1), \dots, x_n = \alpha(t_n)$$

(где $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$) таким образом, чтобы каждый из получившихся кусочков пути целиком покрывался какой-то одной картой (U_i, φ_i) . Затем, двигаясь вдоль пути α , подправляем очередное отображение φ_i так, чтобы оно совпало с (уже подправленным) отображением φ_{i-1} в некоторой окрестности $x_i \in U_{i-1} \cap U_i$. Эти согласованные друг с другом карты образуют *аналитическое продолжение* отображения φ_0 вдоль данного пути. Последнее из новых координатных отображений имеет вид

$$\psi = \gamma_{01}(x_1)\gamma_{12}(x_2)\dots\gamma_{n-1,n}(x_n)\varphi_n.$$

Фиксировав базисную точку и начальное отображение φ_n , определим *отображение развертки* $D : \widetilde{M} \rightarrow X$ как отображение, заданное локально с помощью аналитического продолжения φ_0 вдоль каждого пути. Иначе говоря, $D = \varphi_0^\sigma \circ \pi$ в некоторой окрестности $\sigma \in \widetilde{M}$. При

изменении начальных условий (базисной точки и исходного отображения) образ отображения развертки меняется под действием некоторого элемента из группы G .

Если наделить пространство универсальной накрывающей (G, X) -структурой, индуцированной накрытием π , то отображение развертки является локальным (G, X) -гомеоморфизмом между \widetilde{M} и X .

Хотя в наиболее интересных случаях группа G действует на X транзитивно, это условие не является необходимым для определения отображения D . Например, если группа G тривиальна, а многообразие X замкнуто, то замкнутые (G, X) -многообразия — это в точности конечнолистные накрытия над X с проекцией D .

Рассмотрим теперь элемент σ фундаментальной группы пространства M . Аналитическое продолжение вдоль петли σ приводит к ростку φ_0^σ , который уже можно сравнить с φ_0 , так как они оба определены в окрестности базисной точки. Обозначим через g_σ такой элемент группы G , для которого $\varphi_0^\sigma = g_\sigma \varphi_0$; g_σ будем называть *голономией* σ . Из определения отображения развертки легко вывести, что $D \circ T_\sigma = g_\sigma \circ D$, где $T_\sigma : \tau \rightarrow \sigma\tau$ есть преобразование накрытия, индуцированное элементом σ . Применяя это равенство к произведению петель, получаем, что отображение $H : \sigma \rightarrow g_\sigma$ из $\pi_1(M)$ в G является гомоморфизмом, который будем называть *голономией* M . Его образ называется *группой голономии* пространства M . Заметим, что отображение H зависит от произвола при построении D : при изменении D образ отображения H сопрягается элементом из G .

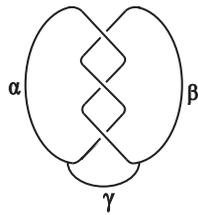


Рис. 1. Узел трилистник с мостом.

Мы исследуем коническое многообразие $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\alpha, \beta; \gamma)$, носителем которого является трехмерная сфера \mathbb{S}^3 , а сингулярным множеством Σ — узел трилистник с одним мостом, который представляет собой граф, изображенный на рис. 1.

Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \Sigma)$ дополнения к графу может быть найдена с помо-

щью алгоритма Виртингера и имеет два порождающих элемента. Мы изучаем геометрическую структуру на данном коническом многообразии.

Коническое многообразие является пополнением для метрического пространства, образованного дополнением сингулярного множества $\mathbb{S}^3 \setminus \Sigma$. Значение конического угла α вдоль компоненты узла определяется пополнением метрического пространства. При этом предполагается, что если g и h — гомеоморфизмы, переводящие окрестность точки многообразия в шары вида $B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$ с элементом площади поверхности $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, то гомеоморфизм $g \circ h^{-1}$ состоит из вращений и перемещений евклидова пространства. Таким образом, он сохраняет евклидову метрику. Далее, представляя порождающие фундаментальной группы через матрицы вращения в евклидовом пространстве, получим условия существования евклидовой структуры на коническом многообразии. Для этого найдем группу голономий данного многообразия.

Рассмотрим отображение голономии $\varphi : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \Sigma) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$, которое переводит порождающие s и t фундаментальной группы

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \Sigma) = \langle s, t \rangle, \quad (1)$$

соответствующие петлям вокруг ребер Σ с индексами α и β , в линейные преобразования

$$\mathcal{S}(x) = (x - e_3)S + e_3, \quad \mathcal{T}(x) = (x + e_3)T - e_3. \quad (2)$$

При этом $e_3 = (0, 0, 1)$, а S и T — матрицы вращений на углы α и β соответственно.

Введем обозначения $M = \text{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $N = \text{ctg} \frac{\beta}{2}$, тогда матрицы вращений S и T имеют вид

$$S = \frac{1}{M^2 + 1} \begin{pmatrix} M^2 + \cos \theta & \sin \theta & -2M \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta & M^2 - \cos \theta & 2M \cos \frac{\theta}{2} \\ 2M \sin \frac{\theta}{2} & -2M \cos \frac{\theta}{2} & -1 + M^2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$T = \frac{1}{N^2 + 1} \begin{pmatrix} N^2 + \cos \theta & -\sin \theta & 2N \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \theta & N^2 - \cos \theta & 2N \cos \frac{\theta}{2} \\ -2N \sin \frac{\theta}{2} & -2N \cos \frac{\theta}{2} & -1 + N^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где θ — угол относительного поворота между сингулярными компонентами [10].

При этом считаем, что отображение голономии переводит элемент $k = tsts^{-1}t^{-1}s^{-1}$ во вращение на угол γ вокруг сингулярной компоненты, соответствующей мосту узла (см. работу [11] для более детального объяснения геометрического смысла указанных порождающих).

Группой голономий исследуемого многообразия называется группа, порожденная вращениями \mathcal{S} и \mathcal{T} вокруг сингулярных компонент фундаментального множества на углы α и β соответственно.

3. Структура фундаментального множества для узла трилистник с мостом

Построим фундаментальное множество для многообразия $\theta(\alpha, \beta; \gamma)$. Это указанный на рис. 2 набор непересекающихся 3-симплексов в пространстве постоянной нулевой кривизны, из которого путем изометрического отождествления граней получается данное коническое многообразие. Фундаментальное множество представляет собой двенадцатигранник, имеющий 8 вершин.

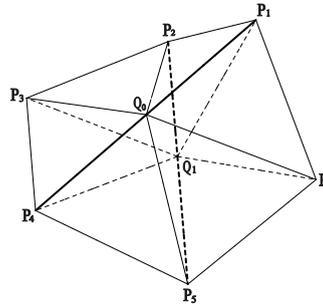


Рис. 2. Фундаментальный двенадцатигранник \mathcal{F} .

Это множество может быть реализовано в любой из трех геометрий: \mathbb{S}^3 , \mathbb{H}^3 и \mathbb{E}^3 . При этом, как отмечено в [11], необходимым условием реализации многогранника в евклидовой геометрии является равенство

$\alpha = \beta$, а также наличие некоторого соотношения, связывающего углы α и γ , более точная формулировка будет дана ниже, в теореме 1.

Отождествление криволинейных граней многогранника \mathcal{F} осуществляется изометрическими преобразованиями \mathcal{S} и \mathcal{T} по следующим правилам :

$$\mathcal{S} : P_1P_0P_5P_4 \rightarrow P_1P_2P_3P_4; \quad \mathcal{T} : P_2P_1P_0P_5 \rightarrow P_2P_3P_4P_5.$$

4. Реализация фундаментального множества в евклидовом пространстве

Построим геометрическую реализацию фундаментального множества $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$ в евклидовом пространстве. Для этого найдем координаты его вершин и выразим их через некоторый параметр, имеющий геометрический смысл.

Положим $X = \cos \frac{\theta}{2}$, $Y = \sin \frac{\theta}{2}$, где θ — угол относительного поворота между компонентами узла. Тогда неподвижными для \mathcal{S} и \mathcal{T} из (2) будут следующие прямые:

$$\text{Fix}(\mathcal{S}) = (tX, tY, 1), \quad \text{Fix}(\mathcal{T}) = (tX, -tY, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

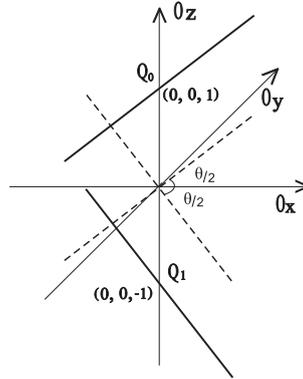
В трехмерном евклидовом пространстве оси вращений $\text{Fix}(\mathcal{S})$ и $\text{Fix}(\mathcal{T})$ расположены как скрещивающиеся прямые с общим перпендикуляром по оси Oz и углом θ между ними (рис. 3).

Для фундаментального двенадцатигранника \mathcal{F} (см. рис. 2) пары его вершин $\{P_1, P_4\}$, $\{P_2, P_5\}$ лежат соответственно на осях $\text{Fix}(\mathcal{S})$, $\text{Fix}(\mathcal{T})$. Узел трилистник с мостом обладает тремя симметриями второго порядка. В частности, вращение второго порядка в оси Ox оставляет фундаментальный многогранник инвариантным. Отсюда следует, что две оставшиеся вершины P_0 и P_3 лежат на оси Ox . Перепишем равенство $P_2 = P_0\mathcal{S}$ в координатном виде. Имеем

$$P_2 = (x, 0, 0)\mathcal{S} = (tX, -tY, -1).$$

Решая эту систему относительно x , t и X , найдем, что

$$x = \frac{3 + M^2}{2MY}, \quad t = -\frac{3X}{MY}, \quad X^2 = \frac{3 - M^2}{12}. \quad (*)$$

Рис. 3. Оси вращений $\text{Fix}(\mathcal{S})$ и $\text{Fix}(\mathcal{T})$.

При этом

$$X = \cos \frac{\theta}{2} \text{ и } Y = \sin \frac{\theta}{2}$$

положительные величины, связанные соотношением $X^2 + Y^2 = 1$. Подставляя x в исходное равенство, найдем

$$P_2 = \left(\frac{3 + M^2 - 6Y^2}{2MY}, \frac{3X}{M}, -1 \right).$$

Итак, учитывая симметрию многогранника, имеем следующее представление координат его вершин:

$$\begin{aligned} P_0 &= (x, 0, 0), & P_1 &= (A, B, 1), & P_2 &= (-A, B, -1), \\ P_3 &= (-x, 0, 0), & P_4 &= (-A, -B, 1), & P_5 &= (A, -B, -1), \\ Q_0 &= (0, 0, 1), & Q_1 &= (0, 0, -1), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$A = -\frac{3 + M^2 - 6Y^2}{2MY}, \quad B = \frac{3X}{M}.$$

Из соотношения (*) получим

$$X = \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3 - M^2}}{2\sqrt{3}}. \quad (6)$$

Теперь перепишем величины для координат вершин многогранника через параметр $M = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\sqrt{9 + M^2}}{2\sqrt{3}}, & A &= \frac{\sqrt{3}(3 - M^2)}{2M\sqrt{9 + M^2}}, \\ B &= \frac{\sqrt{3}(3 - M^2)}{2M}, & x &= \frac{\sqrt{3}(3 + M^2)}{\sqrt{9 + M^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

5. Евклидов объем конического многообразия

Основным результатом настоящей работы являются две следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\alpha \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$, $\gamma \in (0, 2\pi)$ и выполнено следующее соотношение:

$$\left(\frac{\cos \frac{3\alpha}{2}}{3 \cos \frac{\alpha}{2}} \right)^3 + \sin^2 \frac{\gamma}{4} = 0. \quad (8)$$

Тогда коническое многообразие $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$ евклидово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицу $K = TSTS^{-1}T^{-1}S^{-1}$, соответствующую слову $k = tsts^{-1}t^{-1}s^{-1}$. Учитывая, что $\operatorname{tr} S = \operatorname{tr} T = 2 \cos \alpha + 1$, и вычисляя след матрицы $K = TSTS^{-1}T^{-1}S^{-1}$, имеем

$$\operatorname{tr} K = \frac{1}{27^2}(27 + 4r)(81 + 4r), \quad (9)$$

где $r = (2 \cos \alpha - 1)^3$. С другой стороны, матрица K представляет собой вращение на угол γ . Так как K — ортогональная матрица, ее след связан с углом вращения следующим образом:

$$\operatorname{tr} K = 2 \cos \gamma + 1. \quad (10)$$

Согласно уравнению (10)

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{\operatorname{tr} K + 1}}{2} = 1 + \frac{2}{27}r.$$

Учитывая, что $\sin^2 \frac{\gamma}{4} = \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{\gamma}{2})$, имеем

$$\sin^2 \frac{\gamma}{4} = -\frac{r}{27} = -\frac{(2 \cos \alpha - 1)^3}{27},$$

что эквивалентно равенству (8).

Обозначим через d наименьшее расстояние между сингулярными геодезическими $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$, а через θ — угол относительного поворота между ними. Также обозначим через l_α и l_γ длины сингулярных геодезических. Введем параметр $u = \cos \theta$ и будем считать, что $\theta \in (\frac{2\pi}{3}, \pi)$.

Теорема 2. *Евклидов объем конического многообразия $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$ равен*

$$\text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)) = -\frac{2}{1+2u}\sqrt{1-u^2},$$

приведенный евклидов объем равен

$$\text{vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)) = \frac{\text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma))}{dl_\gamma l_\alpha^2} = \frac{(1-u)^2 \sqrt{(-1-2u)}}{72\sqrt{2}\sqrt{1+u}\sqrt{1+4u+7u^2}}.$$

Доказательство. Рассмотрим тетраэдры $T_i = Q_0 P_i P_{i+1} Q_1$, где $i = 0, \dots, 5$, а $P_6 = P_0$. Их объединение составляет фундаментальный многогранник \mathcal{F} , изображенный на рис. 2. Непосредственно проверяем, что все они являются одинаково ориентируемыми и невырожденными. Напомним, что ориентируемый объем тетраэдра $T = V_1 V_2 V_3 V_4$ с вершинами $V_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, находится по формуле

$$\text{Vol } T = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

При этом выразим вершины тетраэдров через параметр $u = \cos \theta$ для $\theta \in (-\frac{2\pi}{3}, \pi)$. Воспользуемся формулой (6) и получим, что переменная M в выражениях (7) для координат вершин (5) представляется в виде $M = \sqrt{-3-6u}$. Из равенства соответствующих сторон многогранника согласно симметрии по формуле (11) находим, что объемы тетраэдров $P_0 P_1 Q_0 Q_1$, $P_5 P_0 Q_0 Q_1$, $P_2 P_3 Q_0 Q_1$, $P_3 P_4 Q_0 Q_1$ равны

$$\text{Vol}_1 = \frac{u\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}(1+2u)}.$$

Объемы тетраэдров $P_1 P_2 Q_0 Q_1$ и $P_4 P_5 Q_0 Q_1$ равны

$$\text{Vol}_2 = -\frac{(1+u)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-u}(1+2u)}.$$

Таблица 1

Конический угол α многообразия $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\alpha, \alpha, \gamma)$, параметры $g = \cos \frac{\gamma}{2}$, $u = \cos \theta$	Евклидов объем $\text{Vol}(\mathcal{O})$ и приведенный евклидов объем $\text{vol}(\mathcal{O})$	Евклидовы длины l_α и l_γ сингулярных геодезических \mathcal{O}
$\alpha = \frac{\pi}{3} + 0.01$, $g = 1$, $u = -0.988618$	0.30791, 0.182526	0.265114 12.006
$\alpha = \arctg \sqrt{15}$, $g = \frac{107}{108}$, $u = -\frac{7}{9}$	$\frac{8\sqrt{2}}{5} = 2.26274$, $\frac{8}{81} \sqrt{\frac{5}{43}} = 0.03368$	$3\sqrt{\frac{3}{10}} = 1.64317$, $3\sqrt{\frac{86}{5}} = 12.4419$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$, $g = \frac{25}{27}$, $g = \frac{25}{27}$, $u = -\frac{2}{3}$	$2\sqrt{5} = 4.47214$, $\frac{25}{216\sqrt{26}} = 0.0227$	$\frac{6}{\sqrt{5}} = 2.68328$, $6\sqrt{\frac{26}{5}} = 13.6821$
$\frac{2\pi}{3}$, $g = \frac{11}{27}$, $u = -\frac{5}{9}$	$4\sqrt{14} = 14.9666$, $\frac{49}{648\sqrt{38}} = 0.01227$	$6\sqrt{\frac{6}{7}} = 5.55492$, $12\sqrt{\frac{19}{7}} = 19.7701$
$\alpha = \pi - 0.01$, $g = -0.9998$, $u = -0.50042$	2074.42, 0.00104	69.1858, 207.817

При всех значениях параметра $\theta \in (-\frac{2\pi}{3}, \pi)$ ориентированные объемы положительны, и многогранник \mathcal{F} (см. рис. 2) состоит из невырожденных тетраэдров. Отсюда

$$\text{Vol}(\mathcal{F}) = 4 \text{Vol}_1 + 2 \text{Vol}_2 = -\frac{2}{1+2u} \sqrt{1-u^2}.$$

Сингулярные геодезические конического многообразия $\mathcal{O}(\alpha, \beta; \gamma)$ представляют собой компоненты узла, которые соответствуют разным коническим углам α , β и γ . Найдем длины сингулярных компонент исследуемого многообразия:

$$l_\alpha = l_\beta = \|P_1 P_4\| = \|P_2 P_5\|, \quad l_\gamma = \sum_{i=0}^5 \|P_i P_{i+1}\|,$$

где $P_6 = P_0$. Имеем

$$l_\alpha = 2\sqrt{\frac{3(1+u)}{(1-u)(-1-2u)}}, \quad l_\gamma = 6\sqrt{\frac{2(1+4u+7u^2)}{(1-u)(-1-2u)}}, \quad d = \|Q_0Q_1\| = 2. \quad (12)$$

Получим выражение для приведенного евклидова объема:

$$\text{vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)) = \frac{\text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma))}{dl_\gamma l_\alpha^2} = \frac{(1-u)^2 \sqrt{-1-2u}}{72\sqrt{2}\sqrt{1+u}\sqrt{1+4u+7u^2}}.$$

В табл. 1 представлены результаты численных экспериментов. Данные таблицы расположены в порядке увеличения евклидова объема конического многообразия $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *de la Harpe P., Kervaire M., Weber C.* On the Jones polynomial // *L'Enseignement Math.* 1986. V. 32. P. 271–335.
2. *Kauffman L.* New invariants in the theory of knots // *Amer. Math. Monthly.* 1984. V. 95, N 3. P. 195–242.
3. *Maxwell J. C.* A treatise on electricity and magnetism. Oxford, 1883.
4. *Riley R.* An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structure // *Topology of low-dimension manifolds.* Berlin: Springer-Verl., 1979. P. 99–133. (Lect. Notes Math.; V. 722).
5. *Alexander J. W.* Topological invariants of knots and links // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1928. V. 30, N 2. P. 275–306.
6. *Cooper D., Culler M., Gillet H., Long D. D., Shalen P. B.* Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds // *Invent. Math.* 1994. V. 118. P. 47–84.
7. *Hilden H. M., Losano M. T., Montesinos-Amilibia J. M.* On the arithmetic 2-bridge knots and link orbifolds and a new knot invariant // *J. Knots and its Ramification.* 1995. V. 4, N 1. P. 81–114.
8. *Thurston W.* The geometry and topology of 3-manifold. Princeton: Princeton Univ., 1980. (Lect. Notes).
9. *Mednykh A. Rasskazov A.* On the structure of the canonical fundamental set for 2-bridge link orbifolds. Bielefeld, 1998. Prepr. ser. Univ. Bielefeld. N 62.
10. *Shmatkov R. N.* Properties of Euclidean Whitehead link cone-manifolds // *Sib. Adv. Math.* 2003. V. 13, N 1. P. 55–86.
11. *Винберг Э. Б., Меннике Й., Хеллинг Х.* О некоторых обобщенно треугольных группах и трехмерных орбиформах // *Тр. Моск. мат. о-ва.* 1995. Т. 56. С. 5–33.

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ф. М. Федоров

Класс периодических гауссовых систем открыт и изучен автором в работах [1, 2]. Данный класс систем оказался достаточно широким, в него входят, как самый простой подкласс, системы с разностными индексами. В работах [1–3] отражено достаточно широкое приложение периодических гауссовых систем к решению задач математической физики с применением граничного метода. Отрадно отметить, что решение периодических бесконечных систем всегда можно получить в замкнутом виде, что немаловажно для практических приложений. Кроме того, подход, предложенный для изучения этого класса систем, может стать основой для исследования общих бесконечных систем.

В настоящей статье периодические системы рассматриваются с точки зрения условий существования нетривиальных решений однородных систем.

Рассмотрим однородную гауссову систему в краткой записи [1, 2]

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

В работе [4] получена следующая теорема о необходимых и достаточных условиях существования нетривиального решения однородных бесконечных гауссовых систем.

Теорема 1 *Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения однородной гауссовой системы (1) является*

выполнение следующих условий для каждого j :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_{j,j+p}}{a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} S(j+k)} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где для унификации обозначений принято $\prod_{k=0}^{-1} S(j+k) = 1$ для любого j .

При удовлетворении условий (2) решением системы (1) являются выражения вида

$$x_i = \frac{(-1)^i x_0}{\prod_{k=0}^{i-1} S(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

x_0 — произвольное вещественное число, $S(k)$ удовлетворяют уравнения (2) для каждого j .

Ясно, что при получении теоремы 1 предварительно разделили все уравнения системы (1) на $a_{j,j}$, что правомерно, поскольку $a_{j,j} \neq 0$ для всех j .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Систему уравнений (2) назовем *характеристикой*, а числа $S(i)$ — *характеристическими числами* соответствующего решения (3) гауссовой системы (1).

В общем случае характеристические числа $S(i)$ любого нетривиального решения $\{x_i\}_0^\infty$ могут иметь следующий вид:

- 1) $S(i) = S = \text{const}, i = \overline{0, \infty}$,
- 2) $S(i) = f(i)S, S = \text{const}, i = \overline{0, \infty}, S \neq 1$,
- 3) $S(i) = f(i), i = \overline{0, \infty}$,
- 4) $S(i) = \begin{cases} f_1(i)S_1, & i \in V_1, \\ f_2(i)S_2, & i \in V_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ f_{n-1}(i)S_{n-1}, & i \in V_{n-1}, \\ f_n(i)S_n, & i \in V_n, \end{cases} \quad S_k = \text{const}, V_k \subset \mathbb{N}.$

Здесь $\bigcup_{k=1}^n V_k = \mathbb{N}, V_i \cap V_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Рассмотрим частный случай гауссовой системы, а именно периодическую систему, причем ее простейший вид, т. е. однородную гауссову систему с разностными индексами [1, 2]:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p x_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

В этом случае *характеристика* каждого решения уравнения системы (4) имеет вид

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p}{\prod_{k=0}^{p-1} S(j+k)} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Найдем те решения системы (4), если они существуют, для которых характеристические числа постоянны, т. е. выполняется условие 1) $S(i) = S = \text{const}$. В этом случае, очевидно, уравнения, составляющие *характеристику* (5) искомого решения, совпадут между собой и она фактически будет *характеристикой* самой системы (4) [1, 2]:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p}{S^p} = 0. \quad (6)$$

Следовательно, согласно теореме 1 каждое решение $\frac{1}{S}$ уравнения (6) дает по формуле (3) решение системы (4):

$$x_i = \frac{(-1)^i x_0}{S^i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Таким образом, только решения вида (7) системы (4) имеют постоянные характеристические числа S , которые определяются из уравнения (6). В работе [3] решения типа (7) названы фундаментальными решениями периодических систем, в частности, системы (4). Если предположить, что уравнение (6) не имеет кратных корней, то множество всех решений вида (7) дает полную систему фундаментальных решений, как показано в [4]. Но данное утверждение также непосредственно следует из теоремы 1, поскольку искомые решения системы

(4) с постоянными характеристическими числами S следуют только из уравнения (6).

Пусть характеристика (6) имеет кратные нули. Найдем решения системы (4), определяемые этими нулями. Исходя из характеристики (6) искомых решений найдем прежде всего характеристические числа $S_k(i)$, соответствующие этим нулям.

Лемма 1. Пусть $\frac{1}{S}$ является нулем функции $f(x)$ кратности ν . Тогда верна следующая цепочка равенств:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p}{S^p} = 0; \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p p a_p}{S^p} = 0; \quad \dots; \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p p^{\nu-1} a_p}{S^p} = 0. \quad (8)$$

Доказательство леммы можно найти, например, в работе [5].

Лемма 2. Если $\frac{1}{S_k}$ является k -м нулем характеристики (6) кратности ν_k , то характеристические числа $S_{k,\nu_k}(i)$ искомого решения системы (4), соответствующие нулю $\frac{1}{S_k}$, имеют вид

$$S_{k,m}(i) = \left(\frac{i}{i+1} \right)^m S_k, \quad i > 0, \quad m = 0, 1, \dots, \nu_k - 1, \quad S_k = \text{const}, \quad (9)$$

где k пробегает нули характеристики (6) без учета кратности.

Доказательство. Заметим, что по условию леммы уравнение (6) удовлетворяется независимо от кратности нуля $\frac{1}{S_k}$ ($m = 0$), т. е. и при $j = 0$. Кроме того, при $m \geq 1$ выполняются дополнительные соотношения (8), характеристические числа $S_{k,m}(i)$ должны удовлетворять характеристике (5) соответствующего решения при $j \geq 1$.

В силу дополнительных соотношений (8) при $m \geq 1$ характеристические числа $S_{k,m}(i)$ необходимо искать в виде (2), т. е. в виде $S_{k,m}(i) = f_m(i) S_k$. Исходя из видов характеристики (5) искомого решения и выражений (8), можно предположить справедливость формулы (9), т. е.

$$f_m(i) = \frac{i^m}{(i+1)^m} S_k.$$

Докажем, что это действительно так. Подставляя формулу (9) в характеристику (5) и обозначая ее через J , получим

$$J = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (j+p)^m a_p}{j^m S_k^p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p}{j^m S_k^p} \sum_{t=0}^m C_m^t j^t p^{m-t}, \quad (10)$$

где C_m^t — биномиальные коэффициенты.

Расписывая выражение (10), имеем

$$J = \sum_{t=0}^m C_m^t j^{t-m} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p p^{m-t} a_p}{S_k^p}.$$

Отсюда с учетом леммы 1, т. е. равенств (8), заключаем, что $J = 0$ для любого $j \geq 1$. \square

Теорема 2. Если $\frac{1}{S_k}$ является k -м нулем характеристики (6) кратности ν_k , то выражения вида

$$x_i^{(k,m)} = \frac{(-1)^i i^m x_0}{S_k^i}, \quad i > 0, \quad m = 0, 1, \dots, \nu_k - 1, \quad S_k = \text{const}, \quad (11)$$

являются линейно независимыми решениями системы (4), где x_0 — произвольное вещественное число, k пробегает нули характеристики (6) без учета кратности.

Доказательство. В силу теоремы 1 выражения (11) являются решениями системы (4). Докажем линейную независимость решений (11), сначала это сделаем для любой пары решений из (11). Пусть некоторые два различных решения $x_i^{(k_1, m_1)}$, $x_i^{(k_2, m_2)}$ из (11) линейно зависимы, т. е. имеет место равенство

$$C_1 \frac{(-1)^i i^{m_1} x_0}{S_{k_1}^i} + C_2 \frac{(-1)^i i^{m_2} x_0}{S_{k_2}^i} = 0,$$

причем $C_i = \text{const}$ и полагаем, что $C_i \neq 0$ ($i = 1, 2$).

Отсюда вытекает, что

$$C_1 = -C_2 i^{(m_2 - m_1)} \left(\frac{S_{k_1}}{S_{k_2}} \right)^i.$$

Возможны два случая.

1. Пусть $S_{k_1} = S_{k_2}$, тогда необходимо $m_1 \neq m_2$, в противном случае имеет место

$$x_i^{(k_1, m_1)} = \frac{(-1)^i i^{m_1} x_0}{S_{k_1}^i} = \frac{(-1)^i i^{m_2} x_0}{S_{k_2}^i} = x_i^{(k_2, m_2)},$$

что невозможно по предположению. Следовательно,

$$C_1 = -C_2 i^{(m_2 - m_1)} \neq \text{const},$$

т. е. получаем противоречие, поэтому $C_1 = C_2 = 0$. \square

2. Пусть $S_{k_1} \neq S_{k_2}$, отсюда $C_1 = -C_2 f(i) \neq \text{const}$, следовательно, $C_1 = C_2 = 0$.

Пусть $n = 3$, т. е. некоторые три различных решения из (11) линейно зависимы:

$$C_1 \frac{(-1)^i i^{m_1} x_0}{S_{k_1}^i} + C_2 \frac{(-1)^i i^{m_2} x_0}{S_{k_2}^i} + C_3 \frac{(-1)^i i^{m_3} x_0}{S_{k_3}^i} = 0, \quad (12)$$

причем $C_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$). Если предположить, что, например, $C_3 = 0$, то из предыдущего следует $C_1 = C_2 = 0$, поэтому полагаем, что $C_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$).

Из (12) вытекает

$$C_1 = -C_2 i^{(m_2 - m_1)} \left(\frac{S_{k_1}}{S_{k_2}} \right)^i - C_3 i^{(m_3 - m_1)} \left(\frac{S_{k_1}}{S_{k_3}} \right)^i. \quad (13)$$

По предположению все решения различны. Теми же рассуждениями, как и в случае $n = 2$, убеждаемся, что в правой части (13) найдется хотя бы один член суммы, зависящий от i . Пусть $C = \min_{k=2,3} C_k$. Тогда из (13) следует, что $C_1 = C f(i) \neq \text{const}$, следовательно, $C_1 = C = 0$, что противоречит случаю $n = 2$. Поэтому $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. \square

Пусть любые $n - 1$ решений вида (11) линейно независимы, тогда аналогично вышеприведенному случаю, т. е. когда $n = 3$, доказывается индукцией линейная независимость любых n решений вида (11). \square

Заметим, что несколько другое доказательство линейной независимости решений вида (11) дано в [4].

Замечание 1. При доказательстве теоремы 2 не использовалось ограничение на количество нулей характеристики (6). Следовательно, теорема 2 верна и в случае бесконечного числа нулей характеристики (6).

Следствие 1. Решения вида (11) являются фундаментальными решениями, и они образуют фундаментальную систему решений \mathbb{F} гауссовой системы (4). В общем случае множество \mathbb{F} может иметь счетную мощность.

Следствие 2. Если систему (4) рассмотреть при $j \geq k_0$, то выражения вида

$$x_i = \frac{(-1)^{i-k_0} x_{k_0}}{S^{i-k_0}}, \quad i > k_0, \quad (14)$$

где $1/S$ — некоторый нуль характеристики (6), являются решением системы (4), $j \geq k_0$.

Теорема 3. Множество \mathbb{F} является полной системой фундаментальных решений гауссовой системы (4).

Доказательство. Пусть характеристика (6) имеет только конечное число N нулей $\mu_k = \frac{1}{S_k}$ с кратностью ν_k , где $k = 1, 2, \dots, N$. Если $\nu_k > 1$, то по лемме 1 имеют место равенства (8). Исходя из них при $j > 0$, легко составить соотношения

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (j+p)^m a_p}{j^m S_k^p} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \nu_k - 1. \quad (15)$$

Можно убедиться, что

$$\frac{j^m S_k^p}{(j+p)^m} = \frac{S_k^p j^m (j+1)^m \dots (j+p-1)^m}{(j+1)^m \dots (j+p-1)^m (j+p)^m} = \prod_{i=0}^{p-1} \left(\frac{j+i}{j+i+1} \right)^m S_k. \quad (16)$$

Равенства (15) с учетом выражений (16) говорят об удовлетворении необходимых условий (5) существования независимых решений (11) только характеристическими числами вида $S_{k,m}(i) = S_k = \text{const}$ или

$S_{k,m}(i) = \left(\frac{i}{i+1}\right)^m S_k$ ($S_k = \text{const}$) Иными словами, других характеристических чисел, определяющих независимые от системы \mathbb{F} решения, но не входящие в нее, не существует. Этот факт подтверждается и результатами работы [5]. Очевидно, равенства (15) и соотношения (16) не зависят от количества нулей характеристики $f(x)$ (6), точнее, от конечности или бесконечности числа этих нулей. Следовательно, фундаментальная система \mathbb{F} является полной независимо от конечности или бесконечности числа нулей характеристики $f(x)$ (6). \square

Следствие 3. Поскольку любое решение однородной гауссовой системы (4) входит в линейную оболочку фундаментальной системы \mathbb{F} , общее решение системы (4) запишется следующим образом:

при конечном числе N нулей $\frac{1}{S_k}$ характеристики (6)

$$x_i = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^i i^{\nu_k-1}}{S_k^i} \sum_{m=0}^{\nu_k-1} C_{m,k} i^m, \quad C_{m,k} = \text{const},$$

при бесконечном числе нулей $\frac{1}{S_k}$ характеристики (6)

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^i i^{\nu_k-1}}{S_k^i} \sum_{m=0}^{\nu_k-1} C_{m,k} i^m, \quad C_{m,k} = \text{const},$$

если ряд в последнем выражении сходится.

Теорема 4. Если характеристика (6) не имеет нулей, т. е.

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p}{S^p} \neq 0, \quad (17)$$

то система с разностными индексами (4) имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Действительно, условие (17) говорит о невыполнении необходимого условия (5) существования нетривиального решения однородной гауссовой системы (4). \square

Можно привести другое доказательство, которое не использует необходимое условие (5). Подставляя выражение (6) в систему (4) при

$j \geq k_0$, получим

$$\frac{(-1)^{j-k_0} x_{k_0}}{S^{j-k_0}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p}{S^p}.$$

В силу условия (17) последнее выражение равно нулю тогда и только тогда, когда $x_{k_0} = 0$, но k_0 — произвольное целое число ($k_0 \geq 0$), следовательно, получим единственное решение (тривиальное). \square

Перейдем к обобщению гауссовых систем с разностными индексами.

Пусть система (1) (после разделения ее на $a_{j,j}$) является периодической системой. Напомним [1, 2], что система (1) называется *периодической*, если ее коэффициенты имеют вид

$$\frac{a_{j,j+p}}{a_{j+p,j+p}} = a_p \quad \text{для всех } j. \quad (18)$$

Теорема 5. Если $\frac{1}{S_k}$ является k -м нулем характеристики (6) кратности ν_k , то выражения вида

$$x_i^{(k,m)} = \frac{(-1)^i i^m x_0}{a_{i,i} S_k^i}, \quad i > 0, \quad m = 0, 1, \dots, \nu_k - 1, \quad (19)$$

являются линейно независимыми решениями периодической системы (1), где x_0 — произвольное вещественное число, k пробегает нули характеристики (6) без учета их кратности.

Доказательство. Исходя из обозначения (18), систему (1) можем переписать в виде

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p a_{j+p,j+p} x_{j+p}.$$

Обозначая выражение $a_{j+p,j+p} x_{j+p}$ как новое неизвестное X_{j+p} , приходим к системе с разностными индексами (4), независимые решения которой имеют вид (11). Поэтому

$$X_i^{(k,m)} = \frac{(-1)^i i^m X_0}{S_k^i} = \frac{(-1)^i i^m a_{0,0} x_0}{S_k^i} = a_{i,i} x_i^{(k,m)}$$

$(i > 0, \quad m = 0, 1, \dots, \nu_k - 1),$

где $\frac{1}{S_k}$ является k -м нулем характеристики (6) кратности ν_k , x_0 — произвольное вещественное число, k пробегает нули характеристики (6) без учета их кратности, следовательно, $x_i^{(k,m)} = \frac{(-1)^i i^m x_0}{a_{i,i} S_k^i}$ ($i > 0$). Линейная независимость решений (19) непосредственно следует из линейной независимости решений (11). \square

Как видно, данное доказательство основывается на удачной замене неизвестных, и характеристические числа $S(i)$ как таковые не используются для найденного решения. Теперь дадим другое доказательство с применением характеристических чисел $S(i)$. Найдем эти числа из необходимого условия (5) существования нетривиального решения, при этом используем другое представление коэффициентов периодических систем [1, 2]:

$$a_{j,j+p} = a_p a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k} \quad \forall a_{j,j} \neq 0 \quad (j, p = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\bar{a}_0 = a_{1,1}, \quad \bar{a}_k = \frac{a_{k+1,k+1}}{a_{k,k}} \quad (k > 0).$$

Здесь для унификации обозначений можно положить $\prod_{k=0}^{-1} \bar{a}_{j+k} = 1$.

На основании этого представления можем писать

$$J = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_{j,j+p}}{a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} S(j+k)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k}}{a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} S(j+k)}.$$

Вспомнив представление чисел $\bar{a}_k = a_{k+1,k+1}/a_{k,k}$ ($k > 0$), приходим к следующим соотношениям:

$$J = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p \prod_{k=0}^{p-1} a_{j+k+1,j+k+1}}{\prod_{k=0}^{p-1} a_{j+k,j+k} S(j+k)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p}{\prod_{k=0}^{p-1} \frac{a_{j+k,j+k} S(j+k)}{a_{j+k+1,j+k+1}}}. \quad (20)$$

При предположении, что

$$S(j+k) = \frac{a_{j+k+1,j+k+1}}{a_{j+k,j+k}} \bar{S}(j+k),$$

приходим к необходимости доказательства удовлетворения условия (5) для существования нетривиального решения однородной гауссовой системы с разностными индексами (4), т. е.

$$J = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p}{\prod_{k=0}^{p-1} \overline{S}(j+k)} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Тогда по лемме 1 характеристические числа $\overline{S}(i)$ обязаны быть такими:

$$\overline{S}(i) = \left(\frac{i}{i+1} \right)^m S_k, \quad S_k = \text{const}, \quad (22)$$

где $\frac{1}{S_k}$ удовлетворяет условиям теоремы.

Подставляя (22) в левую часть (21), получим равенство (13):

$$J = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p}{\prod_{k=0}^{p-1} \left(\frac{j+k}{j+k+1} \right)^m S_k} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p (j+p)^m}{j^m S_k^p} = 0, \quad j > 0,$$

т. е. доказано выполнение условия (5).

Таким образом, характеристические числа $S(i)$ запишутся так:

$$S(0) = \frac{a_{1,1}}{a_{0,0}} S_k \text{ и } S(i) = \frac{a_{i+1,i+1}}{a_{i,i}} \left(\frac{i}{i+1} \right)^m S_k, \quad i > 0, \quad (23)$$

тогда

$$\prod_{k=0}^{i-1} S(i) = S(0) \prod_{k=1}^{i-1} S(i) = \frac{a_{1,1} S_k}{a_{0,0}} \prod_{k=1}^{i-1} \frac{a_{i+1,i+1} S_k}{a_{i,i} \left(\frac{i}{i+1} \right)^m} = \frac{a_{i,i} S_k^i}{a_{0,0} i^m}, \quad i > 0.$$

Следовательно, согласно формулам (3) решения, соответствующие числам (23), будут иметь вид

$$x_i = \frac{(-1)^i x_0}{\prod_{k=0}^{i-1} S(k)} = \frac{(-1)^i i^m x_0}{a_{i,i} S_k^i}, \quad i > 0.$$

Таким образом, получили искомое решение (19). \square

Как прямое следствие теоремы 5 выпишем следующие теоремы.

Теорема 6. Решения однородных гауссовой системы с разностными индексами (4) и периодической системы (1) с равными числами $\{a_p\}_0^\infty$ характеристики (6) изоморфны.

Теорема 7. Решения однородных периодических систем с равной характеристикой изоморфны. Свойства двух периодических систем различаются тогда и только тогда, когда различны их характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. М. Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.
2. Федоров Ф. М. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и их приложения. Новосибирск: Наука, 2011.
3. Федоров Ф. М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.
4. Федоров Ф. М. К теории гауссовых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 209–217.
5. Егоров И. Е., Федоров Ф. М. О полной системе фундаментальных решений периодических бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 1. С. 8–17.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ И ПРОСТРАНСТВА МОДЕЛЕЙ

П. В. Черников

Далее будем использовать в основном терминологию и обозначения из [1].

1. Пусть \mathcal{L} — непрерывная логика с множеством значений X , где X — компактное хаусдорфово пространство. Пусть $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ — совокупность всех моделей логики \mathcal{L} , наделенная элементарной топологией. Обозначим через $\Sigma_{\mathcal{L}}$ множество всех высказываний логики \mathcal{L} .

В [1, с. 66] указано, что если θ — (элементарная) теория, то

$$\theta \supset \text{Th}(\text{Mod}(\theta)). \quad (*)$$

В [2] рассматривается вопрос о том, когда в соотношении (*) имеет место равенство. Напомним, что множество $E \subset Y$, где Y — топологическое пространство, называется *плотным в множестве* $Y_0 \subset Y$, если $\overline{E} \supset Y_0$.

В [2] доказана следующая

Теорема 1. *Для того чтобы для теории $\theta \subset X^{\Sigma_{\mathcal{L}}}$ выполнялось равенство $\theta = \text{Th}(\text{Mod}(\theta))$, необходимо и достаточно, чтобы существовала теория $\theta_0 \subset X^{\Sigma_{\mathcal{L}}}$, плотная в θ и такая, что $\theta_0 = \text{Th}(\text{Mod}(\theta_0))$.*

Из теоремы 1 вытекает такое

Следствие. *Для того чтобы теория $\theta \subset X^{\Sigma_{\mathcal{L}}}$ была непротиворечива, необходимо и достаточно, чтобы существовала теория $\theta_0 \subset X^{\Sigma_{\mathcal{L}}}$ такая, что $\bar{\theta}_0 \cap \theta \neq \emptyset$ и $\theta_0 = \text{Th}(\text{Mod}(\theta_0))$.*

Покажем, что верно

Утверждение 1. Пусть $\theta_i \subset X^{\Sigma \mathcal{L}}$, $i = 1, 2$, — такие две теории, что для каждого $i = 1, 2$ существует теория $\theta_i^0 \subset X^{\Sigma \mathcal{L}}$, плотная в θ_i и такая, что $\theta_i^0 = \text{Th}(\text{Mod}(\theta_i^0))$. Тогда

$$\theta = \text{Th}(\text{Mod}(\theta)),$$

где $\theta = \theta_1 \cup \theta_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [1, с. 66] имеем

$$\text{Th}(\text{Mod}(\theta)) = \text{Th}(\text{Mod}(\theta_1)) \cup \text{Th}(\text{Mod}(\theta_2)).$$

По теореме 1

$$\text{Th}(\text{Mod}(\theta_i)) = \theta_i, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, $\text{Th}(\text{Mod}(\theta)) = \theta$. Утверждение доказано.

В [3, с. 117; 4, с. 71] с помощью теоремы компактности доказан следующий конечный аналог теоремы Лёвенгейма — Сколема.

Теорема 2. Если для любого $n \in \omega$ множество предложений T логики l имеет модель B_n мощности $\geq n$, то T имеет бесконечную модель.

Приведем доказательство теоремы 2, не использующее теорему компактности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F — фильтр Фреше на множестве натуральных чисел ω , D_F — ультрафильтр, содержащий F . Модель

$$A_* = D_F - \text{prod } \lambda n B_n,$$

очевидно, искомая. Теорема доказана.

Следующая теорема является распространением теоремы 2 на случай непрерывной логики \mathcal{L} .

Теорема 3. Пусть $\theta \subset X^{\Sigma \mathcal{L}}$ — замкнутая теория. Тогда если для любого $n \in \omega$ существует модель $B_n \in \text{Mod}(\theta)$ мощности $\geq n$, то теория θ имеет модель любой мощности $\beta \geq \|\mathcal{L}\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что теория θ имеет бесконечную модель. Пусть D — неглавный ультрафильтр над множеством натуральных чисел ω . Модель

$$A_* = D - \text{prod } \lambda n B_n$$

бесконечна и принадлежит $\text{Mod}(\theta)$, так как согласно лемме 5.2.1 из [1] класс $\text{Mod}(\theta)$ замкнут относительно ультрапроизведения.

Из теоремы Лёвенгейма — Сколема о повышении мощности [1, с. 95] следует, что теория θ имеет модели любой мощности $\beta \geq \|\mathcal{L}\|$. Теорема доказана.

Теорема 3 является конечным аналогом теоремы Лёвенгейма — Сколема из [1, с. 95].

Следствие. Пусть $\theta \subset X^{\Sigma_{\mathcal{L}}}$ — замкнутая теория, не имеющая (бесконечных) моделей некоторой мощности $\alpha \geq \|\mathcal{L}\|$. Тогда существует такое число n , что каждая модель $A \in \text{Mod}(\theta)$ имеет мощность меньше, чем n .

Приведенное следствие является распространением утверждения из упражнения 7.5 в [5, с. 25] на случай логики \mathcal{L} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если дано некоторое множество предложений T логики l , то нетрудно построить замкнутую теорию $\theta_T \subset 2^{\Sigma_l}$ такую, что $\text{mod}(T) = \text{Mod}(\theta_T)$. Здесь через $\text{mod}(T)$ обозначен класс всех моделей, на которых истинны все формулы из T . Достаточно положить

$$\theta_T = \bigcap_{\varphi \in T} F_{\varphi},$$

где $F_{\varphi} = \{h \in 2^{\Sigma_l} : h(\varphi) = 1\}$. Отсюда получаем, что из теоремы 3 следует теорема 2.

Далее будем использовать следующее определение полной теории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Теорию $\theta \subset X^{\Sigma_{\mathcal{L}}}$ назовем *полной*, если она имеет модели и все ее модели элементарно эквивалентны, т. е. если $A, B \in \text{Mod}(\theta)$, то $[A] = [B]$.

В утверждениях 2–4 будем предполагать, что логика \mathcal{L} обладает t -, k - и e -множествами. Имеет место [1, с. 119]

Утверждение 2. *Всякая полная теория θ , не имеющая бесконечных моделей, имеет с точностью до изоморфизма единственную конечную модель.*

Таким образом, в утверждении 2 заранее предполагается, что все модели теории θ конечны. Легко видеть, что справедливо такое уточнение утверждения 2.

Утверждение 3. *Если полная теория θ имеет конечную модель A_0 , то A_0 единственна с точностью до изоморфизма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B_0 — какая-либо модель теории θ . Покажем, что B_0 изоморфна модели A_0 . Так как теория θ полна, модели A_0, B_0 элементарно эквивалентны, т. е. $\text{Th}(A_0) = \text{Th}(B_0)$. Согласно следствию 6.3.5 из [1, с. 118], если B — конечная модель и $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$, то $A \simeq B$. Следовательно, $A_0 \simeq B_0$. Утверждение доказано.

Следующее утверждение обобщает утверждение 2.

Утверждение 4. *Пусть $\theta \subset X^{\Sigma_{\mathcal{L}}}$ — полная теория, не имеющая (бесконечных) моделей некоторой мощности $\alpha \geq \|\mathcal{L}\|$. Тогда θ имеет с точностью до изоморфизма единственную конечную модель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что теория θ имеет бесконечную модель. Тогда из теоремы Лёвенгейма — Сколема [1, с. 95] следует, что θ имеет модель мощности α ; противоречие. Применяя утверждение 2, получаем требуемое. Утверждение доказано.

2. Напомним, что для логики \mathcal{L} запись $\|\mathcal{L}\| = \omega$ означает, что множества констант, предикатных символов, связок и кванторов имеют мощность $\leq \omega$, а пространство истинности X имеет счетную базу (т. е. оно есть метрический компакт). В данной работе приводится доказательство теоремы компактности А. И. Мальцева для непрерывной логики \mathcal{L} , $\|\mathcal{L}\| = \omega$, отличное от имеющегося в [1].

Теорема 4. *Пространство $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ компактно ($\|\mathcal{L}\| = \omega$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Согласно [1, с. 68] элементарная топология компактна тогда и только тогда, когда теория $\text{Th}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$ замкнута в пространстве $X^{\Sigma_{\mathcal{L}}}$. Покажем, что множество $\text{Th}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$ замкнуто в метрическом компакте $X^{\Sigma_{\mathcal{L}}}$. Для этого достаточно показать, что если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек множества $\text{Th}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$ сходится к некоторой точке $x \in X^{\Sigma_{\mathcal{L}}}$, то $x \in \text{Th}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$. Определим отображение $f : \omega \rightarrow X^{\Sigma_{\mathcal{L}}}$ по формуле

$$f(n) = x_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Пусть F — фильтр Фреше на множестве натуральных чисел ω , D_F — ультрафильтр, содержащий F . Тогда очевидно, что

$$D_F\text{-}\lim f = x.$$

Так как $x_n \in \text{Th}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$, найдется модель $A_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ такая, что $x_n = [A_n]$. Рассмотрим модель

$$A = D_F\text{-}\text{prod } \lambda n A_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}.$$

По следствию 5.1.6 из [1] имеем

$$[A] = D_F\text{-}\lim \lambda n [A_n] = x.$$

Таким образом, $x = [A]$ для модели $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, т. е. $x \in \text{Th}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$ и, значит, множество $\text{Th}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$ замкнуто в пространстве $X^{\Sigma_{\mathcal{L}}}$. Теорема доказана.

3. Остановимся на понятии D -предела [1]. В этом пункте через X обозначается финально компактное хаусдорфово пространство. Пусть I — произвольное непустое множество, D — счетно полный ультрафильтр над I . Покажем, что имеет место

Лемма. Пусть $f \in X^I$. Тогда существует единственная точка $X_0 \in X$ такая, что для всякой окрестности V точки X_0

$$\{i \in I : f(i) \in V\} \in D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для всякой точки $x \in X$ существует окрестность V_x такая, что $\{i : f(i) \in V_x\} \notin D$. Пространство X финально компактно, поэтому можно выбрать счетное подпокрытие $\{V_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ покрытия $\{V_x\}_{x \in X}$ пространства X . Поскольку

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{i : f(i) \in V_{x_n}\} = I,$$

найдется номер n_0 , для которого $\{i : f(i) \in V_{x_{n_0}}\} \in D$; противоречие. Таким образом, существование точки X_0 установлено. Докажем единственность. Пусть существуют две различные точки X_1 и Y_1 , обладающие указанным свойством. Пусть U, V — такие открытые в X множества, что $X_1 \in U$, $Y_1 \in V$ и $U \cap V = \emptyset$. Тогда

$$\{i : f(i) \in U\} \cap \{i : f(i) \in V\} = \{i : f(i) \in U \cap V\} = \emptyset \in D,$$

что невозможно. Лемма доказана.

Эту точку обозначим, следуя [1], через $D\text{-lim } f$ и назовем D -пределом функции f . В случае, когда D — ультрафильтр, X — компактное хаусдорфово пространство, теорема о существовании D -предела, аналогичная лемме, содержится в [1]. Докажем некоторые утверждения о сходимости D -пределов.

Теорема 5. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^I$, $f \in X^I$. Пусть

$$S = \{i \in I : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = f(i)\} \in D$$

и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} D\text{-lim } f_n = Y$. Тогда $Y = D\text{-lim } f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X_n = D\text{-lim } f_n$, $X_0 = D\text{-lim } f$ и $X_0 \neq Y$. Найдутся открытые в X множества U, V такие, что $X_0 \in U$, $Y \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Существует такой номер N , что $X_n \in V$ при $n \geq N$. Пусть $M_k = \{i : f_k(i) \in V\}$. Так как D — счетно полный ультрафильтр,

$$M = S \cap \{i : f(i) \in U\} \cap \bigcap_{k=N}^{\infty} M_k \neq \emptyset.$$

Пусть $i_0 \in M$. Найдется номер N_1 , для которого $f_n(i_0) \in U \cap V$ при $n \geq N_1$, но $U \cap V = \emptyset$; противоречие. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть X — финально компактное регулярное хаусдорфово пространство, $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^I$, $f \in X^I$. Пусть

$$S = \{i \in I : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = f(i)\} \in D.$$

Тогда последовательность $\{D\text{-lim } f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к точке $D\text{-lim } f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X_n = D\text{-lim } f_n$, $X_0 = D\text{-lim } f$. Пусть U — окрестность точки X_0 . Пространство X регулярно, поэтому найдется такая окрестность V точки X_0 , что $\bar{V} \subset U$. Покажем, что существует такой номер N , что $\{i : f_n(i) \in V\} \in D$ при $n \geq N$. Допустим противное. Тогда существует такая подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, что

$$\{i : f_{n_k}(i) \in V\} \notin D.$$

Пусть

$$M_k = I \setminus \{i : f_{n_k}(i) \in V\}.$$

Так как D — счетно полный ультрафильтр, имеем

$$M = S \cap \{i : f(i) \in V\} \cap \bigcap_{k=1}^\infty M_k \neq \emptyset.$$

Пусть $i_0 \in M$. Найдется номер N_1 , для которого $f_n(i_0) \in V$ при $n \geq N_1$. Поскольку $i_0 \in \bigcap_{k=1}^\infty M_k$, найдется такой номер $m \geq N_1$, что $f_m(i_0) \notin V$; противоречие. Следовательно, существует номер N , для которого $\{i : f_n(i) \in V\} \in D$ при $n \geq N$, поэтому $X_n \in \bar{V} \subset U$ при $n \geq N$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кейслер Г. Дж., Чэн Чень-чунь. Теория непрерывных моделей. М.: Мир, 1971.
2. Черников П. В. Об элементарных теориях, пространстве моделей и D -пределах // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 155–158.
3. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1987.
4. Справочная книга по математической логике / Под. ред. Дж. Барвайса. Т. 1. Теория моделей. М.: Наука, 1982.
5. Сакс Дж. Теория насыщенных моделей. М.: Мир, 1976.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ
ПРОСТРАНСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*)

А. И. Шадрина

Пусть Ω — интервал $(0, a)$ оси Ox , $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $c(x, t)$, $f(x, t)$, $g(x)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$. Далее, пусть x_0 — фиксированная точка Ω , и пусть для функции $g(x)$ выполняются условия

$$(i) \quad g(x) \in C([0, x_0]), \quad g(x) \geq k_0 > 0 \text{ при } x \in [0, x_0],$$

$$(ii) \quad g(x) \in C([x_0, a]), \quad g(x) \geq k_1 > 0 \text{ при } x \in [x_0, a],$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} g(x).$$

Рассмотрим уравнение

$$u_t - g(x)u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t). \quad (1)$$

Из условий (i)–(iii) следует, что уравнение (1) в прямоугольнике Q является параболическим уравнением с разрывным коэффициентом при старшей производной. Пусть $K(x, t)$ и $N(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in [0, x_0]$, $t \in [0, T]$ и $x \in [x_0, a]$, $t \in [0, T]$ соответственно. Обозначим $Q^- = (0, x_0) \times (0, T)$, $Q^+ = (x_0, a) \times (0, T)$.

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q^- и Q^+ решением уравнения (1) и такую, что для нее

*) Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402).

выполняются условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x_0 + 0, t) = \alpha(t)u(x_0 - 0, t), \quad \beta(t)u_x(x_0 + 0, t) = u_x(x_0 - 0, t), \quad (3)$$

$$u(0, t) = \int_0^{x_0} K(x, t)u(x, t) dx, \quad u(a, t) = \int_{x_0}^a N(x, t)u(x, t) dx, \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

Краевая задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q^- и Q^+ решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3) и

$$u_x(0, t) = \int_0^{x_0} K(x, t)u(x, t) dx, \quad u_x(a, t) = \int_{x_0}^a N(x, t)u(x, t) dx, \quad t \in (0, T). \quad (5)$$

Краевая задача III. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q^- и Q^+ решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3) и

$$u(0, t) = \int_0^{x_0} K(x, t)u(x, t) dx, \quad u_x(a, t) = \int_{x_0}^a N(x, t)u(x, t) dx, \quad t \in (0, T). \quad (6)$$

В случае $K(x, t) \equiv 0$, $N(x, t) \equiv 0$ краевые задачи I–III представляют собой обычные задачи дифракции, и их разрешимость в пространствах Соболева известна [1, 2]. С другой стороны, наличие ненулевых функций $K(x, t)$, $N(x, t)$ означает, что задачи I–III являются задачами с нелокальными граничными условиями интегрального вида. В случае непрерывной положительной на $\bar{\Omega}$ функции $g(x)$ подобные задачи активно изучаются в последнее время [3–6], однако для уравнений с разрывным коэффициентом задачи с интегральными условиями ранее не изучались.

Определим необходимое функциональное пространство V :

$$V = \left\{ v(x, t) : \int_{Q^-} (v^2 + v_t^2 + v_{xx}^2) dx dt < +\infty, \right. \\ \int_{Q^+} (v^2 + v_t^2 + v_{xx}^2) dx dt < +\infty; \\ \left. \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^{x_0} v_x^2(x, t) dx < +\infty, \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \int_{x_0}^a v_x^2(x, t) dx < +\infty \right\}.$$

Норму в этом пространстве зададим естественным образом:

$$\|v\|_V = \left\{ \int_{Q^-} (v^2 + v_t^2 + v_{xx}^2) dx dt + \int_{Q^+} (v^2 + v_t^2 + v_{xx}^2) dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \times \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \left[\left(\int_0^{x_0} v_x^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{x_0}^a v_x^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Иследуем вопрос о единственности решений краевых задач I–III. Очевидно, что если $\alpha(t) \equiv 0$ или $\beta(t) \equiv 0$, то краевые задачи I–III распадающиеся. Поэтому ниже будем рассматривать случай $|\alpha(t)| > 0$, $|\beta(t)| > 0$ при $t \in [0, T]$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i)–(iii), а также условия

$$g(x) \in C^1([0, x_0]), \quad g(x) \in C^1([x_0, a]), \quad K(x, t) \in C^1(\overline{Q^-}), \quad (7)$$

$$N(x, t) \in C^1(\overline{Q^+}), \quad c(x, t) \in C(\overline{Q^-}) \cap C(\overline{Q^+}),$$

$$\alpha(t) \in C^1[0, T], \quad \beta(t) \in C^1[0, T], \quad (8)$$

$$|\alpha(t)| > 0, \quad |\beta(t)| > 0, \quad \alpha(t) \cdot \beta(t) > 0 \quad \text{при } t \in [0, T].$$

Тогда краевая задача I не может иметь в пространстве V более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в краевой задаче I $f(x, t) \equiv 0$ при $(x, t) \in Q$. Обозначим

$$\gamma(t) = \frac{g(x_0 - 0)\beta(t)}{g(x_0 + 0)\alpha(t)}.$$

Рассмотрим равенство, являющееся следствием уравнения (1):

$$\int_0^t \int_0^{x_0} [u_\tau - g(x)u_{xx} + c(x, \tau)u] u \, dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a [u_\tau - g(x)u_{xx} + c(x, \tau)u] \gamma(\tau) u \, dx d\tau = 0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{x_0} u^2(x, t) \, dx + \int_0^t \int_0^{x_0} g(x) u_x^2 \, dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{x_0}^a \gamma(t) u^2(x, t) \, dx \\ & + \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma(\tau) g(x) u_x^2 \, dx d\tau - \int_0^t \int_0^{x_0} g'(x) u u_x \, dx d\tau - \int_0^t g(0) u(0, \tau) u_x(0, \tau) \, d\tau \\ & - \int_0^t \int_0^{x_0} c(x, \tau) u^2 \, dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma(\tau) u^2 \, dx d\tau - \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma(\tau) g'(x) u u_x \, dx d\tau \\ & + \int_0^t \gamma(\tau) g(a) u(a, \tau) u_x(a, \tau) \, d\tau - \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma(\tau) c(x, \tau) u^2 \, dx d\tau. \quad (9) \end{aligned}$$

Используя условия (4), применяя неравенства Гёльдера и Юнга и учитывая условия теоремы, нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_0} u^2(x, t) \, dx + \int_{x_0}^a u^2(x, t) \, dx + \int_0^t \int_0^{x_0} u_x^2 \, dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a u_x^2 \, dx d\tau \\ & \leq C_1 \left[\int_0^t \int_0^{x_0} u^2 \, dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a u^2 \, dx d\tau + \int_0^t u_x^2(0, \tau) \, d\tau + \int_0^t u_x^2(a, \tau) \, d\tau \right], \end{aligned} \quad (10)$$

в котором число C_1 определяется функциями $g(x)$, $c(x, t)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

Заметим, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \nu^2(x) &\leq \delta_1 \int_0^{x_0} \nu_x^2(y) dy + C(\delta_1) \int_0^{x_0} \nu^2(y) dy, \quad x \in [0, x_0], \\ \nu^2(x) &\leq \delta_1 \int_{x_0}^a \nu_x^2(y) dy + C(\delta_1) \int_{x_0}^a \nu^2(y) dy, \quad x \in [x_0, a], \end{aligned} \quad (*)$$

здесь δ_1 — произвольное положительное число. Эти неравенства неоднократно будут использоваться в дальнейшем.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_0^{x_0} [u_\tau - g(x)u_{xx} + c(x, \tau)u](u_\tau - u_{xx}) dx d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma(\tau)[u_\tau - g(x)u_{xx} + c(x, \tau)u](u_\tau - u_{xx}) dx d\tau = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^{x_0} (g(x) + 1)u_x^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^a (g(x) + 1)\gamma(\tau)u_x^2(x, t) dx \\ &+ \int_0^t \int_0^{x_0} u_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma(\tau)u_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{x_0} g(x)u_{xx}^2 dx d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{x_0}^a g(x)\gamma(\tau)u_{xx}^2 dx d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma'(\tau)(g(x) + 1)u_x^2 dx d\tau \\ &- \int_0^t \int_0^{x_0} g'(x)u_x u_\tau dx d\tau - \int_0^t \int_{x_0}^a g'(x)\gamma(\tau)u_x u_\tau dx d\tau \\ &- \int_0^t (g(0) + 1)u_x(0, \tau)u_\tau(0, \tau) d\tau + \int_0^t (g(a) + 1)\gamma(\tau)u_x(a, \tau)u_\tau(a, \tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t \int_0^{x_0} c(x, \tau) u u_\tau dx d\tau - \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma(\tau) c(x, \tau) u u_\tau dx d\tau + \int_0^t \int_0^{x_0} c(x, \tau) u u_{xx} dx d\tau \\
 & + \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma(\tau) c(x, \tau) u u_{xx} dx d\tau. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Воспользуемся в полученном равенстве условиями теоремы и заменим в четвертом и пятом слагаемых $u_\tau(0, t)$ и $u_\tau(a, t)$ соответствующими интегралами с помощью условий (4), далее воспользуемся неравенствами (*), Гёльдера и Юнга, а также неравенством (10) и в результате получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{x_0} u^2(x, t) dx + \int_{x_0}^a u^2(x, t) dx + \int_0^{x_0} u_x^2(x, t) dx + \int_{x_0}^a u_x^2(x, t) dx \\
 & + \int_0^t \int_0^{x_0} u_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a u_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{x_0} u_{xx}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a u_{xx}^2 dx d\tau \\
 & \leq C_2 \left[\int_0^t \int_0^{x_0} u^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a u^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{x_0} u_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a u_x^2 dx d\tau \right],
 \end{aligned} \quad (13)$$

где число C_2 определяется функциями $g(x)$, $c(x, t)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

Обозначим

$$z_1(t) = \int_0^{x_0} u^2(x, t) dx + \int_{x_0}^a u^2(x, t) dx + \int_0^t \int_0^{x_0} u_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a u_x^2 dx d\tau.$$

Тогда следствием (13) будет неравенство

$$z_1(t) \leq M_1 \int_0^t z_1(\tau) d\tau,$$

где число M_1 определяется функциями $g(x)$, $c(x, t)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Из этого неравенства и леммы Гронуолла следует, что $z_1(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T]$. Очевидно теперь, что имеют место тождества $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q^-}$, $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q^+}$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (i)–(iii), а также условия (7) и (8). Тогда краевая задача II не может иметь в пространстве V более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в краевой задаче II $f(x, t) \equiv 0$ при $(x, t) \in Q$. Рассмотрим равенство, являющееся следствием уравнения (1):

$$\int_0^t \int_0^{x_0} [u_\tau - g(x)u_{xx} + c(x, \tau)u] u \, dx d\tau + \int_0^t \int_0^{x_0} [u_\tau - g(x)u_{xx} + c(x, \tau)u] \gamma(\tau) u \, dx d\tau = 0.$$

Интегрируя по частям, получим равенство (9), затем, используя неравенства Юнга, Гёльдера и (*), придем к оценке

$$z_2(t) \leq M_2 \int_0^t z_2(\tau) d\tau,$$

где

$$z_2(t) = \int_0^{x_0} u^2(x, t) \, dx + \int_{x_0}^a u^2(x, t) \, dx,$$

число M_2 определяется функциями $g(x)$, $c(x, t)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Из этого неравенства и леммы Гронуолла следует, что $z_2(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T]$. Имеют место тождества $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q^-}$, $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q^+}$. Теорема доказана.

Положим

$$N_0 = \max_{0 \leq t \leq T} \left(\int_{x_0}^a N^2(x, t) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия (i)–(iii), (7) и (8), а также

$$c(x, t) \in C^1(\overline{Q^+}), \quad c(x, t) \geq c_0 \geq 0 \quad \text{при } (x, t) \in (\overline{Q^+}), \quad (14)$$

$$\exists \delta_0 > 0 : \frac{4(a-x_0)\delta_0^2 N_0}{3} < k_1, \quad \frac{c_0}{2} - \frac{\delta_0^2 N_0}{a-x_0} - \frac{[1+g(a)]N_0}{4\delta_0^2} > 0. \quad (15)$$

Тогда краевая задача III не может иметь в пространстве V более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в краевой задаче III $f(x, t) \equiv 0$ при $(x, t) \in Q$. Рассмотрим равенство (11). Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{x_0} u_x^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^{x_0} g(x) u_x^2(x, t) dx + \int_0^t \int_0^{x_0} u_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma(\tau) u_\tau^2 dx d\tau \\ & + \frac{\gamma(t)}{2} \int_{x_0}^a u_x^2(x, t) dx + \frac{\gamma(t)}{2} \int_{x_0}^a g(x) u_x^2(x, t) dx + \int_0^t \int_0^{x_0} g(x) u_{xx}^2 dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_{x_0}^a g(x) \gamma(\tau) u_{xx}^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{x_0} c(x, t) u^2(x, t) dx + \frac{\gamma(t)}{2} \int_{x_0}^a c(x, t) u^2(x, t) dx \\ & = \int_0^t \int_0^{x_0} c(x, \tau) u u_{xx} dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a g(x) \gamma(\tau) c(x, \tau) u u_{xx} dx d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma'(\tau) u_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x_0}^a g(x) \gamma'(\tau) u_x^2 dx - \int_0^t \int_0^{x_0} g'(x) u_x u_\tau dx d\tau \\ & \quad - \int_0^t \int_{x_0}^a g'(x) \gamma(\tau) u_x u_\tau dx d\tau \\ & \quad - [1 + g(x_0 + 0)] \int_0^t \gamma(\tau) \alpha'(\tau) u(x_0 - 0, \tau) u_x(x_0 + 0, \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma(\tau) c_\tau(x, \tau) u^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma'(\tau) c(x, \tau) u^2 dx d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{x_0} c_\tau(x, \tau) u^2 dx d\tau + [1 + g(a)] \int_0^t \gamma(\tau) u_x(a, \tau) u_\tau(a, \tau) d\tau \\
& - [1 + g(0)] \int_0^t u_\tau(0, \tau) u_x(0, \tau) d\tau. \quad (16)
\end{aligned}$$

В последних двух интегралах заменим $u_\tau(0, \tau)$ и $u_x(a, \tau)$ с помощью краевых условий (6) и проинтегрируем в первом слагаемом полученного равенства по τ :

$$\begin{aligned}
& [1 + g(a)] \int_0^t \gamma(\tau) u_x(a, \tau) u_\tau(a, \tau) d\tau - [1 + g(0)] \int_0^t u_\tau(0, \tau) u_x(0, \tau) d\tau = \\
& = [1 + g(a)] \int_0^t \gamma(\tau) u_\tau(a, \tau) \left[\int_{x_0}^a N(x, \tau) u(x, \tau) dx \right] d\tau \\
& - [1 + g(0)] \int_0^t u_x(0, \tau) \left[\int_0^{x_0} K(x, \tau) u_\tau(x, \tau) dx + \int_0^{x_0} K_\tau(x, \tau) u(x, \tau) dx \right] d\tau \\
& = -[1 + g(a)] \int_{x_0}^a \gamma(\tau) u(a, \tau) \left(\int_{x_0}^a N(x, \tau) u_\tau(x, \tau) dx \right) d\tau \\
& - [1 + g(a)] \int_{x_0}^a \gamma(\tau) u(a, \tau) \left(\int_{x_0}^a N_\tau(x, \tau) u(x, \tau) dx \right) d\tau \\
& - [1 + g(a)] \int_{x_0}^a \gamma'(\tau) u(a, \tau) \left(\int_{x_0}^a N(x, \tau) u(x, \tau) dx \right) d\tau \\
& + [1 + g(a)] \gamma(t) u(a, t) \int_{x_0}^a N(x, t) u(x, t) dx \\
& - [1 + g(0)] \int_0^t u_x(0, \tau) \left[\int_0^{x_0} K(x, \tau) u_\tau(x, \tau) dx + \int_0^{x_0} K_\tau(x, \tau) u(x, \tau) dx \right] d\tau.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$I = [1 + g(a)]\gamma(t)u(a, t) \int_{x_0}^a N(x, t)u(x, t) dx.$$

Используя интегральное неравенство

$$\nu^2(a) \leq \frac{2}{a - x_0} \int_{x_0}^a \nu^2(x) dx + \frac{2(a - x_0)}{3} \int_{x_0}^a \nu^2(x) dx, \quad (**)$$

неравенства Юнга и Гёльдера, оценим $|I|$:

$$\begin{aligned} |I| \leq & \left(\frac{2\delta_0^2 N_0 \gamma(t)}{a - x_0} + \frac{[1 + g(a)]}{2\delta_0^2} N_0 \gamma(t) \right) \int_{x_0}^a u^2(x, t) dx \\ & + \frac{2(a - x_0)\delta_0^2 N_0 \gamma(t)}{3} \int_{x_0}^a u_x^2(x, t) dx. \quad (17) \end{aligned}$$

Вернемся к равенству (16) и, учитывая (17), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{x_0} u_x^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^{x_0} g(x)u_x^2(x, t) dx + \int_0^t \int_0^{x_0} u_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma(\tau)u_\tau^2 dx d\tau \\ & + \frac{\gamma(t)}{2} \int_{x_0}^a u_x^2(x, t) dx + \frac{\gamma(t)}{2} \int_{x_0}^a \left[g(x) - \frac{2(a - x_0)\delta_0^2 N_0}{3} \right] u_x^2(x, t) dx \\ & + \int_0^t \int_0^{x_0} g(x)u_{xx}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a g(x)\gamma(\tau)u_{xx}^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{x_0} c(x, t)u^2(x, t) dx \\ & + \frac{\gamma(t)}{2} \int_{x_0}^a \left[c(x, t) - \frac{2\delta_0^2 N_0}{a - x_0} - \frac{[1 + g(a)]}{2\delta_0^2} N_0 \right] u^2(x, t) dx \\ & \leq \left| \int_0^t \int_0^{x_0} c(x, \tau)uu_{xx} dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a g(x)\gamma(\tau)c(x, \tau)uu_{xx} dx d\tau \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma'(\tau) u_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x_0}^a g(x) \gamma'(\tau) u_x^2 dx \\
& - \int_0^t \int_0^{x_0} g'(x) u_x u_\tau dx d\tau - \int_0^t \int_{x_0}^a g'(x) \gamma(\tau) u_x u_\tau dx d\tau \\
& - [1 + g(x_0 + 0)] \int_0^t \gamma(\tau) \alpha'(\tau) u(x_0 - 0, \tau) u_x(x_0 + 0, \tau) d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma(\tau) c_\tau(x, \tau) u^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x_0}^a \gamma'(\tau) c(x, \tau) u^2 dx d\tau \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{x_0} c_\tau(x, \tau) u^2 dx d\tau \\
& - [1 + g(a)] \int_{x_0}^a \gamma(\tau) u(a, \tau) \left(\int_{x_0}^a N(x, \tau) u_\tau(x, \tau) dx \right) d\tau \\
& - [1 + g(a)] \int_{x_0}^a \gamma(\tau) u(a, \tau) \left(\int_{x_0}^a N_\tau(x, \tau) u(x, \tau) dx \right) d\tau \\
& - [1 + g(a)] \int_{x_0}^a \gamma'(\tau) u(a, \tau) \left(\int_{x_0}^a N(x, \tau) u(x, \tau) dx \right) d\tau \\
& + [1 + g(0)] \int_0^t u_x(0, \tau) \left[\int_0^{x_0} K(x, \tau) u_\tau(x, \tau) dx + \int_0^{x_0} K_\tau(x, \tau) u(x, \tau) dx \right] d\tau \Big| .
\end{aligned}$$

Используя неравенства Юнга и Гёльдера, неравенство (*), а также условия (14) и (15), получим

$$m_0 \left[\int_0^{x_0} u^2(x, t) dx + \int_{x_0}^a u^2(x, t) dx + \int_0^{x_0} u_x^2(x, t) dx + \int_{x_0}^a u_x^2(x, t) dx \right]$$

$$\leq M_3 \left[\int_0^t \int_0^{x_0} (u_x^2 + u^2) dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a (u_x^2 + u^2) dx d\tau \right],$$

где m_0 — фиксированное положительное число, определяющееся $g(x)$, $c(x, t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, число M_3 определяется функциями $g(x)$, $c(x, t)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

Из этого неравенства и леммы Гронуолла следует, что имеют место тождества $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q^-}$, $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q^+}$. Теорема доказана.

Перейдем к вопросу о существовании решений краевых задач I–III. Положим

$$A_1(x) = \left(\frac{x_0 - x}{x_0} \right)^2, \quad B_1(x) = \left(\frac{x - x_0}{a - x_0} \right)^2.$$

Теорема 4. Пусть выполняются условия (i)–(iii), (7), (8), а также

$$\lambda \int_0^{x_0} K(x, t) A_1(x) dx \neq 1, \quad \lambda \int_{x_0}^a N(x, t) B_1(x) dx \neq 1 \quad (18)$$

при $\lambda \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$. Тогда краевая задача I имеет решение, принадлежащее пространству V .

Доказательство. Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим семейство краевых задач: найти решение уравнения (1) такое, что для него выполняются условия (2), (3), а также условия

$$u(0, t) = \lambda \int_0^{x_0} K(x, t) u(x, t) dx, \quad u(a, t) = \lambda \int_{x_0}^a N(x, t) u(x, t) dx. \quad (4_\lambda)$$

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача (1)–(3), (4_λ) имеет решение, принадлежащее пространству V , для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$. Как известно [6], если окажется, что множество Λ непусто, открыто и замкнуто (в топологии отрезка $[0, 1]$), то оно будет совпадать со всем

отрезком $[0,1]$, и тогда исходная краевая задача будет разрешимой в нужном классе.

Итак, требуется показать, что множество Λ непусто, открыто и замкнуто. Множество Λ непусто, что очевидным образом следует из того, что число 0 принадлежит ему [1, 2].

Докажем открытость Λ . Пусть λ_0 — точка множества Λ , $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$. Покажем, что при малых $|\tilde{\lambda}|$ число λ также принадлежит Λ .

Пусть $v(x, t)$ — произвольная функция из пространства V . Рассмотрим краевую задачу: *найти решение уравнения (1) такое, что для него выполняются условия (2), (3), а также условия*

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \lambda_0 \int_0^{x_0} K(x, t)u(x, t) dx + \tilde{\lambda} \int_0^{x_0} K(x, t)v(x, t) dx, \\ u(a, t) &= \lambda_0 \int_{x_0}^a N(x, t)u(x, t) dx + \tilde{\lambda} \int_{x_0}^a N(x, t)v(x, t) dx. \end{aligned} \quad (4_{\lambda, v})$$

Преобразуем данную задачу к задаче вида (1)–(3), (4 $_{\lambda}$).

Рассмотрим функцию

$$z(x, t) = \begin{cases} z^-(x, t) = \frac{\tilde{\lambda}A_1(x)\Phi_1(t)}{\gamma_1(t)}, & 0 < x < x_0, 0 < t < T, \\ z^+(x, t) = \frac{\tilde{\lambda}B_1(x)\Phi_2(t)}{\gamma_2(t)}, & x_0 < x < a, 0 < t < T, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \int_0^{x_0} K(y, t)v(y, t) dy, & \Phi_2(t) &= \int_{x_0}^a N(y, t)v(y, t) dy, \\ \gamma_1(t) &= 1 - \lambda_0 \int_0^{x_0} K(x, t)A_1(x) dx, & \gamma_2(t) &= 1 - \lambda_0 \int_{x_0}^a N(x, t)B_1(x) dx \end{aligned}$$

(заметим, что вследствие (18) функция $z(x, t)$ определена корректно).

Имеют место равенства

$$z^-(0, t) = \lambda_0 \int_0^{x_0} K(x, t)z^-(x, t) dx + \tilde{\lambda}\Phi_1(t), \quad z^-(x_0, t) = 0, \quad z_x^-(x_0, t) = 0,$$

$$z^+(a, t) = \lambda_0 \int_{x_0}^a N(x, t) z^+(x, t) dx + \tilde{\lambda} \Phi_2(t), \quad z^+(x_0, t) = 0, \quad z_x^+(x_0, t) = 0.$$

Положим $u(x, t) = w(x, t) + z(x, t)$. Тогда согласно (4 $_{\lambda}$) получим

$$w_t - g(x)w_{xx} + c(x, t)w = f_0(x, t), \quad (20)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad (21)$$

$$w(x_0 + 0, t) = \alpha(t)w(x_0 - 0, t), \quad \beta(t)w_x(x_0 + 0, t) = w_x(x_0 - 0, t), \quad (22)$$

$$w(0, t) = \lambda_0 \int_0^{x_0} K(x, t)w(x, t) dx, \quad w(a, t) = \lambda_0 \int_{x_0}^a N(x, t)w(x, t) dx, \quad (23)$$

где

$$f_0(x, t) = \begin{cases} f(x, t) - z_t^- + g(x)z_{xx}^- - c(x, t)z^-, & 0 < x < x_0, \quad 0 < t < T, \\ f(x, t) - z_t^+ + g(x)z_{xx}^+ - c(x, t)z^+, & x_0 < x < a, \quad 0 < t < T. \end{cases}$$

Поскольку $f_0(x, t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$ (что очевидно) и число λ_0 принадлежит Λ , краевая задача I для функции $w(x, t)$, т. е. задача (20)–(23), имеет решение, принадлежащее пространству V . Возвращаясь к функции $u(x, t)$, получим, что задача (1)–(3), (4 $_{\lambda, v}$) при всех $v(x, t)$ из V имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V . Тем самым эта задача порождает оператор G , переводящий пространство V в себя: $G(v) = u$. Покажем, что при малых $|\tilde{\lambda}|$ этот оператор будет сжимающим.

Пусть $v_1(x, t)$ и $v_2(x, t)$ — две функции из пространства V , $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — образы функций $v_1(x, t)$ и $v_2(x, t)$ при действии отображения G , $z_1(x, t)$ и $z_2(x, t)$ — функции, определенные формулой (19) по функциям $v_1(x, t)$ и $v_2(x, t)$, $v(x, t) = v_1(x, t) - v_2(x, t)$, $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, $z(x, t) = z_1(x, t) - z_2(x, t)$, $w(x, t) = u(x, t) - z(x, t)$, $\tilde{f}(x, t) = f_0(x, t) - f(x, t)$. Для функции $w(x, t)$ выполняются равенства (21)–(23) и уравнение

$$w_t - g(x)w_{xx} + c(x, t)w = \tilde{f}(x, t). \quad (24)$$

Рассмотрим равенство, являющееся следствием (24):

$$\int_0^t \int_0^{x_0} [w_\tau - g(x)w_{xx} + c(x, \tau)w - \tilde{f}(x, \tau)][w + w_\tau - w_{xx}] dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a [w_\tau - g(x)w_{xx} + c(x, \tau)w - \tilde{f}(x, \tau)]\gamma(\tau)[w + w_\tau - w_{xx}] dx d\tau = 0.$$

Интегрируя в данном равенстве по частям, используя условия (7), (8), (23) и применяя неравенства Гёльдера и Юнга, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_0} w^2(x, t) dx + \int_{x_0}^a w^2(x, t) dx + \int_0^{x_0} w_x^2(x, t) dx + \int_{x_0}^a w_x^2(x, t) dx \\ & + \int_0^t \int_0^{x_0} w_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a w_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{x_0} w_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a w_\tau^2 dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^{x_0} w_{xx}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a w_{xx}^2 dx d\tau \leq C_3 \left[\int_0^t \int_0^{x_0} w^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a w^2 dx d\tau \right. \\ & \quad + \int_0^t w_x^2(0, \tau) d\tau + \int_0^t w_x^2(a, \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^{x_0} w_x^2 dx d\tau \\ & \quad \left. + \int_0^t \int_{x_0}^a w_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{x_0} \tilde{f}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a \tilde{f}^2 dx d\tau \right], \end{aligned}$$

где число C_3 определяется функциями $g(x)$, $c(x, t)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

Используя далее неравенство (*) и применяя лемму Гронуолла, получим

$$\|w(x, t)\|_V^2 \leq M_4 \|\tilde{f}(x, t)\|_{L_2(Q)}^2,$$

где число M_4 определяется функциями $g(x)$, $c(x, t)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

Перейдя к функции $u(x, t) = w(x, t) + z(x, t)$, имеем

$$\|u(x, t)\|_V \leq M_5 |\tilde{\lambda}| \|v(x, t)\|_{L_2(Q)}, \quad (25)$$

где число M_5 также определяется функциями $g(x)$, $c(x, t)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

Пусть число $\tilde{\lambda}$ настолько мало, что выполняется неравенство

$$M_5 |\tilde{\lambda}| < 1.$$

Для таких чисел $\tilde{\lambda}$ отображение G сжимающее и, следовательно, имеет неподвижную точку $u(x, t)$: $G(u) = u$. Эта неподвижная точка принадлежит пространству V , будет решением уравнения (1), и для нее выполняются условия (2), (3), а также

$$u(0, t) = (\lambda_0 + \tilde{\lambda}) \int_0^{x_0} K(x, t) u(x, t) dx, \quad u(a, t) = (\lambda_0 + \tilde{\lambda}) \int_{x_0}^a N(x, t) u(x, t) dx.$$

Отсюда получаем, что число $\lambda_0 + \tilde{\lambda}$ принадлежит множеству Λ , тем самым множество Λ открыто.

Докажем теперь, что множество Λ замкнуто. Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность элементов множества Λ такая, что $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$. Покажем, что число λ_0 также принадлежит Λ .

Пусть $u_k(x, t)$ — решение краевой задачи (1)–(3), (4_{λ_k}) . Вследствие принадлежности чисел λ_k множеству Λ функции λ_k будут принадлежать пространству V . Обозначим через $w_{km}(x, t)$ функцию $u_k(x, t) - u_m(x, t)$. Имеют место следующие равенства:

$$w_{kmt} - g(x)w_{kmtx} + c(x, t)w_{km} = 0, \quad (26)$$

$$w_{km}(x, 0) = 0, \quad (27)$$

$$w_{km}(x_0+0, t) = \alpha(t)w_{km}(x_0-0, t), \quad \beta(t)w_{kmt}(x_0+0, t) = w_{kmt}(x_0-0, t), \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
w_{km}(0, t) &= \lambda_k \int_0^{x_0} K(x, t) w_{km}(x, t) dx + (\lambda_k - \lambda_m) \int_0^{x_0} K(x, t) u_m(x, t) dx, \\
w_{km}(a, t) &= \lambda_k \int_{x_0}^a N(x, t) w_{km}(x, t) dx + (\lambda_k - \lambda_m) \int_{x_0}^a N(x, t) u_m(x, t) dx.
\end{aligned} \tag{29}$$

Рассмотрим равенство, являющееся следствием уравнения (26):

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^{x_0} [w_{km\tau} - g(x)w_{kmxx} + c(x, \tau)w_{km}] [w_{km} + w_{km\tau} - w_{kmxx}] dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_{x_0}^a [w_{km\tau} - g(x)w_{kmxx} + c(x, \tau)w_{km}] \gamma(\tau) [w_{km} + w_{km\tau} - w_{kmxx}] dx d\tau = 0.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, используя условия (7), (8), (29) и применяя неравенства Гёльдера, Юнга и (*), получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^{x_0} w_{km}^2(x, t) dx + \int_{x_0}^a w_{km}^2(x, t) dx + \int_0^{x_0} w_{kmx}^2(x, t) dx + \int_{x_0}^a w_{kmx}^2(x, t) dx \\
& + \int_0^t \int_0^{x_0} w_{km\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a w_{km\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{x_0} w_{kmxx}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a w_{kmxx}^2 dx d\tau \\
& \leq C_4 \left[\int_0^t \int_0^{x_0} w_{km}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a w_{km}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{x_0} w_{kmx}^2 dx d\tau \right. \\
& \left. + \int_0^t \int_{x_0}^a w_{kmx}^2 dx d\tau \right] + |\lambda_k - \lambda_m|^2 \left[\int_0^t \int_0^{x_0} u_m^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a u_m^2 dx d\tau \right. \\
& \left. + \int_0^t \int_0^{x_0} u_{m\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a u_{m\tau}^2 dx d\tau \right], \tag{30}
\end{aligned}$$

где число C_4 определяется функциями $g(x)$, $c(x, t)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

Обозначим

$$z_4(t) = \int_0^{x_0} w_{km}^2(x, t) dx + \int_{x_0}^a w_{km}^2(x, t) dx + \int_0^t \int_0^{x_0} w_{kmx}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{x_0}^a w_{kmx}^2 dx d\tau.$$

Заметим, что имеет место оценка $\|u_m\|_V \leq M_7$ с постоянной M_7 , определяющейся функциями $g(x)$, $c(x, t)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Тогда следствием неравенства (30) и леммы Гронцуолла будет оценка

$$z_4(t) \leq C_5 |\lambda_k - \lambda_m|^2, \tag{31}$$

где число C_5 определяется функциями $g(x)$, $c(x, t)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и числом T .

Из (31) получим

$$\|w_{km}(x, t)\|^2 \leq C_6 |\lambda_k - \lambda_m|^2, \tag{32}$$

где C_6 определяется числами C_5 и T .

Из (32) следует, что $\{u_k(x, t)\}$ — фундаментальная в пространстве V последовательность. Поскольку V банахово, существует функция $u(x, t)$ из этого пространства, являющаяся пределом семейства $\{u_k(x, t)\}$. Переходя теперь к пределу в семействе задач (1)–(3), (4_{λ_k}) при $k \rightarrow \infty$, получим, что предельная функция $u(x, t)$ будет решением задачи (1)–(3), (4_{λ_0}) , принадлежащим пространству V . Это означает, что число λ_0 принадлежит множеству Λ .

Итак, множество Λ непусто, открыто и замкнуто. Как говорилось выше, следствием этого является совпадение множества Λ со всем отрезком $[0, 1]$. Но тогда задача (1)–(3), (4_λ) , а значит, и исходная задача (1)–(4) разрешимы в пространстве V .

Теорема доказана.

Положим

$$A_2(x) = -\frac{(x - x_0)^2}{2x_0}, \quad B_2(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2(a - x_0)}.$$

Теорема 5. Пусть выполняются условия (i)–(iii), (7), (8) и

$$\lambda \int_0^{x_0} K(x, t) A_2(x) dx \neq 1, \quad \lambda \int_{x_0}^a N(x, t) B_2(x) dx \neq 1 \quad (33)$$

при $\lambda \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$. Тогда краевая задача II имеет решение, принадлежащее пространству V .

Доказательство. Вновь воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим семейство краевых задач: найти решение уравнения (1) такое, что для него выполняются условия (2), (3) и

$$u_x(0, t) = \lambda \int_0^{x_0} K(x, t) u(x, t) dx, \quad u_x(a, t) = \lambda \int_{x_0}^a N(x, t) u(x, t) dx. \quad (5_\lambda)$$

Снова обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача (1)–(3), (5_λ) имеет решение, принадлежащее пространству V , для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$. Нужно показать, что множество Λ непусто, открыто и замкнуто.

Очевидно, что множество Λ непусто. Для доказательства открытости Λ рассмотрим краевую задачу: найти решение уравнения (1) такое, что для него выполняются условия (2), (3) и

$$u_x(0, t) = \lambda_0 \int_0^{x_0} K(x, t) u(x, t) dx + \tilde{\lambda} \int_0^{x_0} K(x, t) v(x, t) dx,$$

$$u_x(a, t) = \lambda_0 \int_{x_0}^a N(x, t) u(x, t) dx + \tilde{\lambda} \int_{x_0}^a N(x, t) v(x, t) dx$$

(здесь $v(x, t)$ — произвольная функция из пространства V).

Преобразуем данную задачу к задаче вида (1)–(3), (5_λ) .

Рассмотрим функцию

$$z(x, t) = \begin{cases} z^-(x, t) = \frac{\tilde{\lambda} A_2(x) \Phi_1(t)}{\gamma_3(t)}, & 0 < x < x_0, 0 < t < T, \\ z^+(x, t) = \frac{\tilde{\lambda} B_2(x) \Phi_2(t)}{\gamma_4(t)}, & x_0 < x < a, 0 < t < T, \end{cases}$$

где

$$\gamma_3(t) = 1 - \lambda_0 \int_0^{x_0} K(x, t) A_2(x) dx, \quad \gamma_4(t) = 1 - \lambda_0 \int_{x_0}^a N(x, t) B_2(x) dx.$$

Имеют место равенства

$$z_x^-(0, t) = \lambda_0 \int_0^{x_0} K(x, t) z^-(x, t) dx + \tilde{\lambda} \Phi_1(t), \quad z^-(x_0, t) = 0, \quad z_x^-(x_0, t) = 0,$$

$$z_x^+(a, t) = \lambda_0 \int_{x_0}^a N(x, t) z^+(x, t) dx + \tilde{\lambda} \Phi_2(t), \quad z^+(x_0, t) = 0, \quad z_x^+(x_0, t) = 0.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4, получим сжимающий оператор G , переводящий пространство V в себя: $G(v) = u$. В силу справедливости априорной оценки (25) получим, что множество Λ открыто. Замкнутость множества Λ доказывается аналогично теореме 4.

Итак, множество Λ непусто, открыто и замкнуто, а стало быть, совпадает со всем отрезком $[0, 1]$. В итоге задача (1)–(3), (5 $_{\lambda}$), а значит, и исходная задача (1)–(3), (5) будут разрешимы в пространстве V . Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть выполняются условия (i)–(iii), (7), (8), (18) и (33). Тогда краевая задача III имеет решение, принадлежащее пространству V .

Доказательство. Снова используя метод продолжения по параметру, рассмотрим семейство краевых задач (1)–(3) с условиями

$$u(0, t) = \lambda \int_0^{x_0} K(x, t) u(x, t) dx, \quad u_x(a, t) = \lambda \int_{x_0}^a N(x, t) u(x, t) dx. \quad (6_{\lambda})$$

Вновь обозначим через Λ множество чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача (1)–(3), (6 $_{\lambda}$) имеет решение, принадлежащее пространству V , для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Очевидно, что множество Λ непусто.

Для доказательства открытости Λ рассмотрим краевую задачу: найти решение уравнения (1) такое, что для него выполняются условия (2), (3) и

$$u(0, t) = \lambda_0 \int_0^{x_0} K(x, t)u(x, t) dx + \tilde{\lambda} \int_0^{x_0} K(x, t)v(x, t) dx,$$

$$u_x(a, t) = \lambda_0 \int_{x_0}^a N(x, t)u(x, t) dx + \tilde{\lambda} \int_{x_0}^a N(x, t)v(x, t) dx.$$

Преобразуем данную задачу к задаче вида (1)–(3), (6 $_{\lambda}$). Рассмотрим функцию

$$z(x, t) = \begin{cases} z^-(x, t) = \frac{\tilde{\lambda}A_1(x)\Phi_1(t)}{\gamma_1(t)}, & 0 < x < x_0, 0 < t < T, \\ z^+(x, t) = \frac{\tilde{\lambda}B_2(x)\Phi_4(t)}{\gamma_4(t)}, & x_0 < x < a, 0 < t < T, \end{cases}$$

где

$$z^-(0, t) = \lambda_0 \int_0^{x_0} K(x, t)z^-(x, t) dx + \tilde{\lambda}\Phi_1(t), \quad z^-(x_0, t) = 0, \quad z_x^-(x_0, t) = 0,$$

$$z_x^+(a, t) = \lambda_0 \int_{x_0}^a N(x, t)z^+(x, t) dx + \tilde{\lambda}\Phi_2(t), \quad z^+(x_0, t) = 0, \quad z_x^+(x_0, t) = 0.$$

Рассуждая, как при доказательстве теорем 4 и 5, получим сжимающий оператор G , переводящий пространство V в себя: $G(v) = u$. В силу справедливости априорной оценки (25) получим, что множество Λ открыто. Замкнутость множества Λ очевидна.

Итак, множество Λ непусто, открыто и замкнуто, стало быть, совпадает со всем отрезком $[0, 1]$. В итоге задача (1)–(3), (6 $_{\lambda}$), а значит, и исходная задача (1)–(3), (6) разрешимы в пространстве V .

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1973.
2. Олейник О. А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25, № 1. С. 3–20.
3. Пулькина Л. С. Нелокальная задача для уравнения теплопроводности // Неклассические уравнения мат. физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2005. С. 231–239.
4. Кожанов А. И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вест. Самарск. ун-та. Естественнонаучная сер. 2008. № 3. С. 165–174.
5. Кожанов А. И. О разрешимости краевых задач с нелокальными и интегральными условиями для параболических уравнений // Нелинейные граничные задачи. 2010. Т. 20. С. 54–76.
6. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

г. Якутск

12 января 2013 г.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОТБОРА
ИДЕАЛЬНОГО И РЕАЛЬНОГО ГАЗОВ

Э. А. Бондарев, В. Е. Николаев, Г. И. Иванов

С целью выявить влияние реальных свойств газа на динамику изменения полей давления и температуры последнего проведен сравнительный анализ результатов вычислительного эксперимента двумерной математической модели отбора идеального и реального газов через одиночную скважину при условии теплообмена с окружающими горными породами. Эксперимент выполнен в рамках модифицированной математической модели неизотермической фильтрации газа, которая выводится из законов сохранения массы и энергии, а также из закона Дарси. В качестве замыкающих соотношений использованы физическое и калорическое уравнения состояния, а также закон Ньютона — Рихмана, описывающий теплообмен газоносного пласта с окружающими горными породами. Показано, что учет реальных свойств газа приводит лишь к малым количественным изменениям давления, но несмотря на это влечет за собой существенное перераспределение температурного поля отбираемого газа.

1. Постановка задачи

Для математического описания процесса отбора газа через одиночную скважину в случае теплообмена с окружающими вмещающими породами предложенную ранее систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1, 2] дополним слагаемым, описывающим теплопроводность пласта в направлении, перпендикулярном

вектору скорости фильтрации газа к скважине, расположенной в центре кругового пласта:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\bar{p}}{Z\bar{T}} \right) = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\bar{p}}{Z\bar{T}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right), \quad \bar{r}_w < \bar{r} < \bar{r}_k, \bar{t} > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \delta \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} + \left(1 + \frac{\bar{T}}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \bar{T}} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{c_p}{R} \frac{\bar{p}}{Z\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{T}}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \bar{T}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)^2, \quad (2)$$

$$\bar{r}_w < \bar{r} < \bar{r}_k, \quad 0 < \bar{z} < \frac{\bar{h}}{2}, \quad \bar{t} > 0,$$

где

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{l}, \quad \bar{r}_w = \frac{r_w}{l}, \quad \bar{r}_k = \frac{r_k}{l}, \quad \bar{t} = \frac{\kappa_p t}{l^2}, \quad \bar{T} = \frac{c_r T}{m p_0},$$

$$\delta = \frac{\kappa}{\kappa_p}, \quad \kappa = \frac{\lambda_r}{c_r}, \quad \kappa_p = \frac{k p_0}{m \mu}, \quad \bar{z} = \frac{z}{l}, \quad \bar{h} = \frac{h}{l}.$$

В дальнейшем черта над безразмерными переменными для удобства опускается. Здесь приняты обозначения: c_p — удельная теплоемкость газа, h — мощность пласта, k — коэффициент проницаемости пласта, l — характерный размер, m — пористость, p — давление, R — газовая постоянная, r — радиальная координата, T — температура, t — время, Z — коэффициент несовершенства газа, z — координата по высоте; κ , κ_p , c_r , λ_r — температуропроводность, пьезопроводность, объемная теплоемкость и теплопроводность насыщенного газом пласта соответственно, μ — динамическая вязкость газа; нижние индексы означают: 0 — начальное состояние, k — на контуре питания, w — на стенке скважины. В уравнении (2) теплопроводность по радиальной координате считается пренебрежимо малой по сравнению с конвективным теплопереносом.

Рассматривается режим отбора газа с постоянным забойным давлением:

$$p = p_w, \quad r = r_w. \quad (3)$$

Внешняя граница пласта считается непроницаемой и теплоизолированной:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = r_k. \quad (4)$$

Ввиду малой мощности газоносного пласта по сравнению с его радиальной протяженностью интенсивность теплообмена через его кровлю и подошву можно считать одинаковой. Тогда если поместить начало координаты на кровлю пласта, то линия $z = h/2$ будет осью симметрии. В этом случае условия теплообмена с окружающими породами можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \bar{\alpha}(T - T_0), \quad z = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = \frac{h}{2}; \quad (6)$$

где $\bar{\alpha} = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda_r}$ — число Био, λ_r — коэффициент теплопроводности окружающих пород.

В начальный момент времени давление и температура считаются постоянными:

$$p(r, z, 0) = 1, \quad T(r, z, 0) = T_0, \quad r_w \leq r \leq r_k, \quad 0 \leq z \leq h/2. \quad (7)$$

В качестве уравнения состояния принимается уравнение Латонова — Гуревича [3]:

$$Z = \left(0.17376 \ln \left(\frac{mp_0}{c_r T_c} T \right) + 0.73 \right)^{\frac{p_0}{p_c} p} + 0.1 \frac{p_0}{p_c} p, \quad (8)$$

где T_c , p_c — критические температура и давление природного газа, зависящие от его состава.

Для решения начально-краевой задачи (1)–(8) использовалась чисто неявная абсолютно устойчивая разностная схема, аналогичная схеме, выведенной для плоскорадиальной задачи в работе [4]. При этом уравнение (2) расщепляется по пространственным переменным методом слабой аппроксимации, предложенным Н. Н. Яненко [5]. Разностные аналоги первого граничного условия (4), условий (5) и (6) записывались со вторым порядком аппроксимации. Для численной реализации разностной задачи использовался метод простых итераций.

2. Вычислительный эксперимент

Расчеты проводились для природного газа Средне-Вилюйского месторождения Республики Саха (Якутия) при следующих входных данных: $\alpha = 2$ и $10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, $\lambda_r = 2.326 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $r_w = 0.1 \text{ м}$, $r_k = 100.1 \text{ м}$, $h = 10 \text{ м}$, $l = 1 \text{ м}$, $T_0 = 323 \text{ К}$, $p_0 = 240 \text{ атм}$, $c_p = 2300 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $R = 449.4 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $c_r = 6 \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$, $m = 0.2$, $k = 10^{-13} \text{ м}^2$, $p_w = 140$ и 230 атм . Критические параметры $T_c = 205.022 \text{ К}$ и $p_c = 46.596 \text{ атм}$ были определены по методике, представленной в работе [8], при известном составе газа (об. %): $C_1H_4 - 90.34$, $C_2H_6 - 4.98$, $C_3H_8 - 1.74$, $iC_4H_{10} - 0.22$, $nC_4H_{10} - 0.41$, $C_5H_{12+} - 1.55$, $CO_2 - 0.28$, $N_2 - 0.48$. Продолжительность эксперимента составляла в безразмерных величинах $t = 1.6 \cdot 10^6$, что соответствует 731.1 ч.

3. Сравнительный анализ

Сравнительный анализ проведен с целью выявить влияние реальных свойств газа на динамику изменения полей давления и температуры последнего. Предварительные результаты показывают, что наиболее существенные изменения давления и температуры газа наблюдаются при высоких темпах отбора, а также что теплообмен с окружающими горными породами оказывает одинаковое влияние на поля давления и температуры для обоих типов газа. Поэтому здесь представлены результаты, полученные для давления отбора $p_w = 140 \text{ атм}$ и коэффициента теплообмена $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Эти результаты показывают, что поле давления для обоих типов газа не зависит от вертикальной координаты z , так что ниже графики давления приведены лишь для кровли пласта. Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 1–8. Из графиков на рис. 1 и рис. 2 видно, что учет реальных свойств газа приводит лишь к малым количественным изменениям давления: для идеального газа оно за все время наблюдения больше чем для реального. Но эта разница, как отмечалось выше, ничтожно мала по сравнению с изменением давления от первоначального значения.

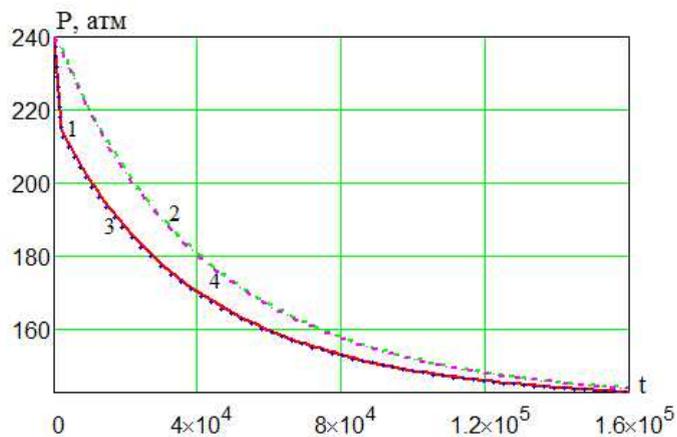


Рис. 1. Динамика изменения давления идеального (кривые 1, 2) и реального (кривые 3, 4) газов на кровле пласта. Нечетные номера соответствуют $r = 10.1$ м, четные — $r = 100.1$ м.

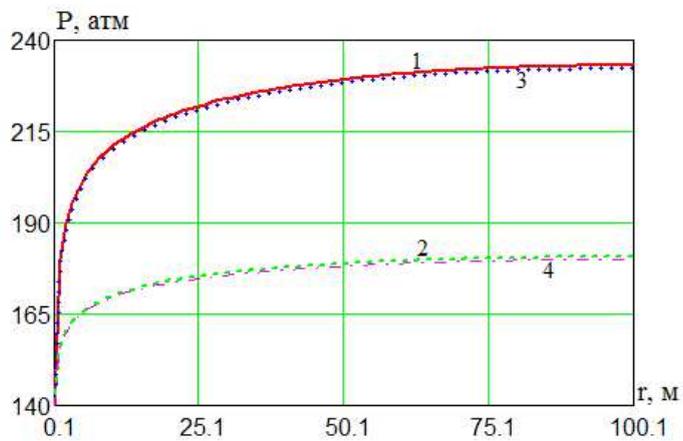
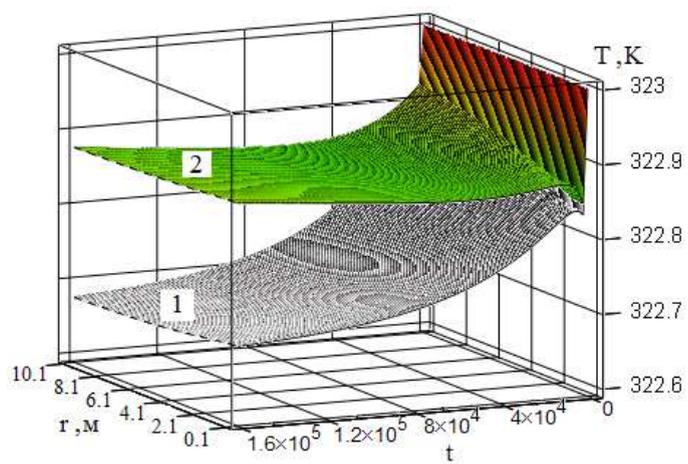
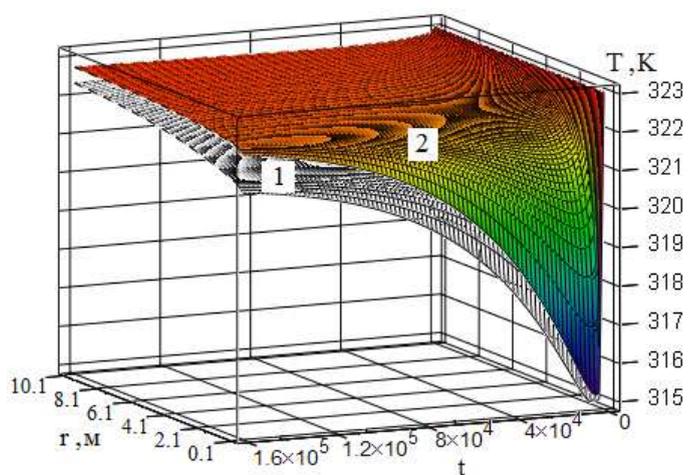


Рис. 2. Распределение давления идеального (кривые 1, 2) и реального (кривые 3, 4) газов по радиусу на кровле пласта. Нечетные номера соответствуют $t = 4 \cdot 10^3$, четные — $t = 4 \cdot 10^4$.

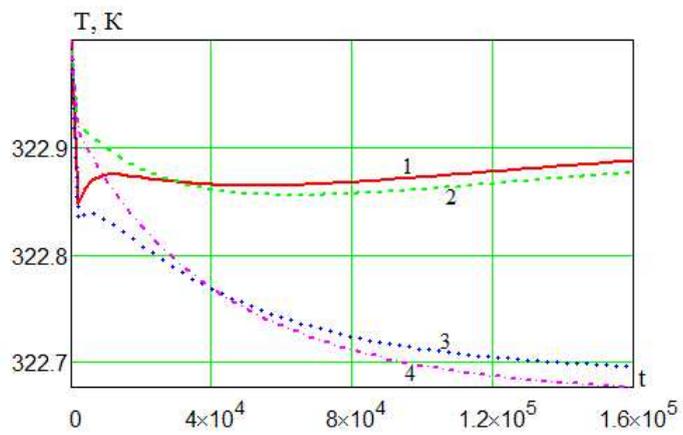


a)

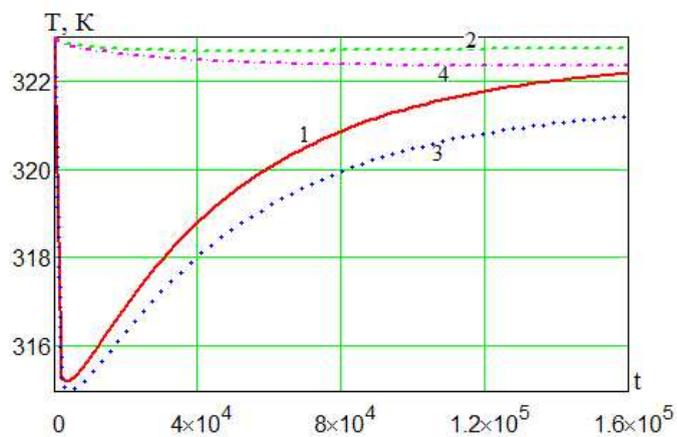


b)

Рис. 3. Динамика поля температур на кровле пласта (поверхность 1) и на оси симметрии (поверхность 2): *a* — идеальный газ, *b* — реальный газ.

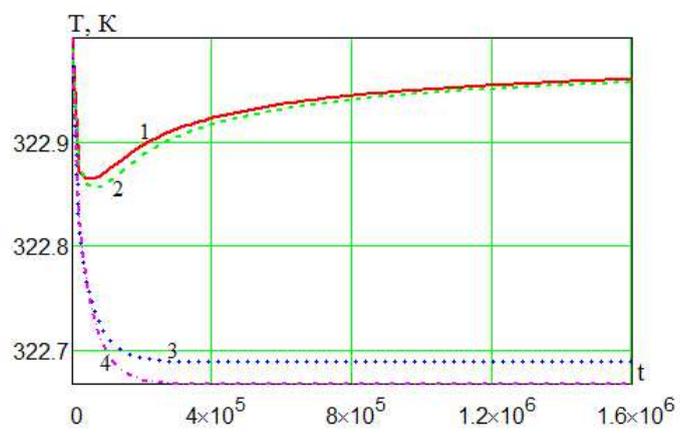


a)

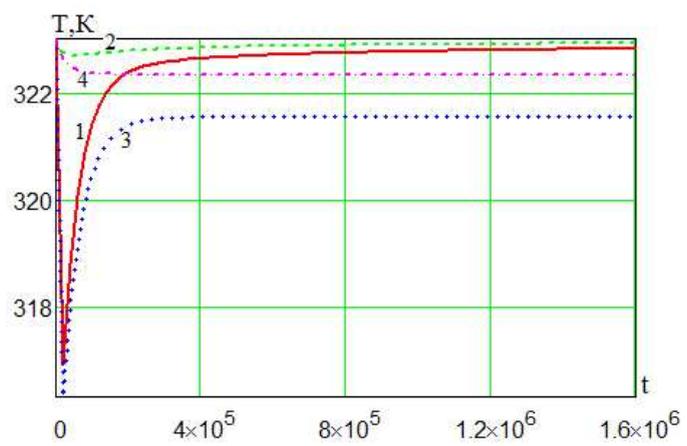


b)

Рис. 4. Динамика изменения температуры на кровле пласта (кривые 1, 2) и на оси симметрии (кривые 3, 4): *a* — идеальный газ, *b* — реальный газ. Нечетные номера соответствуют $r = 0.1$ м, четные — $r = 10.1$ м.

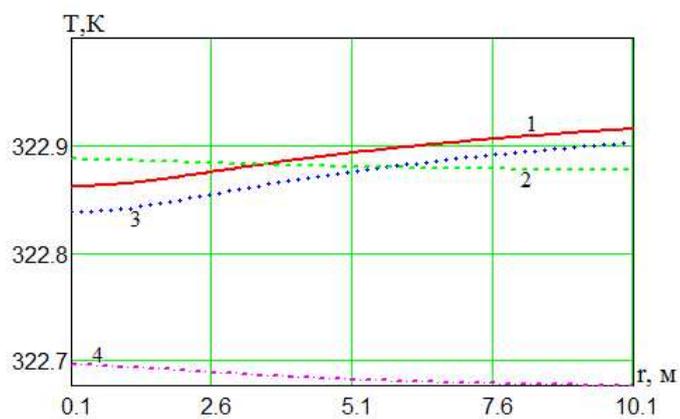


a)

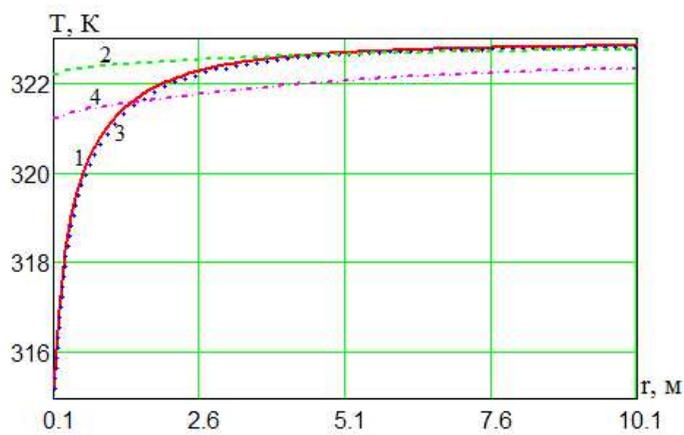


b)

Рис. 5. То же, что и на рис. 4.

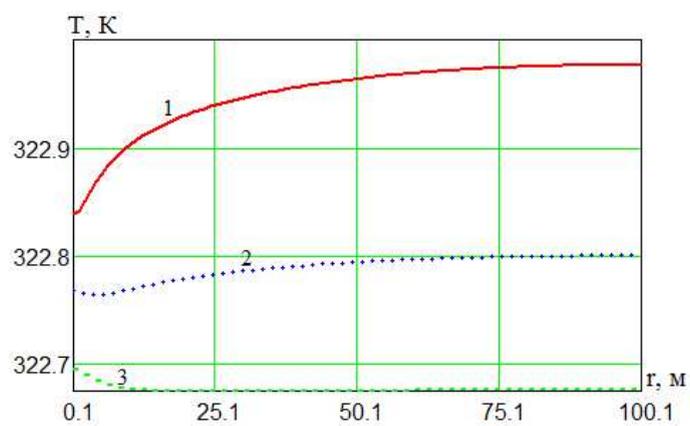


а)

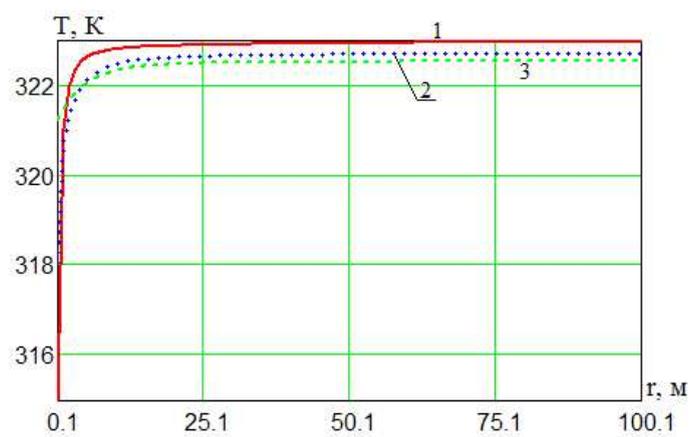


б)

Рис. 6. Распределение температуры по радиальной координате: а — идеальный газ, б — реальный газ (кривые 1, 2 — $z = 0$ м; кривые 3, 4 — $z = 5$ м). Нечетные номера соответствуют $t = 4 \cdot 10^3$, четные — $t = 1.6 \cdot 10^5$.

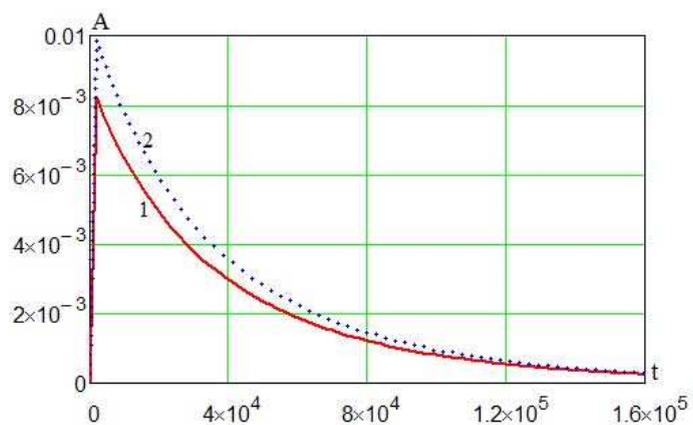


a)

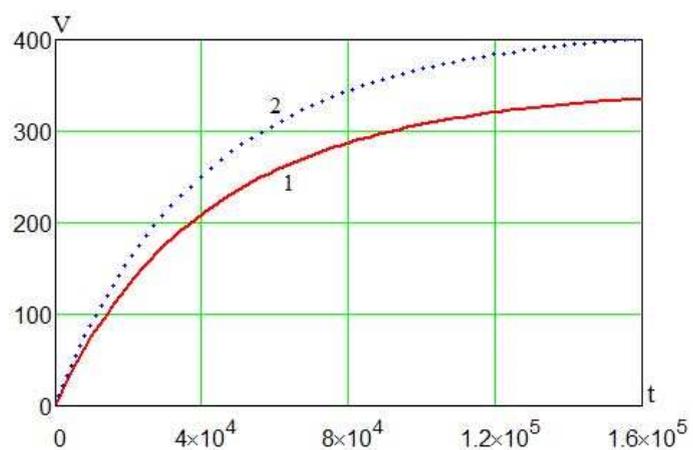


b)

Рис. 7. Распределение температуры по радиальной координате на оси симметрии: *a* — идеальный газ, *b* — реальный газ. Кривая 1 соответствует $t = 4 \cdot 10^3$, кривая 2 — $t = 4 \cdot 10^4$, кривая 3 — $t = 1.6 \cdot 10^5$.



а)



б)

Рис. 8. Динамика безразмерного расхода идеального (кривая 1) и реального (кривая 2) газов: a — текущий расход, b — накопленный расход.

Из результатов на рис. 3–7 нетрудно заметить, что учет реальных свойств газа приводит к существенному перераспределению температурного поля. Для обоих типов газа температура на верхней границе пласта за счет теплообмена почти всюду больше чем на нижней (сравни соответствующие поверхности и кривые на рис. 3–5), и с истечением некоторого времени температура на нижней границе становится практически неизменной по времени, тогда как на верхней границе температура представляет собой возрастающую функцию времени, т. е. теплообмен с окружающими горными породами оказывает одинаковое влияние на течение обоих типов газа. В начальный момент времени вблизи скважины наблюдается резкое падение температуры реального газа (рис. 3*b*, кривые 1 и 3 на рис. 4*b*, рис. 5*b*); но со временем происходит выравнивание температурной волны. В призабойной зоне, для идеального газа, также наблюдается скачок температуры в начальное время (рис. 3*a*, кривые 1 и 3 на рис. 4*a*), но данный скачок настолько малый, что если не брать в учет теплообмен с окружающими породами, то можно считать, что температура идеального газа всюду падает (см. кривые 3, 4 на рис. 5*a*).

Важно отметить, что изменение температуры реального газа на порядок больше, чем идеального. Также следует заметить следующие различия между распределениями температур идеального и реального газов: за все время наблюдения температура реального газа представляет собой возрастающую функцию по радиальной координате (рис. 6*b*, 7*b*), тогда как для идеального газа соответствующие кривые носят волновой характер (рис. 6*a*, рис. 7*a*).

В заключение отметим влияние реальных свойств газа на такой немаловажный параметр, как безразмерный массовый расход. Из графиков на рис. 8 видно, что безразмерный моментальный массовый расход идеального газа за все время наблюдения не превосходит моментального расхода реального газа, вследствие чего накопленный расход реального газа всегда больше накопленного расхода идеального.

ЛИТЕРАТУРА

1. Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа / Э. А. Бондарев, В. И. Васильев, А. Ф. Воеводин и др. — Новосибирск: Наука, 1988.
2. Бондарев Э. А., Рожин И. И., Аргунова К. К. Влияние неізотермических эффектов на добычу газа в северных регионах // Сиб. журн. вычисл. математики 2011. Т. 14, № 1. С. 19–28.
3. Латонов В. В., Гуревич Г. Р. Расчет коэффициента сжимаемости природного газа // Газовая промышленность. 1969. № 2. С. 7–9.
4. Бондарев Э. А., Аргунова К. К., Рожин И. И. Плоскопараллельная неізотермическая фильтрация газа: роль теплопереноса // Инженерно-физический журнал. 2009. Т. 82, № 6. С. 1059–1065.
5. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

г. Якутск

12 сентября 2012 г.

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ
ЗАДАЧИ ЗАМОРАЖИВАНИЯ
ФИЛЬТРУЮЩИХ ГРУНТОВ**

М. В. Васильева, Н. В. Павлова

1. Введение

Исследование изменений температурного режима грунтов является необходимым элементом инженерно-геологического обоснования строительства объектов в районах вечномерзлых грунтов. При сезонном оттаивании мерзлых грунтов изменяются их физико-механические свойства, что приводит к нарушению несущей способности фундаментов зданий и сооружений. Для укрепления фундаментов оснований зданий и сооружений используется метод замораживания грунтов. Замораживание грунтов производится с помощью специальных холодильных установок или с помощью сезонных охлаждающих устройств, не требующих затрат электрической энергии. Использование сезонных охлаждающих устройств также позволяет производить охлаждение грунтов в районах, где электричество недоступно, например, на нефтепроводах и газопроводах [1].

Искусственное замораживание грунтов с использованием охлаждающих устройств применяется вблизи свай для обеспечения устойчивости за счет создания вокруг сваи глыбы замерзшего грунта большой массы, которая предохранит грунт от размораживания в течение летнего периода. Такие процессы описываются на основе различных моделей тепломассопереноса в фильтрующих грунтах. Разработанные математические модели некоторых процессов искусственного замораживания фильтрующих грунтов и их решения рассмотрены в работах

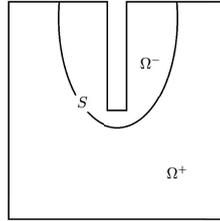


Рис. 1. Расчетная область.

[2–4] и в предыдущей работе авторов [5].

В данной работе рассматривается модельная задача искусственного замораживания фильтрующих грунтов с помощью замораживающей колонки в общей трехмерной постановке. Численная реализация модели базируется на методе конечных элементов с использованием современного программного пакета FEniCS на высокопроизводительных вычислительных системах.

2. Математическая модель

Рассмотрим математическую модель, описывающую распределение температуры при наличии фазовых переходов твердая фаза — жидкая фаза при некоторой заданной температуре фазового перехода T^* в области $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$ (рис. 1). Здесь $\Omega^+(t)$ — область, занятая жидкой фазой, где температура превышает температуру фазового перехода:

$$\Omega^+(t) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \Omega, T(\mathbf{x}, t) > T^*\},$$

и $\Omega^-(t)$ — область, занятая твердой фазой:

$$\Omega^-(t) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \Omega, T(\mathbf{x}, t) < T^*\}.$$

Фазовый переход происходит на границе раздела фаз $S = S(t)$.

Для моделирования процессов теплопереноса с фазовыми переходами используется классическая модель Стефана, описывающая тепловые процессы, сопровождающиеся фазовыми превращениями среды,

поглощением и выделением скрытой теплоты [6]:

$$(\alpha(\phi) + \rho^+ L \phi') \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{k}{\mu} \text{grad } p, \text{grad } T \right) \right) - \text{div}(\lambda(\phi) \text{grad } T) = 0, \quad (1)$$

где L — удельная теплота фазового перехода, k — тензор абсолютной проницаемости пористой среды, μ — вязкость воды, p — давление в грунте.

Коэффициенты уравнения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\alpha(\phi) = \rho^- c^- + \phi(\rho^+ c^+ - \rho^- c^-), \quad \lambda(\phi) = \lambda^- + \phi(\lambda^+ - \lambda^-),$$

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{при } T < T^*, \\ 1 & \text{при } T > T^*, \end{cases}$$

где ρ^+, c^+ и ρ^-, c^- — плотность и удельная теплоемкость талой и мерзлой зоны соответственно.

Поскольку рассматривается процесс распространения тепла в пористой среде, имеем

$$c^- \rho^- = (1 - m)c_{sc}\rho_{sc} + mc_i\rho_i, \quad c^+ \rho^+ = (1 - m)c_{sc}\rho_{sc} + mc_w\rho_w,$$

где m — пористость. Индексы sc, w, i обозначают каркас пористой среды, воду и лед соответственно. Для коэффициентов теплопроводности в талой и мерзлой зоне верны аналогичные соотношения

$$\lambda^- = (1 - m)\lambda_{sc} + m\lambda_i, \quad \lambda^+ = (1 - m)\lambda_{sc} + m\lambda_w.$$

На практике фазовые превращения не происходят мгновенно и могут происходить в малом интервале температуры $[T^* - \Delta, T^* + \Delta]$. В качестве функции ϕ можно взять ϕ_Δ :

$$\phi_\Delta = \begin{cases} 0 & \text{при } T \leq T^* - \Delta, \\ \frac{T - T^* + \Delta}{2\Delta} & \text{при } T^* - \Delta < T < T^* + \Delta, \\ 1 & \text{при } T \geq T^* + \Delta, \end{cases}$$

$$\phi'_\Delta = \begin{cases} 0 & \text{при } T \leq T^* - \Delta, \\ \frac{1}{2\Delta} & \text{при } T^* - \Delta < T < T^* + \Delta, \\ 0 & \text{при } T \geq T^* + \Delta. \end{cases}$$

Тогда получим уравнение для температуры в области Ω

$$(\alpha(\phi_\Delta) + \rho_l L \phi'_\Delta) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \operatorname{grad} T \right) - \operatorname{div}(\lambda(\phi_\Delta) \operatorname{grad} T) = 0, \quad (2)$$

которое является стандартным нелинейным параболическим уравнением.

Уравнение (2) дополняется начальным и граничными условиями

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad T = T_c, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad -k \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma/\Gamma_D. \quad (3)$$

Здесь Γ_D — место контакта с замораживающей колонкой.

Для учета фильтрации в грунте запишем уравнение для определения пластового давления в случае полностью насыщенной несжимаемой пористой среды:

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} p) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+, \quad (4)$$

где $\lambda = \rho^+ \frac{k}{\mu}$. Уравнение (4) дополняется граничными условиями

$$-\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} = g_N, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad p(\mathbf{x}) = g_D, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (5)$$

Здесь $\partial\Omega^+ = S \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$, S — подвижная граница фазового перехода.

Полученная задача (4), (5) является задачей с подвижной границей S . Для численного решения такой задачи без перестроения сетки воспользуемся методом фиктивных областей, который основывается на переходе к решению задачи в более широкой области [6, 7]. Приближенное решение, зависящее от параметра продолжения ϵ , будем искать во всей расчетной области Ω . При использовании варианта метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам решение определяется из уравнения

$$-\operatorname{div}(\lambda_\epsilon \operatorname{grad} p) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6)$$

Здесь разрывный коэффициент $\lambda_\epsilon(\mathbf{x})$ определяется так:

$$\lambda_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda, & \mathbf{x} \in \Omega^+, \\ \lambda\epsilon, & \mathbf{x} \in \Omega^-, \end{cases}$$

при достаточно малом ϵ . Задание подобным образом коэффициентов имеет физический смысл и моделирует фильтрацию в области Ω^- с очень малым коэффициентом $\lambda\epsilon \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Для уравнения (6) формируются граничные условия, соответствующие граничным условиям исходной задачи (4), (5):

$$\begin{aligned} -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) &= g_N, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad p(\mathbf{x}) = g_D, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \setminus (\Gamma_N \cup \Gamma_D). \end{aligned} \quad (7)$$

3. Вариационная формулировка

Проведем дискретизацию полученной системы уравнений (2), (3) и (6), (7) с использованием метода конечных элементов [8]. Умножим уравнения для температуры и давления на тестовые функции v_T, v_p и проинтегрируем с использованием формулы Грина:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\alpha(\phi_{\Delta}) + \rho L \phi'_{\Delta}) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{k}{\mu} \text{grad } p, \text{grad } T \right) \right) v_T dx \\ + \int_{\Omega} (\lambda(\phi_{\Delta}) \text{grad } T, \text{grad } v_T) dx = 0 \quad \forall v_T \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} (\lambda_{\epsilon} \text{grad } p, \text{grad } v_p) dx = 0 \quad \forall v_p \in H^1(\Omega). \quad (9)$$

Здесь $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева, состоящее из функций v таких, что v^2 и $|\nabla v|^2$ имеют конечный интеграл в Ω и $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_D} = 0\}$.

Для аппроксимации по времени уравнения для температуры применим стандартную чисто неявную схему и воспользуемся простейшей линейризацией (с предыдущего временного слоя):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\alpha(\phi_{\Delta}^n) + \rho L \phi'^n_{\Delta}) \left(\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} + \left(\frac{k}{\mu} \text{grad } p^n, \text{grad } T^{n+1} \right) \right) v_T dx \\ + \int_{\Omega} (\lambda(\phi_{\Delta}^n) \text{grad } T^{n+1}, \text{grad } v_T) dx = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} (\lambda_{\epsilon} \operatorname{grad} p^{n+1}, \operatorname{grad} v_p) dx = 0. \quad (11)$$

Для численного решения необходимо перейти от непрерывной вариационной задачи (10), (11) к дискретной задаче. Введем конечномерные пространства V_h, \widehat{V}_h , ($V_h, \widehat{V}_h \in H^1(\Omega)$) и определим в них дискретную вариационную задачу: найти $T_h, p_h \in V_h$ такие, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\alpha(\phi_{\Delta}^n) + \rho_l L \phi'_{\Delta}^n) \left(\frac{1}{\tau} T_h^{n+1} + \left(\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p_h^n, \operatorname{grad} T_h^{n+1} \right) \right) v_h^T dx \\ & + \int_{\Omega} (\lambda(\phi_{\Delta}^n) \operatorname{grad} T_h^{n+1}, \operatorname{grad} v_h^T) dx \\ & = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (\alpha(\phi_{\Delta}^n) + \rho_l L \phi'_{\Delta}^n) T_h^n v_h^T dx \quad \forall v_h^T \in \widehat{V}_h, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} (\lambda_{\epsilon} \operatorname{grad} p_h^{n+1}, \operatorname{grad} v_h^p) dx = 0 \quad \forall v_h^p \in \widehat{V}_h. \quad (13)$$

Заметим, что выбор пространства \widehat{V}_h непосредственно вытекает из вида применяемых конечных элементов.

4. Вычислительная реализация

Процесс численного решения поставленной задачи состоит из следующих этапов:

- построение геометрии и генерация сетки;
- численная реализация решателя на основе пакета FEniCS;
- визуализация полученных результатов.

В качестве модельной задачи рассмотрен процесс искусственного замораживания фильтрующих грунтов с использованием замораживающей колонки, на которой поддерживается постоянная температура T_c .

Геометрическая область строится с помощью программы Netgen, которая генерирует тетраэдральную сетку в трехмерной расчетной области. На рис. 2 изображена трехмерная расчетная область протяженностью 4 м по каждому направлению, в середине области находится

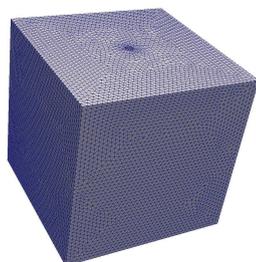


Рис. 2. Расчетная сетка.

замораживающая скважина радиусом 0.1 м. Расчетная сетка построена со сгущением вблизи замораживающей колонки и содержит 441 653 ячеек.

Для численного решения задачи используется программный пакет FEniCS, реализующий метод конечных элементов [8]. Полученные результаты, значения температуры и давления на каждом временном слое записываются в файл и визуализируются с помощью программы Paraview.

5. Численный эксперимент

Приведем результаты вычислительного эксперимента. Расчеты проводились при входных параметрах задачи, представленных в табл. 1.

Результаты численных расчетов через 20 дней работы замораживающей колонки в трехмерной области представлены на рис. 3, 4. Расчет проводился при $\tau = 1$ день и $T_{\max} = 20$ дней.

На рис. 5 и 6 представлены изотермы при $T = 0$ и распределения температурного поля для различных моментов времени (5, 10, 20 дней) в срезе по направлениям y и z .

Численное исследование эффективности распараллеливания на вычислительном кластере «Ариан Кузмин» СВФУ приводится в табл. 2. Время счета на вычислительном кластере на 16 потоках составило около 30 секунд, при запуске на 4 потока — около 75 секунд, а на одном потоке — 260 секунд, что показывает достаточно хорошую эффективность распараллеливания вычислительного процесса. Декомпозиция области распараллеливания на 16 потоках представлена на рис. 7.

Таблица 1. Параметры задачи

Обозначение	Значение	Метрика	Описание
T_c	-30.0	град	Температура замораживающей колонки
T_0	2.0	град	Начальная температура
T^*	0.0	град	Температура фазового перехода
p_0	$1.0e^6$	Па	Начальное давление
p_l	$1.1e^6$	Па	Давление на левой границе
p_r	$1.0e^6$	Па	Давление на правой границе
m	0.2		Пористость
k	$1.0e^{-13}$	m^2	Проницаемость грунта
μ	$1.0e^{-3}$	Па/сек	Вязкость воды
L	$1.04 * 1.0e^8$	Дж/кг	Удельная теплота фазового перехода
$c\rho_{sc}$	$1.20*1.0e^6$	Дж/м ³	Объемная теплоемкость грунта
$c\rho_f$	$4.20*1.0e^6$	Дж/м ³	Объемная теплоемкость воды
$c\rho_i$	$1.91*1.0e^6$	Дж/м ³	Объемная теплоемкость льда
λ_{sc}	1.1	Вт/(м град)	Коэффициент теплопроводности грунта
λ_f	0.56	Вт/(м град)	Коэффициент теплопроводности воды
λ_i	2.26	Вт/(м град)	Коэффициент теплопроводности льда

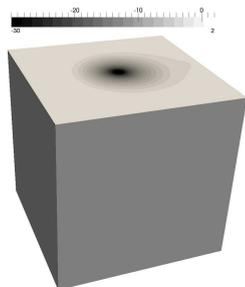


Рис. 3. Распределение температуры через 20 дней.

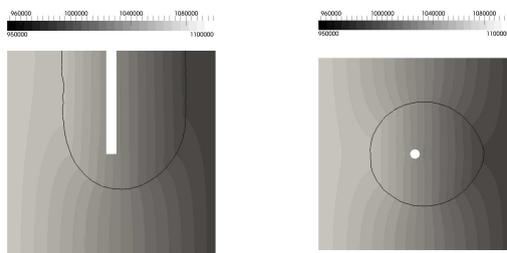


Рис. 4. Распределение давления через 20 дней (срез по y и z).

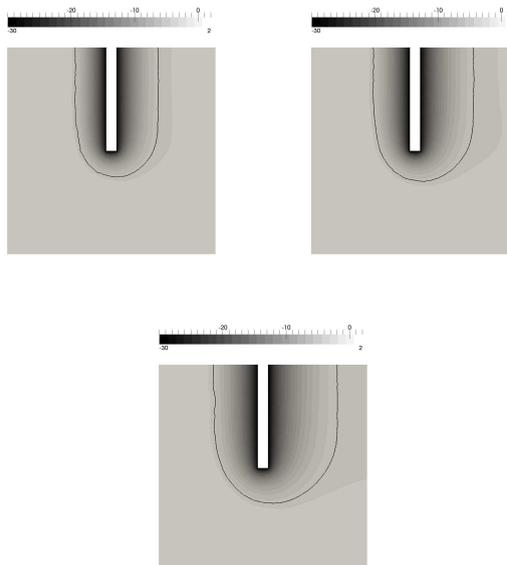


Рис. 5. Сравнение температурного поля для различных моментов времени: 5, 10 и 20 дней (срез по y).

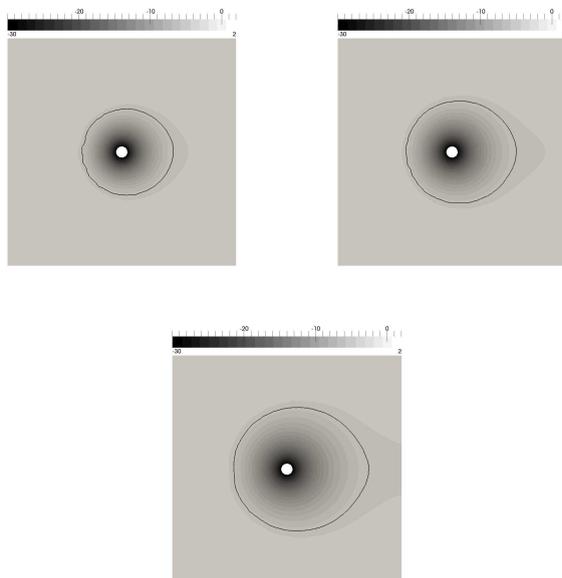


Рис. 6. Сравнение температурного поля для различных моментов времени: 5, 10 и 20 дней (срез по z).

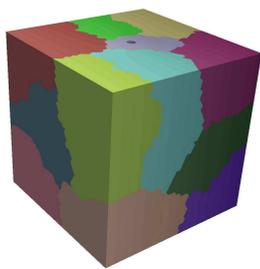


Рис. 7. Декомпозиция области распараллеливания на 16 потоках.

Таблица 2. Зависимость времени счета от количества запущенных процессов

Количество процессов	1	2	4	8	16
Время счета (сек)	260.79	151.4	75.17	41.85	29.70

ЛИТЕРАТУРА

1. Мат. междунар. науч.-практ. конф. по инженерному мерзлотоведению, посвященной XX-летию создания ООО НПО «Фундаментстройаркос». Тюмень: Сити-Пресс, 2011.
2. Сапунов Н. Е. Исследование процесса промерзания полусферической подземной ледопородной емкости, размещенной в фильтрующем пласте // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, 1980. С. 228–235.
3. Бондарев Э. А., Васильев В. И. Искусственное замораживание фильтрующих грунтов // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, 1987. С. 38–47.
4. Васильев В. И., Максимов А. М., Петров Е. Е., Цыпкин Г. Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. М.: Наука, 1996.
5. Васильева М. В., Павлова Н. В. Численное решение нестационарной задачи искусственного замораживания фильтрующих грунтов // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, № 2. С. 113–123.
6. Вабищевич П. Н., Самарский А. А. Вычислительная теплопередача. М.: Эдиториал УРСС, 2003.
7. Вабищевич П. Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.
8. Logg A., Mardal K.-A., Wells G. N. Automated solution of differential equations by the finite element method. The FEniCS book. Berlin: Springer-Verl., 2012. (Lect. Notes Comput. Sci. Eng.; V. 84).

УЧЕТ ВЯЗКОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО
И ЖИДКОГО ЯДЕР ЗЕМЛИ, ВЫЗВАННЫХ
ПРИЛИВНЫМ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ*)

Ю. М. Григорьев, О. Е. Скрыбина

Введение

Движения жидкого и твердого ядер Земли играют существенную роль в различных геофизических процессах. В частности, по теории «геомагнитного динамо» магнитное поле Земли образуется за счет этого движения проводящих масс. В 1996 г. [1] открыто явление дифференциального вращения твердого ядра Земли и приведена оценка явления — ядро проворачивается относительно мантии примерно на 2 градуса за год. Изучению этого и других явлений, происходящих внутри Земли, посвящено множество работ. Есть три подхода к изучению проблем динамики внутренних масс Земли. Первый — обработка сейсмических данных. Именно этим подходом получены данные, которые интерпретированы как результат дифференциального вращения твердого ядра Земли (X. Song, P. G. Richards [1], В. М. Овчинников, В. В. Адушкин, В. А. Ан и др.). Однако возможны и другие интерпретации этих же данных [2], из которых не следует факт дифференциального вращения ядра Земли. Ряд авторов придерживается мнения, что имеет место западный дрейф твердого ядра Земли. Второй подход — упомянутое выше лабораторное моделирование [3]. Такой метод

*) Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00507-а).

позволяет получать только качественные результаты. И наконец, третий подход — метод математического моделирования (В. М. Овчинников, В. В. Адушкин, В. А. Ан, М. Ю. Решетняк, А. Ф. Ревуженко, Ю. М. Григорьев, В. Е. Жаров, В. Е. Пасынок, В. Г. Вильке, Ю. В. Баркин, В. В. Шайдуров [4–11]). Только такой подход может дать какие-то количественные результаты по данной проблематике. Для получения полной картины ситуации представляется необходимым учитывать результаты всех трех методов как взаимодополняющих друг друга. Судя по последним публикациям, оценка величины скорости дифференциального вращения ядра Земли, получаемая сейсмическими методами, упала до долей градуса в год [12]. Теоретических оценок данного явления практически нет. В связи с этим актуальной является разработка математических моделей приливных деформаций Земли, которые вызывают перенос ее внутренних масс. В [6–8] построены плоские и трехмерные математические модели переноса внутренних масс Земли приливыми деформациями для случая однородной Земли. Вычислительная реализация этой модели показала качественное совпадение с результатами лабораторного моделирования А. Ф. Ревуженко. В [9–11] разработаны аналогичные кинематические двумерные модели, которые описывают вклад приливных деформаций в величину восточного дифференциального вращения твердого ядра Земли. В этих моделях на границе твердого и жидкого ядер Земли задавалось условие полного прилипания. В данной работе с целью учета вязкости жидкого ядра развивается математическая модель с условием частичного проскальзывания на границе твердого и жидкого ядер.

1. Математическая модель

Опишем математическую модель, которая аналогична [9–11], отличие будет в граничном условии. При построении математической модели считаем Землю тонкой оболочкой с твердым внутренним ядром, между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость (жидкое ядро). Для описания движения масс жидкого ядра при достаточно

малых высотах приливной волны и малой скорости движения можно ограничиться ползущим приближением. Тогда уравнение Навье — Стокса линеаризуется и сводится к системе Стокса:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{v} = \nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ — вектор скорости, $p(\mathbf{r})$ — давление, μ — динамический коэффициент вязкости.

Применяемый кинематический подход для моделирования приливных деформаций сводится к следующему. Пусть наблюдатель находится на вершине приливного горба и движется вместе с ней. Тогда он наблюдает неподвижную область в виде вытянутого тела, граничные и внутренние точки которого плывут под ним с некоторыми скоростями. В этом случае необходимо заранее задать форму деформированной приливными силами внешней оболочки и решать краевую задачу для системы Стокса внутри такого тела с полостью в виде формы внутреннего твердого ядра.

Форму оболочки в кинематической модели выберем в виде эллипса L с малым эксцентриситетом. Внутреннее твердое ядро моделируем круговым отверстием с радиусом R_1 в центре эллипса, большую полуось эллипса обозначим R_2 . На внешней границе (эллипсе L) заранее задается граничная скорость, имитирующая направленное движение приливной волны:

$$v_\tau = v_0 = \text{const}, \quad v_n = 0, \quad (2)$$

т. е. нормальная компонента скорости равна нулю (условие непроникания), касательная скорость равна постоянной величине. На внутренней границе жидкость — твердое ядро задаем граничное условие в следующем виде:

$$\alpha \beta v_\tau + (1 - \alpha) \sigma_{n\tau} = -\alpha \beta \omega R_1 \quad \text{при } r = R_1, \quad (3)$$

где ω — неизвестная заранее угловая скорость вращения твердого ядра, α — безразмерный параметр, $0 < \alpha < 1$, β — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность (Па · с)/м.

Условие (3) при различных значениях параметра α принимает вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{n\tau} &= 0 \quad \text{при } \alpha = 0 \quad (\text{полное отсутствие трения на границе}), \\ v_\tau &= -\omega R_1 \quad \text{при } \alpha = 1 \quad (\text{условие полного прилипания}).\end{aligned}$$

Следовательно, при $0 < \alpha < 1$ условие (3) можно принять как условие частичного проскальзывания.

Тензор напряжений $\sigma_{n\tau}$ выражается через тензор скоростей деформации следующим образом:

$$\sigma_{n\tau} = \sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta} = \mu\left(\frac{1}{r}v_{r,\vartheta} + v_{\vartheta,r} - \frac{v_\vartheta}{r}\right). \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), получим условие проскальзывания в следующем виде:

$$\alpha\beta v_\vartheta + (1 - \alpha)\mu\left(\frac{1}{r}v_{r,\vartheta} + v_{\vartheta,r} - \frac{v_\vartheta}{r}\right) = -\alpha\beta\omega R_1 \quad \text{при } r = R_1. \quad (5)$$

Таким образом, в рамках принятой выше кинематической модели необходимо решить первую краевую задачу для системы Стокса внутри эллипса с круговым отверстием:

$$\begin{cases} \mu\Delta \mathbf{v} - \nabla p = 0, & \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ v_n = 0, & v_\tau = v_0 = \text{const} \quad \text{на } L, \\ \alpha\beta v_\tau + (1 - \alpha)\sigma_{n\tau} = -\alpha\beta\omega R_1 & \text{при } r = R_1. \end{cases} \quad (6)$$

Отметим, что полученная задача является задачей с неизвестным заранее параметром — угловой скоростью ω вращения внутреннего ядра. Эта величина должна определяться из условия стационарности задачи, т. е. равенства нулю полного момента вязких сил, приложенных к внутренней границе L_1 :

$$\mathbf{M} = \oint_{L_1} \mathbf{r} \times (\sigma_{r\vartheta} \mathbf{n}_\vartheta) dl = \mathbf{k} R_1 \oint_{L_1} \sigma_{r\vartheta} dl = 0. \quad (7)$$

В свою очередь, тензор вязких напряжений можно выразить через тензор скоростей деформации ε , зависящий только от угловой скорости внутреннего ядра ω :

$$\sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta}, \quad (8)$$

где

$$\varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r(\omega)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta(\omega)}{\partial r} - \frac{v_\vartheta(\omega)}{r} \right). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), а затем получившееся выражение — в (7), получаем уравнение с одним неизвестным, решая которое находим неизвестную угловую скорость вращения ядра ω .

2. Метод малого параметра

Для решения задачи (6) применим метод малого параметра, разработанный в [9–11] для модели с полным прилипанием. Изложим вкратце метод для случая нашей модели с частичным проскальзыванием. Решение задачи (6) ищется в виде разложения по малому параметру:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{r}),$$

или в полярных координатах

$$v_r(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n v_r^{(n)}(r, \vartheta), \quad v_\vartheta(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n v_\vartheta^{(n)}(r, \vartheta). \quad (10)$$

В силу линейности задачи каждая поправка $\mathbf{v}^{(n)}$ удовлетворяет системе Стокса. Малый параметр λ связан с эксцентриситетом ε эллипса соотношением $\lambda = \frac{\varepsilon^2}{2}$.

Далее используется аналогичная с предыдущей моделью схема: в ряд по малому параметру разлагаются краевые условия, уравнения эллипса в полярных координатах и т. д. Подробности можно найти в [9]. Отличие от [9] будет только в краевом условии на окружности. В итоге решение исходной задачи сводится к решению последовательности краевых задач внутри кругового кольца, ограниченного окружностями радиусов R_1 и R_2 . Для каждого приближения $\mathbf{v}^{(n)}$ краевое условие строится с помощью предыдущего приближения $\mathbf{v}^{(n-1)}$.

Для нулевого приближения имеем следующую задачу системы Стокса в круговом кольце:

$$\mu \Delta \mathbf{v}^{(0)} - \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
v_r^{(0)}|_{r=R_2} = 0, \quad v_\vartheta^{(0)}|_{r=R_2} = -\Omega R_2, \\
((\alpha\beta - (1-\alpha)\mu R_1^{-1})v_\vartheta^{(0)} + (1-\alpha)\mu R_1^{-1}v_{r,\vartheta}^{(0)} + (1-\alpha)\mu v_{\vartheta,r}^{(0)})|_{r=R_1} \\
= -\alpha\beta\omega R_1.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь Ω — угловая скорость вращения мантии Земли, равная одному обороту за сутки, $v_0 = \Omega R_2$.

Решение задачи ищем в виде комплексного представления общего решения системы Стокса [9, 13]:

$$\mu(u + iv) = \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad p = -4 \operatorname{Re} \varphi'(z),$$

где u и v — декартовы компоненты вектора скорости, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические функции комплексной переменной $z = x + iy$. Введенные аналитические функции разлагаются в ряд Лорана:

$$\varphi(z) = \gamma \ln z + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad \psi(z) = \bar{\gamma} \ln z + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k z^k.$$

Далее, проделав выкладки, как в [9], получаем выражения для комплексных потенциалов в нулевом приближении:

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= -iz \frac{R_2^2 \Omega (\alpha\beta R_1 + (\alpha - 1)2\mu) - \alpha\beta R_1^3 \omega_0}{2\alpha\beta R_1 (R_1^2 - R_2^2) - 4\mu R_2^2 (\alpha - 1)}, \\
\psi(z) &= -\frac{i}{z} \frac{\alpha\beta R_1^3 R_2^3 (\Omega - \omega_0)}{\alpha\beta R_1 (R_1^2 - R_2^2) - 2\mu R_2^2 (\alpha - 1)}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Угловую скорость ядра определяем из уравнения (7):

$$\mathbf{M} = \mathbf{k} R_1 \oint_{L_1} \sigma_{r\vartheta} dl = \frac{R_1^2 R_2^2 (\Omega - \omega)}{r^2 (R_1^2 - R_2^2)} = 0.$$

Отсюда получаем, что угловая скорость вращения ядра ω в нулевом порядке приближения равна угловой скорости внешней оболочки Ω .

Для первого порядка приближения краевые условия имеют вид

$$\begin{cases} v_r^{(1)}|_{r=R_2} = R_2 \Omega \sin 2\vartheta + R_2 \sin^2 \vartheta \frac{\partial v_r^{(0)}}{\partial r}, & v_\vartheta^{(1)}|_{r=R_2} = R_2 \sin^2 \vartheta \frac{\partial v_\vartheta^{(0)}}{\partial r}, \\ v_r^{(1)}|_{r=R_1} = 0, & \left(\alpha\beta v_\vartheta^{(1)} + (1-\alpha)\mu \left[\frac{1}{r} v_{r,\vartheta}^{(1)} + v_{\vartheta,r}^{(1)} - \frac{v_\vartheta^{(1)}}{r} \right] \right) \Big|_{r=R_1} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

где $v_r^{(0)}$ и $v_\vartheta^{(0)}$ — определенное в нулевом приближении поле скоростей. Таким образом,

$$\begin{aligned} v_r^{(1)}|_{r=R_2} &= R_2 \Omega \sin 2\vartheta, \\ v_\vartheta^{(1)}|_{r=R_2} &= \frac{2R_1^3 \alpha \beta \omega - \Omega (R_1 (R_1^2 + R_2^2) \alpha \beta + 2R_2^2 (\alpha - 1) \mu)}{R_1 (R_2^2 - R_1^2) \alpha \beta + 2R_2^2 (\alpha - 1) \mu} R_2 \sin^2 \vartheta, \\ ((\alpha \beta - (1 - \alpha) \mu R_1^{-1}) v_\vartheta^{(1)} + (1 - \alpha) \mu R_1^{-1} v_{r,\vartheta}^{(1)} + (1 - \alpha) \mu v_{\vartheta,r}^{(1)})|_{r=R_1} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Эта задача также решается при помощи комплексного представления. Можно показать что из всех коэффициентов разложения в ряды Лорана комплексных потенциалов ненулевыми будут только 6 комплексных неизвестных $a_1, a_3, a_{-1}, b_1, b_{-1}, b_{-3}$, остальные коэффициенты равны нулю. Ввиду громоздкости выражений их не приводим. Уравнение для определения угловой скорости ядра имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{\alpha \beta \pi R_1}{\alpha - 1} \left[2R_1 \omega - \lambda R_2^2 (\alpha \beta (r^2 - R_1^2) + 2r^2 (\alpha - 1) \mu) \right. \\ &\quad \times \frac{(\Omega (R_1 (R_1^2 + R_2^2) \alpha \beta + 2R_2^2 (\alpha - 1) \mu) - 2R_1^3 \alpha \beta \omega)}{r (R_1 (R_1^2 - R_2^2) \alpha \beta + 2R_2^2 (\alpha - 1) \mu)^2} \\ &\quad \left. - \frac{2(R_2^2 (\alpha \beta R_1^3 - r^2 (\alpha \beta R_1 + 2(\alpha - 1) \mu)) \Omega + R_1^3 (r^2 - R_2^2) \alpha \beta \omega)}{r R_1 (R_1^2 - R_2^2) \alpha \beta - 2r R_2^2 (\alpha - 1) \mu} \right] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда получаем выражение для угловой скорости ядра в первом приближении:

$$\omega = \Omega \frac{\alpha \beta R_1 [R_1^2 (\lambda - 2) + R_2^2 (\lambda + 2)] + 2R_2^2 (\alpha - 1) (\lambda + 2) \mu}{2\alpha \beta R_1 [R_2^2 + R_1^2 (\lambda - 1)] + 4R_2^2 (\alpha - 1) \mu}. \quad (16)$$

Теперь можно оценить скорость вращения твердого ядра. Для этого разложим (16) в ряд по λ до первого порядка:

$$\omega = \Omega \left(1 + \lambda \frac{1}{2} \right). \quad (17)$$

Выражение (17) аналогично разложению из [9–11], полученному в первом приближении в модели с условием полного проскальзывания на

внутренней границе. Тем самым можно сделать вывод о том, что в рамках нашей модели значение вязкости жидкого ядра Земли не оказывает влияния на угловую скорость дифференциального вращения твердого ядра. Высота приливной волны для реальной Земли составляет около 0,4 м, но так как областью нашего исследования является жидкое ядро с твердым внутренним ядром, эту величину берем порядка 0,2–0,25 м. Тогда малый параметр λ получается порядка 10^{-7} . Согласно формуле (17) получаем, что опережение внутреннего твердого ядра составляет 0,39 минут в год. Это число хорошо согласуется с теоретической оценкой из [4], полученной другим методом, и последними оценками, полученными обработкой сейсмических данных [12]. Заметим, что вязкость жидкого ядра Земли — один из наименее известных физических параметров Земли. Имеющиеся в литературе оценки вязкости ядра различаются на много порядков и лежат в диапазоне 10^{-3} – 10^{11} Па·с [14].

Заключение

В работе разработана двумерная модель переноса внутренних масс Земли приливными деформациями с учетом наличия ее твердого ядра и условием частичного проскальзывания на границе твердого и жидкого ядер. В предложенное граничное условие входят вязкость жидкого ядра Земли, один размерный и один безразмерный параметры. Вычислительная реализация модели проведена методом малого параметра до первого порядка малости. Выявлено, что в этом порядке приближения вязкость жидкого ядра Земли не оказывает влияния на угловую скорость дифференциального вращения. Оценка величины дифференциального вращения твердого ядра Земли модели с условием частичного проскальзывания составила 0,39 мин/год в восточном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Song X., Richards P. G. Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core // Nature. 1996. V. 382. P. 221–224.
2. Souriau A., Garcia R., Poupinet G. The seismological picture of the inner core: structure and rotation // C. R. Geoscience. 2003. V. 335. P. 51–63.
3. Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Приливное деформирование планет: опыт экспериментального моделирования // Геотектоника. 1991. № 6. С. 21–35.

4. Вильке В. Г. Об относительном движении ядра и оболочки планеты в гравитационном поле точечной массы // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 4. С. 617–630.
5. Исаева С. И., Шайдунов В. В. Математическая модель движения твердого ядра Земли // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2011. № 1. С. 40–46.
6. Григорьев Ю. М. Плоская задача о переносе масс приливными волнами // Мат. заметки ЯГУ. 1999. Т. 6, вып. 2. С. 9–20.
7. Григорьев Ю. М., Ревуженко А. Ф. Пространственная задача о переносе масс приливными волнами / Препринт № 8. Новосибирск: НГУ, 1999 г.
8. Григорьев Ю. М., Ревуженко А. Ф. Пространственная задача о переносе масс приливными волнами // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 40–54.
9. Григорьев Ю. М., Скрыбина О. Е. Математическое моделирование относительной динамики твердого и жидкого ядер Земли // Вест. СибГАУ. 2008. Т. 21, № 4. С. 68–72.
10. Григорьев Ю. М., Мохначевский А. Н., Скрыбина О. Е. О вкладе приливного деформирования на дифференциальное вращение внутреннего ядра земли // Вест. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4, ч. 5. С. 2118–2119.
11. Григорьев Ю. М., Мохначевский А. Н., Скрыбина О. Е. Оценка вклада приливного деформирования на величину дифференциального вращения внутреннего ядра Земли // Сб. тр. Всерос. науч.-практ. конф. посвященной памяти чл.-кор. РАН М. Д. Новопашина «Геомеханические и геотехнологические проблемы эффективного освоения месторождений твердых полезных ископаемых северных и северо-восточных регионов России» (г. Якутск, 13–15 сентября 2011 г.). Якутск: ИМЗ СО РАН, 2011. С. 237–238.
12. Deguen R. Structure and dynamics of Earth's inner core // Earth Planetary Sci. Lett. 2012. V. 333–334. P. 211–225.
13. Григорьев Ю. М., Скрыбина О. Е. Математические проблемы моделирования направленного переноса внутренних масс Земли приливными деформациями // Динамика сплошной среды. Вып. 122. Новосибирск, 2004. С. 57–62.
14. Secco R. A. Viscosity of the outer core // Mineral Physics and Crystallography: a handbook of physical constants (AGU Reference Shelf) V. 2. Washington, DC: Amer. Geophys. Union, 1995. P. 218.

$a_{j,j} \neq 0, j = 0, 1, 2, \dots$, то говорим, что такая бесконечная система линейных алгебраических уравнений (1) задана в гауссовой форме.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если бесконечная матрица $A = (a_{i,j})$ имеет элементы $a_{i,j} = 0, i < j$, причем элементы главной диагонали не равны нулю, т. е. $a_{j,j} \neq 0, j = 0, 1, 2, \dots$, то такую бесконечную матрицу называем *треугольной*.

Таким образом, если все элементы, расположенные под главной диагональю бесконечной матрицы $A = (a_{i,j})$ ($a_{j,j} \neq 0, j = 1, 2, \dots$), равны нулю, то такую матрицу называем *гауссовой*. Если все элементы, расположенные над главной диагональю, равны нулю, то такую бесконечную матрицу A называем *треугольной*.

Введем некоторые обозначения для конечных определителей, составленных из элементов данной бесконечной матрицы $A = (a_{i,k})$:

$$A \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_p \\ k_1 k_2 \dots k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1, k_1} & a_{i_1, k_2} & \dots & a_{i_1, k_p} \\ a_{i_2, k_1} & a_{i_2, k_2} & \dots & a_{i_2, k_p} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i_p, k_1} & a_{i_p, k_2} & \dots & a_{i_p, k_p} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Определитель (3) называется *минором p -го порядка* матрицы A , если $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m$ и $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n$. Миноры (3), у которых $i_1 = k_1, i_2 = k_2, \dots, i_p = k_p$, называются *главными*.

В обозначениях (3) определитель квадратной матрицы $|A = (a_{i,k})|_1^n$ запишется так:

$$|A| = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Пусть дана матрица $A = (a_{i,k})_1^\infty$ бесконечного ранга. Введем следующие обозначения для последовательных главных миноров этой матрицы:

$$D_k = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Переведем систему (1) в гауссову форму, для этого используем результаты работы [1].

Теорема 1. Всякую матрицу $A = (a_{i,k})_1^\infty$ бесконечного ранга, у которой последовательность главных миноров отлична от нуля, т. е. $D_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, \infty$), можно представить в виде произведения треугольной матрицы B на гауссову матрицу C :

$$A = BC = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} & \dots \\ 0 & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{n,n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{pmatrix},$$

при этом

$$b_{1,1}c_{1,1} = D_1, \quad b_{2,2}c_{2,2} = \frac{D_2}{D_1}, \dots, b_{n,n}c_{n,n} = \frac{D_n}{D_{n-1}} \dots, \quad (4)$$

$$b_{j,k} = b_{k,k} \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & j \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}}, \quad c_{j,k} = c_{k,k} \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & j \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}} \quad (5)$$

$$(j = k, k+1, \dots, \infty; \quad k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Для фактического вычисления элементов матриц B и C важно

Следствие 1. Элементы столбцов матрицы B и строк C связаны с элементами матрицы A рекуррентными соотношениями

$$b_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{i,j}c_{j,k}}{c_{k,k}}, \quad i \geq k, \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (6)$$

$$c_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1} b_{i,j}c_{j,k}}{b_{i,i}}, \quad i \leq k, \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (7)$$

Следствие 2. Если диагональные элементы $b_{i,i}$ ($i = 1, 2, \dots, \infty$) (4) матрицы B равны единице, то получим метод исключения Гаусса.

Таким образом, для однозначного определения коэффициентов $b_{i,k}$ и $c_{i,k}$ полагаем, что $b_{i,i} = 1$, $i = 1, 2, \dots$. В этом случае появляется возможность преобразования формул следствия 1 для удобства вычислений по ним. А именно, в формулах (6), (7) сделаем преобразование

с целью оставить только одно неравенство, при необходимости меняя индексы. Из формул (6), (7) ясно, что при $i = 1$ или $k = 1$ суммы в формулах исчезают, в чем можно убедиться непосредственным вычислением. Следовательно,

$$\begin{aligned} c_{1,i} &= a_{1,i}, & b_{i,1} &= \frac{a_{i,1}}{c_{1,1}}, & i &\geq 1, \\ c_{2,i} &= a_{2,i} - b_{2,1}c_{1,i}, & b_{i,2} &= \frac{a_{i,2} - b_{i,1}c_{1,2}}{c_{2,2}}, & i &\geq 2, \\ c_{3,i} &= a_{3,i} - \sum_{j=1}^2 b_{3,j}c_{j,i}, & b_{i,3} &= \frac{a_{i,3} - \sum_{j=1}^2 b_{i,j}c_{j,3}}{c_{3,3}}, & i &\geq 3. \end{aligned}$$

Обобщая по индукции, получим

$$c_{n,i} = a_{n,i} - \sum_{j=1}^{n-1} b_{n,j}c_{j,i}, \quad b_{i,n} = \frac{a_{i,n} - \sum_{j=1}^{n-1} b_{i,j}c_{j,n}}{c_{n,n}}, \quad i \geq n. \quad (8)$$

При $i = n$ из формул (8) заключаем, что $b_{n,n} = 1$ для любого n . Кроме того, заменяя индексы в первой формуле следующим образом: $n = i$, $i = k$, а во второй — $i = i$, $n = k$, получим соответствующие формулы следствия 1.

Бесконечную систему (1) запишем кратко:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{j,i}x_j = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

с бесконечной матрицей (2) $A = (a_{i,j})_1^{\infty}$, которую преобразованием Гаусса переводим в систему с гауссовой формой:

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_{j,j+p}x_{j+p} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

или в матричной форме:

$$CX = \bar{B},$$

где C — гауссова бесконечная матрица, X, \bar{B} — столбцы неизвестных x_{j+p} и свободных членов b_j системы (10) соответственно. Теперь необходимо вычислить свободные члены b_j системы (10) при применении преобразования Гаусса к системе (9). Поскольку матрица B треугольная, в [2] показано, что она имеет единственную двустороннюю обратную матрицу B^{-1} . Следовательно, исходя из (9) и теоремы 1 справедливы соотношения $AX = BCX = F$ и $B^{-1}BCX = B^{-1}F$, откуда $CX = B^{-1}F$, где F — столбец свободных членов системы (9). Чтобы вычислить правую часть последнего матричного соотношения, поступаем следующим образом. Обозначим выражение $B^{-1}F$ как новое неизвестное Y , рассмотрим бесконечную систему $BY = F$ с треугольной матрицей B и решим ее рекуррентно: $y_1 = f_1, y_2 = f_2 - b_{2,1}y_1$ и так далее, по индукции получаем $y_n = f_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_{n,k}y_k, n = 1, 2, \dots$, где $b_{n,k}$ — коэффициенты треугольной матрицы B .

В [3] получены условия совместности неоднородных гауссовых систем вида (10), при этом существенно использован метод редукции в узком и широком смыслах [4, 5]. Для решения гауссовой системы (10) изучены урезанные системы и получены их решения, например, методом редукции в узком смысле:

$$x_j^n = B_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{11}$$

где

$$B_{n-j} = \frac{b_j}{c_{j,j}} - \sum_{p=0}^{n-j-1} \frac{c_{j,n-p}}{c_{j,j}} B_p, \quad B_0 = \frac{b_n}{c_{n,n}}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Если предположить, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n-j} = B(j)$ и возможен предельный переход в выражении (12), то для каждого j имеет место равенство

$$B(j) = \frac{b_j}{c_{j,j}} - \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{c_{j,p}}{c_{j,j}} B(p). \tag{13}$$

Поскольку $c_{j,j} \neq 0$, отсюда следует соотношение

$$\sum_{p=j}^{\infty} c_{j,p} B(p) = b_j. \quad (14)$$

Сравнивая выражение (14) с (10), убеждаемся, что $x_j = B(j)$, т. е. $B(j)$ является частным решением неоднородной бесконечной системы (10).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Частное решение $x_j = B(j)$ неоднородной гауссовой системы (10) будет называться *строго частным решением* системы (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что строго частное решение $B(j)$ является единственным таким решением гауссовой системы (10). Кроме того, если не существует строго частного решения, то неоднородная гауссова система (10) *несовместна*, т. е. система (10) вообще не имеет решений. Выпишем условия несовместности гауссовой системы (10). Для этого, используя коэффициенты и свободные члены системы (10), введем обозначения:

$$b'_{j+p} = \frac{b_{j+p}}{c_{j+p,j+p}}, \quad p = 0, 1, \dots; \quad c'_{n,j} = \frac{c_{j,n}}{c_{j,j}}, \quad c'_{j,j} = 1, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (15)$$

Из коэффициентов (15) составим бесконечную матрицу $A(j)$:

$$A(j) = \begin{pmatrix} c'_{j+1,j} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \cdot \\ c'_{j+2,j} & c'_{j+2,j+1} & 1 & \dots & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ c'_{j+k,j} & c'_{j+k,j+1} & c'_{j+k,j+2} & \dots & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ c'_{n-2,j} & c'_{n-1,j+1} & c'_{n-2,j+2} & \dots & 1 & 0 & \cdot \\ c'_{n-1,j} & c'_{n-1,j+1} & c'_{n-1,j+2} & \dots & c'_{n-1,n-2} & 1 & \cdot \\ c'_{n,j} & c'_{n,j+1} & c'_{n,j+2} & \dots & c'_{n,n-2} & c'_{n,n-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Допускаем, что бесконечная матрица $A(j)$ порождает бесконечный определитель $|A(j)|$. Из главных миноров определителя $|A(j)|$ составим определители $A_n(j)$ n -го порядка, при этом полагая, что

$$A_0(j) = 1, \quad A_1(j) = c'_{j+1,j}, \quad A_2(j) = \begin{vmatrix} c'_{j+1,j} & 1 \\ c'_{j+2,j} & c'_{j+2,j+1} \end{vmatrix},$$

$$A_3(j) = \begin{vmatrix} c'_{j+1,j} & 1 & 0 \\ c'_{j+2,j} & c'_{j+2,j+1} & 1 \\ c'_{j+3,j} & c'_{j+3,j+1} & c'_{j+3,j+2} \end{vmatrix}, \dots, A_n(j) = \begin{vmatrix} c'_{j+1,j} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c'_{j+2,j} & c'_{j+2,j+1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ c'_{j+n-1,j} & c'_{j+n-1,j+1} & c'_{j+n-1,j+2} & \dots & c'_{j+n-1,j+n-2} & 1 \\ c'_{j+n,j} & c'_{j+n,j+1} & c'_{j+n,j+2} & \dots & c'_{j+n,j+n-2} & c'_{j+n,j+n-1} \end{vmatrix} \quad (17)$$

Можно показать, что определители $A_p(j)$ порядка p вычисляются рекуррентно:

$$A_p(j) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} c'_{j+p,j+k} A_k(j), \quad A_0(j) = 1. \quad (18)$$

Пусть ряд $\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A_p(j)b_{j+p}}{c_{j+p,j+p}}$ сходится для любого j , при этом он одновременно не равен нулю для всех j . Таким образом, выполняются условия

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_p(j) \frac{b_{j+p}}{c_{j+p,j+p}} < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

и хотя бы для одного j имеет место условие

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A_p(j)b_{j+p}}{c_{j+p,j+p}} \neq 0, \quad (20)$$

где $A_p(j)$ вычисляются по формуле (18).

Пусть неоднородная гауссова система (10) совместна. Найдем ее строго частное решение.

Теорема 2. При выполнении условий (19) и (20) неоднородная гауссова система (10) имеет строго частное решение x_j вида

$$x_j = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A_p(j)b_{j+p}}{c_{j+p,j+p}}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где $A_p(j)$ определяются соотношением (18).

По результатам теорем 1 и 2 составлена программа на ПК, реализующая решение неоднородных бесконечных систем. Для проверки предлагаемых алгоритмов и работы программы на ПК рассмотрим гауссову систему.

Пусть задана неоднородная периодическая гауссова система

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2j+2p+1)!}{(2p)!} x_{j+p} = b_j = b^j, \quad (22)$$

$$j = \overline{1, \infty}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad b = \text{const} > 0.$$

В работах [4, 5] получены частные решения гауссовой системы (22) в аналитическом виде:

$$x_i = \frac{b^i}{(2i+1)! \operatorname{ch}(\sqrt{b})}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Были проведены расчеты по формулам (21) и (23). При вычислении каждого x_j по (21) расчет заканчивается, когда разница между двумя вычислениями становилась по абсолютной величине меньше заданного $\epsilon = 10^{-6}$: $|x_j^{p+1} - x_j^p| < \epsilon$. Совпадение результатов до шести знаков после точки происходит уже при $p = 14$. Здесь необходимо заметить, что для задачи (22) формула (23) следует из формулы (21), как доказано в [3]. Проверка преобразования Гаусса осуществляется решением конечных систем, поскольку формула (21) верна и для конечных систем, но в этом случае верхний индекс суммы в (21) будет равен $n - j$. Для простоты рассмотрим следующую конечную систему четвертого порядка:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 4, \\ -2x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0, \\ -4x_1 - 4x_2 - 13x_3 + 15x_4 = -9, \end{cases}$$

для которой набор чисел $x_1 = -1$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$ является решением.

Вычисления по разработанной программе дают те же числа. Таким образом, формула (21) в сочетании с преобразованием Гаусса дает

единственное решение, если таковое существует, системы любого порядка вплоть до бесконечного.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как показано в [6], формула (21) фактически является расписанной формулой Крамера гауссовых систем любого порядка вплоть до бесконечного.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. М. Об алгоритме Гаусса для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 1. С. 133–140.
2. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Физматгиз, 1960.
3. Федоров Ф. М. Неоднородные гауссовы бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 1. С. 124–132.
4. Федоров Ф. М. Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.
5. Федоров Ф. М. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и их приложения. Новосибирск: Наука, 2011.
6. Федоров Ф. М. О крамеровости гауссовых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 2. С. 162–170.

г. Якутск

5 ноября 2012 г.

АННОТАЦИИ

УДК 514.755

К ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ОДНОЙ ПАРЫ ПЯТИМЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P^5 . И. В. Бубякин. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Изучается проективно-дифференциальная геометрия пары пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^3 . Определено строение одного класса такой пары комплексов. Библиогр. 3.

Ключевые слова: грассманово многообразии, грассманово отображение, конус Сегре.

УДК 517.96

О СПЕКТРЕ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА. О. А. Вихрева. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Исследована однозначная разрешимость граничной задачи, относящейся к случаям наличия в исходной дифференциальной операции вырождения порядка в гильбертовом пространстве с помощью элемента теории операторов и ее частный случай. Библиогр. 3.

Ключевые слова: гильбертово пространство, обобщенное решение, компактное множество, спектр оператора, линейный непрерывный функционал.

УДК 517.956

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА. И. Е. Егоров, Т. И. Захарова. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

В цилиндрической области пространства \mathbb{R}^{n+1} для уравнения смешанного типа второго порядка рассматривается краевая задача, которая впервые исследовалась А. Н. Тереховым. При определенных условиях на коэффициенты уравнения доказывается существование и единственность обобщенных решений, фредгольмовость краевой задачи в некотором весовом пространстве Соболева. Библиогр. 5.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, существование, единственность, обобщенное решение, неравенство, оценка, фредгольмовость.

УДК 517.954

О ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН НА МЕЛКОЙ ВОДЕ. А. А. Замышляева, Е. В. Бычков. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

В терминах теории относительно p -ограниченных операторов исследована модель распространения волн на мелкой воде с учетом капиллярных эффектов. Предложен алгоритм численного решения задачи Шоултера — Сидорова — Дирихле для ИМВ q -уравнения. Ил. 1, библиогр. 8.

Ключевые слова: фазовое пространство, уравнение соболевского типа, относительно p -ограниченный оператор, задача Шоултера — Сидорова.

УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРЕМЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ. А. И. Кожанов. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Изучается разрешимость некоторых новых краевых задач для линейных неклассических уравнений, включающих в себя линеаризованные уравнения малых продольных возмущений уединенных волн. Для рассматриваемых задач доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений. Библиогр. 13.

Ключевые слова: краевая задача, линеаризованное уравнение, априорная оценка, существование, единственность.

УДК 511.528.2

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА УРАВНЕНИЙ ПЕЛЛЯ. А. А. Коробов. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Исследуется диофантово уравнение $x^2 - y^2(k^2m^2 - 4m) = 4t$, где числа k, m нечетные, а правая часть $4t$ — достаточно маленькое натуральное число. Найдены необходимые условия разрешимости такого диофантова уравнения. Библиогр. 1.

Ключевые слова: диофантово уравнение, решения в целых числах, обобщенное уравнение Пелля, квадратичные поля, группа единиц, диофантовы приближения.

УДК 514.755

ЗАДАЧА РАСЧЕТА СТЕРЖНЕЙ ОДНОМЕРНЫМ СПЛАЙНОМ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ ДЕФЕКТА 2. В. П. Павлов, А. А. Абдрахманова, Р. П. Абдрахманова. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Поставлена задача расчета стержней методом сплайна пятой степени дефекта 2 и решены следующие задачи: сформулированы теоретические основы метода сплайна пятой степени дефекта 2; разработан алгоритм применения сплайна пятой степени дефекта 2 для численного решения задачи об изгибе упругого стержня — дифференциального уравнения четвертого порядка. Библиогр. 5.

Ключевые слова: сплайн пятой степени дефекта 2, дифференциальное уравнение четвертого порядка, изгиб упругого стержня.

УДК 517.946

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ.

Н. Р. Пинигина. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Доказаны теоремы существования регулярных решений, а также доказано наличие необходимых для возможного обращения преобразования Лапласа априорных оценок в зависимости от параметра. Библиогр. 9.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение соболевского типа, регулярные решения, априорные оценки.

УДК 517.9

ЖЕСТКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ

С ТРЕЩИНОЙ. *Т. С. Попова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Исследуется задача о равновесии трехмерного вязкоупругого тела, имеющего жесткое включение. Рассмотрены случаи без отслоения и с частично отслоившимся включением. Приведены соответствующие постановки задач в виде краевой задачи, а также в вариационной форме, доказана эквивалентность указанных постановок. Установлена однозначная разрешимость задач. Библиогр. 15.

Ключевые слова: вязкоупругое тело, жесткое включение, вариационное неравенство, краевые условия типа неравенств, трещина.

УДК 517.946

НЕЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. *А. В. Прокопьев.*

— Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Рассматриваются вопросы разрешимости обратной задачи для эллиптико-параболического уравнения. Установлена разрешимость нелинейной обратной задачи нахождения вместе с решением неизвестного коэффициента $q(x)$ для эллиптико-параболического уравнения при задании интегрального условия переопределения. Найдены условия разрешимости задачи, сформулированы теоремы существования обобщенных решений эллиптико-параболического уравнения. Библиогр. 5.

Ключевые слова: обратная задача, условия переопределения, эллиптико-параболическое уравнение, метод регуляризации, априорная оценка.

УДК 517.95

ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ ДВУХ ПЛАСТИН, КАЖДАЯ ИЗ КОТОРЫХ

СОДЕРЖИТ ЖЕСТКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ. *Т. А. Ротанова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Рассмотрена вариационная задача со свободной границей, описывающая контакт двух пластин, расположенных под заданным углом друг к другу. Одна из пластин деформируется в своей плоскости, а другая подвержена изгибу. Каждая из пластин содержит жесткое включение в своей плоскости, выходящее на область

контакта. На границе задано неравенство, обеспечивающее условие непроникания. Вариационными методами установлена разрешимость задачи. В предположении достаточной гладкости решения получена дифференциальная постановка задачи, эквивалентная вариационной. Библиогр. 13.

Ключевые слова: задача о контакте, вариационное неравенство, жесткое включение, пластина Киркгофа — Лява, упругие пластины.

УДК 517.917+517.925

КРИТЕРИЙ СИЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ СЕМЕЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО МНОЖЕСТВА. Г. А. Рудых, Д. Я. Киселевич. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Устанавливается связь теоремы Лиувилля для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с устойчивостью движения по Ляпунову. В частности, получены достаточные условия, обеспечивающие сильную неустойчивость по Ляпунову семейства траекторий $\Omega_t = \{x(x^0, s, t) = T(t, s)x^0 : x^0 \in \Omega_s\}$, системы ОДУ относительно компактного множества $\Omega_s \subset \mathbb{R}^n$ начальных состояний. Введены в рассмотрение и оценены снизу функции, характеризующие локальную расходимость и неограниченную сгущаемость траекторий неавтономной системы ОДУ. Приведен содержательный пример. Библиогр. 10.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, теорема Лиувилля, оператор сдвига, локальная расходимость, неограниченная сгущаемость.

УДК 514.152

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЕВКЛИДОВОЙ СТРУКТУРЫ НА УЗЛЕ ТРИЛИСТНИК С МОСТОМ. Д. Ю. Соколова. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Исследованы основные геометрические инварианты евклидова конического многообразия, сингулярным множеством которого является узел трилистник с мостом, а носителем — трехмерная сфера. Установлены условия существования указанного многообразия, вычислены длины его сингулярных геодезических и найден объем. Ил. 3, табл. 1, библиогр. 11.

Ключевые слова: евклидово коническое многообразие, узел трилистник с мостом.

УДК 512.6:519.61

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. Ф. М. Федоров. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Исследованы периодические однородные бесконечные гауссовы системы линейных алгебраических уравнений с точки зрения общей теории бесконечных систем. Использована основная теорема о необходимых и достаточных условиях су-

существования нетривиальных решений однородных гауссовых бесконечных систем. Библиогр. 5.

Ключевые слова: бесконечные, гауссовы, периодические, системы, фундаментальные решения.

УДК 510:164

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ И ПРОСТРАНСТВА МОДЕЛЕЙ. П. В. Черников. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Рассматривается непрерывная логика \mathcal{L} , множеством значений которой служит компактное хаусдорфово пространство X . Устанавливаются некоторые свойства элементарных теорий $\theta \in X^{\Sigma \mathcal{L}}$. Для логики с условием $\|\mathcal{L}\| = \omega$ дано новое доказательство теоремы компактности. Изучается понятие D -предела. Библиогр. 5.

Ключевые слова: непрерывная логика, элементарная теория, теорема о компактности, D -предел.

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. А. И. Шадрин. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Изучается разрешимость краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами. Доказываются теоремы о существовании и единственности регулярных решений. Библиогр. 6.

Ключевые слова: нелокальные краевые задачи, интегральные условия, уравнения с разрывными коэффициентами, регулярные решения, априорная оценка, существование, единственность.

УДК 532.546+536.24

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОТБОРА ИДЕАЛЬНОГО И РЕАЛЬНОГО ГАЗОВ. Э. А. Бондарев, В. Е. Николаев, Г. И. Иванов. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

С целью выявить влияние реальных свойств газа на динамику изменения полей давления и температуры последнего проведен сравнительный анализ результатов вычислительного эксперимента двумерной математической модели отбора идеального и реального газов через одиночную скважину при условии теплообмена с окружающими горными породами. Эксперимент выполнен в рамках модифицированной математической модели неизотермической фильтрации газа, которая выводится из законов сохранения массы и энергии, а также из закона Дарси. В качестве замыкающих соотношений использованы физическое и калорическое уравнения состояния, а также закон Ньютона — Рихмана, описывающий теплообмен газоносного пласта с окружающими горными породами. Показано, что учет реальных свойств

газа приводит лишь к малым количественным изменениям давления, но, несмотря на это, влечет за собой существенное перераспределение температурного поля отбираемого газа. Ил. 8, библиогр. 5.

Ключевые слова: математическое моделирование, неізотермическая фильтрация, идеальный газ, реальный газ, численные методы.

УДК 519.63:517.958

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ЗАМОРАЖИВАНИЯ ФИЛЬТРУЮЩИХ ГРУНТОВ. М. В. Васильева, Н. В. Павлова. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Рассматривается процесс замораживания фильтрующих грунтов. Математическая модель включает в себя уравнение неразрывности для поровой влаги, закон Дарси и закон сохранения энергии. Численная реализация модели базируется на методе конечных элементов с использованием программного пакета FEniCS. Вычислительный алгоритм расчета реализован на высокопроизводительных вычислительных системах. Приводятся результаты численных расчетов. Ил. 7, табл. 2, библиогр. 8.

Ключевые слова: теплоперенос, фильтрация, фазовый переход, метод фиктивных областей, метод конечных элементов, вычислительный кластер.

УДК 51-72

УЧЕТ ВЯЗКОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО И ЖИДКОГО ЯДЕР ЗЕМЛИ, ВЫЗВАННЫХ ПРИЛИВНЫМ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ. Ю. М. Григорьев, О. Е. Скрябина. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Разработана двумерная модель переноса внутренних масс приливными деформациями с учетом наличия ее твердого ядра и условия частичного проскальзывания на границе твердого и жидкого ядер. В предложенное граничное условие входят вязкость жидкого ядра Земли, один размерный и один безразмерный параметры.

Вычислительная реализация модели проведена методом малого параметра до первого порядка малости. Выявлено, что в этом порядке приближений вязкость жидкого тела не оказывает влияния на угловую скорость. Оценка величины дифференциального вращения твердого тела Земли в модели с условием частичного проскальзывания составила 0,39 мин/год с восточным направлением. Библиогр. 14.

Ключевые слова: приливная деформация Земли, твердое ядро Земли, дифференциальное вращение, математическая модель.

УДК 512.6:519.61

АЛГОРИТМЫ РЕАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. Ф. М. Федоров, Н. Н. Павлов, О. Ф. Иванова. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 1.

Предложены алгоритмы и программы на ПК реализации решений систем линейных алгебраических уравнений любого порядка вплоть до бесконечности. Ис-

пользованы преобразования Гаусса для бесконечных систем и строго частное решение неоднородных гауссовых бесконечных систем. Библиогр. 6.

Ключевые слова: бесконечная система линейных уравнений, метод исключения Гаусса, строго частное решение.

REFERATS

UDC 514.755

To projective-differential geometry of a pair of five-measured complexes of bidimensional planes in projective space P^5 . *I. V. Bubyakin* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

This article is devoted to projective-differential geometry of one pair of five-measured complexes in projective space P^5 . The structure of a type of such pair of complexes is defined. Bibliogr.3.

KEY WORDS: Grassmann manifold, Grassmann map, Segre cone.

UDC 517.96

The spectrum of the degenerating ordinary differential operator of the second order. *O. A. Vikhreva* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

It is investigated an unique solvability of the boundary value problem for the cases in the presence of differential operation in the order of degeneration of the Hilbert space, by using operator theory and its special case. Bibliogr.3.

KEY WORDS: Hilbert's space, the generalized decision, compact set, spectrum of the operator, linear continuous functional.

UDC 517.956

On Fredholm property of boundary value problem for mixed type equation. *I. E. Egorov, T. I. Zakharova* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

In a cylindrical domain of the space \mathbb{R}^{n+1} for mixed type equation of the second order boundary value problem is considered, which for the first time was investigated by A.N. Terekhov. Under certain conditions on the equation coefficients is proved the existence and the uniqueness of the generalized solutions, the Fredholm property of boundary value problem in a weighted Sobolev space. Bibliogr. 5.

KEY WORDS: equation of mixed type, existence, uniqueness, generalized solution, inequality, estimation, the Fredholm property.

UDC 517.954

Numerical investigation of the waves propagation on a shallow mathematical model. *A. A. Zamyshlyayeva, E. V. Bychkov* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

The model of waves' propagation on a shallow taking into account the capillarity was studied in terms of the relatively p -bounded operator theory. The algorithm of a numerical solution the Showalter-Sidorov-Dirichlet problem for the IMBq equation was suggested. Il. 1, bibliogr. 8.

KEY WORDS: phase space, Sobolev type equation, relatively p -bounded operator, Showalter–Sidorov problem.

UDC 517.946

Boundary value problems for some classes of equations unsolvable with respect to the highest order derivative with respect to time. *A. I. Kozhanov* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

We study solvability of some boundary value problems for linear nonclassical equations including linearized equations of small longitudinal perturbations of solitary waves. For these problems, we prove existence and uniqueness theorems of regular solutions. Bibliogr. 13.

KEY WORDS: boundary value problem, linearized equation, apriory estimate, existence, uniqueness.

UDC 511.528.2

On solvability conditions of one family of Pell's equations. *A. A. Korobov*. — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

The work is devoted to the study of Diophantine equation

$$x^2 - y^2(k^2m^2 - 4m) = 4t,$$

where numbers k, m are odd, and the right side $4t$ of the equation is enough small natural number. We find necessary solvability conditions of the Diophantine equation. Bibliogr. 1.

KEY WORDS: diophantine equation, integer solutions, generalized Pell's equation, quadratic fields, unit group, diophantine approximations.

UDC 514.755

The problem of rods calculation by the spline of the fifth degree of defect 2. *V. P. Pavlov, A. A. Abdrakhmanova, R. P. Abdrakhmanova* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

In this paper the rods calculation by the spline of the fifth degree of the defect 2 method tasks and solve the nest problems: are formulated theoretical basis of the spline of the fifth degree of the defect 2; the spline algorithm of the fifth degree of defect 2 for the numerical solution of the problem of bending of an elastic rod - differential equation of fourth order. Bibliogr. 5.

KEY WORDS: the spline algorithm of the fifth degree of defect 2, differential equation of fourth order, problem of bending of an elastic rod.

UDC 517.946

On estimates of solutions for a class of degenerate elliptic equations with complex parameters. *N. R. Pinigina* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

In this paper we prove the existence theorem for regular decisions, and also proved that the necessary for a possible Laplace transform inversion of a priori estimates, depending on parameter. Bibliogr. 9.

KEY WORDS: the first boundary value problem, equations of Sobolev type, regular solutions.

UDC 517.9

Rigid inclusion in problem for a viscoelastic body with crack. *T. S. Popova* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

This paper investigates the problem of equilibrium of three-dimensional viscoelastic body with a rigid inclusion. The cases without delamination and partially delaminated inclusion are considered. The corresponding formulations of problems in the form of the boundary value problem, and also in the variational form are studied, we prove the equivalence of these formulations. Existence and uniqueness of solutions of the problems are proved. Bibliogr. 15.

KEY WORDS: viscoelastic body, rigid inclusion, variational inequality, inequality type boundary condition, crack.

UDC 517.946

Non-linear inverse problem for some classes of degenerate parabolic equations. *A. V. Prokop'ev* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

In this paper the solvability of a nonlinear inverse problem for a degenerate parabolic equation is considered. The solution of degenerate parabolic equation also should satisfy to a first initial-boundary problem condition and to a redefinition condition. Conditions are found for solvability of the problem, the existence theorem of generalized solution of degenerate parabolic equation formulated and proved. Bibliogr. 5.

KEY WORDS: degenerate equation, parabolic equation, non-linear inverse problem, generalized solvability, the method of regularization, the a priori evaluation.

UDC 517.95

Contact problem for two plates both containing rigid inclusions.

T. A. Rotanova — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

We consider the variational free boundary problem describing contact problem for two elastic plates located at a given angle to each other. One of the plates is deformed in its plane with the other one being vertically deformed. Both plates contain rigid inclusiona crossing the contact area. Inequality-type boundary condition is imposed providing a mutual nonpenetration between their surfaces. The problem solvability is stated using a variational methods. Assuming that the solution is smooth, the differential statement being equivalent to the variational formulation is justified. Bibliogr. 13.

KEY WORDS: contact problem, variational inequality, rigid inclusion, Kirchhoff-Love plate, elastic plates.

UDC 517.917+517.925

A criterion for strong Lyapunov instability of the family trajectories of ordinary differential equations for the set. *G. A. Rudykh, D. Ya. Kiselevich* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

In this paper we establish the connection of Liouville's theorem for a nonautonomous system of ordinary differential equations (ODE) with resistance movement in the Lyapunov sense. In particular, the Sufficient conditions for instability with a strong Lyapunov

family of trajectories $\Omega_t = \{x(x^0, s, t) = T(t, s)x^0 : x^0 \in \Omega_s\}$, ODE system relatively compact set $\Omega_s \subset \mathbb{R}^n$ of initial states. Introduced in review and lower bounds of the function describing the local divergence of trajectories and unlimited condensability nonautonomous ODE system. An interesting example. Bibliogr. 10.

KEY WORDS: system of ordinary differential equations, Liouville's theorem, shift operator, the local divergence, unbounded condensability.

UDC 514.152

On existence of an Euclidean structure on the trefoil knot with a brodge

D. Yu. Sokolova — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

The aim of the present paper is to investigate basic geometrical properties of an Euclidean conic manifold whose singular set is the trefoil knot with a bridge and the underlying space is the three sphere. Existence theorem is established. The lengths of singular geodesics are calculated. The volume formula is given. Il. 3, tabl. 1, bibliogr. 11.

KEY WORDS: Euclidean conic manifold, trefoil knot with a bridge.

UDC 512.6:519.61

To the theory of infinite systems of linear algebraic equations.

F. M. Fedorov — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

We investigated the periodical homogeneous Gaussian infinite systems of linear algebraic equations in terms of the general theory of infinite system. We have used the fundamental theorem about the necessary and sufficient conditions for the existence of nontrivial solutions of the homogeneous Gaussian infinite systems. Bibliogr. 5.

KEYWORDS: infinite, gaussian, periodic systems, basic decisions.

UDC 510:164

On some properties of elementary theories and a space of models

P. V. Chernikov — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

We consider a continuous logic \mathcal{L} with truth values in a compact space X . For logic \mathcal{L} for which $\|\mathcal{L}\| = \omega$ is given a new proof of compactness theorem. We study also a notion of elementary theory and a notion of D -limit. Bibliogr. 5.

KEY WORDS: continuous logic, the compactness theorem, D -limits.

UDC 517.946

About the resolvability of some space nonlocal boundary problems for parabolic equations with discontinuous coefficients.

A. I. Shadrina — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

It is investigated the resolvability of some space nonlocal boundary problems for parabolic equations with discontinuous coefficients. Uniqueness and existence theorems are proofed. Bibliogr. 6.

KEY WORDS: nonlocal boundary conditions, integral conditions, equations with discontinuous coefficients, regular solutions, priori estimate, uniqueness, existence.

UDC 532.546+536.24

Comparative analysis of two-dimensional problem of selection of ideal and real gases. *E. A. Bondarev, V. E. Nikolaev, G. I. Ivanov* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

In order to determine the influence of real gas properties on the dynamics of pressure and temperature fields of the latter, a comparative analysis of the results computational experiment of two-dimensional mathematical model of the selection of ideal and real gases through a single hole, provided heat to the surrounding rocks. The experiment was carried out within the framework of modified mathematical model of non-isothermal gas filtration, obtained from the energy and mass conservation laws and the Darcy law. The physical and caloric equations of state together with the Newton–Rihman law of heat exchange of gas-bearing reservoir with surrounding rocks, are used as closing relations. It is shown that the inclusion of real gas properties leads only to small quantitative changes in pressure, but despite this, involves a significant redistribution of temperature field of gas-bearing reservoir. Il. 8, bibliog. 5.

KEY WORDS: mathematical modeling, non-isothermal filtration, ideal gas, real gas, numerical methods.

UDC 519.63:517.958

Finite element implementation of the task of filtering grounds freezing. *M. V. Vasilyeva, N. V. Pavlova* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

We consider the process of filtering grounds freezing. The mathematical model includes the equation for the pore water, Darcy's law and the law of conservation of energy. Numerical implementation of the model based on the finite element method using a software package FEniCS. The computational algorithm is implemented on high-performance computing systems. The numerical results are reduced in graphs of temperature and pressure around of a freezing column. Il. 7, tabl. 2, bibliogr. 8.

KEY WORDS: heat transfer, filtration, phase transfer, difference schemes, fictitious domain method, finite element method, a computing cluster.

UDC 51-72

On a viscosity in the mathematical model of the Earth's inner and liquid cores motions caused by tidal deformation. *Y. M. Grigoriev, O. E. Skryabina* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

A two-dimensional mathematical model of the Earth's interior moving by tidal deformations is developed. In this model the condition of partial slip on the boundary between solid and liquid cores is used. In the proposed boundary condition a viscosity of the liquid core of the Earth, one dimensional and one dimensionless parameters are used. Computational realization of the model was made by small parameter method. It is shown that in the first order of approximation a viscosity of the liquid core of the Earth does not effect on the angular velocity of inner core differential rotation. An estimate of the value of the differential rotation of the inner core of the Earth model with the condition of partial slip was 0.39 min/year to eastward. Bibliogr. 14.

KEY WORDS: the Earth's tidal deformation, inner core, differential rotation, mathematical model.

UDC 512.6:519.61

Algorithms implementation of solutions of systems of linear algebraic equations. *F. M. Fedorov, N. N. Pavlov, O. F. Ivanova* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 1.

Algorithms and program on a PC implementation of solutions of systems of linear algebraic equations of any order, up to infinite are proposed. Conversions of Gauss for an infinite system and strictly private solution of non-homogeneous are used. Bibliogr. 6.

KEY WORD: infinite systems, linear equations, method of elimination of Gauss, stritly private decision.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Математика

Бубякин Игорь Витальевич

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
bubyakiniv@mail.ru

Вихрева Ольга Анатольевна

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
ovixreva@mail.ru

Егоров Иван Егорович

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
IvanEgorov51@mail.ru

Захарова Туяра Иннокентьевна

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)

Замышляева Алена Александровна

Южно-Уральский государственный университет, кафедра уравнений
математической физики
пр. Ленина, 76., Челябинск 454080
alzama@mail.ru.

Бычков Евгений Викторович

Южно-Уральский государственный университет, кафедра уравнений
математической физики
пр. Ленина, 76., Челябинск 454080
bychkov42@gmail.com.

Кожанов Александр Иванович

Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Коробов Алексей Александрович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
korobov@math.nsc.ru

Павлов Виктор Павлович

Уфимский государственный авиационный технический университет
ул. К. Маркса, 12, Уфа 450000
victor.pavlov.1951@ghmail.com

Абдрахманова Алия Айдаровна

Уфимский государственный авиационный технический университет
ул. К. Маркса, 12, Уфа 450000
abdrahmanova-a@mail.ru

Абдрахманова Римма Петровна

Уфимский государственный авиационный технический университет
ул. К. Маркса, 12, Уфа 450000
vmk_rimma@mail.ru

Пинигина Нюргуяна Романовна

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики, кафедра высшей математики
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
n-pinig@mail.ru

Попова Татьяна Семеновна

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики, кафедра математического
анализа
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
ptsokt@mail.ru

Прокопьев Алексей Васильевич

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики, кафедра математического
анализа

ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)

ProkorevAV85@gmail.com

Ротанова Татьяна Александровна

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090

t.stekina@gmail.com

Рудых Геннадий Алексеевич

Иркутский государственный университет, Институт математики, эконо-
номики и информатики

ул. Карла Маркса, 1, Иркутск 664003

Киселевич Дарья Яковлевна

Иркутский государственный университет, Институт математики, эконо-
номики и информатики

ул. Карла Маркса, 1, Иркутск 664003

dariakis@mail.ru

Соколова Дарья Юрьевна

Новосибирский государственный университет, механико-математичес-
кий факультет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090

Федоров Фома Михайлович

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики

ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)

foma46@mail.ru

Черников Павел Васильевич

Новосибирский государственный университет, механико-математичес-
кий факультет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090

Шадрина Александра Ивановна

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики

ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)

shadrina_ai@mail.ru

Математическое моделирование**Бондарев Эдуард Антонович**

Институт проблем нефти и газа СО РАН
ул. Октябрьская, 1, Якутск 677980, Республика Саха (Якутия)
bondarev@iprpn.usn.ru

Николаев Владимир Егорович

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
677000, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48
venik60@mail.ru

Иванов Гаврил Иванович

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
677000, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48
ivganyu@mail.ru

Васильева Мария Васильевна

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики, Центр вычислительных техно-
логий
ул. Кулаковского, 42, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
vasilyeva_mv@mail.ru

Павлова Наталья Васильевна

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики, кафедра информационных техно-
нологий
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)

Григорьев Юрий Михайлович

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Физико-технический институт
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
grigyum@yandex.ru

Скрябина Ольга Евгеньевна

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Физико-технический институт
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
dolya@mail.ru

Федоров Фома Михайлович

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
foma46@mail.ru

Павлов Никифор Никитич

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)

Иванова Оксана Федотовна

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

К публикации в «Математических заметках ЯГУ» принимаются оригинальные статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

В редакцию представляется рукопись в двух экземплярах объемом не более 1 авторского листа, оформленная согласно стандартным требованиям к авторским оригиналам. К рукописи должны быть приложены два экземпляра аннотации и список ключевых слов на двух языках (русский и английский), шифр УДК. Депонирование рукописи редакцией не осуществляется. Авторы обязаны указать место работы, должность и контактную информацию на двух языках. В случае возвращения статьи для переработки указываются две даты поступления — первоначальная дата и дата получения редакцией окончательного текста.

Основные требования к оформлению рукописи:

1. Текст статьи должен быть напечатан через 2 интервала на одной стороне листа белой писчей бумаги форматом 210 × 300 мм.

2. Рисунки и сложные диаграммы выполняются на отдельных листах с указанием на обороте фамилии автора, название статьи и номера рисунка; их место в тексте указывается на полях статьи.

3. Номер формулы ставится у правого края листа.

4. Рукописи желательно подготовить с использованием наборных систем типа TEX.

5. В рукописях, подготовленных с помощью текстовых редакторов типа Word, должны быть размечены греческие, готические, латинские рукописные буквы, указано использование букв прямого начертания, а также проведена разметка индексов.

6. В авторских оригиналах, подготовленных с использованием наборных систем типа TEX и выданных на лазерном принтере, разметка формул не проводится, однако на полях поясняются буквы готического алфавита.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Список литературы на двух языках печатается в конце текста на отдельном листе. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

Рукописи, оформленные не по стандартам или превышающие указанный выше объем, возвращаются.