

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М. К. АММОСОВА  
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ЯГУ

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1994 ГОДА

ВЫХОДИТ 2 РАЗА В ГОД

Том 20, вып. 2

Июль–Декабрь, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

<b>Абдрахманов А. М., Кожанов А. И.</b> О разрешимости начально-краевых задач с граничным условием интегрального вида для некоторых неклассических дифференциальных уравнений .....	<b>3</b>
<b>Бидерман В. И., Прудников В. Я.</b> О представлении плорисубгармонических функций одного класса .....	15
<b>Гордиенко В. М.</b> Диссипативные интегралы энергии в смешанной задаче для волнового уравнения .....	23
<b>Гутман А. Е., Коптев А. В.</b> Решеточно-метрическое разложение монотонного оператора .....	34
<b>Егоров А. А.</b> О слабом пределе последовательности отображений, удовлетворяющих дифференциальному неравенству с квазивыпуклой функцией и нуль-лагранжианом .....	41
<b>Егоров И. Е.</b> О фредгольмовой разрешимости первой краевой задачи для уравнения смешанного типа четного порядка .....	48
<b>Замышляева А. А.</b> Об аналитическом исследовании линеаризованной математической модели Веннеу–Luke .....	57
<b>Иванова А. О., Никифоров Д. В.</b> Строение окрестностей 5-вершин в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5 .....	66
<b>Колтуновский О. А.</b> Обратная коэффициентная задача для многомерного гиперболического уравнения в случае интегрального переопределения .....	79
<b>Коробов А. А.</b> Сплетение, имеющее конечную ширину .....	98
<b>Малюгин С. А.</b> Секвенциально замкнутое счетное плотное подмножество в $I^I$ .....	107

<b>Намсараева Г. В.</b> О разрешимости обратных задач для псевдопараболических уравнений .....	<b>111</b>
<b>Попов С. В., Синявский А. Г.</b> Разрешимость краевой задачи для $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением времени при $n \geq 4$ с полной матрицей условий склейивания .....	<b>138</b>
<b>Попов Н. С.</b> О разрешимости пространственно нелокальной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения .....	<b>152</b>
<b>Сагадеева М. А.</b> Задачи оптимального и жесткого управления решениями одного класса нестационарных уравнений соболевского типа .....	<b>170</b>
<b>Свиридов Г. А., Аль-Делфи Дж. К.</b> Теорема о расщеплении в квазибанаховых пространствах .....	<b>180</b>
<b>Телешева Л. А.</b> О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка .....	<b>186</b>
<b>Федоров Ф. М.</b> О $n$ -периодических бесконечных системах линейных алгебраических уравнений .....	<b>197</b>
<b>Хохолов В. Б.</b> Об одном операторе С. Н. Бернштейна .....	<b>207</b>
<b>Худяков Ю. В.</b> Алгоритм численного исследования модели Шестакова — Свиридука измерительного устройства с инерционностью и резонансами .....	<b>211</b>
 Математическое моделирование	
<b>Васильев М. Д., Григорьев М. П., Трофимцев Ю. И.</b> Создание охраняемой территории: моделирование динамики популяции и оценка затрат .....	<b>222</b>
<b>Григорьев А. В.</b> Численное моделирование фильтрации в трещиновато-пористой среде .....	<b>237</b>
<b>Григорьев Ю. М., Харбанов М. В.</b> Разработка модуля по созданию упрощенной структурной 3D модели нефтяного пласта .....	<b>246</b>
<b>Захаров П. Е.</b> Параллельные алгоритмы разделения области для параболических задач .....	<b>256</b>
<b>Лашина Е. А., Чумакова Н. А., Чумakov Г. А.</b> О двумерной кинетической модели реакции окисления оксида углерода на наночастицах палладия .....	<b>271</b>
<b>Лашина Е. А., Чумакова Н. А., Чумakov Г. А.</b> Многопиковые колебания в трехмерной кинетической модели реакции окисления оксида углерода на наночастицах палладия .....	<b>286</b>
<b>Шадрин В. Ю., Сивцов И. И.</b> Об одном многосеточном методе расчета двумерного стационарного температурного поля наружной ограждающей конструкции .....	<b>298</b>

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ  
ЗАДАЧ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ  
ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ  
НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ<sup>\*)</sup>

А. М. Абдрахманов, А. И. Кожанов

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  с гладкой (для простоты — бесконечно дифференцируемой) границей  $\Gamma$ ,  $Q$  — цилиндр  $\Omega \times (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ ,  $S = \Gamma \times (0, T)$  — боковая граница  $Q$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $a(x)$ ,  $N_1(x, y)$ ,  $f(x, t)$  — заданные функции, определенные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $y \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ . Далее, пусть  $p$  — натуральное число,  $D_t^k$  — производная  $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ ,  $A$  и  $L$  — дифференциальные операторы, действие которых на заданной функции  $v(x, t)$  определяется равенствами

$$Av = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)v_{x_j}) + a(x)v$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до  $n$ ),

$$Lv = (-1)^{p+1}D_t^{2p}v - Av.$$

**Краевая задача I.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$D_t^k u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \dots, p, \quad t \in (0, T), \tag{2}$$

---

<sup>\*)</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-06-00277).

$$D_t^k u(x, t)|_{t=T} = 0, \quad k = 1, \dots, p-1, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$u(x, t)|_{(x, t) \in S} = \int_{\Omega} N_1(x, y) u(y, t) dy \Big|_{(x, t) \in S}. \quad (4)$$

**Краевая задача II.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \Big|_{(x, t) \in S} = \int_{\Omega} N_1(x, y) u(y, t) dy \Big|_{(x, t) \in S}, \quad (5)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \nu} = a^{ij}(x) \nu_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  — вектор внутренней нормали к  $\Gamma$  в текущей точке  $x$ .

Оператор  $A$  в дальнейшем предполагается симметричным ( $a^{ij} = a^{ji}$ ) и эллиптическим в  $\bar{\Omega}$ . В этой ситуации уравнение (1) при  $p = 1$  будет гиперболическим уравнением второго порядка, в случае же  $p > 1$  подобные уравнения можно назвать «квазигиперболическими» или просто уравнениями неклассического типа (авторам неизвестно какое-либо иное название для данного класса уравнений). Краевые задачи в случае  $p > 1$  для таких уравнений с условием Дирихле на поверхности  $S$  и условиями (2), (3) изучались прежде всего в работах В. Н. Врагова [1, 2] и далее в работах И. Е. Егорова и В. Е. Федорова (см. [3]). Задачи с заданием условий интегрального вида (4) или (5) ранее не изучались.

С другой стороны, краевые задачи I и II относятся к классу задач с нелокальным граничным условием. Подобные задачи активно изучаются в последнее время, достаточно полное представление о состоянии дел в данной тематике можно найти в [4–7]. В случае  $p = 1$  задачи I и II изучались в [8, 9]. Помимо данных работ можно отметить близкие по применяемой технике [10–12], где, в частности, рассматривались аналоги задач I и II для неклассических уравнений нечетного порядка (называемых иногда  $(2m+1)$ -параболическими).

Пусть  $N_2(x, y)$  — функция, для которой при  $x \in \Gamma$ ,  $y \in \Omega$  выполняется равенство

$$\frac{\partial N_2(x, y)}{\partial \nu} = N_1(x, y).$$

Далее, пусть  $M_k$ ,  $k = 1, 2$ , — интегральные операторы, действие которых на заданной функции  $v(x)$  определяется по формуле

$$(M_k v)(x) = v(x) - \int_{\Omega} N_k(x, y)v(y) dy.$$

Для  $v(x)$  определим функции

$$\Phi_k(x, v) = \int_{\Omega} A_x N_k(x, y)v(y) dy - \int_{\Omega} N_k(x, y)A_y v(y) dy,$$

где

$$A_x = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a(x), \quad A_y = \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a^{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) + a(y).$$

Важную роль в дальнейших построениях будут играть условия взаимной однозначности операторов  $M_k$ ,  $k = 1, 2$ .

**Условие ( $A_k$ ).** Существуют положительные постоянные  $m_{0k}$  и  $m_{1k}$  такие, что для любой функции  $v(x)$  из пространства  $L_2(\Omega)$  выполняются неравенства

$$m_{0k} \|M_k v\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq m_{1k} \|M_k v\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Положим

$$\tilde{N}_1(x, y) = A_x N_1(x, y) - a(y) N_1(x, y).$$

**Утверждение 1.** Пусть выполняются условие ( $A_1$ ), а также условия

$$N_1(x, y) \in C^2(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}), \quad N_1(x, y) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, y \in \Gamma, \quad (6)$$

$$a^{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad a(x) \in C(\overline{\Omega}). \quad (7)$$

Тогда для любой функции  $v(x)$  из пространства  $W_2^2(\Omega)$  выполняется неравенство

$$\|\Phi_1(x, v)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_0 \|M_1 v\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_1 \sum_{i=1}^n \|(M_1 v)_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

постоянные  $c_0$  и  $c_1$  в котором определяются функциями  $N_1(x, y)$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , и  $a(x)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что при выполнении условия (6) имеет место

$$\Phi_1(x, v) = \int_{\Omega} \tilde{N}_1(x, y)v(y) dy + \int_{\Omega} a^{ij}(y)N_{1y_i}(x, y)v_{y_j}(y) dy.$$

Из этого равенства, условий гладкости (6), (7) и неравенства Гёльдера следует оценка

$$\|\Phi_1(x, v)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq b_0 \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + b_1 \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (8)$$

в которой числа  $b_0$  и  $b_1$  определяются функциями  $N_1(x, y)$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , и  $a(x)$ . Используя условие  $(A_1)$ , продолжим (8):

$$\|\Phi_1(x, v)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq b_0 m_{11} \|M_1 v\|_{L_2(\Omega)}^2 + b_1 \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (9)$$

Имеем

$$v_{x_i}(x) - \int_{\Omega} N_{1x_i}(x, y)v(y) dy = \frac{\partial}{\partial x_i} [(M_1 v)(x)], \quad i = 1, \dots, n.$$

Из этих равенств, неравенства Гёльдера и вновь условия  $(A_1)$  следует оценка

$$\|v_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq b_2 \|M_1 v\|_{L_2(\Omega)}^2 + b_3 \sum_{i=1}^n \|(M_1 v)_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (10)$$

Из (9), (10) вытекает требуемое неравенство. Утверждение доказано.

Пусть  $v(x)$  — функция из пространства  $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ . Тогда, как известно, выполняется неравенство

$$\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq d_0 \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (11)$$

с некоторой постоянной  $d_0$ , определяемой лишь областью  $\Omega$ .

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия  $(A_1)$ ,  $(6)$  и  $(7)$ , а также условия

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq k_0|\xi|^2, \quad k_0 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (12)$$

$$a(x) \leq -a_0 < 0 \quad \text{при } x \in \overline{\Omega}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \exists \lambda_0 > 0 \exists \delta_0 > 0 \exists \mu_0 \in [0, 1] : \lambda_0 > T, \quad 2p > 1 + \delta_0^2 T^{2(p-1)}, \\ a_0 \delta_0^2 > \mu_0 c_0 \lambda_0^2, \quad k_0 \delta_0^2 > c_1 \lambda_0^2 + (1 - \mu_0) d_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$  такой, что  $f(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_t(x, t) \in L_2(Q)$ , краевая задача I разрешима в пространстве  $W_{2,x,t}^{2,2p}(Q)$ , притом единственным образом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $g(x, t)$  — заданная функция. Рассмотрим задачу: найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$Lw = g(x, t) + \Phi_1(x, M_1^{-1}w) \quad (1')$$

и такую, что для нее выполняются условия  $(2)$ ,  $(3)$ , а также условие

$$w(x, t)|_{(x,t) \in S} = 0. \quad (4')$$

Покажем, что эта задача разрешима в пространстве  $W_{2,x,t}^{2,2p}(Q)$ . Воспользуемся методами регуляризации и продолжения по параметру.

Пусть  $\varepsilon$  — положительное число. Рассмотрим задачу: найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$Lw - \varepsilon Aw_t = g(x, t) + \Phi_1(x, M_1^{-1}w) \quad (1'_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия  $(2)$ ,  $(3)$ ,  $(4')$ . Покажем, что для фиксированного  $\varepsilon$  при выполнении условий теоремы и принадлежности функции  $g(x, t)$  пространству  $L_2(Q)$  эта задача имеет решение  $w(x, t)$  такое, что  $w(x, t) \in W_{2,x,t}^{2,2p}(Q)$ ,  $w_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$ .

Обозначим для краткости через  $V$  пространство

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_{2,x,t}^{2,2p}(Q), v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))\}.$$

Пусть  $\rho$  — число из отрезка  $[0, 1]$ . Рассмотрим задачу: найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$Lw - \varepsilon Aw_t = g(x, t) + \rho \Phi_1(x, M_1^{-1}w) \quad (1'_{\varepsilon,\rho})$$

и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), (4'). Обозначим через  $\mathcal{R}$  множество тех чисел  $\rho$  из отрезка  $[0, 1]$ , для которых задача  $(1'_{\varepsilon, \rho})$ , (2), (3), 4' разрешима в пространстве  $V$  (при фиксированном  $\varepsilon$  и принадлежности функции  $g(x, t)$  пространству  $L_2(Q)$ ).

Если окажется, что множество  $\mathcal{R}$  непусто, открыто и замкнуто одновременно (в топологии отрезка  $[0, 1]$ ), то оно будет совпадать со всем отрезком  $[0, 1]$  (см. [13]). Совпадение множества  $\mathcal{R}$  с отрезком  $[0, 1]$  и даст разрешимость задачи  $(1'_{\varepsilon})$ , (2), (3), (4') в пространстве  $V$ .

Множество  $\mathcal{R}$  непусто. Это следует из того, что число 0 принадлежит ему (см. [1–3], нетрудно также провести непосредственное доказательство, применяя метод Галёркина и используя полученные ниже априорные оценки). Открытость и замкнутость  $\mathcal{R}$  следует из равномерных по  $\rho$  оценок решений в пространстве  $V$  (см. [13]). Покажем, что искомые оценки имеют место.

Умножим уравнение  $(1'_{\varepsilon, \rho})$  на функцию  $(\lambda_0 - t)w_t(x, t)$  и результат проинтегрируем по цилиндуру  $Q$ . Используя условия (2), (3) и (4'), придем к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{2p-1}{2} \int_Q (D_t^p w)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_Q a^{ij} w_{x_i} w_{x_j} dxdt - \frac{1}{2} \int_Q a w^2 dxdt \\ & + \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_{\Omega} [D_t^p w(x, T)]^2 dx + \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_{\Omega} a^{ij} w_{x_i}(x, T) w_{x_j}(x, T) dx \\ & = \int_Q (\lambda_0 - t) g w_t dxdt + \rho \int_Q (\lambda_0 - t) \Phi_1(x, M_1^{-1} w) w_t dxdt. \end{aligned}$$

Из этого равенства с помощью неравенства Юнга, утверждения 1, неравенства (11), очевидных неравенств

$$\int_Q w^2 dx dt \leqslant T^2 \int_Q w_t^2 dxdt \leqslant \dots \leqslant T^{2p} \int_Q (D_t^p w)^2 dxdt, \quad (15)$$

а также условий (12)–(14) нетрудно получить первую априорную оценку для решений  $w(x, t)$  краевой задачи  $(1'_{\varepsilon, \rho})$ , (2), (3), (4'):

$$\int_Q w^2 dxdt + \sum_{i=1}^n \int_Q w_{x_i}^2 dxdt + \int_Q (D_t^p w)^2 dxdt \leqslant R_1 \quad (16)$$

с постоянной  $R_1$ , определяемой лишь функциями  $g(x, t)$ ,  $N_1(x, y)$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $a(x)$ , а также областью  $\Omega$  и числом  $T$ .

На следующем шаге умножим уравнение  $(1'_{\varepsilon, \rho})$  на  $(\lambda_0 - t)Aw_t$ . Интегрируя по цилиндру  $Q$ , используя условия (2), (3) и (4'), применяя неравенство Юнга, второе основное неравенство для эллиптических операторов [14] и учитывая, что из (16) вытекает неравенство

$$\int_Q \Phi_1^2(x, M_1^{-1}w) dxdt \leq R_2, \quad (17)$$

где постоянная  $R_2$  определяется функциями  $g(x, t)$ ,  $N_1(x, y)$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $a(x)$ , а также областью  $\Omega$  и числом  $T$ , получим, что для решений  $w(x, t)$  краевой задачи  $(1'_{\varepsilon, \rho})$ , (2), (3), (4') выполняется вторая априорная оценка

$$\sum_{i=1}^n \int_Q (D_t^p w_{x_i})^2 dxdt + \|w\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))}^2 + \|w_t\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))}^2 \leq R_3, \quad (18)$$

постоянная  $R_3$  в которой определяется функциями  $g(x, t)$ ,  $N_1(x, y)$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $a(x)$ , а также областью  $\Omega$  и числами  $T$  и  $\varepsilon$ .

Из оценок (16)–(18) очевидным образом следует, что для решений  $w(x, t)$  краевой задачи  $(1'_{\varepsilon, \rho})$ , (2), (3), (4') выполняется третья априорная оценка

$$\int_Q (D_t^{2p} w)^2 dx dt \leq R_4 \quad (19)$$

с постоянной  $R_4$ , вновь определяемой функциями  $g(x, t)$ ,  $N_1(x, y)$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $a(x)$ , а также областью  $\Omega$  и числами  $T$  и  $\varepsilon$ .

Оценки (16)–(19) означают, что для решений  $w(x, t)$  задачи  $(1'_{\varepsilon, \rho})$ , (2), (3), (4') выполняется равномерная по  $\rho$  оценка

$$\|w\|_V \leq R_0.$$

Как говорилось выше, из этой оценки и теоремы о методе продолжения по параметру [13] следует, что задача  $(1'_{\varepsilon})$ , (2), (3), (4') при фиксированном  $\varepsilon$  разрешима в пространстве  $V$ .

Покажем, что для решений  $w(x, t)$  задачи  $(1'_\varepsilon)$ ,  $(2)$ ,  $(3)$ ,  $(4')$  при выполнении дополнительного условия  $g_t(x, t) \in L_2(Q)$  будут выполняться априорные оценки, равномерные по  $\varepsilon$ .

Прежде всего заметим, что для решений  $w(x, t)$  задачи  $(1'_\varepsilon)$ ,  $(2)$ ,  $(3)$ ,  $(4')$  имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \int_Q w^2 dxdt + \sum_{i=1}^n \int_Q w_{x_i}^2 dxdt + \int_Q (D_t^p w)^2 dxdt + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_Q w_{x_i t}^2 dxdt \\ & + \int_\Omega w^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega w_{x_i}^2(x, T) dx + \int_\Omega [D_t^p w(x, T)]^2 dx \leq R_5 \quad (16') \end{aligned}$$

с постоянной  $R_5$ , определяемой функциями  $g(x, t)$ ,  $N_1(x, y)$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $a(x)$ , а также областью  $\Omega$  и числом  $T$ . Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & - \int_Q (\lambda_0 - t)(Lw - \varepsilon Aw_t) Aw_t dxdt \\ & = - \int_Q (\lambda_0 - t)g Aw_t dxdt - \int_Q (\lambda_0 - t)\Phi_1(x, u) Aw_t dxdt, \end{aligned}$$

где  $u = M_1^{-1}w$ . Интегрируя по частям как слева, так и справа, нетрудно отсюда получить

$$\begin{aligned} & \frac{2p-1}{2} \int_Q [a^{ij} D_t^p w_{x_i} D_t^p w_{x_j} + a(D_t^p w)^2] dxdt + \frac{1}{2} \int_Q (Aw)^2 dxdt \\ & + \varepsilon \int_Q (\lambda_0 - t)(Aw_t)^2 dxdt + \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_\Omega \{ a^{ij} D_t^p w_{x_i}(x, T) D_t^p w_{x_j}(x, T) \\ & + a[D_t^p w(x, T)]^2 + [Aw(x, T)]^2 \} dx = \int_Q [(\lambda_0 - t)g]_t Aw dxdt \\ & - (\lambda_0 - T) \int_\Omega g(x, T) Aw(x, T) dx + \int_Q (\lambda_0 - t)\Phi_1(x, u_t) Aw dxdt \\ & - \int_Q \Phi_1(x, u) Aw dxdt - (\lambda_0 - T) \int_\Omega \Phi_1(x, u(x, T)) Aw(x, T) dx. \quad (20) \end{aligned}$$

Поскольку выполняются включения  $g(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $g_t(x, t) \in L_2(Q)$ , первое и второе слагаемые правой части данного равенства являются подчиненными по отношению к соответствующим слагаемым с  $(Aw)^2$  и  $[Aw(x, T)]^2$  левой части вследствие неравенства Юнга. Далее, также подчиненными, причем тем же самым слагаемым левой части, будут последнее и предпоследнее слагаемые правой части (21) вследствие неравенства Юнга, оценки (16') и утверждения 1. Наконец, третье слагаемое правой части (20) можно оценить с помощью неравенства Юнга, неравенств утверждения 1, (11) и (15). Суммируя и используя условия (12)–(14), получим следующую оценку решений  $u(x, t)$  задачи  $(1'_\varepsilon)$ , (2), (3), (4'):

$$\sum_{i=1}^n \int_Q (D_t^p w_{x_i})^2 dxdt + \int_Q (Aw)^2 dxdt + \varepsilon \int_Q (Aw_t)^2 dxdt \leq R_6, \quad (21)$$

где постоянная  $R_6$  определяется функциями  $g(x, t)$ ,  $N_1(x, y)$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , и  $a(x)$ , а также областью  $\Omega$  и числом  $T$ .

Из (16') и (21) вытекает очевидная оценка для производной  $D_t^{2p}w$ :

$$\|D_t^{2p}w\|_{L_2(Q)} \leq R_7, \quad (22)$$

в которой постоянная  $R_7$  определяется функциями  $g(x, t)$ ,  $N_1(x, y)$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , и  $a(x)$ , а также областью  $\Omega$  и числом  $T$ .

Полученных оценок (16'), (21) и (22) вполне достаточно для организации процедуры предельного перехода в семействе задач  $(1'_\varepsilon)$ , (2), (3), (4'). Существование предельной функции вытекает из свойства рефлексивности гильбертова пространства, выполнение для предельной функции уравнения (1') следует из свойств слабого предела.

Итак, при выполнении всех условий теоремы для любой функции  $g(x, t)$  такой, что  $g(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $g_t(x, t) \in L_2(Q)$ , задача  $(1')$ , (2), (3), (4') имеет решение  $w(x, t)$ , принадлежащее пространству  $W_{2,x,t}^{2,2p}(Q)$ . Выберем функцию  $g(x, t)$  специальным образом:  $g(x, t) = (M_1 f)(x, t)$ . Заметим, что если для функции  $f(x, t)$  выполняются включения  $f(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_t(x, t) \in L_2(Q)$ , то вследствие условия  $(A_1)$  такие же включения будут выполняться и для функции  $g(x, t)$ . Пусть  $w(x, t)$  — решение задачи  $(1')$ , (2), (3), (4') именно с такой функцией  $g(x, t)$ . Тогда для

функции  $u(x, t)$ , равной  $M_1^{-1}w$ , и для функции  $f(x, t)$  выполняется равенство

$$M_1(Lu - f) = 0.$$

Условие  $(A_1)$  и это равенство означают, что функция  $u(x, t)$  является решением уравнения (1).

Принадлежность функции  $u(x, t)$  пространству  $W_{2,x,t}^{2,2p}(Q)$  следует из принадлежности функции  $w(x, t)$  этому же пространству и вновь из условия  $(A_1)$ . Выполнение для функции  $u(x, t)$  условий (2)–(4) очевидно. Стало быть, построенная функция  $u(x, t)$  будет искомым решением краевой задачи I.

Единственность решений вытекает из оценки (16), поскольку эта оценка справедлива и в случае  $\varepsilon = 0$  и при  $f(x, t) \equiv 0$  выполняется  $g(x, t) \equiv 0$  и  $R_1 = 0$ .

Теорема доказана.

Перейдем к анализу разрешимости краевой задачи II.

Положим

$$\tilde{N}_2(x, y) = A_x N_2(x, y) - a(y) N_2(x, y).$$

**Утверждение 2.** Пусть выполняются условия  $(A_2)$ , (7), а также

$$N_1(x, y) \in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}). \quad (6')$$

Тогда для любой функции  $v(x)$  из пространства  $W_2^2(\Omega)$ , удовлетворяющей условию (5), выполняется оценка

$$\|\Phi_2(x, v)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \tilde{c}_0 \|M_2 v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \tilde{c}_1 \sum_{i=1}^n \|(M_2 v)_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

постоянные  $\tilde{c}_0$  и  $\tilde{c}_1$  в которой определяются функциями  $N_1(x, y)$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , и  $a(x)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, v) &= \int_{\Omega} \tilde{N}_2(x, y) v(y) dy - \int_{\Omega} a^{ij}(y) N_{2y_i}(x, y) v_{y_j}(y) dy \\ &\quad + \int_{\Gamma} N_2(x, y) \left( \int_{\Omega} N_1(y, z) v(z) dz \right) ds_y. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью неравенства Гёльдера нетрудно вывести требуемую оценку. Утверждение доказано.

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия  $(A_2)$ ,  $(6')$ ,  $(7)$ ,  $(12)$ ,  $(13)$ , а также условие*

$$\exists \lambda_0 > 0 \exists \delta_0 > 0 : \lambda_0 > T, 2p > 1 + \delta_0^2 T^{2(p-1)}, a_0 \delta_0^2 > \tilde{c}_0 \lambda_0^2. \quad (14')$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$  такой, что  $f(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_t(x, t) \in L_2(Q)$ , краевая задача II разрешима в пространстве  $W_{2,x,t}^{2,2p}(Q)$ , притом единственным образом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вновь воспользуемся техникой, основанной на сведении рассматриваемой задачи к вспомогательной задаче для функции  $w = M_2 u$ . Именно, рассмотрим задачу: найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$Lw = g(x, t) + \Phi_2(x, M_2^{-1}w), \quad (1'')$$

где  $g(x, t)$  — заданная функция, и такую, что для нее выполняются условия  $(2)$ ,  $(3)$ , а также условие

$$\left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial \nu} \right|_{(x,t) \in S} = 0. \quad (5')$$

Разрешимость задачи  $(1'')$ ,  $(2)$ ,  $(3)$ ,  $(5')$  в пространстве  $W_2^2(Q)$  устанавливается практически дословным повторением рассуждений, с помощью которых была доказана разрешимость задачи  $(1')$ ,  $(2)$ ,  $(3)$ ,  $(4')$ , с использованием методов регуляризации и продолжения по параметру, доказательством наличия соответствующих априорных оценок, лишь с тем отличием, что неравенство  $(11)$  не используется.

В силу разрешимости задачи  $(1'')$ ,  $(2)$ ,  $(3)$ ,  $(5')$  разрешимость краевой задачи II вновь устанавливается с помощью специального выбора функции  $g(x, t)$  и использования условия  $(A_2)$ . Теорема доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Условия  $(14)$  и  $(14')$  теорем 1 и 2 представляют собой некоторые условия малости. Они заведомо выполняются, если функция  $N_1(x, y)$  достаточно мала (в норме пространства  $C^1(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$ ), либо число  $T$  мало, либо число  $a_0$  велико.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
2. Врагов В. Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5-13.
3. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Сиб. отд-ние АН СССР, Вычислительный центр СО АН СССР, 1995.
4. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
5. Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. I. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 26. 2007.
6. Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. II. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 33. 2009.
7. Пулькина Л. С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Самарск. гос. ун-т, 2012.
8. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // Докл. РАН. 2005. Т. 404, № 5. С. 589–592.
9. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
10. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Мат. журн. (Казахстан). 2009. Т. 9, № 2. С. 78–92.
11. Абдрахманов А. М., Кожанов А. И. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка // Изв. вузов. Математика. 2007. № 5. С. 3–12.
12. Абдрахманов А. М. О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнения нечетного порядка // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 2. С. 163–172.
13. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

г. Уфа, г. Новосибирск

21 октября 2013 г.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ  
ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ  
ОДНОГО КЛАССА\*)

В. И. Бидерман, В. Я. Прудников

Известно [1], что функции, субгармонические в области  $E \subset \mathbb{R}^n$ , будут гармоническими в любом шаре  $B \subset E$ . Так, в качестве примера, допустим, что функция  $u(x)$  является субгармонической в некоторой области  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Рассмотрим в области  $E$  сферу  $S(x^o, r)$  радиусом  $r > 0$  с центром в точке  $x^o$ . Обозначим через  $P[u](x)$  ее интеграл Пуассона

$$P[u](x) = \int_{|y-x^o|=r} u(y) K(x, y) dS_y,$$

в котором

$$K(x, y) = \frac{\varepsilon^2 - |x - x^o|^2}{\varepsilon |S| |y - x|^2 n}$$

— ядро Пуассона (здесь  $0 < \varepsilon < r$ , а  $|S| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$  — площадь поверхности сферы). Определим функцию

$$v(x) = \begin{cases} P[u](x), & x \in B(x^o, \varepsilon), \\ u(x), & x \in E \setminus B(x^o, \varepsilon). \end{cases}$$

Так как  $v(x)$  субгармонична в области  $E$ , она будет гармонической в любом шаре  $B(x^o, \varepsilon) \subset E$ . Данное свойство, характеризуя гибкость субгармонических функций, позволяет применять их в различного рода приложениях теории потенциала.

Целью данной работы является исследование существования аналогичного свойства у плюрисубгармонических функций.

---

\*) Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР за 2012–2014 гг. (проект № 4402).

Рассмотрим плюрисубгармоническую в области  $E \subset \mathbb{C}^n$  ( $n \geq 2$ ) функцию  $v(z)$ , для которой введем следующее

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция

$$v(z) = \begin{cases} P[u](z), & z \in B(z^o, \varepsilon), \\ u(z), & z \in E \setminus B(z^o, \varepsilon), \end{cases}$$

принадлежит классу функций  $F$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям.

1. Функция  $v(z)$  плюрисубгармонична в  $E$ .
2. Условие 1 справедливо для любого шара  $B(z^o, \varepsilon) \subset E$ .

Сформулируем точную постановку задачи.

**Задача.** Выделить множество функций, образующих класс  $F$ .

Известно [2], что гармоническая функция плюрисубгармонична тогда и только тогда, когда она плюригармонична. Поэтому функции класса  $F$  являются плюригармоническими в шаре  $B(z^o, \varepsilon)$ .

Далее нам понадобятся следующие обозначения:

- 1) через  $(\Delta)(z)$  обозначим лапласиан

$$(\Delta)(z) = 4 \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\nu};$$

- 2) через  $(H)(z, a)$  обозначим форму Леви

$$(H)(z, a) = 4 \sum_{\mu, \nu=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} a_\mu \bar{a}_\nu;$$

- 3) для локально суммируемой в  $\mathbb{C}^n$  функции  $u(x)$  определим

$$B_z^\varepsilon(u) = \int\limits_{|t|<1} u(z + t\varepsilon) d\nu(t),$$

$$S_z^\varepsilon(u) = \int\limits_{|t|=1} u(z + t\varepsilon) d\sigma(t),$$

$$S_{(z, a)}^\varepsilon(u) = \int\limits_{|t|=1} u(z + t\varepsilon) |\langle t, a \rangle|^2 d\sigma(t),$$

где  $\nu, \sigma$  — нормированные меры Лебега в  $\mathbb{C}^n$  и на  $S = \{a \in \mathbb{C}^n : |a| = 1\}$  соответственно такие, что  $\nu(B) = 1$ ,  $\sigma(S) = 1$ ,  $|a| = 1$ ,  $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n$  — скалярное произведение.

**Лемма.** Если  $u \in C^4(E)$ , то существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4(n+1)}{\varepsilon^2} (nS_{(z,a)}^\varepsilon(u) - B_z^\varepsilon(u)) = (Hu)(z, a),$$

где  $(z, a) \in E \times S$ ,  $S = \{a \in \mathbb{C}^n : |a| = 1\}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем в области  $E$  шар  $B(z, \varepsilon) = \{t \in \mathbb{C}^n : |t - z| < \varepsilon\}$  и воспользуемся формулой Остроградского — Гаусса в комплексной форме

$$\int_{|t-z|<\varepsilon} 2 \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial F_\nu}{\partial t_\nu} dV(t) = \int_{|t-z|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \langle F_o, t - z \rangle dS(t), \quad (1)$$

где  $F_o = (F_1, \dots, F_n)$  — вектор-функция класса  $C^1$ . Предположим, что

$$F_\nu = 2u_1 \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial u_2}{\partial \bar{t}_\mu} \bar{a}_\mu a_\nu, \quad |a| = 1, \quad u_1, u_2 \in C^2.$$

Подставив значение  $F_\nu$  в формулу (1), получим

$$\begin{aligned} & \int_{|t-z|<\varepsilon} \{u_1(t)(Hu_2)(t, a) - u_2(t)(Hu_1)(t, a)\} dV(t) \\ &= \int_{|t-z|=\varepsilon} \frac{2}{\varepsilon} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \left( u_1(t) \frac{\partial u_2}{\partial \bar{t}_\nu} - u_2(t) \frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}_\nu} \right) \bar{a}_\nu \langle a, t - z \rangle \right\} dS(t), \quad |a| = 1. \end{aligned}$$

Согласно этой формуле

$$\begin{aligned} nS_{(z,a)}^\varepsilon(u) &= \frac{n}{|S(\varepsilon)|} \int_{|t-z|=\varepsilon} u(t) \frac{|\langle a, t - z \rangle|^2}{\varepsilon^2} dS(t) \\ &= \frac{n}{2\varepsilon|S(\varepsilon)|} \int_{|t-z|=\varepsilon} u(t) \frac{2}{\varepsilon} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{t}_\nu} (|t - z|^2 - \varepsilon^2) \bar{a}_\nu \langle a, t - z \rangle \right\} dS(t) \\ &= \frac{n}{2\varepsilon|S(\varepsilon)|} \int_{|t-z|<\varepsilon} u(t) (H(|t - z|^2 - \varepsilon^2))(t, a) dV(t) \\ &= -\frac{n}{2\varepsilon|S(\varepsilon)|} \int_{|t-z|<\varepsilon} u(t) ((|t - z|^2 - \varepsilon^2)(Hu))(t, a) dV(t). \end{aligned}$$

Поэтому

$$nS_{(z, a)}^\varepsilon(u) - B_z^\varepsilon(u) = \frac{1}{4|B(\varepsilon)|} \int_{|t-z|=\varepsilon} (\varepsilon^2 - |t-z|^2)(Hu)(t, a) dV(t).$$

Используя то, что для дважды непрерывно дифференцируемой функции  $F$  существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4(n+1)}{\varepsilon^2} (B_z^\varepsilon(f) - f(z)) = (\Delta f)(z)$$

(см., например, [3]), из последнего равенства получим

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4(n+1)}{\varepsilon^2} (nS_{(z, a)}^\varepsilon(u) - B_z^\varepsilon(u)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{n+1}{|B(\varepsilon)|} \int_{|t-z|<\varepsilon} (Hu)(t, a) dV(t) \right. \\ & \quad \left. - \frac{n+1}{\varepsilon^2 |B(\varepsilon)|} \int_{|t-z|<\varepsilon} |t-z|^2 (Hu)(t, a) dV(t) \right\} = (Hu)(z, a) \end{aligned}$$

(здесь  $a \in S$ ).

**Следствие 1.** Так как  $|a| = 1$ , существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4(n+1)}{\varepsilon^2} (nS_z^\varepsilon(u) - B_z^\varepsilon(u)) = (\Delta u)(z).$$

Сформулируем основную теорему данной работы.

**Теорема.** Класс функций  $F$  состоит только из функций вида

$$u(z) = A|z|^2 + p(z),$$

где  $A$  — неотрицательная константа, а  $p(z)$  — плоригармоническая функция в области  $E$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что  $u(z) \in F \cap C^4(E)$  — плоригармоническая функция. Так как в шаре  $B(z, \varepsilon)$  функции

$$v(z) = \begin{cases} P[u](z), & z \in B(z^o, \varepsilon), \\ u(z), & z \in E \setminus B(z^o, \varepsilon), \end{cases}$$

плоригармонические, а форма Леви от ядра Пуассона в точке  $z$  имеет вид

$$(HK)(z, a) = \frac{4(n+1)}{\varepsilon^2 |S(\varepsilon)|} \left( \frac{n}{\varepsilon^2} |\langle t - z, a \rangle|^2 - 1 \right), \quad a \in S,$$

выполнено равенство

$$\frac{4(n+1)}{\varepsilon^2} (S_{(z,a)}^\varepsilon(u) - S_z^\varepsilon(u)) = (HP[u])(z, a) = (Hv)(z, a) = 0.$$

Далее, используя найденный в лемме предел, получим

$$\begin{aligned} (Hu)(z, a) - \frac{(\Delta)(z)}{n} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4(n+1)}{\varepsilon^2} (nS_{(z,a)}^\varepsilon(u) - B_z^\varepsilon(u)) \\ &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4(n+1)}{\varepsilon^2} (nS_z^\varepsilon(u) - B_z^\varepsilon(u)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4(n+1)}{\varepsilon^2} (nS_{(z,a)}^\varepsilon(u) - S_z^\varepsilon(u)) = 0. \end{aligned}$$

В силу того, что точки  $(z, a) \in E \times S$  произвольны, имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu, \\ \frac{(\Delta u)(z)}{4n}, & \mu = \nu. \end{cases}$$

Откуда получаем всюду в области  $E$

$$\begin{aligned} d(\Delta u) &= \partial(\Delta u) + \bar{\partial}(\Delta u) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(\Delta u)}{\partial z_\nu} dz_\nu + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(\Delta u)}{\partial \bar{z}_\nu} d\bar{z}_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial z_\nu} \left( 4n \frac{\partial^2 u}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\mu} \right) dz_\nu + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu} \left( 4n \frac{\partial^2 u}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\mu} \right) d\bar{z}_\nu = 0, \\ &\quad \mu = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Следовательно,  $A = \frac{\Delta u}{4n}$  — неотрицательная константа, а функция

$$p(z) = u(z) - A|z|^2$$

плоригармоническая в области  $E$ .

Предположим теперь, что  $u(z)$  — произвольная функция из класса  $F$ . В этом случае для всех  $\varepsilon > 0$  таких, что  $B(z, \varepsilon) \subset E$ , и для любых единичных векторов  $a \in \mathbb{C}^n$

$$nS_{(z,a)}^\varepsilon(u) - S_z^\varepsilon(u) = 0.$$

Воспользуемся возможностью [4] аппроксимации плюрисубгармонической функции  $u(z)$  такими же функциями  $u_m(z)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , но из класса  $C^\infty(E_m)$ , где области

$$E_m = \left\{ z \in E : \text{dist}(z, \partial E) > \frac{1}{m} \right\} \quad (\text{dist}(z, \partial E) = \inf_{\partial E} |t - z|)$$

образуют возрастающую последовательность  $\{E_m\}$ , исчерпывающую область  $E$ . При этом  $u_m(z) \downarrow u(z)$  в каждой точке из  $E$ . В качестве таких функций выбирают средние

$$u_m(t) = \int_E u(t+z) T_m(|t|) dV(t),$$

где  $T_m(|t|)$  — ядро усреднения радиуса  $1/m$ . Далее, зафиксировав любое натуральное число  $m$  и выбрав соответствующее множество  $E_m$ , для любого  $z \in E_m$  получим равенство

$$nS_{(z,a)}^\varepsilon(u_m) - S_z^\varepsilon(u_m) = 0,$$

которое выполняется для любых  $0 < \varepsilon < \text{dist}(z, \partial E_m)$  и  $a \in S$ .

Тогда согласно доказанному выше существуют неотрицательные числа  $A_m$  и плюригармонические в областях  $E_m$  функции  $p_m(z)$  такие, что

$$u_m(z) = A_m |z|^2 + p_m(z), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Для любых пар точек  $(z, a) \in E \times S$  и для любых чисел  $0 < \varepsilon < \text{dist}(z, \partial E_m)$  выполняются равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_m(z + a\varepsilon e^{i\Theta}) d\Theta - u_m z = A_m \varepsilon^2.$$

Из них следует существование конечного предела

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A \geq 0.$$

Используя данный предел, а также равенства (2), можно установить существование предела

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(z) = p(z),$$

который является плюригармонической функцией в области  $E$ . Таким образом, получаем

$$u(z) = A|z|^2 + p(z),$$

где  $A$  — неотрицательная константа, а  $p(z)$  — плюригармоническая функция в области  $E$ . Функция  $u(z)$  является функцией из класса  $F$ .

Докажем обратное: если функция имеет представление

$$u(z) = A|z|^2 + p(z),$$

то она является функцией класса  $F$ .

Выберем шар  $B(z^o, \varepsilon) \subset E$ . Тогда в любой точке  $z \in B(z^o, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} v(z) &= \int_{|t-z^o|=\varepsilon} (A|t|^2 + p(t)) K(t, z) dS(t) \\ &= A \left( \int_{|t-z^o|=\varepsilon} (|t|^2 - |t-z^o|^2) K(t, z) dS(t) + \int_{|t-z^o|=\varepsilon} |t-z^o|^2 K(t, z) dS(t) \right) \\ &\quad + \int_{|t-z^o|=\varepsilon} p(t) K(t, z) dS(t) = A(|z|^2 - |z-z^o|^2) + A\varepsilon + p(z). \end{aligned}$$

Очевидно, что функция  $v(z)$  плюригармоническая в шаре  $B(z^o, \varepsilon) \subset E$ .

Предположим далее, что точка  $z$  принадлежит сфере

$$S(z^o, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - z^o| = \varepsilon\}.$$

Тогда для всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  и любых единичных векторов  $a \in S$  имеет место неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_m(z + a\varepsilon e^{i\Theta}) d\Theta \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_m(z + a\varepsilon e^{i\Theta}) d\Theta \geq u(z) = v(z).$$

Следовательно, функция  $v(z)$  плюрисубгармоническая в области  $E$ .

В [1] дано определение гармонического продолжения: если функция  $u(z)$  субгармоническая в области  $E \subset \mathbb{R}^n$ , то функция  $v(z)$  называется *гармоническим продолжением*  $u(z)$  со сферы

$$S(x^o, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^o| = \varepsilon\}$$

в шар

$$B(x^o, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^o| < \varepsilon\}, \overline{B}(x^o, \varepsilon).$$

Аналогично данному определению из доказанной теоремы вытекает

**Следствие 2.** Плюригармоническим продолжением с любой сферы  $S(z^o, \varepsilon)$  в шар  $B(z^o, \varepsilon)$  являются плюрисубгармонические функции вида

$$v(z) = A|z|^2 + p(z),$$

где  $A$  — неотрицательная константа, а  $p(z)$  — плюригармоническая функция.

Из доказательства теоремы получаем

**Следствие 3.** Только субгармонические функции  $u(z)$  вида

$$u(z) = A|z|^2 + p(z),$$

могут осуществить плюригармоническое продолжение со сферы  $S(z^o, \varepsilon)$  в шар  $B(z^o, \varepsilon)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хейман У. В. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.
2. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
3. Привалов И. И. Субгармонические функции. М.: Гостехиздат, 1937.
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976.

г. Хабаровск

31 мая 2013 г.

ДИССИПАТИВНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЭНЕРГИИ  
В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО  
УРАВНЕНИЯ<sup>\*)</sup>

Б. М. Гордиенко

**Введение**

Рассматривается смешанная задача для волнового уравнения

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \sum \varphi_{y_j y_j} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (1)$$

$$p\varphi_t + q\varphi_x + \sum r_j \varphi_{y_j} = 0, \quad x = 0, \quad (2)$$

$$\varphi, \quad \varphi_t, \quad t = 0, \quad (3)$$

$j = 1, 2, \dots, n$ ;  $p, q, r_j$  — вещественные числа или гладкие функции от  $t, x, y_j$ .

Будем рассматривать вопросы обоснования корректности таких смешанных задач. В курсах уравнений с частными производными обычно рассматриваются смешанные задачи либо с граничным условием  $\varphi = 0, x = 0$  либо  $\varphi_x = 0, x = 0$ . Для обоснования корректности таких смешанных задач волновое уравнение (1) умножается на  $2\varphi_t$ :

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \sum \varphi_{y_j y_j} = 0 \mid 2\varphi_t.$$

Полученное выражение преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varphi_t^2 + \varphi_x^2 + \sum \varphi_{y_j}^2 \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \varphi_t \varphi_x - 2 \sum \frac{\partial}{\partial y_j} \varphi_t \varphi_{y_j} = 0,$$

---

<sup>\*)</sup> Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН (Междисциплинарный проект 80).

которое затем интегрируется по области, примыкающей к границе. Так получается априорная оценка, которая используется в обосновании корректности смешанной задачи.

Если задано более общее граничное условие (2), будем строить более общие дифференциальные тождества. Умножим волновое уравнение (1) на линейную комбинацию всех первых производных  $\varphi$ :

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \sum \varphi_{y_j y_j} = 0 \mid 2\left(k\varphi_t + l\varphi_x + \sum m_j \varphi_{y_j}\right).$$

Величины  $k, l, m_j$  — произвольные (пока) вещественные параметры. Полученное выражение можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle AU, U \rangle - \frac{\partial}{\partial x} \langle BU, U \rangle - \sum \frac{\partial}{\partial y_j} \langle C_j U, U \rangle = 0, \quad (4)$$

где

$$U = [\varphi_t \quad \varphi_x \quad \varphi_{y_1} \quad \dots \quad \varphi_{y_n}]^\top;$$

$$A = \begin{bmatrix} k & l & m_1 & \dots & m_n \\ l & k & & & \\ m_1 & & k & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ m_n & & & k & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} l & k & & & \\ k & l & m_1 & \dots & m_n \\ m_1 & -l & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ m_n & & & & -l \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} m_1 & k & & & \\ -m_1 & l & & & \\ k & l & m_1 & \dots & m_n \\ & & -m_1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ m_n & & & -m_1 & \end{bmatrix},$$

$$\dots, C_n = \begin{bmatrix} m_n & & & & k \\ -m_n & & & & l \\ & -m_n & & & m_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & -m_n & \\ k & l & m_1 & \dots & m_n \end{bmatrix}.$$

Выражение (4) называется *дифференциальным тождеством интеграла энергии для волнового уравнения*. Оно стандартным образом

(см., например [1]) приведет к априорной оценке и к обоснованию корректности смешанной задачи (1)–(3), если симметрические матрицы  $A$  и  $B$  будут удовлетворять следующим условиям:

- матрица  $A$  положительно определена:  $A > 0$
- матрица  $B$  положительна на векторах, удовлетворяющих граничному условию:

$$\left\langle B \begin{bmatrix} u \\ v \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \right\rangle \Bigg|_{pu+qv+\sum r_j w_j=0} > 0.$$

Условие на матрицу  $B$  называется *условием диссипативности*.

Будет доказана

**Теорема.** Если выполнено условие

$$p^2 - \sum r_j^2 > 0, \quad pq < 0, \quad (5)$$

то множество параметров  $k, l, m_j$ , обеспечивающих выполнение сформулированных условий на матрицы  $A, B$ , непусто и представляет собой внутренность верхней полы ( $k > 0$ ) конуса второго порядка  $\mathcal{Q} = \{(k, l, m_1, \dots, m_n) : (p^2 - \sum r_j^2)(k^2 - l^2 - \sum m_j^2) - (pk - ql - \sum r_j m_j)^2 > 0\}$ .

Будет обоснована необходимость неравенств (5). Кроме того, будут описаны расположение и геометрические параметры конуса  $\mathcal{Q}$ .

## 2. Необходимое условие диссипативности

Легко видеть, что  $A > 0 \iff k > 0, k^2 - l^2 - \sum m_j^2 > 0$ .

**Лемма 1.** Для того чтобы выполнялось условие диссипативности, матрица  $B$  должна иметь  $n + 1$  положительных собственных чисел.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n+2}$  собственные числа матрицы  $B$ . В силу принципа Куранта — Фишера

$$\lambda_2 = \max_{\substack{L, \\ \dim L=n+1}} \left( \min_{\substack{U \in L, \\ \|U\|=1}} \langle BU, U \rangle \right).$$

Поэтому если выполнено условие диссипативности, то  $\lambda_2 > 0$ .  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $k^2 - l^2 - \sum m_j^2 > 0$ . Матрица  $B$  имеет  $n + 1$  положительных собственных чисел тогда и только тогда, когда  $l < 0$ . При этом  $(n + 2)$ -е собственное число отрицательно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \langle BU, U \rangle &= \left\langle B \begin{bmatrix} u \\ v \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= l(u^2 + v^2 - \sum w_j^2) + 2v(ku + \sum m_j w_j) \\ &= -\frac{1}{l} \left[ (k^2 - l^2 - \sum m_j^2)v^2 + \sum (lw_j - m_j v)^2 - (lu + kv)^2 \right]. \end{aligned}$$

Осталось сослаться на закон инерции квадратичных форм.  $\square$

Итак, если матрица  $A$  положительно определена ( $k > 0$ ,  $k^2 - l^2 - \sum m_j^2 > 0$ ), то для условия диссипативности необходимо, чтобы было  $l < 0$ .

### 3. Переформулировка условия диссипативности

Обозначим через  $\mathcal{B}$  конус второго порядка

$$\mathcal{B} = \{U = [u \ v \ w_1 \ \dots \ w_n]^\top : \langle BU, U \rangle < 0\}.$$

Предполагаем, что

$$k > 0, \quad k^2 - l^2 - \sum m_j^2 > 0, \quad l < 0, \tag{6}$$

значит, в силу предыдущего пункта одно собственное число матрицы  $B$  отрицательно, остальные положительны. Поэтому конус  $\mathcal{B}$  состоит из двух симметричных пол, а множество, где выполняется  $\langle BU, U \rangle > 0$ , располагается между полами конуса  $\mathcal{B}$ . Таким образом, условие диссипативности геометрически означает, что гиперплоскость  $ru + qv + \sum r_j w_j = 0$  разделяет полы конуса  $\mathcal{B}$ .

Так как  $\det B = -(-l)^n (k^2 - l^2 - \sum m_j^2)$ , в силу (6) матрица  $B$  невырожденна. Сопряженным к конусу  $\mathcal{B}$  назовем конус

$$\mathcal{B}^* = \{U = [u \ v \ w_1 \ \dots \ w_n]^\top : \langle B^{-1}U, U \rangle < 0\}.$$

Легко показать, что образующие конуса  $\mathcal{B}^*$  являются нормальными касательных плоскостей конуса  $\mathcal{B}$ . Поэтому условие разделения гиперплоскостью  $pu + qv + \sum r_j w_j = 0$  пол конуса  $\mathcal{B}$  эквивалентно тому, что нормаль этой гиперплоскости лежит внутри двойственного конуса  $\mathcal{B}^*$ . Таким образом, условие диссипативности принимает вид

$$\left\langle B^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ q \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \right\rangle < 0. \quad (7)$$

Следующий шаг нашего преобразования условия диссипативности связан с тем, что матрицу  $B^{-1}$  можно явно выписать и она просто выглядит. Определим матрицу  $\widehat{B}$  равенством

$$\begin{aligned} \widehat{B} = (k^2 - l^2 - \sum m_j^2) & \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m_1 \\ \vdots \\ -m_n \end{bmatrix} [k \quad -l \quad -m_1 \quad \dots \quad -m_n]. \end{aligned}$$

Легко проверить, что  $B \cdot \widehat{B} = l(k^2 - l^2 - \sum m_j^2)I$ , значит,

$$B^{-1} = \frac{1}{l(k^2 - l^2 - \sum m_j^2)} \widehat{B}.$$

Учитывая, что  $l(k^2 - l^2 - \sum m_j^2) < 0$ , неравенство (7) переписываем в виде

$$\left\langle \widehat{B} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ q \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \right\rangle > 0. \quad (8)$$

Конечно, важно, что множитель  $l(k^2 - l^2 - \sum m_j^2)$  в неравенстве (8) мы можем отбросить. Но основной успех этой работы связан с тем появившимся сейчас обстоятельством, что выражение, стоящее в левой части (8), является квадратичной формой не только относительно коэффициентов граничного условия  $p, q, r_j$ , но и относительно параметров интеграла энергии  $k, l, m_j$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{B} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ q \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \right\rangle &= (k^2 - l^2 - \sum m_j^2)(p^2 - \sum r_j^2) - (kp - lq - \sum m_j r_j)^2 \\ &= \left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \right\rangle, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q = (p^2 - \sum r_j^2) &\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} p \\ -q \\ -r_1 \\ \vdots \\ -r_n \end{bmatrix} [p \quad -q \quad -r_1 \quad \dots \quad -r_n]. \end{aligned}$$

Теперь условие диссипативности (7), (8) записываем в виде

$$\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \right\rangle > 0.$$

Поскольку это условие используется как условие на параметры  $k, l, m_j$ , мы выбрали вариант, в котором именно относительно этих параметров условие диссипативности записывается как квадратичная форма.

Мы обосновали следующее утверждение: чтобы матрицы  $A$  и  $B$  удовлетворяли условиям, сформулированным во введении, для параметров  $k, l, m_j$  должно быть выполнено

$$\begin{aligned} k^2 - l^2 - \sum m_j^2 &> 0, \quad k > 0, \quad l < 0, \\ (p^2 - \sum r_j^2) \left( k^2 - l^2 - \sum m_j^2 \right) - \left( kp - lq - \sum m_j r_j \right)^2 &> 0. \end{aligned} \quad (9)$$

#### 4. Завершение исследования условия диссипативности

Обозначим через  $\mathcal{A}$  конус второго порядка  $\mathcal{A} = \{(k, l, m_1, \dots, m_n) : k^2 - l^2 - \sum m_j^2 > 0\}$ . Во введении мы уже ввели в рассмотрение конус  $\mathcal{Q}$  второго порядка. С этого момента предполагаем, что коэффициенты граничного условия  $p, q, r_j$  удовлетворяют неравенствам (5). Необходимость этого предположения будет объяснена в заключительном пункте.

Из неравенства  $p^2 - \sum r_j^2 > 0$  (содержащегося в (5)) вытекает вложенность конусов  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ , а также то, что первое неравенство в списке неравенств (9) может быть опущено. Таким образом, неравенства (9) принимают вид

$$\begin{aligned} k > 0; \quad l < 0; \\ \left( k^2 - l^2 - \sum m_j^2 \right) \left( p^2 - \sum r_j^2 \right) - \left( kp - lq - \sum m_j r_j \right)^2 &> 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Гиперплоскость  $k = 0$  разделяет полы конуса  $\mathcal{A}$ , а значит (в силу  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ ), и полы конуса  $\mathcal{Q}$ . Докажем лемму, из которой следует, что гиперплоскость  $l = 0$  также разделяет полы конуса  $\mathcal{Q}$ .

**Лемма 3.** Конус  $\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \right\rangle = 0$  касается гиперплоско-

сти  $l = 0$  по прямой  $t \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что точки прямой  $t \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$

расположены на конусе  $\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \right\rangle = 0$ . Уравнение гипер-

плоскости, касающейся этого конуса в точках прямой  $t \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$ , есть

$\left\langle Q \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \right\rangle \equiv ql(p^2 - \sum r_j^2) = 0$ . Это уравнение задает гиперплоскость  $l = 0$ .  $\square$

Итак, гиперплоскость  $k = 0$  и гиперплоскость  $l = 0$  разделяют полы конуса  $\mathcal{Q}$ . Каждая пола конуса  $\mathcal{Q}$  полностью расположена в одной из четырех частей, на которые делят все пространство гиперплоскости  $k = 0$  и  $l = 0$ . Чтобы показать, что одна из пол конуса  $\mathcal{Q}$  расположена в области  $k > 0$ ,  $l < 0$ , достаточно указать в этой области хотя бы одну точку конуса  $\mathcal{Q}$ .

Покажем, что

$$\begin{bmatrix} k \\ l \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = -\frac{q}{|q|} \begin{bmatrix} p + \frac{q^2}{p} \\ q \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \in \mathcal{Q}.$$

В самом деле,

$$k = -pq \cdot \frac{p^2 + q^2}{|q|p^2} > 0, \quad l = -|q| < 0;$$

$$\begin{aligned} \left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \right\rangle &= \left\langle Q \begin{bmatrix} p + \frac{q^2}{p} \\ q \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p + \frac{q^2}{p} \\ q \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{q^2}{p^2} (p^2 - \sum r_j^2) (p^2 + q^2) > 0. \end{aligned}$$

Сформулированная во введении теорема доказана.

## 5. Собственные числа и собственные векторы матрицы $Q$

Для того чтобы описать расположение конуса  $\mathcal{Q}$  и его геометрические параметры, нужно найти систему координат, в которой этот конус будет приведен к каноническому виду. Эту систему координат составляют ортонормированные собственные векторы матрицы  $Q$ . В частности, направление оси конуса  $\mathcal{Q}$  задает собственный вектор, отвечающий единственному положительному собственному числу матрицы  $Q$ , а геометрические параметры конуса  $\mathcal{Q}$  выражаются через собственные числа матрицы  $Q$ . Вычислим все собственные числа и собственные векторы матрицы  $Q$ . Для этого достаточно решить одно квадратное уравнение.

Пусть  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + (p^2 + q^2 + \sum r_j^2)\lambda - q^2(p^2 - \sum r_j^2) = 0.$$

$$\begin{bmatrix} p + \frac{q^2 + \lambda_1}{p} \\ q \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix},$$

Непосредственно проверяется, что для векторов  $\mathbf{u}_1 =$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} p + \frac{q^2 + \lambda_2}{p} \\ q \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

выполнено  $Q\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$ ,  $Q\mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2$ . Значит,  $\lambda_1$ ,

$\lambda_2$  — собственные числа матрицы  $Q$ , а  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  — соответствующие собственные векторы.

Все остальные собственные числа матрицы  $Q$ , равны  $\mu = -(p^2 - \sum r_j^2) < 0$ , а собственным является любой вектор, перпендикулярный векторам  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ .

Несложно убедиться в справедливости неравенств  $\lambda_1 < \mu < 0 < \lambda_2$ ;  $0 < \lambda_2 < |\mu| < |\lambda_1|$ .

## 6. Заключительные замечания

Неравенства (5), при которых доказана основная теорема, представляют собой равномерное условие Лопатинского для смешанной задачи (1)–(3). Они получены в [2]. Если равномерное условие Лопатинского не выполнено, то для смешанной задачи (1)–(3) можно построить примеры некорректности Адамара, что исключает построение диссипативного интеграла энергии. В [2] корректность смешанной задачи для волнового уравнения при выполнении равномерного условия Лопатинского доказывалась с помощью техники псевдодифференциальных операторов. Это гораздо сложнее техники интегралов энергии. С помощью интегралов энергии смешанная задача для волнового уравнения с двумя пространственными переменными рассматривалась в [3–5]. Многомерной постановке посвящена работа [6]. Но там доказано лишь существование интегралов энергии для задач, удовлетворяющих равномерному условию Лопатинского. Данная работа является развитием работ [7–9], в которых автор рассматривал волновое уравнение

с тремя пространственными переменными. После работы [9], конечно, ожидалось, что и в многомерном случае множество диссипативных интегралов энергии будет описываться конусом второго порядка. Но было маловероятно, что для матрицы  $Q$ , задающей этот конус, можно явно вычислить все собственные числа и собственные векторы и это вычисление сводится к решению одного квадратного уравнения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
2. Miyatake S. Mixed problem for hyperbolic equations of second order with first order complex boundary operators // Japanese J. Math., 1975. V. 1. P. 111–158.
3. Gordienko V. M. Un probleme mixte pair l'équation vectorielle des ondes: Cas de dissipation de l'énergie; Cas mal posés // C.r. Acad. Sci. 1979. Т. 288, N 10. Ser. A. P. 547–550.
4. Гордиенко В. М. Симметризация смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка с двумя пространственными переменными // Сиб. мат. журн., 1981. Т. 22, № 2. С. 84–104.
5. Гордиенко В. М. О корректности смешанной задачи для волнового уравнения / Сиб. электрон. мат. изв. 2010. <http://semr.math.nsc.ru/> (Тр. первой междунар. молодежной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». Ч. I). С. 130–138.
6. Малышев А. Н. Смешанная задача для гиперболического уравнений второго порядка с комплексным граничным условием первого порядка // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 6. С. 102–121.
7. Гордиенко В. М. Гиперболические системы, эквивалентные волновому уравнению // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 49, № 1. С. 19–27.
8. Гордиенко В. М. Системы Фридрихса для трехмерного волнового уравнения // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 50, № 6. С. 1282–1297.
9. Гордиенко В. М. Диссипативность граничного условия в смешанной задаче для трехмерного волнового уравнения // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 311–323. <http://semr.math.nsc.ru/>.

г. Новосибирск

15 октября 2013 г.

РЕШЕТОЧНО-МЕТРИЧЕСКОЕ  
РАЗЛОЖЕНИЕ МОНОТОННОГО  
ОПЕРАТОРА

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

В данной заметке рассмотрено естественное понятие монотонного линейного оператора, действующего из векторной решетки в нормированное пространство, показано, что всякий такой оператор допускает «решеточно-метрическое» разложение в виде композиции решеточного гомоморфизма и линейной изометрии, и приведены несколько приложений полученных результатов к исследованию непрерывных и измеримых расслоений банаевых решеток.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $X$  — векторная решетка,  $Y$  — нормированное пространство и  $T: X \rightarrow Y$  — линейный оператор.

(1) Оператор  $T$  называется *монотонным*, если для любых  $x_1, x_2 \in X$  из  $|x_1| \leq |x_2|$  следует  $\|Tx_1\| \leq \|Tx_2\|$ .

(2) Тройку  $(Z, H, I)$  назовем *решеточно-метрическим разложением* оператора  $T$ , если  $Z$  — нормированная решетка,  $H: X \rightarrow Z$  — сюръективный решеточный гомоморфизм,  $I: Z \rightarrow Y$  — линейная изометрия и  $T = I \circ H$ .

При доказательстве первого результата пригодятся два классических факта из теории векторных решеток, которые для удобства сформулированы здесь в виде теорем А и В.

**Теорема А** [1, 18.7–18.9]. *Если  $K$  — порядковый идеал векторной решетки  $X$ , то векторное фактор-пространство  $X/K$  является векторной решеткой относительно порядка  $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ , определяемого для классов  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X/K$  любым из следующих попарно равносильных условий:*

(1)  $(\exists x \in \mathbf{u}) (\exists y \in \mathbf{v}) x \leq y$ ;

- (2)  $(\forall x \in \mathbf{u}) (\exists y \in \mathbf{v}) x \leqslant y;$   
(3)  $(\forall x \in \mathbf{u}) (\forall y \in \mathbf{v}) (\exists z \in K) x \leqslant y + z.$

При этом каноническое отображение  $X \rightarrow X/K$  является решеточным гомоморфизмом:  $[x] \vee [y] = [x \vee y]$  и  $[x] \wedge [y] = [x \wedge y]$  для всех  $x, y \in X$ , где  $[x] := x + K$ .

Напомним, что полунорма  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  на векторной решетке  $X$  называется *монотонной*, если для любых  $x_1, x_2 \in X$  из  $|x_1| \leqslant |x_2|$  следует  $p(x_1) \leqslant p(x_2)$ .

**Теорема В** [1, 62.3]. Пусть  $K$  — порядковый идеал векторной решетки  $X$  и пусть  $p$  — монотонная полунорма на  $X$ . Тогда факторполунорма  $\pi$ , определяемая на  $X/K$  традиционной формулой  $\pi(\mathbf{u}) = \inf\{p(x) : x \in \mathbf{u}\}$ , монотонна. Если идеал  $K$  замкнут относительно сходимости по полунорме  $p$ , то  $X/K$  представляет собой нормированную решетку с нормой  $\pi$ .

**Теорема 1.** Линейный оператор, действующий из векторной решетки в нормированное пространство, монотонен тогда и только тогда, когда он имеет решеточно-метрическое разложение.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточность очевидна. Покажем необходимость. Пусть  $X$  — векторная решетка,  $Y$  — нормированное пространство и пусть  $T : X \rightarrow Y$  — монотонный линейный оператор. Заметим, что  $K := \ker T$  — порядковый идеал  $X$ : если  $x \in X$ ,  $x_0 \in K$  и  $|x| \leqslant |x_0|$ , то  $\|Tx\| \leqslant \|Tx_0\| = 0$  и тем самым  $x \in K$ . По теореме А пространство  $Z := X/K$  представляет собой векторную решетку относительно естественного порядка, а каноническое отображение  $H : X \rightarrow Z$  является сюръективным решеточным гомоморфизмом. Монотонность оператора  $T$  означает, что  $\|\cdot\| \circ T$  — монотонная полунорма на  $X$ , причем идеал  $K$  замкнут по этой полунорме: если  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ ,  $x \in X$  и  $\|T(x_n - x)\| \rightarrow 0$ , то  $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = 0$ . Согласно теореме В пространство  $Z$  является нормированной решеткой относительно соответствующей фактор-нормы  $\|\cdot\|_Z$ . Осталось заметить, что линейный оператор  $I : Z \rightarrow Y$ , корректно определяемый формулой  $I(Hx) = Tx$ , является изометрией:

$$\|I(Hx)\| = \|Tx\| = \inf\{\|T(x + x_0)\| : x_0 \in K\} = \|Hx\|_Z. \quad \square$$

**Следствие 1.** Пусть  $X$  — векторная решетка,  $Y$  — нормированное пространство,  $T: X \rightarrow Y$  — сюръективный монотонный линейный оператор. Тогда на  $Y$  можно ввести такое отношение порядка, что  $Y$  превратится в нормированную решетку, а оператор  $T$  станет решеточным гомоморфизмом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $(Z, H, I)$  — решеточно-метрическое разложение оператора  $T$  (см. теорему 1). Из сюръективности  $T$  вытекает сюръективность линейной изометрии  $I: Z \rightarrow Y$ . Введем отношение порядка на  $Y$ , полагая  $y_1 \leqslant y_2 \Leftrightarrow I^{-1}y_1 \leqslant I^{-1}y_2$ . Тогда, как легко видеть,  $Y$  является нормированной решеткой, а оператор  $I$  служит порядковым и метрическим изоморфизмом между  $Z$  и  $Y$ . При этом оператор  $T$  оказывается решеточным гомоморфизмом, будучи композицией решеточных гомоморфизмов  $H$  и  $I$ .  $\square$

**Следствие 2.** Пусть  $X$  — векторная решетка,  $Y$  — банахово пространство, и пусть  $T: X \rightarrow Y$  — монотонный линейный оператор с плотным в  $Y$  образом. Тогда на  $Y$  можно ввести такое отношение порядка, что  $Y$  превратится в банахову решетку, а оператор  $T$  станет решеточным гомоморфизмом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Воспользовавшись следствием 1, снабдим образ  $Y_0$  оператора  $T$  отношением порядка, превращающим  $Y_0$  в нормированную решетку, а оператор  $T: X \rightarrow Y_0$  — в решеточный гомоморфизм. Остается заметить, что на пополнении  $Y$  нормированной решетки  $Y_0$  можно ввести порядок, относительно которого  $Y$  является банаховой решеткой, содержащей  $Y_0$  в качестве векторной подрешетки (см., например, [2, 1.4]).  $\square$

**Лемма 1.** Пусть  $E$  — векторная решетка,  $X$  и  $Y$  —  $E$ -нормированные решетки,  $T: X \rightarrow Y$  — линейная изометрия,  $u, v \in X$ ,  $|u| \wedge |v| = 0$ ,  $Tu \geqslant Tv \geqslant 0$ . Тогда  $|u + nv| \leqslant |u + v|$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , а если решетка  $E$  архimedова, то  $v = 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В случае  $n = 1$  доказываемое неравенство очевидно. Предположив  $|u + nv| \leqslant |u + v|$ , покажем  $|u + (n+1)v| \leqslant |u + v|$ . В силу очевидных соотношений  $-Tu \leqslant 0 \leqslant Tu - Tv$  и  $-(n+1)Tv \leqslant$

$0 \leq nTv$  имеем

$$-Tu - nTv \leq Tu - (n+1)Tv \leq Tu + nTv.$$

Следовательно,  $|Tu - (n+1)Tv| \leq Tu + nTv = |Tu + nTv|$ , а значит,

$$|u - (n+1)v| = |Tu - (n+1)Tv| \leq |Tu + nTv| = |u + nv| \leq |u + v|.$$

Учитывая равенство  $|u| \wedge |v| = 0$ , заключаем, что  $|u + (n+1)v| = |u - (n+1)v|$ , поэтому  $|u + (n+1)v| = |u - (n+1)v|$ . Если решетка  $E$  архимедова, то из  $n|v| = |nv| \leq |u + nv| + |u| \leq |u + v| + |u|$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) следует  $|v| = 0$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Приведенное выше обоснование леммы 1 идейно повторяет фрагмент доказательства теоремы 1 из [3].

**Теорема 2.** Пусть  $E$  — архимедова векторная решетка,  $X$  и  $Y$  —  $E$ -нормированные решетки и  $T: X \rightarrow Y$  — положительная линейная изометрия. Тогда  $T$  является порядковым изоморфизмом  $X$  на  $\text{im } T$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $x \in X$  и  $Tx \geq 0$ , то  $u := x^+$  и  $v := x^-$  удовлетворяют условиям леммы 1 (в силу того, что  $Tu - Tv = Tx \geq 0$ ), а значит,  $v = 0$  и тем самым  $x \geq 0$ .  $\square$

**Следствие 3.** Если  $E$  — архимедова векторная решетка, то всякий положительный метрический изоморфизм между  $E$ -нормированными решетками является порядковым изоморфизмом.

В случае  $E = \mathbb{R}$  последнее утверждение совпадает с теоремой 1 из [3].

**Теорема 3.** Пусть  $X$  — векторная решетка,  $Y$  — нормированная решетка, и пусть линейный оператор  $T: X \rightarrow Y$  положителен, сюръективен и монотонен. Тогда  $T$  — решеточный гомоморфизм.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По теореме 1 оператор  $T$  имеет решеточно-метрическое разложение  $(Z, H, I)$ . Покажем, что оператор  $I: Z \rightarrow Y$  положителен. Действительно, если  $x \in X$  и  $Hx \geq 0$ , то  $Hx = (Hx)^+ = H(x^+)$ , а значит,  $I(Hx) = IH(x^+) = T(x^+) \geq 0$  в силу положительности  $T$ . Кроме того, из сюръективности  $T$  вытекает сюръективность  $I$ .

Таким образом,  $I$  служит положительным метрическим изоморфизмом между нормированными решетками  $Z$  и  $Y$ . Согласно следствию 3 оператор  $I$  является порядковым изоморфизмом и, в частности, решеточным гомоморфизмом. Следовательно, композиция  $T = I \circ H$  также является решеточным гомоморфизмом.  $\square$

В качестве одного из приложений установленных выше фактов докажем техническую лемму о введении порядка в слоях банахова расслоения, множество сечений которого имеет заданную решеточную структуру.

**Лемма 2.** Пусть  $Q$  — произвольное множество,  $E$  — векторная подрешетка  $\mathbb{R}^Q$ ,  $\mathcal{X}$  — банахово расслоение над  $Q$ ,  $\mathcal{U}$  — послойно плотное в  $\mathcal{X}$  векторное подпространство  $S(Q, \mathcal{X})$ , и пусть  $\leqslant$  — такое отношение порядка на  $\mathcal{U}$ , что  $(\mathcal{U}, |\cdot|, \leqslant)$  является  $E$ -нормированной решеткой, где  $|\cdot| : \mathcal{U} \rightarrow E$  — поточечная норма. Тогда в каждом слое  $\mathcal{X}(q)$  можно ввести отношение порядка так, что  $\mathcal{X}(q)$  превратится в банахову решетку, а  $(\mathcal{U}, \leqslant)$  окажется подрешеткой  $S(Q, \mathcal{X})$  относительно поточечного порядка:

- (1)  $u \leqslant v \Leftrightarrow (\forall q \in Q) u(q) \leqslant v(q);$
- (2)  $(u \vee v)(q) = u(q) \vee v(q), (u \wedge v)(q) = u(q) \wedge v(q)$  для всех  $q \in Q$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для произвольной точки  $q \in Q$  рассмотрим линейный оператор  $T_q : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}(q)$ , определенный формулой  $T_q u = u(q)$  и имеющий всюду плотный в  $\mathcal{X}(q)$  образ. Как легко видеть, оператор  $T_q$  монотонен: если  $|u| \leqslant |v|$ , то  $|u| \leqslant |v|$ , поэтому

$$\|T_q u\| = \|u(q)\| = |u|(q) \leqslant |v|(q) = \|v(q)\| = \|T_q v\|.$$

Воспользовавшись следствием 2, снабдим  $\mathcal{X}(q)$  отношением порядка, превращающим  $\mathcal{X}(q)$  в банахову решетку, а оператор  $T_q : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}(q)$  — в решеточный гомоморфизм. Последнее обстоятельство обеспечивает условие (2), а условие (1) вытекает из (2), поскольку

$$\begin{aligned} u \leqslant v &\Leftrightarrow u \vee v = v \Leftrightarrow (\forall q \in Q) (u \vee v)(q) = v(q) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall q \in Q) u(q) \vee v(q) = v(q) \Leftrightarrow (\forall q \in Q) u(q) \leqslant v(q). \quad \square \end{aligned}$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В рамках доказательства леммы 2 совпадение порядка  $\leqslant$  с поточечным порядком  $\preceq$  на  $\mathcal{U}$  можно также вывести из

следствия 3. Действительно, тождественный метрический изоморфизм между  $E$ -нормированными решетками  $(\mathcal{U}, |\cdot|, \leq)$  и  $(\mathcal{U}, |\cdot|, \preceq)$ , будучи положительным (благодаря положительности операторов  $T_q$ ), является порядковым изоморфизмом.

На базе леммы 2 может быть реализована основная часть намеченной в работе [4] программы по развитию теории представлений решеток Банаха — Канторовича. В качестве простого примера приведем соответствующую реализационную теорему для случая  $C(Q)$ -значной нормы.

**Теорема 4.** Пусть  $E := C(Q)$ , где  $Q$  — экстремально несвязный компакт. Всякая  $E$ -нормированная решетка Банаха — Канторовича порядково и метрически изоморфна пространству  $C(Q, \mathcal{X})$  непрерывных сечений некоторого просторного непрерывного расслоения  $\mathcal{X}$  банаховых решеток над  $Q$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Согласно [5, 3.4.2] (см. также [6, 2.4.10]) для любой  $E$ -нормированной решетки Банаха — Канторовича  $X$  существует такое просторное непрерывное банахово расслоение  $\mathcal{X}$  над  $Q$ , что  $E$ -нормированное пространство  $(X, |\cdot|_X)$  изометрично пространству  $\mathcal{U} := C(Q, \mathcal{X})$ , снабженному поточечной нормой  $|\cdot|$ . С помощью имеющегося изоморфизма  $I: X \rightarrow \mathcal{U}$  введем отношение порядка на  $\mathcal{U}$ , полагая  $u_1 \leq u_2 \Leftrightarrow I^{-1}u_1 \leq_X I^{-1}u_2$ . Воспользовавшись леммой 2, превратим слои расслоения  $\mathcal{X}$  в банаховые решетки, а порядок на  $\mathcal{U}$  — в поточечный порядок. В результате  $\mathcal{X}$  окажется непрерывным расслоением банаховых решеток с решеточной непрерывной структурой  $\mathcal{U}$ , а  $E$ -нормированная решетка  $X$  будет изоморфна  $C(Q, \mathcal{X})$  не только метрически, но и порядково.  $\square$

Введение понятия лифтинга  $(\cdot)_{\sim}: L^{\infty}(\Omega, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$  классов измеримых сечений измеримого расслоения  $\mathcal{X}$  банаховых решеток на пространстве с мерой  $\Omega$  сопровождается требованием согласованности лифтинга с решеточными операциями (см. [7, определение 2.2]):

$$(\mathbf{u} \vee \mathbf{v})_{\sim} = \mathbf{u}_{\sim} \vee \mathbf{v}_{\sim} \text{ для всех } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{X}).$$

В качестве еще одного приложения полученных выше результатов покажем, что это требование избыточно и может быть заменено условием

положительности:

$$\mathbf{u}_\sim \geqslant 0 \text{ для положительных } \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X}).$$

**Теорема 5.** Пусть  $\mathcal{X}$  — измеримое расслоение банаховых решеток над пространством с мерой  $\Omega$  и  $(\cdot)_\sim : L^\infty(\Omega, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{X})$  — такой лифтинг в измеримом банаховом расслоении  $\mathcal{X}$ , что  $\mathbf{u}_\sim \geqslant 0$  на  $\Omega$  для положительных  $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ . Тогда  $(\mathbf{u} \vee \mathbf{v})_\sim = \mathbf{u}_\sim \vee \mathbf{v}_\sim$  и  $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})_\sim = \mathbf{u}_\sim \wedge \mathbf{v}_\sim$  на  $\Omega$  для всех  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно фиксировать произвольную точку  $\omega \in \Omega$  и применить теорему 3 к векторной решетке  $X := L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ , нормированной решетке  $Y := \mathcal{X}(\omega)$  и оператору  $T: \mathbf{u} \in X \mapsto \mathbf{u}_\sim(\omega) \in Y$ , сюръективность которого следует из [5, 4.4.1] (см. также [6, 2.4.2 (5) и 2.5.10]).  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C. Riesz spaces. V. I. Amsterdam; London: North-Holland Publ. Co., 1971.
2. Kawai I. Locally convex lattices // J. Math. Soc. Japan. 1957. V. 9, N 3. P. 281–314.
3. Абрамович Ю. А. Об изометриях нормированных решеток // Оптимизация. 1988. Вып. 43 (60). С. 74–80.
4. Kusraev A. G., Tabuev S. N. Banach lattices of continuous sections // Владикавк. мат. журн. 2012. Т. 14, № 4. С. 41–44.
5. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком / Тр. Ин-та математики. Новосибирск: Ин-т математики, 1995. Т. 29. С. 63–211.
6. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
7. Ганиев И. Г. Измеримые расслоения решеток и их приложения // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. М.: Наука, 2005. С. 9–49.

г. Новосибирск

15 октября 2013 г.

УДК 517.957:517.548

О СЛАБОМ ПРЕДЕЛЕ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ,  
УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ НЕРАВЕНСТВУ  
С КВАЗИВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИЕЙ  
И НУЛЬ-ЛАГРАНЖИАНОМ\*)

А. А. Егоров

Важным шагом в изучении устойчивости классов отображений является установление замкнутости относительно слабой сходимости в пространствах Соболева некоторых вспомогательных классов отображений (см., например, монографии [1–4]). При доказательстве теорем об устойчивости пространственных конформных отображений такая замкнутость получена Ю. Г. Решетняком [5] для отображений с ограниченным искажением (см. также его монографии [1, 2]). Напомним, что отображение  $v \in W_{\text{loc}}^{1,n}(V; \mathbb{R}^n)$ , определенное в области  $V \subset \mathbb{R}^n$ , является неизменяющим ориентацию отображением с  $K$ -ограниченным искажением,  $K \geq 1$ , если оно удовлетворяет неравенству

$$|v'(x)|^n \leq K \det v'(x) \quad \text{для п. в. } x \in V. \quad (1)$$

В работах автора [6–8] при получении новой серии устойчивых классов отображений установлена замкнутость относительно рассматриваемой слабой сходимости класса решений  $v \in W_{\text{loc}}^{1,k}(V; \mathbb{R}^m)$ ,  $2 \leq k \leq \min(n, m)$ , определенных в областях  $V \subset \mathbb{R}^n$ , следующего неравенства:

$$F(v'(x)) \leq KG(v'(x)) \quad \text{для п. в. } x \in V, \quad K \geq 1, \quad (2)$$

---

\*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00819) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект НШ-921.2012.1).

где  $k$ -однородные функции  $F$  и  $G$  являются соответственно квазивыпуклой функцией и нуль-лагранжианом (для определения этих понятий см. п. 1). Отметим, что неравенство (1) — это неравенство (2) с  $F(\zeta) = |\zeta|^n$  и  $G(\zeta) = \det \zeta$ . Не изменяющие ориентацию отображения с ограниченным искажением содержатся в более широком классе отображений с конечным искажением, определяемых как решения  $v \in W_{\text{loc}}^{1,n}(V; \mathbb{R}^n)$ , заданные в областях  $V \subset \mathbb{R}^n$ , дифференциального неравенства

$$|v'(x)|^n \leq K(x) \det v'(x) \quad \text{для п. в. } x \in V$$

с некоторой измеримой функцией  $K(x) \geq 1$ , конечной почти всюду в  $V$ . Изучение свойств отображений с конечным искажением начато в работе С. К. Водопьянова и В. М. Гольдштейна [9]. Теоремы о замкнутости относительно слабой сходимости в пространствах Соболева получены для этих отображений Герингом и Иванцом [10] (см. также статью Яна [11] и монографию Иванца и Мартина [4]). Целью настоящей работы является установление замкнутости относительно слабой сходимости в пространствах Соболева класса решений неравенства

$$F(v'(x)) \leq K(x)G(v'(x)) \quad \text{для п. в. } x \in V$$

с некоторой измеримой функцией  $K(x) \geq 1$ , конечной почти всюду в  $V$ , где  $F$  — квазивыпуклая функция, а  $G$  — нуль-лагранжиан. Опишем структуру статьи. В п. 1 приводятся используемые в работе обозначения и термины. П. 2 содержит определение исследуемого класса отображений и формулировку основного результата (теорема 1). В п. 3 доказывается вспомогательный результат (теорема 2). Доказательство теоремы 1 изложено в п. 4.

## 1. Обозначения и терминология

Внешнюю меру Лебега множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  обозначаем через  $|A|$ . Пространство  $\mathbb{R}^{m \times n}$  всех вещественных  $m \times n$ -матриц  $\zeta$  рассматриваем с операторной нормой  $|\zeta| := \sup\{|\zeta(x)| : x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}$ . Матрица Якоби отображения  $v = (v_1, \dots, v_m) : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  в точке  $x \in V$  есть матрица

$$v'(x) := \left( \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}(x) \right)_{\substack{\mu=1,\dots,m \\ \nu=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Говорят, что функция  $\Phi : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  положительно однородна степени  $p \in \mathbb{R}$ , если  $\Phi(tx) = t^p \Phi(x)$  для всех  $t > 0$  и  $\zeta \in \mathbb{R}^{m \times n} \setminus \{0\}$ . Следуя Морри [12], непрерывную функцию  $F : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  называем *квазивыпуклой*, если выполнено неравенство

$$F(\zeta) \leq \int_{(0,1)^n} F(\zeta + \varphi'(x)) dx \quad (3)$$

для всех функций  $\varphi \in C_0^\infty((0,1)^n; \mathbb{R}^m)$  и матриц  $\zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Говорим, что функция  $G : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  есть *нуль-лагранжиан*, если функции  $G$  и  $-G$  квазивыпуклы (см., например, [4]). Только аффинные комбинации миноров, называемые *квазиаффинными функциями*, являются нуль-лагранжианами (см., например, [4, 12]).

## 2. Определение класса и формулировка основного результата

Фиксируем число  $k \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq k \leq \min(n, m)$ . Для непрерывных функций  $F : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $G : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  в дальнейшем считаем, что выполнены следующие предположения: (H1)  $F$  является квазивыпуклой функцией; (H2)  $G$  является нуль-лагранжианом; (H3)  $F$  и  $G$  положительно однородны степени  $k$ ; (H4)  $\sup\{K \geq 0 : F(\zeta) \geq KG(\zeta), \zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}\} = 1$ ; (H5)  $c_F := \inf\{F(\zeta) : \zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}, |\zeta| = 1\} > 0$ . Используя (H4), легко показать, что  $G \not\equiv 0$ . Так как функции  $F$  и  $G$  непрерывны, из (H3) следуют неравенства

$$c_F|\zeta|^k \leq F(\zeta) \leq C_F|\zeta|^k \text{ и } c_G|\zeta|^k \leq |G(\zeta)| \leq C_G|\zeta|^k, \zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (4)$$

с константами  $c_F$  из (H5),

$$c_G := \inf\{|G(\zeta)| : \zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}, |\zeta| = 1\} > 0,$$

$$C_F := \sup\{F(\zeta) : \zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}, |\zeta| = 1\} < \infty$$

и

$$C_G := \sup\{|G(\zeta)| : \zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}, |\zeta| = 1\} < \infty.$$

Будем говорить, что отображение  $v \in W_{loc}^{1,k}(V; \mathbb{R}^m)$ , определенное в области  $V \subset \mathbb{R}^n$ , лежит в классе  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{F,G}$ , если для него существует

измеримая функция  $K(x) \geq 1$ , конечная почти всюду в  $V$ , такая, что  $v$  удовлетворяет неравенству

$$F(v'(x)) \leq K(x)G(v'(x)) \quad \text{для п. в. } x \in V. \quad (5)$$

В силу неравенств (4) и (5) для отображения  $v : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  класса  $\mathfrak{F}$  почти всюду в  $V$  выполнено неравенство  $G(v'(x)) \geq 0$ . При этом в случае, когда  $G(v'(x)) = 0$ , имеем  $F(v'(x)) = 0$ . Поэтому для отображения  $v \in \mathfrak{F}$  почти всюду в его области определения корректно определена функция  $K(x, v)$  по следующему правилу:  $K(x, v) = F(v'(x))/G(v'(x))$  при  $G(v'(x)) > 0$  и  $K(x, v) = 1$  при  $G(v'(x)) = 0$ . При этом  $K(x, v)$  почти всюду конечна и  $K(x, v) \geq 1$ , а отображение  $v$  удовлетворяет неравенству (5) с  $K(x) = K(x, v)$ . Основным результатом работы является следующая

**Теорема 1.** Пусть функции  $F(\zeta)$  и  $G(\zeta)$  удовлетворяют предположениям (H1)–(H5) и  $V$  — область в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим последовательность  $(v_j : V \rightarrow \mathbb{R}^m)_{j \in \mathbb{N}}$  отображений класса  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{F,G}$ , которая слабо сходится в  $W_{\text{loc}}^{1,k}(V; \mathbb{R}^m)$  к отображению  $v : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Предположим, что для некоторой измеримой функции  $M(x) \geq 1$  выполнены неравенства

$$K(x, v_j) \leq M(x) < \infty \quad \text{для п. в. } x \in V, j \in \mathbb{N}.$$

Тогда предельное отображение  $v$  принадлежит классу  $\mathfrak{F}$ . Кроме того, для любой подпоследовательности  $(v_{j_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$  справедливо соотношение

$$K(x, v) \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} K(x, v_{j_\nu}) \quad \text{для п. в. } x \in V. \quad (6)$$

### 3. Вспомогательная теорема

Ключевым фактом при доказательстве следующей теоремы является полученный Ачерби и Фуско [13, теорема II.4] результат о полуунпрерывности относительно слабой сходимости интегральных функционалов с квазивыпуклыми интегrandами (ср. с [11, теорема 3.1]).

**Теорема 2.** Для функций  $F(\zeta)$  и  $G(\zeta)$ , удовлетворяющих (H1)–(H5), и измеримой функции  $K(x) \geq 1$ , конечной почти всюду в области  $V \subset \mathbb{R}^n$ , положим

$$H(x, \zeta) = \max(0, F(\zeta) - K(x)G(\zeta)). \quad (7)$$

Пусть последовательность  $(v_j : V \rightarrow \mathbb{R}^m)_{j \in \mathbb{N}}$  слабо сходится в пространстве  $W_{\text{loc}}^{1,k}(V; \mathbb{R}^m)$  к  $v : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Предположим, что для измеримого множества  $E \subset V$  выполнено, что  $\int_E H(x, v'_j(x)) dx \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ . Тогда  $H(x, v'(x)) = 0$  для п. в.  $x \in V$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из предположений (H1) и (H2) имеем, что функции  $F(\zeta)$  и  $-G(\zeta)$  квазивыпуклы. Так как линейная комбинация квазивыпуклых функций снова квазивыпукла, легко проверить, что функция  $H(x, \zeta)$  квазивыпукла по  $\zeta$  для п. в.  $x \in V$ . Кроме того, из неравенств (4) следует, что  $0 \leq H(x, \zeta) \leq \rho(x)|\zeta|^k$  для п. в.  $x \in V$  и всех  $\zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , где  $\rho(x) = C_F + C_G K(x)$ . Для  $t > 0$  положим  $E_t = \{x \in E : \rho(x) < t\}$ . По теореме 3.1 из [11] получаем

$$\int_{E_t} H(x, v'(x)) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{E_t} H(x, v'_j(x)) dx.$$

По условию предел в правой части последнего неравенства равен нулю. Поэтому  $H(x, v'(x)) = 0$  почти всюду в  $E_t$ . Отсюда, учитывая, что  $E = \bigcup_{t>0} E_t$  и  $E_t \subset E_s$  при  $t < s$ , получаем  $H(x, v'(x)) = 0$  для п. в.  $x \in E$ .

#### 4. Доказательство теоремы 1

Пусть функция  $H(x, \zeta)$  определена формулой (7) с  $K(x) = M(x)$ . Тогда имеем  $H(x, v'_j(x)) = 0$  для п. в.  $x \in V$ . Из теоремы 2 следует, что  $H(x, v'(x)) = 0$  и, следовательно,  $F(v'(x)) \leq M(x)G(v'(x))$  почти всюду в  $V$ . Поэтому  $v \in \mathfrak{F}$  и, кроме того,  $K(x, v) \leq M(x)$  для п. в.  $x \in V$ . Осталось доказать соотношение (6). Без ограничения общности можно считать, что подпоследовательность  $v_{j_\nu}$  выполняет роль исходной последовательности  $v_j$ . Положим  $L(x) = \limsup_{j \rightarrow \infty} K(x, v_j)$ . Необходимо показать, что

$$K(x, v) \leq L(x) \tag{8}$$

для п. в.  $x \in V$ . Если  $G(v'(x)) = 0$ , то  $K(x, v) = 1 \leq L(x)$  и, стало быть, неравенство (8) выполнено. Поэтому достаточно проверить, что неравенство (8) также справедливо для почти всех точек  $x$  из измеримого

множества  $U = \{x \in V : G(v'(x)) > 0\}$ . Предположим, что  $|U| > 0$ . Рассмотрим множество

$$N = \{x \in U : L(x) < K(x, v)\}.$$

Необходимо показать, что  $|N| = 0$ . Заметим, что  $N = \bigcup_{l,\mu=1}^{\infty} N_{l\mu}$ , где

$$N_{l\mu} = \bigcap_{j=\mu}^{\infty} \{x \in U : K(x, v_j) \leq K(x, v) - 1/l\}.$$

Будем доказывать, что  $|N_{l\mu}| = 0$  для  $l, \mu \in \mathbb{N}$ . Действительно, пусть  $E = N_{l\mu}$ , тогда  $K(x, v_j) \leq K(x, v) - 1/l$  для всех  $x \in E$  и  $j \geq \mu$ . Поэтому  $F(v'_j(x)) \leq (K(x, v) - 1/l)G(v'_j(x))$  при  $j \geq \mu$  для п. в.  $x \in E$ . Используя теорему 2, получаем, что  $F(v'(x)) \leq (K(x, v) - 1/l)G(v'(x))$  для п. в.  $x \in E$ . Так как  $G(v'(x)) > 0$  для  $x \in E = N_{l\mu} \subset U$ , то  $K(x, v) \leq K(x, v) - 1/l$  для п. в.  $x \in E$ . Следовательно,  $|E| = |N_{l\mu}| = 0$ . Тем самым  $|N| = 0$ . Это завершает доказательство теоремы 1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1983.
2. Решетняк Ю. Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. 2-е изд., перераб. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996.
3. Колылов А. П. Устойчивость в  $C$ -норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.
4. Iwaniec T., Martin G. Geometric function theory and non-linear analysis. Oxford: Oxford Univ. Press, 2001. (Oxford Math. Monogr.).
5. Решетняк Ю. Г. Отображения с ограниченным искажением как экстремали интегралов типа Дирихле // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 3. С. 652–666.
6. Егоров А. А. Устойчивость классов решений дифференциальных соотношений, построенных с помощью выпуклых и квазияффинных функций // Тр. по геометрии и анализу. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2003. С. 275–288.
7. Egorov A. A. Stability of classes of solutions to partial differential relations constructed by quasiconvex functions and null Lagrangians // EQUADIFF 2003. Hackensack, NJ, World Sci. Publ., 2005. Р. 1065–1067.
8. Егоров А. А. Квазивыпуклые функции и нуль-лагранжианы в проблемах устойчивости классов отображений // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 796–812.
9. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 3. С. 515–531.

- 
10. Gehring F. W., Iwaniec T. The limit of mappings with finite distortion // Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. 1999. V. 24, N 1. P. 253–264.
  11. Yan B. On the weak limit of mappings with finite distortion // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128, N 11. P. 3335–3340.
  12. Morrey C. B. Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin etc.: Springer-Verl., 1966. (Grundlehren der Math. Wiss.; V. 130).
  13. Acerbi E., Fusco N. Semicontinuity problems in the calculus of variations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1984. V. 86. P. 125–145.

г. Новосибирск

30 сентября 2013 г.

О ФРЕДГОЛЬМОВОЙ РАЗРЕШИМОСТИ  
ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА  
ЧЕТНОГО ПОРЯДКА<sup>\*)</sup>

И. Е. Егоров

В работах [1–3] исследованы обобщенная и фредгольмова разрешимость краевых задач для уравнения смешанного типа второго порядка. Известно, что первые важные результаты по спектральной теории уравнений смешанного типа второго порядка получены в работах Т. Ш. Кальменова, Е. И. Моисеева, С. М. Пономарева и других математиков [4–6].

В данной работе обобщаются результаты работы [7] на случай первой краевой задачи для уравнения смешанного типа четного порядка, которая впервые поставлена и исследована А. Н. Тереховым [8] для уравнения смешанного типа второго порядка.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с кусочно-гладкой границей  $S$ ,  $S_T = S \times (0, T)$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$  для  $0 \leq t \leq T$ .

В цилиндрической области  $Q$  рассмотрим уравнение смешанного типа четного порядка

$$Lu = \sum_{i=1}^{2s} k_i(x, t) D_t^i u + Mu = f(x, t), \quad (1)$$

где

$$Mu = (-1)^m \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) + a_0(x)u,$$

---

<sup>\*)</sup> Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР за 2012–2014 гг. (проект № 4402).

$$D_t u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

$s \geq 2$  и  $m \geq 1$  — целые числа.

Для простоты будем считать, что коэффициенты уравнения (1) бесконечно дифференцируемы в  $\overline{Q}$  и выполнены условия

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta \geq \nu |\xi|^{2m}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \nu > 0.$$

Положим

$$P_0^\pm = \{(x, 0) : (-1)^{s-1} k_{2s}(x, 0) \geq 0, x \in \Omega\},$$

$$P_T^\pm = \{(x, T) : (-1)^{s-1} k_{2s}(x, T) \geq 0, x \in \Omega\}.$$

Через  $n = (n_1, \dots, n_n)$  обозначим вектор внутренней нормали к  $S$ .

**Первая краевая задача.** Найти решение уравнения (1) в области  $Q$  такое, что

$$\left. \frac{\partial^i u}{\partial n^i} \right|_{S_T} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad (2)$$

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, s-1}, \quad D_t^s u|_{\overline{P}_0^+} = 0,$$

$$D_t^j u|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{0, s-2}, \quad D_t^{s-1} u|_{\overline{P}_T^-} = 0. \quad (3)$$

В анизотропном пространстве Соболева  $W_2^{m,s}(Q)$  введем скалярное произведение

$$(u, v)_{m,s} = \int_Q \left[ \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u D^\alpha v + D_t^s u D_t^s v \right] dQ, \quad u, v \in W_2^{m,s}(Q),$$

причем  $\|u\|_{m,s}^2 = (u, u)_{m,s}$  и  $(u, v)_{0,0} = (u, v)$ ,  $\|u\|^2 = (u, u)$  для функций  $u, v$  из  $L_2(Q)$ .

Пусть  $C_L$  — класс функций из  $W_2^{2m,2s}(Q)$ , удовлетворяющих краевым условиям (2), (3),  $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$  — замыкание  $C_L$  по норме  $\|\cdot\|_{m,s}$ .

Пусть  $C_{L^*}$  — класс функций  $v(x, t)$  из  $W_2^{2m,2s}(Q)$ , удовлетворяющих краевым условиям (2) и

$$\begin{aligned} D_t^j v|_{t=0, t=T} &= 0, \quad j = \overline{0, s-2}, \\ D_t^{s-1} v|_{\overline{P}_0^-} &= 0, \quad D_t^{s-1} v|_{t=T} = 0, \quad D_t^s v|_{\overline{P}_T^+} = 0. \end{aligned} \quad (3^*)$$

Введем пространство  $\widehat{W}_2^{m,s}(Q)$  как замыкание  $C_{L^*}$  по норме  $\|\cdot\|_{m,s}$ . Обозначим через  $\widetilde{W}_2^{-m,-s}(Q)$  ( $\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$ ) пространство линейных непрерывных функционалов над гильбертовым пространством  $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$  ( $\widehat{W}_2^{m,s}(Q)$ ), причем  $L_2(Q)$  отождествляется с его сопряженным пространством.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Функция  $u(x, t) \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$  называется *обобщенным решением* первой краевой задачи (1)–(3), если выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} a(u, v) \equiv \int_Q & \left\{ (-1)^s k_{2s} D_t^s u D_t^s v + (-1)^{s-1} [k_{2s-1} - s k_{2st}] D_t^s u D_t^{s-1} v \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{s-2} b_{ij} D_t^i u D_t^j v + \sum_{|\alpha||\beta|=m} a_{\alpha\beta} D^\beta u D^\alpha v + a_0 uv \right\} dQ = \langle f, v \rangle \quad (4) \end{aligned}$$

для любой функции  $v \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ , где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — двойственное соотношение между  $\widetilde{W}_2^{-m,-s}(Q)$  и  $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ ,  $f \in \widetilde{W}_2^{-m,-s}(Q)$ .

В силу теоремы Рисса имеем

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \quad u \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q), \quad v \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q),$$

где  $A$  — линейный ограниченный оператор из  $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$  в  $\widetilde{W}_2^{-m,-s}(Q)$ . При этом справедливо равенство

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle, \quad u \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q), \quad v \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q), \quad (5)$$

а тождество (4) эквивалентно операторному уравнению  $Au = f$ . Пусть  $G(t, \tau)$  — функция Грина оператора  $ly = (-1)^{s-1}y^{2s-1} + y$  с краевыми условиями

$$y^{(i)}|_{t=T}^{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, s-2}; \quad y^{(s-1)}(0) = 0.$$

Обозначим через  $\widehat{H}_{m,s}(Q)$  пополнение  $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$  по норме

$$\|v\|_{\widehat{H}_{m,s}(Q)}^2 = \int_Q \left[ v^2 + \sum_{|\alpha|=m} \left( \int_0^T G(t, \tau) D^\alpha v d\tau \right)^2 + \left( \int_0^T G(t, \tau) v d\tau \right)^2 \right] dQ.$$

**Лемма 1.** Пусть коэффициент  $a_0(x) > 0$  достаточно большой, выполнено условие

$$(-1)^{s-1} [2k_{2s-1} - k_{2st}] \geq \delta > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q},$$

и имеет место

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(x, 0) \leq 0, \quad (-1)^{s-1}k_{2s}(x, T) \geq 0.$$

Тогда существует константа  $C_1 > 0$  такая, что справедливо неравенство

$$C_1 \|v\|_{\widehat{H}_{m,s}(Q)} \leq \|A^*v\|_{\widetilde{W}_2^{-m,-s}(Q)}$$

для всех функций  $v \in \widehat{W}_2^{m,s}(Q)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции  $v \in \widehat{W}_2^{m,s}(Q)$  положим

$$u(x, t) = \int_0^T G(t, \tau)v(x, \tau) d\tau.$$

Тогда нетрудно видеть, что функция  $u(x, t)$  принадлежит  $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ ,  $lu = v$  и имеет место

$$D^\alpha D_t^k u \in L_2(Q), \quad |\alpha| \leq m, \quad k = \overline{0, 2s-1}; \quad D_t^{3s-1} u \in L_2(Q).$$

Интегрируя по частям, получаем равенство

$$\begin{aligned} \langle u, A^*v \rangle &= \int_Q \left[ \frac{1}{2}(-1)^{s-1}(2k_{2s-1} - k_{2st})(D_t^{2s-1}u)^2 \right. \\ &\quad + \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta u + a_0 u^2 + D_t^{2s-1} u \sum_{k=0}^{2s-2} \alpha_k(x, t) D_t^k u \\ &\quad \left. + u \sum_{k=1}^{2s-2} \beta_k(x, t) D_t^k u \right] dQ + \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} \left[ \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} a_{\alpha\beta} D^\alpha D_t^{s-1} u D^\beta D_t^{s-1} u \right. \\ &\quad \left. + a_0 (D_t^{s-1} u)^2 \right] dx, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\alpha_k, \beta_k$  — гладкие функции в  $\overline{Q}$ . С другой стороны, на основании теоремы вложения имеем

$$\|D_t^j u\|^2 \leq \varepsilon \|u\|_{m,2s-1}^2 + C_\varepsilon \|u\|^2, \quad \varepsilon > 0, \quad j = \overline{0, 2s-2}.$$

Тогда в силу неравенств Гординга и Коши с малым параметром из (6) следует оценка

$$\langle u, A^*v \rangle \geq C_2 \|u\|_{m,2s-1}^2, \quad C_2 > 0,$$

откуда с учетом очевидных неравенств

$$\|u\|_{m,s} \leq C\|u\|_{m,2s-1}, \quad \|v\|_{\widehat{H}_{m,s}} \leq C\|u\|_{m,2s-1}, \quad C > 0,$$

получаем утверждение леммы 1.

Из леммы 1 непосредственно следует

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия леммы 1 и  $f$  принадлежит  $\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$ . Тогда операторное уравнение  $Au = f$  плотно разрешимо в  $(R(A) = \widehat{W}_2^{-m,-s}(Q))$ .

Пусть  $G^*(t, \tau)$  — функция Грина оператора  $l^*y \equiv (-1)^s y^{(2s-1)} + y$  с краевыми условиями

$$y^{(i)}|_{t=T}^{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, s-2}, \quad y^{(s-1)}(T) = 0.$$

Обозначим через  $\tilde{H}_{m,s}(Q)$  пополнение  $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$  по норме

$$\begin{aligned} \|u\|_{\tilde{H}_{m,s}} = \int_Q \left[ u^2 + \sum_{|\alpha|=m} \left( \int_0^T G^*(t, \tau) D^\alpha u d\tau \right)^2 \right. \\ \left. + \left( \int_0^T G^*(t, \tau) u d\tau \right)^2 \right] dQ. \end{aligned}$$

**Лемма 2.** Пусть коэффициент  $a_0(x) > 0$  достаточно большой, выполнено условие

$$(-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + (1 - 4s)k_{2st}] \geq \delta > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q},$$

и имеет место

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(x, 0) \geq 0, \quad (-1)^{s-1}k_{2s}(x, T) \leq 0.$$

Тогда существует константа  $C_3 > 0$  такая, что справедливо неравенство

$$C_3\|u\|_{\tilde{H}_{m,s}} \leq \|Au\|_{\widetilde{W}_2^{-m,-s}(Q)}$$

для всех функций  $u \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для любой функции  $u(x, t)$  из  $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$  положим

$$v(x, t) = \int_0^T G^*(t, \tau) u(x, \tau) d\tau,$$

при этом  $v \in \widehat{W}_2^{m,s}(Q)$ ,  $l^*v = u$  и имеет место

$$D^\alpha D_t^k v \in L_2(Q), \quad |\alpha| \leq m, \quad k = \overline{0, 2s-1}; \quad D_t^{3s-1} v \in L_2(Q).$$

Аналогично доказательству леммы 1 получаем равенство

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle &= \int_Q \left\{ \frac{1}{2} (-1)^{s-1} [2k_{2s-1} + (1-4s)k_{2st}] (D_t^{2s-1} v)^2 \right. \\ &\quad + \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} a_{\alpha\beta} D^\alpha v D^\beta v + a_0 v^2 + D_t^{2s-1} v \sum_{k=0}^{2s-2} \alpha_k^*(x, t) D_t^k v \\ &\quad \left. + v \sum_{k=1}^{2s-2} \beta_k^*(x, t) D_t^k v \right\} dQ + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left[ \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} a_{\alpha\beta} D^\alpha D_t^{s-1} v D^\beta D_t^{s-1} v \right. \\ &\quad \left. + a_0 (D_t^{s-1} v)^2 \right] dx. \quad (7) \end{aligned}$$

Из равенства (7), выбирая  $a_0(x) > 0$  достаточно большим, имеем

$$\langle Au, v \rangle \geq C_4 \|v\|_{m,2s-1}^2, \quad C_4 > 0.$$

Отсюда нетрудно получить справедливость оценки леммы 2.

Из леммы 2 непосредственно получаем

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда краевая задача (1)–(3) может иметь не более одного обобщенного решения из пространства  $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ .

Далее рассмотрим  $A$  как оператор из  $\widetilde{H}_{m,s}(Q)$  в  $\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$  с областью определения  $D(A) = \widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ . При этом  $D(A^*) \subseteq \widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ , а равенство (5) и априорная оценка леммы 1 справедливы для функций  $v$  из  $D(A^*)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $a_0(x) \geq 0$  и выполнены условия

$$(-1)^{s-1} [2k_{2s-1} - k_{2st}] \geq \delta > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q};$$

$$k_i(x, t) \equiv 0, \quad i = \overline{1, 2s-2};$$

$$(-1)^{s-1} k_{2s}(x, 0) \leq 0, \quad (-1)^{s-1} k_{2s}(x, T) \geq 0.$$

Тогда для первого положительного собственного значения оператора  $A^*$  имеет место оценка

$$\mu_1 \geq \frac{\delta}{2c_0 T}, \quad c_0 > 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть для некоторой функции  $v \in D(A^*)$  справедливо равенство

$$0 = \langle u, A^*v - \mu v \rangle, \quad u \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q), \quad \mu > 0.$$

В данном равенстве положим

$$u = \int_0^T G_0(t, \tau) v d\tau,$$

где  $G_0(t, \tau)$  — функция Грина оператора  $l_0 y = (-1)^{s-1} y^{2s-1}$  с краевыми условиями

$$y^{(i)}|_{t=T}^{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, s-2}; \quad y^{(s-1)}(0) = 0.$$

Интегрируя по частям, с учетом условий теоремы имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q \left[ \frac{(-1)^{s-1}}{2} (2k_{2s-1} - k_{2st}) v^2 - \mu uv \right] dQ \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} \left[ \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} a_{\alpha\beta} D^\alpha D_t^{s-1} u D_t^\beta D_t^{s-1} u + a_0 (D_t^{s-1} u)^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Справедлива оценка

$$|(u, v)| \leq C_0 T \|v\|^2, \quad C_0 = \max |G_0(t, \tau)|.$$

Теперь из равенства (8) в силу условий теоремы 3 получим неравенство

$$0 \geq \left( \frac{\delta}{2} - c_0 T \mu \right) \|v\|^2.$$

Отсюда следует, что уравнение  $A^*v - \mu v = 0$  имеет тривиальное решение при  $\mu < \frac{\delta}{2c_0 T}$ . Поэтому для  $\mu_1$  справедливо неравенство  $\mu_1 \geq \frac{\delta}{2c_0} T$ .

**Теорема 4.** Ограниченнное в  $\tilde{H}_{m,s}(Q)$  множество компактно в  $\widetilde{W}_2^{-m,-s}(Q)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из ограниченности множества  $M$  в  $\tilde{H}_{m,s}(Q)$  следует, что множество

$$M' = \left\{ \int_0^T G^*(t, \tau) u \, d\tau, \quad u \in M \right\}$$

ограничено в пространстве  $W_2^{m,2s-1}(Q)$ . Пусть  $u_m$  — произвольная последовательность из  $M$ . Положим

$$v_m = \int_0^T G^*(t, \tau) u_m \, d\tau.$$

Тогда в силу известных теорем вложения из  $\{v_m\}$  можно извлечь фундаментальную в  $W_2^{0,s-1}(Q)$  последовательность  $\{v'_m\}$ , для которой  $\{D_t^{s-1} v'_m(x, 0)\}$  также фундаментальна в  $L_2(\Omega)$ . Теперь утверждение теоремы следует из оценки

$$\begin{aligned} \|u'_m - u'_k\|_{\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)} &\leq C_5 [\|D_t^{s-1} v'_m - D_t^{s-1} v'_k\| + \|v'_m - v'_k\| \\ &\quad + \|D_t^{s-1} v'_m(x, 0) - D_t^{s-1} v'_k(x, 0)\|_{L_2(\Omega)}], \quad C_5 > 0. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Аналогично доказывается, что вложение  $\widehat{H}_{m,s}(Q)$  в  $\widetilde{W}_2^{-m,-s}(Q)$  вполне непрерывно.

**Лемма 3.** Оператор  $A$  допускает замыкание  $\overline{A}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $u_k$  принадлежит  $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$  и  $u_k \rightarrow 0$  в норме  $\widetilde{H}_{m,s}(Q)$ ,  $Au_k \rightarrow w$  в пространстве  $\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Заметим, что  $u_k \rightarrow 0$  в пространстве  $L_2(Q)$ .

Для любой функции  $v \in C_{L^*}$  имеем

$$\langle Au_k, v \rangle = a(u_k, v) = (u_k, L^* v) \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $\langle w, v \rangle = 0$ ,  $v \in C_{L^*}$ . Из плотности  $C_{L^*}$  в  $\widehat{W}_2^{m,s}(Q)$  получаем, что  $w = 0$ , т. е. оператор  $A$  допускает замыкание.

Пусть выполнены условия лемм 1 и 2. Тогда из равенства  $R(\overline{A}) = \widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$  следует, что уравнение  $\overline{A}u = f$  везде разрешимо и  $(\overline{A})^{-1}$  — ограниченный оператор из  $\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$  в  $\widetilde{H}_{m,s}(Q)$

Рассмотрим операторное уравнение

$$\bar{A}u - \lambda u = f, \quad f \in \widehat{W}_2^{-m,-s}(Q). \quad (9)$$

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия

$$(-1)^{s-1}[2k_{2s-1} - k_{2st}] \geq \delta > 0, \quad (-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + (1-4s)k_{2st}] \geq \delta > 0$$

и имеет место

$$k_{2s}(x, 0) = 0, \quad k_{2s}(x, T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Тогда уравнение (9) фредгольмово в пространстве  $\tilde{H}_{m,s}(Q)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сначала найдется достаточно большое число  $\lambda_0 > 0$  такое, что для  $L + \lambda_0$  выполняются все условия лемм 1 и 2. При этом оператор  $(\bar{A} + \lambda_0)^{-1}$  ограничен. Теперь фредгольмость уравнения (9) следует из того, что оно эквивалентно операторному уравнению

$$u = (\lambda + \lambda_0)(\bar{A} + \lambda_0)^{-1}u + (\bar{A} + \lambda_0)^{-1}f$$

в пространстве  $\tilde{H}_{m,s}(Q)$  с вполне непрерывным оператором.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов В. П. Об обобщенной задаче Трикоми // Тр. МИАН. 1968. Т. 103. С. 142–161.
2. Каратопраклиев Г. Д. О некоторых краевых задачах для уравнения смешанного типа в многомерных областях // Докл. Болг. акад. наук. 1970. Т. 23, № 10. С. 1183–1186.
3. Диценко В. П. Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми // Укр. мат. журн. 1973. Т. 25, № 1. С. 14–19.
4. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
5. Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990.
6. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент: Mumtoz SO'Z, 2010.
7. Егоров И. Е. О фредгольмовой разрешимости одной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 55–64.
8. Терехов А. Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979. С. 128–136.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ  
ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
МОДЕЛИ БЕННИ — ЛЮКА

А. А. Замышляева

**Введение**

В цилиндре  $[0, l] \times \mathbb{R}$  рассмотрим линеаризованное уравнение Бенни — Люка

$$u_{tt} - u_{xx} + au_{xxxx} - bu_{xxtt} = 0, \quad (0.1)$$

с начальным условием Коши

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (0.2)$$

и краевыми условиями Бенара

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0. \quad (0.3)$$

Математическая модель (0.1)–(0.3) описывает двустороннее распространение длинных волн на мелкой воде с учетом поверхностного натяжения [1]. Параметры  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = \sigma - 1/3$ , где  $\sigma$  — число Бонда, учитывающее поверхностное натяжение и гравитационные силы. В [2] изучено распространение длинных волн малой амплитуды. Показано, что при наличии поверхностного натяжения распространение таких волн описывается уравнением (0.1), которое впервые получено в [3]. Задача (0.1)–(0.3) в невырожденном случае исследована в [4–6]. В общем случае данную математическую модель удается редуцировать к задаче Коши

$$u(0) = u_0, \dots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1} \quad (0.4)$$

для уравнения соболевского типа высокого порядка [7]

$$Lu^{(n)} = Mu \quad (0.5)$$

и исследовать с помощью методов теории относительно  $p$ -секториальных операторов.

В п. 1 методы и идеи теории относительно  $p$ -секториальных операторов [7] распространяются на случай уравнения соболевского типа высокого порядка [8], в п. 2 получены достаточные условия однозначной разрешимости абстрактной задачи Коши. П. 3 содержит основные результаты об аналитическом исследовании математической модели Бенни — Люка как начально-краевой задачи (0.1)–(0.3).

### 1. Относительно $(n, p)$ -секториальные операторы

Пусть  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  — банаховы пространства,  $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  — операторы. Построим множества

$$\sigma_n^L(M) = \{\mu^n : \mu \in \sigma^L(M)\}, \quad \rho_n^L(M) = \mathbb{C} \setminus \sigma_n^L(M).$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** Оператор  $M$  назовем  $(n, p)$ -секториальным относительно оператора  $L$ , или  $(L, n, p)$ -секториальным, если существуют константы  $K > 0$  и  $\theta \in (\pi/2, \pi)$  такие, что

$$S_{\theta, n}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu^n)| < \theta, \mu \neq 0\} \subset \rho_n^L(M), \quad (1.1)$$

при этом

$$\max \left\{ \|R_{(\mu^n, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_{(\mu^n, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \right\} \leq \frac{K}{\prod_{k=0}^p |\mu_k^n|} \quad (1.2)$$

для всех  $\mu_k \in S_{\theta, n}^L(M)$ ,  $k = \overline{0, p}$ .

**Лемма 1.1** [7]. Пусть оператор  $M$   $(L, n, p)$ -секториален. Тогда длины всех цепочек  $M$ -присоединенных векторов ограничены числом  $p$ .

Возьмем  $\alpha \in \rho^L(M)$  и редуцируем уравнение (0.5) к паре эквивалентных ему уравнений

$$R_\alpha^L(M)u^{(n)} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \quad (1.3)$$

$$L_\alpha^L(M)f^{(n)} = M(\alpha L - M)^{-1}f. \quad (1.4)$$

Операторы в правых частях (1.3), (1.4) можно отождествить с непрерывными операторами, определенными на пространствах  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  соответственно. Поэтому уравнения (1.3), (1.4) удобно рассматривать как конкретные интерпретации уравнения

$$Av^{(n)} = Bv, \quad (1.5)$$

определенного на банаховом пространстве  $\mathfrak{V}$ , где  $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$ . Вектор-функцию  $v \in C^n(\mathbb{R}_+; \mathfrak{V})$ , удовлетворяющую уравнению (1.5), будем называть *решением* этого уравнения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.** Оператор-функцию  $V^t \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathfrak{V}))$  будем называть *пропагатором* уравнения (1.5), если для любого  $v \in \mathfrak{V}$  вектор-функция  $v(t) = V^t v$  будет решением этого уравнения.

**Лемма 1.2.** Пусть оператор  $M$   $(L, n, p)$ -секториален. Тогда интегралы типа Данфорда — Шварца

$$U_m^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu^{n-m-1} (\mu^n L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu, \quad (1.6)$$

$$F_m^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu^{n-m-1} L (\mu^n L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \quad (1.7)$$

где  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $m = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $\gamma \subset \rho_n^L(M)$  — контур, образованный лучами, выходящими из начала координат под углами  $\theta$  и  $-\theta$ , определяют пропагаторы однородных уравнений (1.3) и (1.4) соответственно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем для  $U_m^t$ . Имеем

$$\|U_m^t\| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} |\mu|^{n-m-1} P(|\mu^n|) |e^{\mu t}| |\mu| d\mu$$

Так как  $|e^{\mu t}| = e^{\operatorname{Re}(\mu t)}$ , а  $|\arg(\mu t)| = |\arg \mu + \arg t| \geq |\arg \mu| - |\arg t| = \Theta > \frac{\pi}{2}$  при  $\Theta \in (\pi/2, \pi)$ ,  $\mu t$  лежит в левой полуплоскости и  $\operatorname{Re}(\mu t) < 0$ , а интеграл  $U_m^t$  сходится при  $t > 0$ . Непосредственной подстановкой можно убедиться, что для любого  $u \in \mathfrak{U}$  вектор-функции  $u(t) = U_m^t u$  и  $f(t) = F_m^t f$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$  будут решениями уравнений (1.3) и (1.4) соответственно.

Положим

$$\mathfrak{U}^0 = \bigcap_{m=0}^{n-1} \ker U_m = \bigcap_{m=0}^{n-1} \{\varphi \in \mathfrak{U} : U_0^t \varphi = 0 \exists t \in \mathbb{R}_+\},$$

$$\mathfrak{F}^0 = \bigcap_{m=0}^{n-1} \ker F_m = \bigcap_{m=0}^{n-1} \{\psi \in \mathfrak{F} : F_0^t \psi = 0 \exists t \in \mathbb{R}\}_+$$

и через  $L_0$  ( $M_0$ ) обозначим сужение оператора  $L$  ( $M$ ) на  $\mathfrak{U}^0$  ( $\mathfrak{U}^0 \cap \text{dom } M$ ).

**Следствие 1.1.** В условиях леммы 1.1  $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$ ,  $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$ , при этом существует оператор  $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $u_0 \in \mathfrak{U}^0$ . Тогда в силу (1.6), (1.7)

$$F_0^t L_0 u_0 = F_0^t L u_0 = L U_0^t u_0 = 0.$$

Пусть  $u_0 \in \text{dom } M \cap \mathfrak{U}^0$ . Тогда

$$F_0^t M_0 u_0 = F_0^t M u_0 = M U_0^t u_0 = 0,$$

так как операторы  $L$  и  $M$  коммутируют через резольвенту. Покажем, что существует оператор  $(\lambda^n L_0 - M_0)^{-1}$ . Пусть  $u_0 \in \mathfrak{U}^0$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\mu^n L - M)^{-1}}{\lambda - \mu} e^{\mu t} d\mu (\lambda^n L_0 - M_0) u_0 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mathbb{I} + (\lambda^n - \mu^n)(\mu^n L - M)^{-1} L}{\lambda - \mu} u_0 d\mu \\ &= -e^{\lambda t} u_0 + \lambda^{n-1} U_{n-1}^t u_0 + \lambda^{n-2} U_{n-2}^t u_0 + \cdots + U_0^t u_0 = -e^{\lambda t} u_0. \end{aligned}$$

Аналогично для  $f_0 \in \mathfrak{F}^0$  имеем

$$(\lambda^n L_0 - M_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\mu^n L - M)^{-1}}{\lambda - \mu} e^{\mu t} d\mu f_0 = -e^{\lambda t} f_0.$$

Значит, при любом  $\lambda \in \mathbb{C}$  оператор  $(\lambda^n L_0 - M_0)^{-1}$  равен сужению оператора

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\mu^n L - M)^{-1}}{\lambda - \mu} e^{(\mu - \lambda)t} d\mu \quad (1.8)$$

на  $\mathfrak{F}^0$ . Оператор  $M_0^{-1}$  равен сужению оператора (1.8) на  $\mathfrak{F}^0$  при  $\lambda = 0$ .

Положим

$$\mathfrak{U}^1 = \text{im } U_0 = \left\{ u \in \mathfrak{U} : \lim_{t \rightarrow 0+} U_0^t u = u \right\},$$

$$\mathfrak{F}^1 = \text{im } F_0 = \left\{ f \in \mathfrak{F} : \lim_{t \rightarrow 0+} F_0^t f = f \right\}$$

и через  $L_1$  и  $M_1$  обозначим сужения операторов  $L$  и  $M$  на  $\mathfrak{U}^1$  и  $\mathfrak{U}^1 \cap \text{dom } M$  соответственно.

**Следствие 1.2.** В условиях леммы 1.1  $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$ ,  $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству следствия 1.1.

Очевидно, что  $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 \subset \mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 \subset \mathfrak{F}$ . В дальнейшем нам потребуются две гипотезы:

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}(\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}), \quad (1.9)$$

$$\text{существует оператор } L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1). \quad (1.10)$$

Гипотеза (1.9) имеет место, например, в случае рефлексивности пространства  $\mathfrak{U}$  ( $\mathfrak{F}$ ) (теорема Яги – Федорова). Гипотеза (1.10) справедлива, если выполнено (1.9) и  $\text{im } L_1 = \mathfrak{F}^1$  (теорема Банаха). Заметим еще, что из (1.9) вытекает существование проекторов  $P = s\text{-} \lim_{t \rightarrow 0+} U_0^t$  и  $Q = s\text{-} \lim_{t \rightarrow 0+} F_0^t$  в пространствах  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  соответственно.

**Следствие 1.3.** Пусть оператор  $M$  ( $L, n, p$ )-секториален и выполнены условия (1.9), (1.10). Тогда оператор  $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$  нильпотентен степени  $p$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $\varphi \in \mathfrak{U}^0$ , то  $\varphi$  является собственным или  $M$ -присоединенным высоты  $q \leq p$  вектором оператора  $L$ . Поэтому  $H^{q+1}\varphi = 0$  в силу определения относительно присоединенного вектора. Значит,  $H^{p+1} = \mathbb{O}$ .

## 2. Абстрактная задача Коши

Теперь все готово для доказательства однозначной разрешимости задачи Коши

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u^{(m)}(t) = u_m, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.1)$$

для уравнения (0.5), которое в силу  $(L, n, p)$ -секториальности оператора  $M$  и условий (1.9), (1.10) редуцируется к виду

$$H(u^0)^{(n)} = u^0 + M_0^{-1}f^0, \quad (2.2)$$

$$(u^1)^{(n)} = Su^1 + L_{in}^{-1}f^1, \quad (2.3)$$

где  $f^0 = (\mathbb{I} - Q)f$ ,  $f^1 = Qf$ ,  $u^0 = (\mathbb{I} - P)u$ ,  $u^1 = Pu$ .

**Лемма 2.1.** Пусть оператор  $M$   $(L, n, p)$ -секториален и выполнены условия (1.9), (1.10). Тогда для любой вектор-функции

$$f^0 \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathfrak{F}^0)$$

существует единственное решение уравнения (2.2), которое имеет вид

$$u^0(t) = - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} f^{0(nq)}(t).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Подстановкой вектор-функции  $u^0 = u^0(t)$  в (2.2) убеждаемся в существовании решения. Единственность получается последовательным дифференцированием однородного уравнения  $0 = H^p u^{0(np)} = \dots = H u^{0(n)} = u^0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** Из леммы 2.1 непосредственно следует, что начальные значения  $u_k$  с необходимостью должны принадлежать множествам

$$\mathcal{M}_f^k = \left\{ u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - P)u = - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} f^{0(nq+k)}(0) \right\}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

**Лемма 2.2.** В условиях леммы 2.1 для любых  $u_m \in \mathfrak{U}^1$ ,  $m = 0, \dots, n-1$ , и  $f^1 \in C([0, T]; \mathfrak{F}^1)$  существует единственное решение задачи Коши (2.1) для уравнения (2.3), которое имеет вид

$$u^1(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} f^1(s) ds.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как  $U_m^t$  — пропагаторы уравнения, непосредственной подстановкой убеждаемся, что вектор-функция  $u^1 = u^1(t)$

является решением данной задачи. Пусть  $v = v(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — другое решение этой задачи. Тогда вектор-функция  $v(t) - u(t)$  должна быть решением однородной задачи Коши для однородного уравнения. Очевидно, что  $v(t) - u(t) \equiv 0$ .

Итак, доказана

**Теорема 2.1.** Пусть оператор  $M$   $(L, n, p)$ -секториален и выполнены условия (1.9), (1.10). Тогда для любых  $u_k \in \mathcal{M}_f^k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , и вектор-функции  $f = f(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , удовлетворяющей условиям лемм 2.1 и 2.2, существует единственное решение задачи (0.5), (2.1), которое имеет вид  $u(t) = u^0(t) + u^1(t)$ .

### 3. Математическая модель Бенни — Люка

Вернемся к математической модели (0.1)–(0.3).

Положим  $\mathfrak{U} = \{v \in W_2^2(0, l) : v(0, t) = v(l, t) = 0\}$ ,  $\mathfrak{F} = L_2(\Omega)$ , операторы  $L$  и  $M$  зададим формулами

$$L = \mathbb{I} - b \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a \frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

$\text{dom } M = \{v \in W_2^4(0, l) : v(0, t) = v_{xx}(0, t) = v(l, t) = v_{xx}(l, t) = 0\}$ . Очевидно, что  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ , а  $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ .

**Лемма 3.1.** При любых  $a, b \in \mathbb{R}$  оператор  $M$   $(L, 2, 0)$ -секториален.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Введем в рассмотрение собственные функции однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , определенного в области  $\Omega = [0, l]$ . Обозначим через  $\varphi_k = \sin \frac{\pi kx}{l}$  собственные функции, соответствующие собственным значениям  $\lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$ .

$L$ -спектр оператора  $M$  имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{\lambda_k - a\lambda_k^2}{1 - b\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = \lambda\} \right\}.$$

Поскольку  $\lambda_k \sim -k^2$  при  $k \rightarrow \infty$ , во-первых, существует сектор требуемого раствора, содержащий  $\sigma^L(M)$ , значит,

$$S_{\theta, 2}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu^2)| < \theta, \mu \neq 0\} \subset \rho_2^L(M).$$

Во-вторых, при достаточных больших  $|\mu|$ , лежащих вне этого множества, имеем

$$\max\{\|R_{\mu^2}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_{\mu^2}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \leq \text{const } |\mu|^{-2}, \quad \mu \in S_{\theta,2}^L(M).$$

Следовательно, оператор  $M$   $(L, 2, 0)$ -секториален. Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** *При любых  $a, b \in \mathbb{R}$  выполнены условия (1.9), (1.10).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку пространства  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  рефлексивны, в силу леммы 3.1 и теоремы Яги — Федорова условия (1.9) выполняются, при этом

- (i)  $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{F}^0 = \{0\}$ ,  $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}$ , если  $1 - b\lambda_k \neq 0$ ;
- (ii)  $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{F}^0 = \ker L = \text{span} \text{col}(\varphi_j, 0)$ ,  $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_j \rangle = 0\}$ ,  $\mathfrak{F}^1 = \{f \in \mathfrak{F} : \langle f, \varphi_j \rangle = 0\} = \text{im } L$ , если  $1 - b\lambda_j = 0$ .

Условие (1.10) тоже выполняется, причем оператор  $L_1^{-1}$  можно представить в виде

$$L_1^{-1} = \sum_k' \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(1 - b\lambda_k)}$$

Штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых, для которых  $1 - b\lambda_l = 0$ . Лемма доказана.

**Теорема 3.1.** *При любых  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ ,  $u_k \in \mathfrak{U}^1$  существует единственное решение задачи (0.1)–(0.3).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как уравнение (0.1) однородно, при  $u_k \in \mathfrak{U}^1$  выполнены все условия теоремы 2.1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Quintero J. R., Munoz Grajales J. C. Instability of solitary waves for a generalized Benney–Luke equation // Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl. 2008. V. 68, N 10. P. 3009–3033.
2. Pego R. L., Quintero J. R. Two-dimensional solitary waves for a Benney–Luke equation // Physica D. 1999. V. 132, N 4. P. 476–496.
3. Benney D. J., Luke J. C. On the interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys. 1964. V. 43. P. 309–313.
4. Gonzalez N. A. The Cauchy problem for Benney–Luke and generalized Benney–Luke equations // Differ. Integral Equations. 2007. V. 20, N 12. P. 1341–1362.
5. Quintero J. R. A remark on the Cauchy problem for the generalized Benney–Luke equation // Differ. Integral Equations. 2008. V. 21, N 9–10. P. 859–890.

- 
6. Wang S., Xu G., Chen G. Cauchy problem for the generalized Benney–Luke equation // J. Math. Phys. 2007. V. 48, N 7. Article ID 073521.
  7. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semi-groups of operators. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
  8. Замышляева А. А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка. Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.

г. Челябинск

*27 сентября 2013 г.*

СТРОЕНИЕ ОКРЕСТНОСТЕЙ 5-ВЕРШИН  
В ПЛОСКИХ ТРИАНГУЛЯЦИЯХ  
С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 5<sup>\*)</sup>

А. О. Иванова, Д. В. Никифоров

1. Введение

Интерес к строению плоских графов с минимальной степенью 5 частично объясняется их ролью в решении известной проблемы четырех красок. Важной вехой на этом пути была таблица Лебега [1, с. 36], дающая приблизительное описание окрестностей вершин степени 5 в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5. Для решения проблемы четырех красок Аппелю и Хакену в 1976 г. [2] потребовалось изучить строение окрестностей второго порядка вершин степени 5, т. е. шаров радиуса 2 с центрами в 5-вершинах, тогда как таблица Лебега дает описание окрестностей первого порядка.

Как доказано Штейницем [3], конечные 3-связные плоские графы взаимно однозначно отвечают конечным выпуклым трехмерным многогранникам, называемым 3-многогранниками. Поэтому, изучая строение плоских графов, мы исследуем, в частности, комбинаторное строение 3-многогранников. Под графом понимаем неориентированный граф без петель и кратных ребер.

Степень  $d(v)$  вершины  $v$  в плоском графе  $G$  есть число инцидентных ей ребер,  $k$ -вершина — вершина степени  $k$ ,  $k^-$ -вершина — вершина степени не более  $k$ , а  $k^+$ -вершина — вершина степени не менее  $k$ .

---

<sup>\*)</sup> Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12-01-98510, 12-01-00631 и 12-01-00448).

В 1904 г. Вернике [4] доказал, что в любом плоском графе с минимальной степенью 5 существует 5-вершина, смежная с 6<sup>-</sup>-вершиной. В 1922 г. Франклун усилил это утверждение, доказав в [5], что любой плоский граф с минимальной степенью 5 содержит 5-вершину, смежную с двумя 6<sup>-</sup>-вершинами.

Обозначим через  $v_1, \dots, v_{d(v)}$  соседей вершины  $v$  в циклическом порядке вокруг  $v$ . Будем говорить, что 5-вершина  $v$  имеет тип  $(d_1, \dots, d_5)$ , если  $d(v_i) \leq d_i$ . Если порядок соседей в типе не важен, то над соответствующими степенями ставится черта. Следующее описание окрестностей 5-вершин в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5, обозначаемых далее через  $T_5$ , дано Лебегом [1, с. 36] в 1940 г. и включает результаты Вернике и Франкллина.

**Теорема 1.** В любой плоской триангуляции с минимальной степенью 5 существует 5-вершина одного из следующих типов:

$$\begin{aligned} & (\overline{6, 6, 7, 7, 7}), (\overline{6, 6, 6, 7, 9}), (\overline{6, 6, 6, 6, 11}), \\ & (\overline{5, 6, 7, 7, 8}), (5, 6, \overline{6, 7}, 11), (5, 6, \overline{6, 8}, 8), \\ & (5, 6, \overline{6, 9}, 7), (5, 7, 6, 6, 12), (5, 8, 6, 6, 10), (5, 6, 6, 6, 17), \\ & (5, 5, \overline{7, 7, 8}), (5, 13, 5, 7, 7), (5, 10, 5, 7, 8), (5, 8, 5, 7, 9), \\ & (5, 7, 5, 7, 10), (5, 7, 5, 8, 8), (5, 5, 7, 6, 12), (5, 5, 8, 6, 10), \\ & (5, 6, 5, 7, 12), (5, 6, 5, 8, 10), (5, 17, 5, 6, 7), (5, 11, 5, 6, 8), \\ & (5, 11, 5, 6, 9), (5, 7, 5, 6, 13), (5, 8, 5, 6, 11), (5, 9, 5, 6, 10), (5, 6, 6, 5, \infty), \\ & (5, 5, 7, 5, 41), (5, 5, 8, 5, 23), (5, 5, 9, 5, 17), (5, 5, 10, 5, 14), (5, 5, 11, 5, 13). \end{aligned}$$

*Нормальной плоской картой* называется плоский псевдограф, в котором разрешены петли и кратные ребра, но каждая вершина и каждая грань имеют степень не менее 3 (степенью грани считается количество инцидентных ей ребер);  $M_5$  — нормальная плоская карта с минимальной степенью 5. *Весом*  $w_{T_5}(H)$  ( $w_{M_5}(H)$ ) подграфа  $H$  карты  $T_5$  ( $M_5$ ) назовем минимальную сумму степеней вершин подграфа  $H$  в карте  $T_5$  ( $M_5$ ). Через  $w_M(H)$  ( $w_T(H)$ ) обозначим максимум  $w_{M_5}(H)$  ( $w_{T_5}(H)$ ) по всем  $M_5$  (по всем  $T_5$ ). Цикл на  $k$  вершинах обозначим через  $C_k$ , а  $k$ -звезды с центром в 5-вершине — через  $S_k$ .

В 1963 г. Коциг [6] вывел из теоремы Лебега [1, с. 36], что  $w_T(C_3) \leq 18$ , и предположил, что  $w_T(C_3) \leq 17$ . Конструкция, получающаяся из додекаэдра добавлением в каждую грань 5-вершины, соединенной с инцидентными этой грани вершинами додекаэдра, показывает точность оценки. В 1989 г. О. В. Бородин [7], не используя теорему Лебега, доказал гипотезу Коцига.

Оценки Вернике  $w_M(S_1) \leq 11$  [4] и Франклина  $w_M(S_2) \leq 17$  [5] точны. В [1] доказано, что  $w_M(S_3) \leq 24$  и  $w_M(S_4) \leq 31$ . Позднее эти два результата были улучшены до точных оценок:  $w_M(S_3) \leq 23$  [8] и  $w_M(S_4) \leq 30$  [9]. Заметим, что неравенство  $w_M(S_3) \leq 23$  легко влечет оценку  $w_M(S_2) \leq 17$  и немедленно следует из того, что  $w_M(S_4) \leq 30$  (достаточно удалить вершину максимальной степени из звезды минимального веса).

Из теоремы Лебега [1, с. 36] также следует, что  $w_T(C_4) \leq 26$  и  $w_T(C_5) \leq 31$ . В 1998 г. О. В. Бородин и Вудал [9] доказали, что  $w_T(C_4) = 25$  и  $w_T(C_5) = 30$ , причем обе оценки точны.

Таблица Лебега (см. теорему 1) в качестве следствий дает различные факты о строении плоских графов с минимальной степенью 5, допускающие улучшения (примеры см. выше). Несколько таких следствий доведено до неулучшаемых результатов, но на это потребовалось десятки лет и новые идеи. В целом же нам неизвестны улучшения ни одного из параметров этой таблицы, не ухудшающие остальных ее параметров.

В [1] Лебег не дает доказательства теоремы 1, а лишь указывает его идею. Кроме того, нами были замечены явные неточности (или опечатки) в теореме 1. В связи с этим мы решили дать независимое доказательство теоремы 1 и исправить эти ошибки (или опечатки). А именно, наше доказательство выявило следующие неточности в теореме 1:

- (1) в типе  $(5, 11, 5, 6, 8)$  вместо 11 должно быть 15;
- (2) в типе  $(5, 17, 5, 6, 7)$  вместо 17 должно быть 27;
- (3) в типе  $(\overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, 11)$  излишней является черта;
- (4) вместо типа  $(\overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{7}, \overline{8})$  должны быть  $(5, 8, \overline{6}, \overline{7}, \overline{7})$  и  $(5, 7, 6, 8, 7)$ ;
- (5) тип  $(5, 6, \overline{6}, 9, 7)$  является излишним;
- (6) вместо  $(5, 5, \overline{7}, \overline{7}, \overline{8})$  достаточно писать  $(5, 5, 7, \overline{7}, \overline{8})$ .

Далее мы поставили перед собой задачу с помощью дополнитель-

ных соображений усилить полученный нами исправленный вариант теоремы 1 и смогли заменить параметр 41 в типе  $(5, 5, 7, 5, 41)$  на 40. А именно доказана следующая

**Теорема 2.** В любой плоской триангуляции с минимальной степенью 5 существует 5-вершина одного из следующих типов:

$$\begin{aligned}
 & (6, 6, 7, 7, 7), (6, 6, 6, 7, 9), (6, 6, 6, 6, 11), \\
 & (5, 8, \overline{6, 7, 7}), (5, 7, 6, 8, 7), (5, 6, \overline{6, 7}, 11), (5, 6, \overline{6, 8}, 8), \\
 & (5, 7, 6, 6, 12), (5, 8, 6, 6, 10), (5, 6, 6, 6, 17), \\
 & (5, 5, 7, \overline{7, 8}), (5, 13, 5, 7, 7), (5, 10, 5, 7, 8), (5, 8, 5, 7, 9), \\
 & (5, 7, 5, 7, 10), (5, 7, 5, 8, 8), (5, 5, 7, 6, 12), (5, 5, 8, 6, 10), \\
 & (5, 6, 5, 7, 12), (5, 6, 5, 8, 10), (5, 27, 5, 6, 7), (5, 15, 5, 6, 8), \\
 & (5, 11, 5, 6, 9), (5, 7, 5, 6, 13), (5, 8, 5, 6, 11), (5, 9, 5, 6, 10), (5, 6, 6, 5, \infty), \\
 & (5, 5, 7, 5, 40), (5, 5, 8, 5, 23), (5, 5, 9, 5, 17), (5, 5, 10, 5, 14), (5, 5, 11, 5, 13).
 \end{aligned}$$

## 2. Доказательство теоремы 2

Пусть  $G$  — контрпример к теореме 2, т. е.  $G$  — плоская триангуляция с минимальной степенью 5, в которой нет ни одного из типов, указанных в теореме 2. Через  $V(G)$ ,  $E(G)$  и  $F(G)$  обозначим множества вершин, ребер и граней графа  $G$  соответственно.

Формулу Эйлера  $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$  перепишем в виде

$$(2|E(G)| - 6|V(G)|) + (4|E(G)| - 6|F(G)|) = -12.$$

Отсюда

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2r(f) - 6) < 0, \quad (1)$$

где  $d(v)$  — степень вершины  $v$ , а  $r(f)$  — ранг грани  $f$ .

Начальный заряд  $\mu(v)$  каждой вершины  $v \in V(G)$  положим равным  $d(v) - 6$ , а заряд каждой грани  $f$  графа  $G$  равен  $2r(f) - 6 = 0$ . Из (1) имеем

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) < 0. \quad (2)$$

Заметим, что заряд 5-вершины равен  $-1$ , заряд 6-вершины равен  $0$ , а заряды всех остальных вершин положительны. Перераспределим заряды вершин так, чтобы новый заряд  $\mu^*(v)$  каждой вершины  $v$  стал неотрицательным. Поскольку сумма зарядов вершин при перераспределении сохраняется, получим противоречие с (2), что и завершит доказательство теоремы.

Будем использовать следующие правила перераспределения зарядов.

**R1.** Каждая вершина  $v$  степени  $\geq 7$  отдает в грань заряд  $\xi(v) = \frac{d(v)-6}{d(v)}$ .

**R2.** Пусть  $T = xyz$ , где  $d(x) = 5$ , тогда  $x$  получает от грани  $T$ :

- (a)  $\xi(y) + \xi(z)$ , если  $d(y) \geq 6$  и  $d(z) \geq 6$ ,
- (b)  $\xi(y)/2$ , если  $d(y) \geq 6$ ,  $d(z) = 5$ .

**2.1. Проверка того, что  $\mu^*(v) \geq 0$  для всех  $v \in V(G)$ .** Будем говорить, что тип  $(d_1, \dots, d_5)$  поглощается типом  $(d'_1, \dots, d'_5)$ , если  $d_i \leq d'_i$  для всех  $1 \leq i \leq 5$ .

Далее рассматриваем варианты окрестности 5-вершины  $v$  по числу смежных с ней 5-вершин. Имеем пять вариантов: (1) нет 5-вершин; (2) одна 5-вершина; (3) две 5-вершины; (4) три 5-вершины и (5) четыре 5-вершины.

Случай 1. Нет 5-вершин.

Заметим, что порядок вершин вокруг  $v$  в данном случае не имеет значения. Если в окрестности  $v$  имеется не менее четырех вершин степени  $\geq 7$ , то по нашим правилам  $\mu^*(v) \geq -1 + 8 \times \frac{1}{7} > 0$ . Пусть в окрестности  $v$  не более трех  $7^+$ -вершин.

Подслучай 1.1. Три  $7^+$ -вершины. Если существует хотя бы одна вершина степени  $\geq 8$ , то вершина  $v$  получает не менее  $4 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{1}{4} > 1$ , т. е.  $\mu^*(v) > 0$ . Если все три вершины имеют степень 7, то  $\mu^*(v) = -1 + 6 \times \frac{1}{7} < 0$ , но типа  $(\overline{6, 6, 7, 7, 7})$  нет в контрпримере, поскольку он присутствует в формулировке теоремы 2.

Подслучай 1.2. Две  $7^+$ -вершины (т. е.  $v$  имеет тип  $(\overline{6, 6, 6, x, y})$ , где  $x \geq 7$  и  $y \geq 7$ ). Если  $x \geq 8$  и  $y \geq 8$ , то  $\mu^*(v) \geq -1 + 4 \times \frac{1}{4} = 0$ . Если хотя бы одна из степеней  $x, y$  не менее 10, то  $\mu^*(v) \geq -1 + 2 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{2}{5} > 0$ .

Пусть  $x = 7$ , а  $y \leq 9$ , тогда  $\mu^*(v) \leq -1 + 2 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{1}{3} < 0$ , но типа  $(\overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, 7, 9)$  нет в контрпримере.

**Подслучай 1.3.** Одна  $7^+$ -вершина  $x$ . Вершина  $v$  получает заряд  $2 \times \frac{x-6}{x}$ , что не меньше 1 при  $x \geq 12$ . При  $x \leq 11$  получаем тип  $(\overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, 6, 11)$ , отсутствующий в контрпримере.

**Случай 2.** Одна 5-вершина.

Если в окрестности  $v$  имеется четыре  $7^+$ -вершины, то

$$\mu^*(u) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} + 4 \times \frac{1}{7} = 0.$$

Пусть в окрестности  $v$  не более трех  $7^+$ -вершин.

**Подслучай 2.1.** Три  $7^+$ -вершины. Вершина  $v$  имеет тип (1)  $(5, x, \overline{6}, y, z)$  или (2)  $(5, 6, \overline{x}, \overline{y}, z)$  (рис. 1).

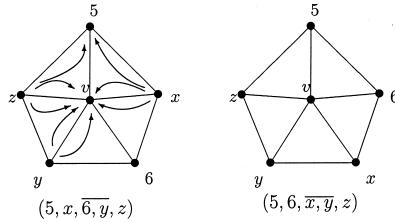


Рис. 1. Подслучай 2.1 случая 2.

(1) Пусть  $v$  типа  $(5, x, \overline{6}, y, z)$ . Если  $x \geq 9$  или  $z \geq 9$ , то  $v$  получает не менее  $\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} = 1$ . Пусть  $7 \leq x \leq 8$  и  $7 \leq z \leq 8$ . Ввиду симметрии между  $x$  и  $z$  будем считать, что  $x \leq z$ . Если  $x = 8$ , то  $\mu^*(v) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} > 0$ .

Пусть  $x = 7$  и  $z = 8$ , тогда

$$\mu^*(v) = 2 \times \frac{y-6}{y} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} \geq 1$$

при  $y \geq 8$ , откуда следует тип  $(5, 7, \overline{6}, \overline{7}, 8)$ , который содержится в типе  $(5, 8, \overline{6}, \overline{7}, \overline{7})$ , отсутствующем в контрпримере. Если  $x = z = 7$ , то

$$\mu^*(v) = 2 \times \frac{y-6}{y} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} \geq 1$$

при  $y \geq 9$ . Отсюда получаем тип  $(5, 7, 6, 8, 7)$  (ввиду симметрии здесь черты над 6, 8 не требуется).

(2) Пусть  $v$  типа  $(5, 6, \overline{x}, \overline{y}, z)$ , тогда

$$\mu^*(v) = -1 + \frac{3}{2} \times \frac{z-6}{z} + 2 \times \frac{y-6}{y} + 2 \times \frac{x-6}{x}.$$

Если  $z \geq 9$ , то

$$\mu^*(v) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{7} > 0.$$

Пусть  $7 \leq z \leq 8$ . Если  $z = 8$  и хотя бы одна из степеней  $x, y$  не менее 8, то

$$\mu^*(v) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{7} > 0.$$

При  $x = y = 7$  получаем  $\mu^*(v) < 0$  и тип  $(5, 6, 7, 7, 8)$ , который содержится в типе  $(5, 8, \overline{6}, \overline{7}, \overline{7})$ .

Если же  $z = 7$ , то для типа  $(5, 6, \overline{7}, \overline{8}, 7)$  имеем

$$\mu^*(v) = -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{7} = 0,$$

а тип  $(5, 6, 7, 7, 7)$  поглощается типом  $(5, 8, \overline{6}, \overline{7}, \overline{7})$ .

**Подслучай 2.2.** Две  $7^+$ -вершины. Вершина  $v$  имеет тип (1)  $(5, 6, \overline{6}, \overline{x}, y)$ , (2)  $(5, 6, x, y, 6)$  или (3)  $(5, x, 6, 6, y)$  (рис. 2).

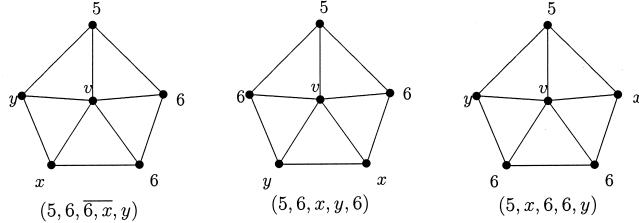


Рис. 2. Подслучай 2.2 случая 2.

(1) Пусть  $v$  типа  $(5, 6, \overline{6}, \overline{x}, y)$ . Если  $x \geq 10$ , то  $\mu^*(v) \geq -1 + 2 \times \frac{2}{5} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} > 0$ . Пусть  $7 \leq x \leq 9$ .

Если  $x = 7$ , то  $\mu^*(v) = -1 + \frac{3}{2} \times \frac{y-6}{y} + 2 \times \frac{1}{7} > 0$  при  $y \geq 12$ , откуда получаем тип  $(5, 6, \overline{6, 7}, 11)$ . Если  $x = 8$ , то  $\mu^*(v) = -1 + \frac{3}{2} \times \frac{y-6}{y} + 2 \times \frac{1}{4} > 0$  при  $y \geq 9$ , т. е. имеем  $(5, 6, \overline{6, 8}, 8)$ . Наконец, если  $x = 9$ , то  $\mu^*(v) = -1 + \frac{3}{2} \times \frac{y-6}{y} + 2 \times \frac{1}{3} > 0$  при  $y \geq 8$ , и получаем тип  $(5, 6, \overline{9, 6}, 7)$ , который поглощается типом  $(\overline{6, 6, 6, 7, 9})$  из случая 1.2.

(2) Пусть  $v$  типа  $(5, 6, x, y, 6)$ . Из симметрии положим  $x \leq y$ . Если  $x \geq 8$ , то  $\mu^*(v) \geq -1 + 2 \times \frac{1}{4} = 0$ . Если  $x = 7$ , то  $\mu^*(v) = -1 + 2 \times \frac{y-6}{y} + 2 \times \frac{1}{7} \geq 0$  при  $y \geq 10$ , т. е. имеем тип  $(5, 6, \overline{7, 9}, 6)$ , который поглощается типом  $(\overline{6, 6, 6, 7, 9})$ .

(3) Пусть  $v$  типа  $(5, x, 6, 6, y)$ . Из симметрии  $x \leq y$ . Если  $x \geq 9$ , то  $\mu^*(v) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = 0$ . Пусть  $x \leq 8$ . Если  $x = 7$ , то  $\mu^*(v) = -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{y-6}{y} > 0$  при  $y \geq 13$ , т. е. имеем тип  $(5, 7, 6, 6, 12)$ . Если  $x = 8$ , то  $\mu^*(v) = -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{y-6}{y} > 0$  при  $y \geq 11$ , откуда получаем  $(5, 8, 6, 6, 10)$ .

Подслучай 2.3. Одна  $7^+$ -вершина. Вершина  $v$  имеет тип  $(5, 6, 6, x, 6)$  или  $(5, 6, 6, 6, x)$ .

Если  $v$  типа  $(5, 6, 6, x, 6)$ , то  $\mu^*(v) \geq -1 + 2 \times \frac{x-6}{x} \geq 0$  при  $x \geq 12$ , откуда следует тип  $(5, 6, 6, 11, 6)$ , который поглощается уже полученным выше типом  $(6, 6, 6, 6, 11)$ . Если же  $v$  типа  $(5, 6, 6, 6, x)$ , то  $\mu^*(v) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{x-6}{x} \geq 0$  при  $x \geq 18$ , откуда получаем  $(5, 6, 6, 6, 17)$ .

Случай 3. Две 5-вершины.

Вершина  $v$  получает  $\frac{3}{2} \times \frac{x-6}{x} + 2 \times \frac{y-6}{y} + \frac{3}{2} \times \frac{z-6}{z}$ , если  $v$  типа  $(5, 5, x, y, z)$ , и  $\frac{x-6}{x} + \frac{3}{2} \times \frac{y-6}{y} + \frac{3}{2} \times \frac{z-6}{z}$ , если  $v$  типа  $(5, x, 5, y, z)$  (рис. 3).

Подслучай 3.1. Три  $7^+$ -вершины. Пусть  $v$  типа  $(5, 5, x, y, z)$ . Если  $x \geq 9$  или  $z \geq 9$ , то

$$\mu^*(v) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} = 0.$$

Пусть  $7 \leq x \leq 8$ ,  $7 \leq z \leq 8$  и из симметрии  $x \leq z$ . Если  $x = z = 8$ , то

$$\mu^*(v) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} > 0.$$

Пусть  $x = z = 7$ , тогда

$$\mu^*(v) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{y-6}{y} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} > 0$$

при  $y \geq 9$ , откуда следует тип  $(5, 5, 7, 8, 7)$ . Если же  $x = 7$  и  $z = 8$ , то

$$\mu^*(v) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{y-6}{y} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} > 0$$

при  $y \geq 8$ , откуда получаем  $(5, 5, 7, 7, 8)$ . Тем самым имеем тип  $(5, 5, 7, \overline{7}, \overline{8})$ , указанный в теореме 2.

Пусть  $v$  имеет тип  $(5, x, 5, y, z)$ . Если  $y \geq 11$  или  $z \geq 11$ , то

$$\mu^*(v) \geq -1 + \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{5}{11} > 0.$$

Пусть  $7 \leq y \leq 10$ ,  $7 \leq z \leq 10$  и из симметрии  $y \leq z$ . Если  $y = z = 7$ , то  $\mu^*(v) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} \times 2 + \frac{x-6}{x} > 0$  при  $x \geq 14$ , откуда получаем тип  $(5, 13, 5, 7, 7)$ .

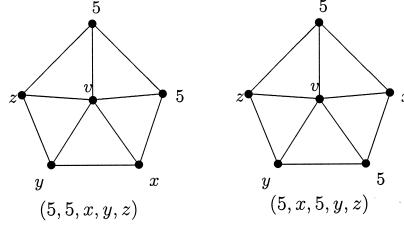


Рис. 3. Случай 3.

Если  $y = 7$  и  $z = 8$ , то

$$\mu^*(v) \geq -1 + \frac{x-6}{x} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} > 0$$

при  $x \geq 11$ , получаем тип  $(5, 10, 5, 7, 8)$ . Если  $y = 7$  и  $z = 9$ , то

$$\mu^*(v) \geq -1 + \frac{x-6}{x} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} > 0$$

при  $x \geq 9$ , откуда имеем тип  $(5, 8, 5, 7, 9)$ . Если  $y = 7$  и  $z = 10$ , то

$$\mu^*(v) \geq -1 + \frac{x-6}{x} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} > 0$$

при  $x \geq 8$ , что влечет тип  $(5, 7, 5, 7, 10)$ .

Если  $y = z = 8$ , то

$$\mu^*(v) \geq -1 + \frac{x-6}{x} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} > 0$$

при  $x \geq 8$ , откуда следует тип  $(5, 7, 5, 8, 8)$ . Если  $y \geq 9$  и  $z \geq 9$ , то

$$\mu^*(v) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = 0.$$

**Подслучай 3.2.** Две  $7^+$ -вершины. Имеем следующие варианты: (1)  $(5, 5, 6, y, z)$ , (2)  $(5, 5, x, 6, z)$ , (3)  $(5, x, 5, 6, z)$  и (4)  $(5, 6, 5, y, z)$ . Заметим, что варианты (2) и (4) совпадают с точки зрения получаемого вершиной  $v$  заряда. Заметим также, что тип  $(5, 5, 6, y, z)$  поглощается типом  $(5, 6, 6, y, z)$ , уже рассмотренным в случае 2.2. Поэтому по сути у нас остаются только варианты (2) и (3) (а типы, получающиеся при переборе варианта (4), можно легко выписать из решения варианта (2)).

**Подслучай 3.2.1.** Вершина  $v$  типа  $(5, 5, x, 6, z)$ . Из симметрии будем считать, что  $x \leq z$ . Если  $x \geq 9$ , то  $\mu^*(v) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = 0$ . Если  $x = 7$ , то  $\mu^*(v) = -1 + \frac{3}{2} \times \frac{z-6}{z} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} > 0$  при  $z \geq 13$ , получаем  $(5, 5, 7, 6, 12)$ . Если  $x = 8$ , то  $\mu^*(v) = -1 + \frac{3}{2} \times \frac{z-6}{z} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} > 0$  при  $z \geq 11$ , откуда следует тип  $(5, 5, 8, 6, 10)$ .

Согласно замечанию, сделанному выше, из случая 3.2.1 получаем типы  $(5, 6, 5, 7, 12)$  и  $(5, 6, 5, 8, 10)$ .

**Подслучай 3.2.2.** Вершина  $v$  типа  $(5, x, 5, 6, z)$ . Вершина  $v$  получает  $\phi(x, z) = \frac{x-6}{x} + \frac{3}{2} \times \frac{z-6}{z}$ . Чтобы найти все типы вершин, для которых  $\mu^*(v) < 0$ , решаем неравенство  $\phi(x, z) < 1$ , равносильное неравенству  $(x-4)(z-6) < 24$  (напомним, что  $x \geq 7, z \geq 7$ ). Поскольку  $\phi(10, 10) = 24$ , получаем  $7 \leq x \leq 9$  или  $7 \leq z \leq 9$ .

Если  $z = 7$ , то  $x < 24 + 4$ , получаем тип  $(5, 27, 5, 6, 7)$ . Если  $z = 8$ , то  $x < \frac{24}{2} + 4$ , откуда следует тип  $(5, 15, 5, 6, 8)$ . Если  $z = 9$ , то  $x < 12$ , получаем  $(5, 11, 5, 6, 9)$ . Если  $x = 7$ , то  $z < \frac{24}{3} + 6$ , имеем  $(5, 7, 5, 6, 13)$ . Если  $x = 8$ , то  $z < \frac{24}{4} + 6$ , откуда следует  $(5, 8, 5, 6, 11)$ . Если  $x = 9$ , то  $z < \frac{24}{5} + 6$ , и получаем тип  $(5, 9, 5, 6, 10)$ .

**Подслучай 3.3.** Одна  $7^+$ -вершина. Имеем следующие варианты: (1)  $(5, 5, 6, 6, z)$ , (2)  $(5, 5, 6, y, 6)$ , (3)  $(5, x, 5, 6, 6)$ . Заметим, что тип  $(5, 5, 6, 6, z)$  поглощается типом  $(5, 6, 6, 6, z)$ , уже рассмотренным в случае 2.3, а тип  $(5, 5, 6, y, 6)$  — типом  $(\overline{6, 6, 6, 6, 11})$  (см. случай 1.3). Если же  $v$  имеет тип  $(5, x, 5, 6, 6)$ , то  $\mu^*(v) < 0$  при сколь угодно больших  $x$ , получаем тип  $(5, \infty, 5, 6, 6)$ , которого нет в контрпримере.

#### Случай 4. Три 5-вершины.

Имеем два варианта:  $(5, 5, 5, x, y)$  и  $(5, 5, x, 5, y)$ , первый из которых поглощается типом  $(5, 6, 5, x, y)$  (см. случай 3.2). Пусть  $v$  — вершина

типа  $(5, 5, x, 5, y)$ . Из симметрии пусть  $x \leq y$ . Если  $x \geq 12$ , то  $\mu^*(v) \geq -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ . Пусть  $6 \leq x \leq 11$ .

Если  $x = 6$ , то имеем  $(5, 5, 5, 6, \infty)$  благодаря случаю 3.3. Пусть  $x = 7$ , тогда  $\mu^*(v) = -1 + \frac{1}{7} + \frac{y-6}{y} > 0$  при  $y \geq 42$ , откуда получаем тип  $(5, 5, 7, 5, 41)$ . (В п. 2.2 с помощью дополнительных соображений покажем, что если  $y = 41$ , то такая вершина имеет неотрицательный заряд  $\mu^*$ .)

Если  $x = 8$ , то  $\mu^*(v) = -1 + \frac{1}{4} + \frac{y-6}{y} > 0$  при  $y \geq 24$ , откуда получаем  $(5, 5, 8, 5, 23)$ . Если  $x = 9$ , то  $\mu^*(v) = -1 + \frac{1}{3} + \frac{y-6}{y} > 0$  при  $y \geq 18$ , имеем  $(5, 5, 9, 5, 17)$ . Аналогичным образом получаем типы  $(5, 5, 10, 5, 14)$  и  $(5, 5, 11, 5, 13)$ .

Случай четырех 5-вершин в окрестности  $v$  не нуждается в рассмотрении, поскольку тип  $(5, 5, 5, 5, x)$  поглощается типом  $(5, 6, 6, 5, \infty)$ .

**2.2. Завершение доказательства теоремы 2.** Мы доказали теорему 2, в которой вместо типа  $(5, 5, 7, 5, 40)$  стоит лебеговский тип  $(5, 5, 7, 5, 41)$ . Заметим, что после применения правил R1 и R2 из всех типов в теореме 2 отрицательный заряд имеет только вершина типа  $(5, 5, 7, 5, 41)$ , где все степени вершин не больше указанных в типе. Используя дополнительные соображения, докажем, что  $(5, 5, 7, 5, 41)$  можно заменить на  $(5, 5, 7, 5, 40)$ , не ухудшив ни одного из остальных, уже полученных параметров.

Назовем 5-вершину  $v$  плохой, если  $d(v_1) = d(v_2) = d(v_4) = 5$ ,  $d(v_3) = 7$  и  $d(v_5) = 41$  (рис. 4).

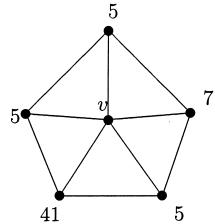


Рис. 4. Плохая 5-вершина.

После применения R1 и R2 имеем  $\mu^*(v) = -1 + \frac{286}{287} < 0$ , т. е. нам не хватает  $\varepsilon = \frac{1}{287}$  для того, чтобы заряд плохой вершины  $v$  стал равен нулю. Чтобы завершить доказательство теоремы 2, достаточно показать, что в окрестности плохой вершины  $v$  всегда найдутся вершины, которые могут дать вершине  $v$  недостающий заряд  $\varepsilon$ , сохранив при этом неотрицательность своего заряда  $\mu^*$ .

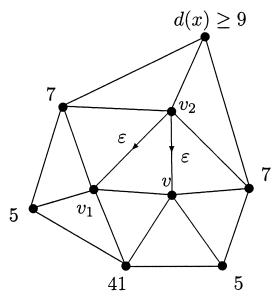


Рис. 5. Вершина  $v$  смежна с плохой вершиной  $v_1$ .

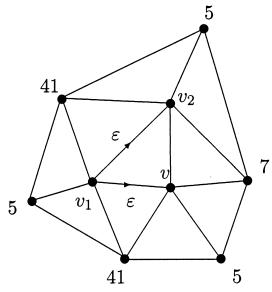


Рис. 6. Вершина  $v$  смежна с плохой вершиной  $v_2$ .

Действительно, если  $v_1$  также плохая, то благодаря отсутствию в  $G$  вершин типа  $(5, 5, 7, \overline{7}, \overline{8})$  вершина  $v_2$  смежна с вершиной  $x$  степени не менее 9 (рис. 5), а значит,  $v_2$  получает не менее  $2 \times \frac{1}{14} + 2 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{1}{3} = 1 + \frac{2}{21} > 1 + 2 \times \varepsilon$ . Поэтому  $v_2$  может дать каждой из плохих вершин  $v$  и  $v_1$  заряд  $\varepsilon$ , сохранив при этом неотрицательность своего заряда.

Пусть теперь  $v_2$  плохая. Тогда вершина  $v_1$  смежна с двумя вершинами степени 41 (рис. 6), а значит,  $v_1$  получает не менее  $2 \times \frac{35}{41} = 1 + \frac{29}{41} > 1 + 2\varepsilon$ , т. е.  $v_1$  может дать каждой из плохих вершин  $v$  и  $v_2$  заряд  $\varepsilon$ , сохранив при этом неотрицательность своего заряда.

Итак, если одна из вершин  $v_1$ ,  $v_2$  плохая, то наша плохая  $v$ , получив заряд  $\varepsilon$  от не являющейся плохой вершины  $v_2$  или  $v_1$ , имеет заряд, равный нулю (а  $v_1$  и  $v_2$  сохраняют заряды  $\mu^* > 0$ ).

Пусть, наконец, ни одна из вершин  $v_1$  и  $v_2$  не является плохой и  $v_1$  смежна с вершинами  $v$ ,  $v_2$ ,  $y$ ,  $x$ ,  $v_5$  в циклическом порядке (рис. 7).

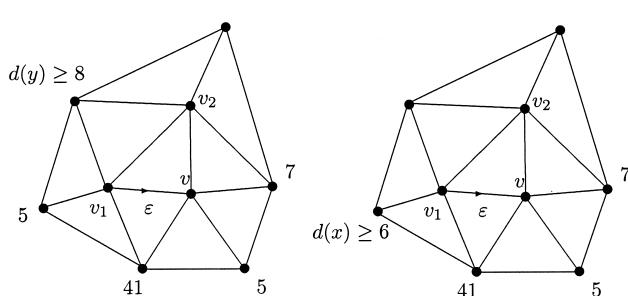


Рис. 7. Ни одна из вершин  $v_1$  и  $v_2$  не является плохой.

Если  $d(x) = 5$ , то  $d(y) \geq 8$  (так как  $v_1$  не является плохой) и

$$\mu^*(v_1) \geq -1 + 2 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{41} = \frac{20}{161} > \varepsilon.$$

Значит,  $v_1$  может дать заряд  $\varepsilon$  вершине  $v$  (заметим, что вершина  $x$  не является плохой). Если же  $d(x) \geq 6$ , то  $\mu^*(v_1) \geq -1 + \frac{3}{2} \times \frac{35}{41} = \frac{23}{81} > \varepsilon$ .

Теорема 2 доказана.

Авторы благодарят О. В. Бородина за тщательную проверку доказательства и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lebesgue H. Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
2. Appel K., Haken W. Every planar map is four colorable. I. Discharging // Illinois J. Math. 1977. V. 21. P. 429–490.
3. Steinitz E. Polyheder und Raumeinteilungen // Enzykl. Math. Wiss. (Geometrie), 3AB. 1922. Heft 12. S. 1–139.
4. Wernicke P. Über den Kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. Bd 58. S. 413–426.
5. Franklin Ph. The four colour problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44. P. 225–236.
6. Kotzig A. From the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Čas. 1963. V. 13. P. 20–34.
7. Бородин О. В. Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 5. С. 9–12.
8. Jendrol' S., Madaras T. On light subgraphs in plane graphs with minimum degree five // Discuss. Math., Graph Theory. 1996. V. 16. P. 207–217.
9. Borodin O. V., Woodall D. R. Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math., Graph Theory. 1998. V. 18, N 2. P. 159–164.

ОБРАТНАЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ЗАДАЧА  
 ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО  
 ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
 В СЛУЧАЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО  
 ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ  
 О. А. Колтуновский

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — точка ограниченной области  $D$  пространства  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $t$  — число из ограниченного интервала  $(0, T)$ ,  $Q$  — цилиндр  $D \times (0, T)$ .

В цилиндре  $Q$  рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \Delta u + q(x)a(x, t)u = f_0(x, t), \quad (1)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа по переменным  $(x_1, \dots, x_n)$ , функции  $a(x, t)$  и  $f_0(x, t)$  известны и заданы при  $(x, t) \in \overline{Q}$ .

В работе изучается

**Обратная задача.** Найти функции  $u(x, t)$  и  $q(x)$ , связанные в  $Q$  уравнением (1) и такие, что выполняются условия:

$$u(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = \mu(x, t), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D, \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in D, \quad (4)$$

$$\int_0^T \alpha(t)u(x, t) dt = h_0(x), \quad x \in D. \quad (5)$$

Функции  $\mu(x, t)$ ,  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $h_0(x)$  известны и заданы при  $x \in \overline{D}$ ,  $t \in [0, T]$ .

Условия (2)–(4) являются условиями первой начально-краевой задачи для гиперболического уравнения (1). Условие (5) — условие интегрального переопределения, позволяющее найти вместе с решением  $u(x, t)$  и неизвестный коэффициент  $q(x)$ .

Сделаем следующее

**Предположение 1.** Существует функция  $U = U(x, t)$  из класса  $C^4(\bar{Q})$ , удовлетворяющая граничным условиям (2)–(4).

Произведем замену  $u(x, t) = v(x, t) + U(x, t)$  и переформулируем обратную задачу: требуется найти функции  $v(x, t)$  и  $q(x)$ , связанные в цилиндре  $Q$  уравнением

$$v_{tt} - \Delta v + q(x)a(x, t)(v + U) = f(x, t) \quad (1')$$

при выполнении условий

$$v(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0, \quad (2')$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in D, \quad (3')$$

$$v_t(x, 0) = 0, \quad x \in D, \quad (4')$$

$$\int_0^T \alpha(t)v(x, t) dt = h(x), \quad x \in D. \quad (5')$$

Функции  $f(x, t)$  и  $h(x)$  равны соответственно

$$f(x, t) = f_0(x, t) - (U_{tt} - \Delta U), \quad h(x) = h_0(x) - \int_0^T \alpha(t)U(x, t) dt.$$

Умножим обе части уравнения (1') на функцию  $\alpha(t)$ , проинтегрируем почленно получившееся равенство по переменной  $t$  в пределах от  $t = 0$  до  $t = T$  и выразим коэффициент

$$q(x) = \frac{\left[ \int_0^T \alpha(t)f(x, t) dt + \Delta h(x) \right] - \int_0^T \alpha(t)v_{tt}(x, t) dt}{\int_0^T \alpha(t)a(x, t)U(x, t) dt + \int_0^T \alpha(t)a(x, t)v(x, t) dt}. \quad (6)$$

Далее будем предполагать выполнение следующих неравенств при  $x \in \overline{D}$ :

$$\begin{aligned} 0 < H_1 &\leq \int_0^T \alpha(t) f(x, t) dt + \Delta h(x) \leq H_2, \\ 0 < A_1 &\leq \int_0^T \alpha(t) a(x, t) U(x, t) dt \leq A_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Также будем предполагать, что  $\alpha(T) = 0$ , тогда

$$\int_0^T \alpha(t) v_{tt}(x, t) dt = - \int_0^T \alpha'(t) v_t(x, t) dt.$$

Введем семейство срезающих функций  $\sigma_\rho(\xi)$  при  $\rho > 0$ :

$$\sigma_\rho(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq \rho, \\ -\rho, & \text{если } \xi \leq -\rho, \\ \rho, & \text{если } \xi \geq \rho. \end{cases}$$

Для функции  $p(x, t)$ , заданной в цилиндре  $\overline{Q}$ , и чисел  $\beta, \gamma$  из интервала  $(0, 1)$  определим коэффициент

$$q_p(x) = \frac{\left[ \int_0^T \alpha(t) f(x, t) dt + \Delta h(x) \right] + \sigma_{\beta H_1}(\xi_1)}{\int_0^T \alpha(t) a(x, t) U(x, t) dt + \sigma_{\gamma A_1}(\xi_2)} \equiv \frac{H(x) + \sigma_{\beta H_1}(\xi_1)}{A(x) + \sigma_{\gamma A_1}(\xi_2)}, \quad (8)$$

где

$$\xi_1 = \int_0^T \alpha'(t) p_t(x, t) dt, \quad \xi_2 = \int_0^T \alpha(t) a(x, t) p(x, t) dt.$$

Тогда коэффициент  $q_p(x)$  оценивается в  $\overline{D}$  следующим образом:

$$0 < q^* \leq q_p \leq q^{**}, \quad (9)$$

где

$$q^* = \frac{(1 - \beta) H_1}{A_2 + \gamma A_1}, \quad q^{**} = \frac{H_2 + \beta H_1}{(1 - \gamma) A_1}.$$

Определим пространства функций, используемые далее:

$$\begin{aligned} V &= \{v(x, t) \mid v(x, t) \in W_2^2(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^2(D)), \\ &\quad v_t(x, t) \in W_2^2(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^2(D)), \\ &\quad \Delta v_t(x, t) \in L_2(Q) \cap L_\infty(0, T; L_2(D))\}, \\ \tilde{V} &= \{v(x, t) \mid v(x, t) \in V, v_{tt}(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)\}, \\ \tilde{V}_0 &= \{v(x, t) \mid v(x, t) \in \tilde{V}, v(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0\}. \end{aligned}$$

Нормы в этих пространствах определяются равенствами

$$\begin{aligned} \|v\|_V &= \|v\|_{W_2^2(Q)} + \|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(D))} + \|v_t\|_{W_2^2(Q)} \\ &\quad + \|v_t\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(D))} + \|\Delta v_t\|_{L_2(Q)} + \|\Delta v_t\|_{L_\infty(0, T; L_2(D))}, \\ \|v\|_{\tilde{V}} &= \|v\|_V + \|v_{tt}\|_{W_2^{2,1}(Q)}. \end{aligned}$$

Исследуем вспомогательную задачу: найти функцию  $v(x, t)$ , которая удовлетворяет в цилиндре  $Q$  уравнению

$$-\varepsilon \Delta v_{tt} + v_{ttt} - \Delta v_t + q_v(av)_t = F_v(x, t), \quad \varepsilon > 0, \quad (10)$$

условиям (2'), (3'), (4') и условию

$$v_{tt}(x, 0) = f_v(x, 0), \quad (11)$$

где

$$F_v(x, t) = f_t(x, t) - q_v(x)(aU)_t(x, t), \quad f_v(x, t) = f(x, t) - q_v(x)a(x, t)u_0(x).$$

Заметим, что (10) — нелинейное нагруженное уравнение составного типа [1, 2], для которого поставлена нелинейная нагруженная — ввиду условия (11) — краевая задача.

Сделаем важное

**Предположение 2.** Размерность области равна 2 или 3, и  $\Gamma$  класса  $C^2$ .

Тогда [3] для функции  $w \in W_{2,0}^2(D)$  справедливо второе основное неравенство для эллиптического оператора  $\Delta$ :

$$\|w\|_{W_2^2(D)} \leq C_D \|\Delta w\|_{L_2(D)},$$

и согласно теоремам вложения верно неравенство

$$\|w\|_{C(\overline{D})}^2 \leq k_D \|\Delta w\|_{L_2(D)}^2.$$

Получим оценки, предваряющие вводимые далее обозначения. В силу определения функции  $f_v(x, 0)$  и элементарного неравенства  $(b_1 + \dots + b_m)^2 \leq m(b_1^2 + \dots + b_m^2)$  справедливы оценки

$$\int_D f_p^2(x, 0) dx \leq 2 \int_D [f^2(x, 0) + (q^{**})^2 a^2(x, 0) u_0^2(x)] dx \equiv \overline{A}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_D f_{px_i}^2(x, 0) dx &\leq B_{00} \int_D dx \left( \int_0^T |p(x, t)| dt \right)^2 \\ &+ B_{01} \sum_{i=1}^n \int_D dx \left( \int_0^T |p_{x_i}(x, t)| dt \right)^2 + B_{10} \int_D dx \left( \int_0^T |p_t(x, t)| dt \right)^2 \\ &+ B_{11} \sum_{i=1}^n \int_D dx \left( \int_0^T |p_{tx_i}(x, t)| dt \right)^2 + \overline{B} \\ &+ C_{11,00} \sum_{i=1}^n \int_D dx \left( \int_0^T |p_{tx_i}(x, t)| dt \right)^2 \left( \int_0^T |p(x, t)| dt \right)^2 \\ &+ C_{10,01} \sum_{i=1}^n \int_D dx \left( \int_0^T |p_t(x, t)| dt \right)^2 \left( \int_0^T |p_{x_i}(x, t)| dt \right)^2 \\ &+ C_{10,00} \int_D dx \left( \int_0^T |p_t(x, t)| dt \right)^2 \left( \int_0^T |p(x, t)| dt \right)^2, \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \overline{B} = 3 \sum_{i=1}^n \int_D &[f_{x_i}^2(x, 0) + (q^{**})^2 [a(x, 0) u_0(x)]_{x_i}^2] dx \\ &+ \tilde{A}_1 n \operatorname{mes} D \max_{1 \leq i \leq n} \max_{\overline{D}} (H_{x_i} A - H A_{x_i})^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{00} &= \tilde{A}_1 n \left[ \max_{1 \leq i \leq n} \max_{\overline{D}} H_{x_i}^2 \max_{\overline{Q}} (\alpha a)^2 + \max_{\overline{D}} H^2 \max_{1 \leq i \leq n} \max_{\overline{Q}} (\alpha a_{x_i})^2 \right], \\
B_{01} &= \tilde{A}_1 \max_{\overline{D}} H^2 \max_{\overline{Q}} (\alpha a)^2, \quad B_{10} = \tilde{A}_1 n \max_{1 \leq i \leq n} \max_{\overline{D}} A_{x_i}^2 \max_{[0, T]} (\alpha')^2, \\
B_{11} &= \tilde{A}_1 \max_{\overline{D}} A^2 \max_{[0, T]} (\alpha')^2, \quad C_{11,00} = \tilde{A}_1 \max_{[0, T]} (\alpha')^2 \max_{\overline{Q}} (\alpha a)^2, \\
C_{10,01} &= \tilde{A}_1 \max_{[0, T]} (\alpha')^2 \max_{\overline{Q}} (\alpha a)^2, \\
C_{10,00} &= \tilde{A}_1 n \max_{[0, T]} (\alpha')^2 \max_{1 \leq i \leq n} \max_{\overline{Q}} (\alpha a_{x_i})^2, \\
\tilde{A}_1 &= \frac{27}{(1-\gamma)^4 A_1^4} \max_{\overline{D}} [a^2(x, 0) u_0^2(x)].
\end{aligned}$$

В силу определения функции  $F_p(x, t)$  справедливы оценки

$$\|F_p\|_{L_\infty(Q)}^2 \leq \overline{F}, \quad \|F_{pt}\|_{L_\infty(Q)}^2 \leq \overline{\overline{F}}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{F} &= 2 \{ \|f_t\|_{L_\infty(Q)}^2 + (q^{**})^2 \| (aU)_t \|_{L_\infty(Q)}^2 \}, \\
\overline{\overline{F}} &= 2 \{ \|f_{tt}\|_{L_\infty(Q)}^2 + (q^{**})^2 \| (aU)_{tt} \|_{L_\infty(Q)}^2 \}.
\end{aligned}$$

Обозначим  $F^{**} = F_1^{**} + F_2^{**}$ , где

$$F_1^{**} = \text{mes } D \left\{ \left( \frac{7}{3} T^3 + 4T \right) \overline{F} + \frac{14}{3} T^3 \overline{\overline{F}} \right\}, \quad F_2^{**} = T(\overline{A} + \overline{B}).$$

Введем функции

$$a_0(x, t) = a(x, t)(2T - t), \quad a_1(x, t) = a_t(x, t)(2T - t),$$

$$F^{**}(\tau) = F^{**}(T)|_{T=\tau}.$$

Достаточные условия разрешимости обратной задачи (1')–(5'), которая эквивалентна исходной задаче (1)–(5), дает

**Теорема 1.** Пусть выполняются предположения 1 и 2, функции  $f_0(x, t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $h_0(x)$  и  $a(x, t)$  таковы, что

$$f_0(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \quad \alpha(t) \in C^1([0, T]), \quad \alpha(T) = 0, \quad h_0(x) \in C^3(\overline{D}),$$

$$a(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \quad a(x, t) > 0, \quad a_t(x, t) \leq 0 \text{ при } (x, t) \in \overline{Q}.$$

Предположим, что на границе  $\Gamma$  выполнены условия согласования:

$$\begin{aligned} \mu(x, 0)|_{\Gamma} &= 0, \quad \mu_{tt}(x, 0) - \Delta u_0(x) - f_0(x, 0)|_{\Gamma} = 0, \\ h_0(x) - \int_0^T \alpha(t) \mu(x, t) dt \Big|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Предположим также, что в области  $\overline{D}$  выполняются неравенства (7), а в цилиндре  $\overline{Q}$  неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{96} &> (q^{**})^2 a_0^2(x, t), \\ |a_{0t}(x, t)| &> 4q^{**} [6(a_{0t} + a_1)^2(x, t) + T^2 (2 \max_{\overline{Q}} a_1^2 + 3 \max_{\overline{Q}} a_{1t}^2)], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{1}{8} > q^{**} a(x, T), \quad |a_{0t}(x, t)| > 16(q^{**})^2 T^2 \max_{\overline{D}} a_t^2(x, T), \quad (16)$$

для некоторого положительного числа  $\nu$

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{3(1+\nu)} &\geq \max \left\{ \frac{T^2 k_D \operatorname{mes} D[B_{10} + 4C_{10,00} T^3 k_D (1+\nu) F^{**}]}{1/16}, \right. \\ &\quad \frac{T^2 k_D \operatorname{mes} D[B_{00} + 8C_{10,00} T k_D (1+\nu) F^{**}]}{1/(8T^2)}, \\ &\quad \left. \frac{T^2 (B_{11} + (T^2/2) B_{01} + 8T^3 k_D (1+\nu) F^{**} [C_{11,00} + C_{10,01}])}{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{8}{3} k_D (1+\nu)} \int_0^T |\alpha'(\tau)| \sqrt{\frac{F^{**}(\tau)}{\tau}} d\tau &\leq \beta H_1 \\ \sqrt{8k_D(1+\nu)} \int_0^T |\alpha(\tau)| \max_{\overline{D}} |a(x, \tau)| \sqrt{\tau F^{**}(\tau)} d\tau &\leq \gamma A_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда существует решение  $\{v(x, t), q(x)\}$  обратной задачи (1')–(5') такое, что  $v(x, t) \in V$ ,  $q(x) \in L_{\infty}(D)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $p(x, t) \in \tilde{V}_0$ . Рассмотрим семейство задач ( $\lambda \in [0, 1]$ ): найти функцию  $v_{\lambda}(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$L_{\varepsilon p \lambda} \equiv -\varepsilon \Delta v_{tt} + v_{ttt} - \lambda \Delta v_t + \lambda q_p(av)_t = \lambda F_p \quad (10_{p\lambda})$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия (2'), (3'), (4') и условие

$$v_{tt}(x, 0) = f_p(x, 0). \quad (11_p)$$

Докажем разрешимость задач в пространстве  $\tilde{V}_0$  методом продолжения по параметру. Обозначим через  $\Lambda$  множество тех  $\lambda \in [0, 1]$ , для которых задача  $(10_{p\lambda})$ , (2'), (3'), (4'),  $(11_p)$  разрешима в пространстве  $\tilde{V}_0$ . Если это множество окажется непустым и открытым в индуцированной топологии, то оно будет совпадать со всем отрезком  $[0, 1]$ . Разрешимость задачи  $(10_{p0})$ , (2'), (3'), (4'),  $(11_p)$  в пространстве  $\tilde{V}_0$  вытекает из разрешимости первой смешанной задачи для параболического (относительно  $v_{tt}(x, t)$ ) уравнения  $(10_{p0})$ , так как по условиям теоремы 1  $F_p(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_p(x, 0) \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$  (см., например, [4]). Решение находится по формуле

$$v(x, t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} v_{tt}(x, t_2) dt_2.$$

Стало быть,  $\lambda = 0$  принадлежит множеству  $\Lambda$ , что доказывает его непустоту.

Для доказательства открытости множества  $\Lambda$  получим необходимые априорные оценки. Умножим обе части уравнения  $(10_{p\lambda})$  на выражение  $(2T - t)(-\Delta v_{tt} + v_{tt})$  и проинтегрируем получившееся равенство по цилиндуру  $Q$ .

В правой части проинтегрируем по частям и сделаем оценку с использованием неравенства Коши:

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q \lambda F_p(2T - t)(-\Delta v_{tt} + v_{tt}) dxdt \right| \\ & \leq \left| \int_Q \lambda F_p(2T - t)v_{tt} dxdt \right| + \left| \int_Q \lambda [F_p(2T - t)]_t \Delta v_t dxdt \right| \\ & + T \left| \int_D \lambda F_p \Delta v_t(x, T) dx \right| \leq \frac{1}{4} \int_Q v_{tt}^2 dxdt + \frac{1}{4} \lambda \int_Q (\Delta v_t)^2 dxdt \\ & + \frac{1}{8} \lambda T \int_D (\Delta v_t)^2(x, T) dx + \lambda^2 \int_Q F_p^2(2T - t)^2 dxdt \end{aligned}$$

$$+ \lambda \int_Q [F_p(2T-t)]_t^2 dxdt + 2\lambda T \int_D F_p^2(x, T) dx. \quad (19)$$

Нетрудно проверить, что сумма трех последних выписанных слагаемых не больше числа  $F_1^{**}$ .

Далее в доказательстве теоремы 1 положительные постоянные  $M_i$  ( $i = 1, \dots$ ) зависят только от входных данных задачи (10), (2'), (3'), (4'), (11) — известных функций и их норм в соответствующих пространствах, определяемых условиями теоремы 1, но не зависят от чисел  $\varepsilon$  и  $\lambda$  и функции  $p(x, t) \in \tilde{V}_0$ .

Теперь в получившемся неравенстве

$$\int_Q L_{\varepsilon p \lambda}(2T-t)(-\Delta v_{tt} + v_{tt}) dxdt \leq \left| \int_Q \lambda F_p(2T-t)(-\Delta v_{tt} + v_{tt}) dxdt \right|$$

проинтегрируем левую часть по частям, учтем неравенства (15) и (16) из условия теоремы 1, оценку (19) и неравенства для функции  $v(x, t)$  такой, что  $v(0, t) = 0$ :

$$\int_Q v^2 dxdt \leq \frac{T^2}{2} \int_Q v_t^2 dxdt, \quad \int_D v^2(x, T) dx \leq T \int_Q v_t^2 dxdt,$$

получим оценку

$$\begin{aligned} & \int_Q \left[ \varepsilon(2T-t)(\Delta v_{tt})^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^n (2T-t)v_{ttx_i}^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_{ttx_i}^2 + \frac{1}{8} v_{tt}^2 + \lambda \frac{1}{8} (\Delta v_t)^2 + \lambda \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 + \lambda \frac{1}{8} q_p |a_{0t}| v_t^2 \right] dxdt \\ & \quad + \frac{1}{2} T \sum_{i=1}^n \int_D v_{ttx_i}^2(x, T) dx + \frac{1}{2} T \int_D v_{tt}^2(x, T) dx \\ & \quad + \lambda \frac{3}{8} T \int_D (\Delta v_t(x, T))^2 dx + \lambda \frac{1}{2} T \int_D v_{tx_i}^2(x, T) dx \\ & \quad + \lambda \frac{1}{4} T \int_D q_p a(x, T) v_t^2(x, T) dx \leq T \sum_{i=1}^n \int_D f_{px_i}^2(x, 0) + (F^{**} - T \bar{B}) \equiv F_p^{**}. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим цилиндр  $Q_\tau = \{(x, t) : x \in D, 0 < t < \tau\}$ , где  $\tau$  — произвольное число из  $[0, T]$ . Аналогично предыдущему, умножим обе части уравнения  $(10_{p\lambda})$  на выражение  $(2\tau - t)(-\Delta v_{tt} + v_{tt})$ , используем (19) и получим

$$\varepsilon \|v\|_V^2 \leq M_1 F_p^{**}. \quad (21)$$

Заметим следующее: если при оценке интеграла

$$\left| \int_Q F_p(2T-t)(-\Delta v_{tt} + v_{tt}) dx dt \right|$$

не проводить интегрирования по частям, то аналогично получается оценка

$$\|v\|_V^2 \leq \frac{M_2}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} \|F_p\|_{L_2(Q)}^2 + (F_p^{**} - F_1^{**}) \right). \quad (21')$$

Заметим также, что если функция  $v(x, t)$  удовлетворяет однородному условию  $(11_p) v_{tt}(x, 0) = 0$ , то справедлива оценка

$$\|v\|_{\tilde{V}}^2 \leq \frac{M_2}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} \|F_p\|_{L_2(Q)}^2 \right). \quad (22)$$

Докажем открытость множества  $\Lambda$ . Пусть при некотором  $\lambda$  задача  $(10_{p\lambda})$ ,  $(2')$ ,  $(3')$ ,  $(4')$ ,  $(11_p)$  разрешима в пространстве  $\tilde{V}_0$ . Тогда для любой функции  $w(x, t) \in \tilde{V}_0$  существует функция  $v(x, t) \in \tilde{V}_0$ , которая является решением уравнения

$$-\varepsilon \Delta v_{tt} + v_{ttt} - \lambda \Delta v_t + \lambda q_p(av)_t = \lambda F_p + \hat{\lambda}(F_p + \Delta w_t - q_p(aw)_t)$$

и удовлетворяет условиям  $(2')$ ,  $(3')$ ,  $(4')$ ,  $(11_p)$ . Следовательно, задача  $(10_{p\lambda})$ ,  $(2')$ ,  $(3')$ ,  $(4')$ ,  $(11_p)$  порождает оператор  $\bar{P}$ , переводящий пространство  $\tilde{V}_0$  в себя:  $\bar{P}(w) = v$ . Возьмем функции  $w_1, w_2 \in \tilde{V}_0$  и их образы  $v_1, v_2 \in \tilde{V}_0$ . Рассмотрим разности  $\bar{w} = w_1 - w_2$ ,  $\bar{v} = v_1 - v_2$ . Тогда  $\bar{v}$  удовлетворяет уравнению

$$L_{\varepsilon p \lambda} \bar{v} = \hat{\lambda}(\Delta \bar{w}_t - q_p(a \bar{w})_t)$$

и однородным условиям  $(2')$ ,  $(3')$ ,  $(4')$ ,  $(11_p)$ . Оценка (22) приводит к неравенству

$$\|v\|_{\tilde{V}}^2 \leq \frac{M_2}{\varepsilon} \hat{\lambda}^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} \|\Delta \bar{w}_t - q_p(a \bar{w})_t\|_{L_2(Q)}^2 \right) \leq \hat{\lambda}^2 \frac{M_3}{\varepsilon^2} \|\bar{w}\|_{\tilde{V}}^2.$$

Тем самым для всех  $\hat{\lambda}$  таких, что  $\hat{\lambda} \frac{M_3}{\varepsilon^2} < 1$ , оператор  $\overline{P}$  сжимающий, следовательно, имеет неподвижную точку  $w_0 \in \tilde{V}_0$ , которая, очевидно, является решением задачи  $(10_{p\lambda+\hat{\lambda}})$ ,  $(2')$ ,  $(3')$ ,  $(4')$ ,  $(11_p)$ .

Открытость множества  $\Lambda$  доказана, вместе со своим элементом  $\lambda$  оно содержит и его окрестность  $(\lambda - \frac{\varepsilon}{\sqrt{M_3}}, \lambda + \frac{\varepsilon}{\sqrt{M_3}}) \cap [0, 1]$ . Поскольку окрестность имеет фиксированный радиус, не зависящий от  $\lambda$ , и число 0 принадлежит  $\Lambda$ , то  $\Lambda$  совпадает с отрезком  $[0, 1]$ .

Тем самым для любой функции  $p(x, t) \in \tilde{V}_0$  доказана разрешимость задачи  $(10_p)$ ,  $(2')$ ,  $(3')$ ,  $(4')$ ,  $(11_p)$  в пространстве  $\tilde{V}_0$ , т. е. данная задача порождает оператор  $P$ , переводящий пространство  $\tilde{V}_0$  в себя:  $P(p) = v$ .

Покажем, что оператор  $P$  имеет в  $\tilde{V}_0$  неподвижную точку. Рассмотрим ограниченное, замкнутое и выпуклое множество функций из пространства  $\tilde{V}_0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{K}_0 = \left\{ p(x, t) \mid p(x, t) \in \tilde{V}_0, p(x, 0) = p_t(x, 0) = 0, \right. \\ \frac{1}{16} \int_Q (\Delta p_t)^2 dxdt \leq (1 + \nu) F^{**}, \quad \frac{1}{8T^2} \int_Q (\Delta p)^2 dxdt \leq (1 + \nu) F^{**}, \\ \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q p_{tx_i}^2 dxdt \leq (1 + \nu) F^{**}, \|p\|_{\tilde{V}} \leq R \right\}. \end{aligned}$$

Фиксированное число  $R$  будет определено позднее.

Оценку (20) при  $\lambda = 1$  запишем в частичном виде:

$$\int_Q \left[ \frac{1}{16} (\Delta v_t)^2 + \frac{1}{8T^2} (\Delta v)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 \right] dxdt \leq T \sum_{i=1}^n f_{px_i}^2(x, 0) + (F^{**} - T \overline{B}), \quad (20')$$

учтем оценку (13) и применим неравенства

$$\int_D dx \left( \int_0^T |w(x, t)| dt \right)^2 \leq \int_D dx \left( T \int_0^T w^2(x, t) dt \right) = T \int_Q w^2(x, t) dxdt,$$

$$\begin{aligned}
& \left( \int_0^T |w(x, t)| dt \right)^2 \leq T \int_0^T \max_{\overline{D}} w^2(x, t) dt \\
& \leq T \int_0^T \left( k_D \int_D (\Delta w(x, t))^2 dx \right) dt = T k_D \int_D (\Delta w(x, t))^2 dx dt, \\
& w(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0,
\end{aligned}$$

для оценки следующих интегралов, зависящих от функции  $p(x, t) \in \tilde{K}_0$ :

$$\begin{aligned}
& \int_D dx \left( \int_0^T |p_{tx_i}(x, t)| dt \right)^2 \left( \int_0^T |p(x, t)| dt \right)^2 \\
& \leq T^2 k_D \int_Q p_{tx_i}^2 dx dt \int_Q (\Delta p)^2 dx dt \leq 8T^4 k_D (1 + \nu) F^{**} \int_Q p_{tx_i}^2 dx dt, \\
& \int_D dx \left( \int_0^T |p_t(x, t)| dt \right)^2 \left( \int_0^T |p_{x_i}(x, t)| dt \right)^2 \\
& \leq T^2 k_D \int_Q p_{x_i}^2 dx dt \int_Q (\Delta p_t)^2 dx dt \leq T^2 k_D \frac{T^2}{2} \int_Q p_{tx_i}^2 dx dt 16(1 + \nu) F^{**} \\
& = 8T^4 k_D (1 + \nu) F^{**} \int_Q p_{tx_i}^2 dx dt, \\
& \int_D dx \left( \int_0^T |p_t(x, t)| dt \right)^2 \left( \int_0^T |p(x, t)| dt \right)^2 \\
& \leq \text{mes } D (Tk_D)^2 \int_Q (\Delta p_t)^2 dx dt \int_Q (\Delta p)^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Неравенство (17) тогда дает, что оператор  $P$  функции множества  $\tilde{K}_0$  переводит в функции  $v(x, t)$ , удовлетворяющие всем ограничениям, определяющим  $\tilde{K}_0$ , за исключением последнего:  $\|v\|_{\tilde{V}} \leq R$ . Введем

в пространстве  $\tilde{V}_0$  норму  $\|v\|_1$ , равную квадратному корню от левой части неравенства (20) и эквивалентную исходной норме  $\|v\|_{\tilde{V}}$ . Тогда из (20) следует, что

$$\|v\|_1^2 \leq r\|p\|_1^2 + F^{**}, \quad r \in (0, 1),$$

значит, все функции  $p(x, t) \in \tilde{K}_0$ , лежащие в шаре  $\|p\|_1 \leq R$  радиуса  $R$  такого, что  $R^2(1 - r) \geq F^{**}$ , переводятся оператором  $P$  в шар радиуса  $R$  (по норме  $\|v\|_1$ ). Число  $R$  определено.

Покажем, что оператор  $P$  вполне непрерывный. Пусть  $\{p_n(x, t)\}$  — ограниченная последовательность из пространства  $\tilde{V}_0$ ,  $\{v_n(x, t)\}$  — последовательность образов функций  $p_n(x, t)$  при действии оператора  $P$ . В силу оценки (21) последовательность  $\{v_n(x, t)\}$  ограничена в пространстве  $\tilde{V}_0$ . Последовательности  $\{p_{nx_i}(x, t)\}$ ,  $\{p_{ntx_i}(x, t)\}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) равномерно ограничены по  $\tau$  в  $W_2^1(Q_\tau)$ , а последовательности  $\{p_n(x, \tau)\}$ ,  $\{p_{nt}(x, \tau)\}$  равномерно ограничены по  $\tau$  в  $W_2^2(D)$ . Из ограниченности вышеуказанных последовательностей, а также из компактности вложений  $W_2^1(Q_\tau)$  в  $L_2(D)$  и  $W_2^2(D)$  в  $C(\bar{D})$  следует [3], что существуют подпоследовательности  $\{p_{n_k}(x, t)\}$  и  $\{v_{n_k}(x, t)\}$  соответствующих последовательностей и функции  $p(x, t)$  и  $v(x, t)$  такие, что при  $k \rightarrow \infty$  имеют место сходимости:

$$\begin{aligned} p_{n_k}(x, t) &\rightarrow p(x, t) \text{ слабо в } \tilde{V} \text{ и почти всюду в } \bar{Q}, \\ v_{n_k}(x, t) &\rightarrow v(x, t) \text{ слабо в } \tilde{V} \text{ и почти всюду в } \bar{Q}, \\ p_n(x, t) &\rightarrow p(x, t) \text{ сильно в } L_\infty(0, T; W_2^1(D)), \\ p_{nt}(x, t) &\rightarrow p(x, t) \text{ сильно в } L_\infty(0, T; W_2^1(D)), \\ p_n(x, t) &\rightarrow p(x, t) \text{ сильно в } L_\infty(0, T; C(\bar{D})), \\ p_{nt}(x, t) &\rightarrow p_t(x, t) \text{ сильно в } L_\infty(0, T; C(\bar{D})). \end{aligned}$$

Из этих сходимостей следует, что функции  $p(x, t)$  и  $v(x, t)$  связаны уравнением  $(10_p)$ , а функция  $v(x, t)$  удовлетворяет условиям  $(2')$ ,  $(3')$ ,  $(4')$ ,  $(11_p)$ .

Обозначим  $w_k(x, t) = v_{n_k}(x, t) - v(x, t)$ . Для функции  $w_k$  имеет место равенство

$$-\varepsilon \Delta w_{ktt} + w_{kttt} - \Delta w_{kt} + q_{p_{n_k}}(aw_t)_t = (q_p - q_{p_{n_k}})(a(v + U))_t \equiv \tilde{F}(x, t),$$

выполняются условия (2'), (3'), (4') и условие

$$w_{ktt}(x, 0) = (q_p - q_{p_{n_k}})a(x, 0)u_0(x) \equiv \tilde{f}(x).$$

Оценка, аналогичная (21'), приводит к неравенству

$$\|w_k\|_{\tilde{V}}^2 \leq \frac{M_4}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} \|\tilde{F}\|_{L_2(Q)}^2 + \|\tilde{f}\|_{W_2^1(D)}^2 \right),$$

которое вместе с сильной сходимостью  $q_{p_{n_k}}(x) \rightarrow q_p(x)$  в  $W_2^1(D)$  (о сходимости срезок см. [3]) влечет сходимость  $\|w_k\|_{\tilde{V}} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , показывающую компактность и непрерывность оператора  $P$ , т. е. его вполне непрерывность.

В силу вполне непрерывности оператора  $P$ , его свойства переводить множество  $\tilde{K}_0$  в себя и теоремы Шаудера [5] оператор  $P$  имеет на множестве  $\tilde{K}_0$  неподвижную точку. Эта неподвижная точка, т. е. функция  $v(x, t)$  из пространства  $\tilde{V}_0$ , будет решением задачи (10), (2'), (3'), (4'), (11). Поскольку решение получено для фиксированного  $\varepsilon$ , обозначим его через  $v_\varepsilon(x, t)$ .

Из оценки, аналогичной (20), следуют неравенства ( $\tau \in [0, T]$ )

$$\frac{3}{8} \tau \int_D (\Delta v_t(x, \tau))^2 dx \leq F^{**}(\tau)(1 + \nu),$$

$$\frac{1}{8\tau} \int_D (\Delta v(x, \tau))^2 dx \leq F^{**}(\tau)(1 + \nu),$$

и в силу предположения 2

$$|v_t(x, \tau)|^2 \leq \frac{8}{3} k_D(1 + \nu) \frac{F^{**}(\tau)}{\tau},$$

$$|v(x, \tau)|^2 \leq 8k_D(1 + \nu)\tau F^{**}(\tau), \quad x \in \overline{D}.$$

Ввиду неравенств (18) получаем

$$\sigma_{\beta H_1}(\xi_1) = \xi_1, \quad \sigma_{\gamma A_1}(\xi_2) = \xi_2.$$

Тогда коэффициент  $q_{v_\varepsilon}(x)$  определяется формулой (6).

Покажем, что с помощью предельного перехода по параметру  $\varepsilon$  можно доказать разрешимость в пространстве  $V$  задачи (1'), (2'), (3'), (4'), (5').

Из оценки, аналогичной (20), следует, что

$$\|v_\varepsilon\|_V^2 + \varepsilon \|\Delta v_{\varepsilon tt}\|_{L_2(Q)}^2 \leq M_5 F^{**},$$

значит, существуют числовая последовательность  $\{\varepsilon_k\}$ , подпоследовательность функций  $\{v_{\varepsilon_k}(x, t)\}$  и функция  $v(x, t)$  такие, что при  $k \rightarrow \infty$  имеют место сходимости:

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon_k}(x, t) &\rightarrow v(x, t) \text{ слабо в } V \text{ и почти всюду в } \bar{Q}, \\ \varepsilon_k \Delta v_{\varepsilon_k tt} &\rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2(Q), \\ v_{\varepsilon_k}(x, t) &\rightarrow v(x, t) \text{ сильно в } L_\infty(0, T; C(\bar{D})), \\ v_{\varepsilon_k t}(x, t) &\rightarrow v_t(x, t) \text{ сильно в } L_\infty(0, T; C(\bar{D})). \end{aligned}$$

Стало быть, функция  $v(x, t)$  удовлетворяет в цилиндре  $Q$  уравнению

$$(v_{tt} - \Delta v + q_v a(v + U))_t = f_t(x, t), \quad (23)$$

а также условиям (2'), (3'), (4') и (11).

Докажем, что функция  $v(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1'), а также условию (5'). Проинтегрируем уравнение (23) по переменной  $t$  в пределах от  $t = 0$  до  $t = \tau$ , где  $\tau \in [0, T]$ :

$$[v_{tt} - \Delta v + q_v a(v + U)](x, \tau) - [v_{tt} - \Delta v + q_v a(v + U)](x, 0) = f(x, \tau) - f(x, 0).$$

Так как для функции  $v(x, t)$  выполняются условия (3') и (11),  $v(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1'):

$$[v_{tt} - \Delta v + q_v a(v + U)](x, \tau) = f(x, \tau).$$

Умножим почленно последнее уравнение на функцию  $\alpha(\tau)$  и проинтегрируем получившееся равенство по переменной  $\tau$  в пределах от  $\tau = 0$  до  $\tau = T$ :

$$\int_0^T [v_{tt} - \Delta v + q_v a(v + U)](x, \tau) \alpha(\tau) d\tau = \int_0^T f(x, \tau) d\tau.$$

В силу определения коэффициента  $q_v(x)$  и последнего равенства получим

$$\Delta \int_0^T \alpha(\tau) v(x, \tau) d\tau = \Delta h(x), \quad x \in D,$$

из условий согласования

$$h(x)|_{\Gamma} = \int_0^T \alpha(\tau)v(x, \tau) d\tau|_{\Gamma} = 0,$$

поэтому выполняется и условие (5')

$$\int_0^T \alpha(\tau)v(x, \tau) d\tau = h(x), \quad x \in D.$$

По определению  $q_v(x) \in L_\infty(D)$ . Теорема 1 доказана.

Единственность решения обратной задачи (1)–(5) докажем среди функций следующего множества:

$$V(N, q^*, q^{**}, A^*, A^{**}) = \left\{ u(x, t) \in V : \max(\|u\|_{L_2(Q)}^2, \|u_t\|_{L_2(Q)}^2, \|u_{tt}\|_{L_2(Q)}^2, \|u(x, T)\|_{L_2(D)}^2, \|u_t(x, T)\|_{L_2(D)}^2) \leq N; \right. \\ \left. 0 < q^* \leq q_u(x) \leq q^{**}; \quad 0 < A^* \leq \int_0^T \alpha(t)a(x, t)u(x, t) dx \leq A^{**} \right\}.$$

По теореме 1 такие решения и числа  $N$ ,  $q^*$  и  $q^{**}$ ,  $A^*$  и  $A^{**}$  существуют. Коэффициент  $q_u(x)$  для решения  $u(x, t)$  из множества  $V(N, q^*, q^{**}, A^*, A^{**})$  определяется формулой

$$q_u(x) = \frac{\int_0^T \alpha(t)f_0(x, t) dx dt + \Delta h_0(x) + \int_0^T \alpha'(t)u_t(x, t) dt}{\int_0^T \alpha(t)a(x, t)u(x, t) dt}.$$

Обозначим

$$S(T) = 20T^2 \max_Q a_{tt}^2 + (88T^2 + 4T + 5) \max_Q a_t^2 + (28T^2 + 4T + 5) \max_Q a^2.$$

Достаточные условия единственности решения, согласованные с условиями существования решения, приведены в следующей теореме.

**Теорема 2.** Пусть выполняются все условия теоремы 1, и пусть в области  $\overline{D}$  начальная функция  $u_0(x)$  равна нулю.

Предположим также, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{32} &> \frac{NTS(T)}{(A^*)^2} k_D \max_{[0,T]} (\alpha'(t))^2, \\ \frac{1}{16} &> NT^3 S(T) \left( \frac{q^{**}}{A^*} \right)^2 \max_{\overline{Q}} [\alpha(t)a(x,t)]^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда существует единственное решение  $\{u(x,t), q_u(x)\}$  обратной задачи (1)–(5) такое, что  $u(x,t) \in V(N, q^*, q^{**}, A^*, A^{**})$ ,  $q_u(x) \in L_\infty(D)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разность двух решений

$$\bar{v}(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$$

удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \bar{v}_{tt} - \Delta \bar{v} + q_2 a \bar{v} &= (q_1 - q_2) a(x,t) u_1(x,t) \\ &= \frac{q_1(x) \int_0^T \alpha(t) a(x,t) \bar{v}(x,t) dt - \int_0^T \alpha'(t) \bar{v}_t(x,t) dt}{\int_0^T \alpha(t) a(x,t) u_2(x,t) dt} a(x,t) u_1(x,t), \end{aligned} \quad (25)$$

однородным условиям (2'), (3'), (4'), (5') и условию

$$\bar{v}_{tt}(x,0) = (q_1 - q_2) a(x,0) u_0(x) = 0. \quad (11')$$

Оценка разности коэффициентов в области  $\overline{D}$  делается, как в доказательстве теоремы 1:

$$\begin{aligned} (q_1 - q_2)^2 &\leqslant \frac{2Tk_D}{(A^*)^2} \left\{ (q^{**})^2 \max_{\overline{Q}} [\alpha(t)a(x,t)]^2 \int_Q (\Delta \bar{v})^2 dxdt \right. \\ &\quad \left. + \max_{[0,T]} (\alpha'(t))^2 \int_Q (\Delta \bar{v}_t)^2 dxdt \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Почленно продифференцировав по  $t$  уравнение (25), получим

$$\overline{L}\bar{v} \equiv \bar{v}_{ttt} - \Delta \bar{v}_t + q_2(a\bar{v})_t = (q_1 - q_2)[a(x,t)u_1(x,t)]_t.$$

Обозначим

$$\Phi(x, t) = (q_1(x) - q_2(x))[a(x, t)u_1(x, t)]_t$$

и рассмотрим равенство

$$\int_Q \bar{L}\bar{v}(2T-t)(-\Delta\bar{v}_{tt} + \bar{v}_{tt}) dxdt = \int_Q \Phi(x, t)(2T-t)(-\Delta\bar{v}_{tt} + \bar{v}_{tt}) dxdt.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, получаем оценку, аналогичную оценкам (20) и (20'):

$$\begin{aligned} & \int_Q \left[ \frac{1}{8}\bar{v}_{tt}^2 + \frac{1}{16}(\Delta\bar{v}_t)^2 + \frac{1}{8T^2}(\Delta\bar{v})^2 \right] dxdt \\ & \leq \int_Q \Phi^2(2T-t)^2 dxdt + \int_Q [\Phi(2T-t)]_t^2 dxdt + 2T \int_D \Phi^2(x, T) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Добавим оценку (и подобные ей)

$$\begin{aligned} & \int_Q [\Phi(2T-t)]_t^2 dxdt \leq \max_{\overline{D}}(q_1 - q_2)^2 \int_Q [(au_1)_t(2T-t)]_t^2 dxdt \\ & \leq \max_{\overline{D}}(q_1 - q_2)^2 N [20T^2 \max_{\overline{Q}} a_{tt}^2 + (80T^2 + 5) \max_{\overline{Q}} a_t^2 + (20T^2 + 5) \max_{\overline{Q}} a^2]. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (26) получим

$$\begin{aligned} & \int_Q \left[ \frac{1}{8}\bar{v}_{tt}^2 + \frac{1}{16}(\Delta\bar{v}_t)^2 + \frac{1}{8T^2}(\Delta\bar{v})^2 \right] dxdt \\ & \leq \frac{2Tk_D}{(A^*)^2} NS(T) \left\{ (q^{**})^2 \max_{\overline{Q}} (\alpha a)^2 \int_Q (\Delta\bar{v})^2 dxdt \right. \\ & \quad \left. + \max_{[0, T]} (\alpha')^2 \int_Q (\Delta\bar{v}_t)^2 dxdt \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из оценки (28) и неравенства (24) следует равенство  $\bar{v}_{tt}(x, t) = 0$  почти всюду в  $\overline{Q}$ . Значит,  $\bar{v}(x, t) = 0$  почти всюду в  $\overline{Q}$ , так как функция  $\bar{v}(x, t)$  удовлетворяет однородным условиям (3') и (2').

Теорема 2 доказана.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995.
2. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теорет. и прикл. математики, 1995.
3. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
4. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
5. Функциональный анализ (под ред. С. Г. Крейна). Сер. Справочная мат. б-ка. М.: Наука, 1972.

г. Южно-Сахалинск

30 сентября 2013 г.

УДК 512.543.1

## СПЛЕТЕНИЕ, ИМЕЮЩЕЕ КОНЕЧНУЮ ШИРИНУ

А. А. Коробов

### 1. Введение

Начало исследованию бесконечных групп на наличие конечной ширины было положено в 1980 г., когда был найден первый пример бесконечной группы, имеющей конечную ширину. В 2004 г. Бергман [1] установил конечность ширины бесконечной симметрической группы. В 2005 г. Дросте и Холанд [2] установили, что группой конечной ширины является группа автоморфизмов 2-транзитивного линейно упорядоченного множества, а Дросте и Гебель [3] установили конечность ширины группы автоморфизмов множества вещественных чисел как борелевского пространства. В 2004 г. Кечрис и Розендалль доказали конечность ширины групп автоморфизмов многих счетных  $\omega$ -стабильных и  $\omega$ -категоричных структур. В 2006 г. [4] Корнулиер установил, что конечную ширину имеют  $\omega_1$ -экзистенциально замкнутые группы. В том же году В. А. Толстых [5–6] установил конечность ширины следующих групп: общей линейной группы бесконечномерного векторного пространства над произвольным телом, группы автоморфизмов произвольной бесконечно порожденной свободной нильт-потентной группы, группы автоморфизмов свободной группы счетно-бесконечного ранга.

В докладе [7] автор предложил использовать конструкции абстрактного декартова сплетения и декартова сплетения групп преобразований для получения новых примеров групп конечной ширины. Целью настоящей статьи является доказательство анонсированных там результатов.

---

© 2013 Коробов А. А.

## 2. Определения и примеры

Пусть  $M$  — множество. Обозначим через  $S(M)$  совокупность всех взаимно однозначных отображений  $M$  на себя,  $\text{Fun}(M, G)$  — декартово произведение изоморфных копий группы  $G$ , индексированных элементами множества  $M$ . Декартово сплетение группы  $A$  с группой  $B$  обозначим через  $A \tilde{\ast} B$  [8].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Говорят, что группа  $G$  имеет *конечную ширину*, если для любого множества  $E$  порождающих элементов группы  $G$  с условием  $1 \in E = E^{-1}$  существует такое натуральное число  $k$ , что  $G = E^k$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Говорят, что группа  $G$  имеет *счетную (несчетную) строгую конфинальность*, если группа  $G$  может быть представлена в виде объединения счетной (несчетной) цепочки собственных подмножеств  $H_i$ , удовлетворяющих двум условиям: 1)  $H_i^{-1} = H_i$  для любого индекса  $i$ ; 2) для любого индекса  $i$  существует такой индекс  $j$ , что  $j \geq i$  и  $H_i H_i \subseteq H_j$ .

**Предложение 1.** Для любого непустого множества  $I$  декартово произведение  $\text{Fun}(I, S(\mathbb{N}))$  имеет несчетную строгую конфинальность (см. [3, лемма 3.5]).

**Предложение 2.** Пусть  $G$  — несчетная группа. Группа  $G$  имеет несчетную строгую конфинальность тогда и только тогда, когда группа  $G$  имеет конечную ширину и не является объединением счетного числа своих собственных подгрупп (см. [3, 2.2]).

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим группу  $S(\mathbb{N})$  и произвольное непустое множество  $I$ . Тогда декартово произведение  $\text{Fun}(I, S(\mathbb{N}))$  имеет конечную ширину. Это непосредственно следует из предложений 1 и 2.

**ПРИМЕР 2.** Пусть  $G$  — конечная группа, совпадающая со своим коммутантом,  $I$  — непустое множество. Тогда декартово произведение  $\text{Fun}(I, G)$  имеет конечную ширину (см. [4, теорема 4.1]).

Пусть  $X, Y$  — произвольные множества,  $A \leq S(X)$ ,  $B \leq S(Y)$ . Для всякого преобразования  $a \in A$  через  $xa$  будем обозначать образ

элемента  $x \in X$  при отображении  $a$ . Для других групп преобразований будем использовать аналогичные обозначения. *Декартовым сплетением* группы преобразований  $A$  с группой преобразований  $B$  называется группа преобразований  $A\overline{\wedge}B$  множества  $X \times Y$ , состоящая из элементов  $(b, f)$ ,  $b \in B$ ,  $f \in \text{Fun}(Y, A)$ , действующих на  $X \times Y$  по правилу  $(x, y)(b, f) = (xf(yb), yb)$ . Обозначим группу  $\text{Fun}(Y, A)$  символом  $F$ , единицу группы  $B$  — через  $e$ , а единицу группы  $F$  — через  $\varepsilon$ .

**Лемма 1.** В декартовом сплетеении  $A\overline{\wedge}B$  групп преобразований существует такая нормальная подгруппа  $N$ , изоморфная  $F$ , что фактор-группа  $A\overline{\wedge}B/N$  изоморфна группе  $B$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Ясно, что для каждой функции  $f \in F$  и любого преобразования  $b \in B$  правило  $y \mapsto f(yb^{-1})$  определяет функцию  $f^b$  из  $F$ . Известно (см. [8, 6.2.12]), что таблица умножения в группе  $A\overline{\wedge}B$  вычисляется по следующей формуле:

$$(\forall b, b' \in B)(\forall f, f' \in F)(b, f)(b', f') = (bb', f^{b'}f').$$

Из таблицы умножения непосредственно следует, что множества  $(B, \varepsilon)$  и  $(e, F)$  являются подгруппами в  $A\overline{\wedge}B$  и множество  $(B, \varepsilon)(e, F)$  совпадает с  $A\overline{\wedge}B$ . Из таблицы умножения следует также правило для сопряжения:

$$(\forall b \in B)(\forall f \in F) (b, \varepsilon)^{-1}(e, f)(b, \varepsilon) = (e, f^b).$$

Поэтому  $(e, F) \triangleleft A\overline{\wedge}B$ .

Покажем, что  $(B, \varepsilon) \cap (e, F) = \{(e, \varepsilon)\}$ . В самом деле, пусть  $g \in (B, \varepsilon) \cap (e, F)$ . Тогда найдутся такие элементы  $b \in B, f \in F$ , что  $(e, f) = (b, \varepsilon)$ . Следовательно, для любой точки  $(x, y) \in X \times Y$  выполнено  $(xf(y), y) = (x, yb)$ . Поэтому  $yb = y$  для любого  $y$  из  $Y$ . Значит,  $b = e$ , поэтому  $g = (e, \varepsilon)$ .

Итак,  $A\overline{\wedge}B = (e, F) \times (B, \varepsilon)$ . Непосредственно проверяется, что отображения  $B \rightarrow (B, \varepsilon)$  и  $F \rightarrow (e, F)$  по правилам  $b \mapsto (b, \varepsilon)$  и  $f \mapsto (e, f)$  являются изоморфизмами. Тем самым  $N = (e, F)$  — искомая нормальная подгруппа. Лемма доказана.

В 2006 г. Уилсон установил конечную аксиоматизируемость класса конечных разрешимых групп [9]. Будем говорить, что конечная группа

$G$  обладает свойством Уилсона, если существуют элемент  $g$  из  $G \setminus \{1\}$  и наборы  $x, y$  из  $G^{56}$  такие, что  $g = [g^{x_1}, g^{y_1}] \dots [g^{x_{56}}, g^{y_{56}}]$ .

### 3. Матричная представимость групп

Пусть  $D$  — тело,  $V = D^n$  — множество строк длины  $n$ . Превратим множество  $V$  в векторное пространство над телом  $D$ , полагая, что  $dv$  — результат умножения каждого элемента строки  $v$  на скаляр  $d \in D$  слева. Наименьшее подпространство пространства  $V$ , содержащее систему векторов  $W$ , обозначим через  $\langle W \rangle$  и назовем *линейной оболочкой системы*  $W$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $D$  — тело,  $G \leqslant \mathrm{GL}_n(D)$ . Тогда группа  $G$  естественным образом действует на пространстве строк  $D^n$ . Группа  $G$  называется *неприводимой*, если для каждого ненулевого вектора  $v$  линейная оболочка орбиты вектора  $v$  относительно действия группы  $G$  совпадает с  $D^n$ .

**Лемма 2.** Неприводимая абелева подгруппа  $G$  в  $\mathrm{GL}_n(D)$  изоморфна подгруппе мультиплатиновой группы некоторого поля той же характеристики, что и тело  $D$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $F$  — центр тела  $D$ . Обозначим через  $F[G]$  множество конечных линейных комбинаций элементов группы  $G$  с коэффициентами из  $F$ . Ясно, что  $R = F[G]$  — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Покажем, что  $R$  — кольцо без делителей нуля.

Выберем произвольные ненулевые элементы  $a$  и  $b$  в кольце  $R$ . По условию найдется такой вектор  $v$  из  $D^n$ , что  $va \neq 0$ . Тогда линейная оболочка  $\langle \{vag \mid g \in G\} \rangle$  — ненулевое подпространство, инвариантное относительно группы  $G$ . Ввиду неприводимости группы  $G$  заключаем, что  $\langle \{vag \mid g \in G\} \rangle = D^n$ . Так как  $b \neq 0$ , найдется такой элемент  $g_0 \in G$ , что  $vag_0 b \neq 0$ . В частности,  $ag_0 b \neq 0$ , что равносильно соотношению  $ab \neq 0$ , поскольку  $R$  — коммутативное кольцо. Так как ненулевые элементы кольца  $R$  выбраны произвольно, установили, что  $R$  — коммутативное ассоциативное кольцо и без делителей нуля. Известно, что в этом случае существует поле частных  $P$  кольца  $R$  и вложение  $\pi : R \hookrightarrow P$ . Тогда  $G \leqslant R^* \simeq (R\pi)^* \leqslant P^*$ . Лемма доказана.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $V$  — (конечномерное) левое векторное пространство над телом,  $G \leqslant \mathrm{GL}(V)$ . Возьмем в  $V$  неуплотняемую матрешку  $G$ -допустимых подпространств:

$$V = V_0 > V_1 > \cdots > V_r = 0.$$

Очевидно, что  $G$  индуцирует в каждом факторе  $V_i/V_{i+1}$  неприводимую группу  $G|_{V_i/V_{i+1}}$  по формуле

$$(v + V_{i+1})g = vg + V_{i+1}, \quad v \in V_i, \quad g \in G.$$

Естественное отображение

$$G \rightarrow \prod_{i=0}^{r-1} G|_{V_i/V_{i+1}}$$

является гомоморфизмом группы  $G$ . Группы  $G|_{V_i/V_{i+1}}$  называются *неприводимыми частями* группы  $G$ , а прямое произведение

$$\prod_{i=0}^{r-1} G|_{V_i/V_{i+1}}$$

называется *связкой неприводимых частей* группы  $G$ .

#### 4. Теоремы и следствия

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — либо конечная неединичная группа, совпадающая со своим коммутантом, либо группа всех взаимно однозначных отображений бесконечного счетного множества на себя. Пусть  $H$  — бесконечная группа конечной ширины. Тогда декартово сплетение  $G\tilde{\ast} H$  — группа конечной ширины, не имеющая изоморфного представления матрицами над телом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть сначала  $G$  — конечная неединичная группа, совпадающая со своим коммутантом. Рассмотрим декартово произведение  $\mathrm{Fun}(H, G)$ . Известно, что  $\mathrm{Fun}(H, G)$  — группа конечной ширины (см. [4, теорема 4.1]). По определению декартово сплетение  $G\tilde{\ast} H$  — расширение группы конечной ширины с помощью группы, также имеющей конечную ширину. Поэтому  $G\tilde{\ast} H$  — группа конечной ширины (см. [1, лемма 7]). Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Докажем второе утверждение. Предположим, что группа  $G\bar{t}H$  точно представима матрицами степени  $n$  над телом  $D$ . Пусть сначала  $\text{char } D \neq 0$ . Если бы простое число  $\text{char } D$  было единственным простым делителем порядка группы  $G$ , то группа  $G$  была бы  $\text{char } D$ -группой, а также нильпотентной группой, совпадающей со своим коммутантом, что невозможно. Поэтому в группе  $G$  существует элемент  $g$  простого порядка  $p$ , взаимно простого с числом  $\text{char } D$ .

В случае, когда  $\text{char } D = 0$ , в качестве  $g$  возьмем произвольный элемент простого порядка.

Далее, очевидно, что группа  $A = \text{Fun}(H, \text{gr}(g))$  вкладывается в группу  $\text{Fun}(H, G)$ , а группа  $\text{Fun}(H, G)$ , как известно, вкладывается в  $G\bar{t}H$ . Тем самым группа  $A$  точно представима матрицами степени  $n$  над телом  $D$ . Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi$  группы  $A$  на связку неприводимых частей. Пусть  $V = D^n$ . Тогда ядро  $\ker \varphi$  стабилизирует некоторую матрешку подпространств в  $V$ . Выберем базис векторного пространства  $V$ , согласованный с этой матрешкой. В этом базисе матрица каждого оператора из  $\ker \varphi$  имеет блочно-треугольный вид со скалярными клетками по диагонали, причем все скаляры равны 1. Поскольку группа  $\ker \varphi$  состоит из унипотентных матриц, либо  $\ker \varphi$  — группа без кручения, когда  $\text{char } D = 0$ , либо  $\ker \varphi$  —  $q$ -группа, когда  $\text{char } D = q \neq 0$  (см. [10, 1.3.2]). Покажем, что в любом случае  $\ker \varphi = 1$ .

В случае тела нулевой характеристики  $\ker \varphi$  — подгруппа, не имеющая кручения, в периодической группе  $A$ . Следовательно, группа  $\ker \varphi$  тривиальна. В случае тела характеристики  $q \neq 0$  ядро  $\ker \varphi$  —  $q$ -подгруппа в  $p$ -группе. Снова заключаем, что группа  $\ker \varphi$  тривиальна.

Итак, отображение  $\varphi$  является изоморфизмом, поэтому группа  $A$  вкладывается в прямое произведение абелевых неприводимых матричных групп с элементами из тела  $D$ . Каждый сомножитель в указанном прямом произведении вкладывается в мультиликативную группу некоторого поля по лемме 2. Поэтому каждый элемент проекции группы  $A$  на этот сомножитель является корнем многочлена  $x^p - 1$  в указанном поле. В частности, проекция группы  $A$  на любой сомножитель прямого произведения конечна. Следовательно,  $A$  — конечная группа, что противоречит определению группы  $A$ . Полученное противоречие

заканчивает доказательство теоремы 1 в случае конечной группы  $G$ .

Пусть  $G$  — группа всех взаимно однозначных отображений бесконечного счетного множества на себя. Рассмотрим декартово произведение  $\text{Fun}(H, G)$ . Выше показано, что это группа конечной ширины, поэтому так же, как в предыдущем случае, убеждаемся, что  $G\tilde{t}H$  — группа конечной ширины.

Теперь докажем последнее утверждение. Предположим, что группа  $G\tilde{t}H$  изоморфна представима матрицами степени  $n$  над телом  $D$ . Ясно, что группа  $G$  в нее вкладывается, поэтому то же самое можно сказать про группу  $G$ . Рассмотрим две периодические абелевы подгруппы группы  $G$ . Пусть  $A_1$  — группа, порожденная всеми независимыми транспозициями, а  $A_2$  — группа, порожденная всеми независимыми тройными циклами. Обе они не имеют изоморфного представления матрицами над телом нулевой характеристики, как показывают рассуждения, приведенные выше. Точно так же проверяется, что группа  $A_1$  не имеет изоморфного представления матрицами над телом характеристики, отличной от 2, а группа  $A_2$  не имеет изоморфного представления матрицами над телом характеристики, отличной от 3. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.

**Следствие 1.** Пусть  $H$  — бесконечная группа конечной ширины и конечная группа  $G$  обладает свойством Уилсона. Тогда в группе  $G\tilde{t}H$  существует бесконечная подгруппа конечной ширины, не имеющая изоморфного представления матрицами над телом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Согласно результату Уилсона [9] группа  $G$  из условия следствия не является разрешимой. Ввиду конечности группы  $G$  это означает, что матрешка последовательных коммутантов группы  $G$  стабилизируется. Поэтому в группе  $G$  найдется нетривиальная подгруппа  $N$ , совпадающая со своим коммутантром. Кроме того, декартово сплетение  $N\tilde{t}H$  вкладывается в декартово сплетение  $G\tilde{t}H$  (см. [11, 22.12]). Согласно теореме 1 подгруппа группы  $G\tilde{t}H$ , изоморфная группе  $N\tilde{t}H$ , является искомой бесконечной группой конечной ширины, не имеющей изоморфного представления матрицами над телом.

**Теорема 2.** Пусть для любого натурального числа  $i$  группа  $K_i$  обладает следующим свойством: декартово произведение любого числа

копий группы  $K_i$  имеет конечную ширину. Пусть  $G_1 = K_1$ ,  $G_{i+1} = G_i \overline{n} K_{i+1}$ . Пусть  $H$  — группа конечной ширины. Тогда для любого натурального числа  $i$  группа  $G_i \overline{n} H$  имеет конечную ширину.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** будем вести индукцией по  $i$ . Покажем, что  $K_1 \overline{n} H$  — группа конечной ширины. Рассмотрим группы  $K_1$  и  $H$  как группы преобразований множеств  $X$  и  $Y$  соответственно. По условию декартово произведение  $\text{Fun}(Y, K_1)$  — группа конечной ширины. По лемме 1 декартово сплетение  $K_1 \overline{n} H$  содержит нормальную подгруппу, изоморфную  $\text{Fun}(Y, K_1)$ , являющуюся ядром гомоморфизма на группу, изоморфную группе  $H$ . Другими словами,  $K_1 \overline{n} H$  — расширение одной группы конечной ширины с помощью другой группы конечной ширины. Поэтому группа  $K_1 \overline{n} H$  имеет конечную ширину (см. [1, лемма 7]). Основание индукции выполнено.

Пусть уже доказано, что группа  $G_i \overline{n} N$  имеет конечную ширину для любой группы  $N$  конечной ширины. Возьмем произвольную группу  $H$  конечной ширины. Выше показано, что группа  $K_{i+1} \overline{n} H$  имеет конечную ширину. Поэтому по индуктивному предположению группа  $G_i \overline{n} (K_{i+1} \overline{n} H)$  имеет конечную ширину. Так как

$$(G_i \overline{n} K_{i+1}) \overline{n} H \simeq G_i \overline{n} (K_{i+1} \overline{n} H)$$

(см. [8, 6.2.13]), доказательство индуктивного перехода завершено.

**Следствие 2.** Пусть для любого натурального числа  $i$  группа  $K_i$  — либо конечная неединичная группа, совпадающая со своим коммутантом, либо группа всех взаимно однозначных отображений бесконечного счетного множества на себя. Пусть  $H$  — бесконечная группа конечной ширины,  $G_1 = K_1$ ,  $G_{i+1} = G_i \overline{n} K_{i+1}$ . Тогда для любого натурального числа  $i$  группа  $G_i \overline{n} H$  имеет конечную ширину и не имеет изоморфного представления матрицами над телом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $H$  — произвольная бесконечная группа конечной ширины,  $i$  — произвольное натуральное число. Рассмотрим группу  $H$  как подгруппу в  $S(Y)$ , где  $Y$  — некоторое множество. Если бы  $Y$  было конечным множеством, то группа  $S(Y)$  была бы конечной группой, содержащей бесконечную подгруппу  $H$ , что невозможно. Итак,  $Y$  — бесконечное множество. При доказательстве теоремы 1 показано, в частности, что декартово произведение  $\text{Fun}(Y, G_i)$  не имеет

изоморфного представления матрицами над телом. По лемме 1 последняя группа вкладывается в группу  $G_i \overline{n} H$ , поэтому это декартово сплетение групп преобразований также не имеет изоморфного представления матрицами над телом.

Наконец, примеры 1 и 2 показывают, что семейство групп  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  удовлетворяет условию теоремы 2. Поэтому группа  $G_i \overline{n} H$  имеет конечную ширину. Бесконечная группа  $H$  конечной ширины и натуральное число  $i$  выбраны произвольно. Следствие доказано.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bergman G. Generating infinite symmetric groups // Bull. London Math. Soc. 2006. V. 38. P. 429–440.
2. Droste M., Holland W. C. Generating automorphism groups of chains // Forum Math. 2005. V. 17. P. 699–710.
3. Droste M., Göbel R. Uncountable cofinalities of permutation groups // J. London Math. Soc. 2005. V. 71. P. 335–344.
4. Cornulier Y. de. Strongly bounded groups and infinite powers of finite groups // Comm. Algebra. 2006. V. 34. P. 2337–2345.
5. Толстых В. А. Группы автоморфизмов относительно свободных групп бесконечного ранга // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. № 1. С. 24–48.
6. Tolstykh V. On the Bergman property for the automorphism groups of relatively free groups // J. London Math. Soc. 2006. V. 73. P. 669–680.
7. Коробов А. А. Сплетение групп, имеющее конечную ширину // Междунар. конф. Алгебра и ее приложения. Тез. докл. Красноярск: Сиб. фед. ун-т, 2007. С. 76–77.
8. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1996.
9. Wilson J. S. Finite axiomatization of finite soluble groups // J. London Math. Soc. 2006. V. 74, N 3. P. 566–582.
10. Shirvani M., Wehrfritz B. A. F. Skew linear groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.
11. Нейман Х. Многообразия групп. М.: Мир, 1969.

СЕКВЕНЦИАЛЬНО ЗАМКНУТОЕ СЧЕТНОЕ  
ПЛОТНОЕ ПОДМНОЖЕСТВО В  $I^I$

С. А. Малюгин

Пусть  $I = [0, 1]$  — замкнутый единичный отрезок в  $\mathbb{R}$ . Через  $I^I$  обозначим топологическое пространство всех функций из  $I$  в  $I$  с топологией поточечной сходимости (тихоновской топологией). Хорошо известно [1, следствие из теоремы 2.3.15], что это пространство сепарабельно. В 1968 г. В. М. Пристли [2] поставил вопрос о существовании счетного подмножества  $S \subset I^I$ , являющегося одновременно плотным и секвенциальном замкнутым в  $I^I$  (секвенциальная замкнутость  $S$  означает, что если последовательность функций  $f_n \in S$  сходится поточечно к  $f$ , то  $f \in S$ ). Положительный ответ на такой вопрос был получен этим же автором в [3]. В качестве элементов множества  $S$  он рассматривает функции вида  $f_n(t) = (nt)$ , определенные на множестве  $J$ , являющимся максимальным множеством иррациональных линейно независимых над  $\mathbb{Z}$  чисел отрезка  $I$  (символ  $(nt)$  означает дробную часть числа  $nt$ ). Для доказательства секвенциальной замкнутости множества  $S = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  используется довольно тонкий результат Харди — Литтлвуда [4, теорема 1.40], а также теорема Серпинского [5] о существовании в  $\mathbb{R}$  базиса Гамеля над полем  $\mathbb{Q}$ , являющегося неизмеримым по Лебегу подмножеством. Совершенно ясно, что в такого типа конструкциях используется аксиома выбора. Поиски в интернете показали, что в математической литературе не появлялось других решений задачи Пристли. В настоящей заметке мы предлагаем другое, более элементарное решение этой задачи, в котором аксиома выбора не применяется (даже в более слабой форме, известной как аксиома счетного выбора, которая часто применяется в теории меры без каких либо оговорок). Иначе говоря, построение искомого множества  $S$  и доказа-

тельство его свойств проводится в рамках теории множеств Цермело — Френкеля  $ZF$ .

Зафиксируем некоторое число  $0 < \delta < 1/8$ . Для любого  $m \in \mathbb{N}$  и любых последовательностей рациональных чисел  $A = (a_k)_{k=1}^m$ ,  $B = (b_k)_{k=1}^m$ ,  $C = (c_k)_{k=1}^m$  из  $I$  таких, что

$$0 \leq a_1 < b_1 < \dots < a_m < b_m \leq 1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta, \quad (*)$$

рассмотрим функции

$$f_{m,A,B,C}(x) = \begin{cases} c_k, & \text{если } x \in [a_k, b_k] \text{ при некотором } 1 \leq k \leq m, \\ 0, & \text{если } x \in I \setminus \bigcup_{k=1}^m [a_k, b_k]. \end{cases}$$

Множество всех таких функций счетно, поэтому их можно занумеровать в одну последовательность. Обозначим  $\tilde{f}_n = f_{m_n, A_n, B_n, C_n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Обозначим через  $\lambda$  обычную меру Лебега на отрезке  $I$ . Если обозначить через  $\text{supp } f$  носитель функции  $f$ , то условие  $(*)$  означает, что  $\lambda(\text{supp } \tilde{f}_n) < \delta$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Для любого  $n \in \mathbb{N}$  положим  $g_n = (1 + \text{rad}_n)/2$ , где  $\text{rad}_n(x) = \text{sign}(\sin 2^n \pi x)$  — функции Радемахера. Из ортогональности функций Радемахера следуют равенства  $\|g_n - g_m\|_1 = \|g_n - g_m\|_2^2 = (\|g_n\|_2^2 + \|g_m\|_2^2)/4 = 1/2$  для всех  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq n$ , где  $\|\cdot\|_p$  — обычная  $L_p$ -норма в пространстве  $L_p(I)$ . Рассмотрим исковую последовательность функций

$$h_n(x) = \begin{cases} \tilde{f}_n(x), & \text{если } x \in \text{supp } \tilde{f}_n, \\ g_n(x), & \text{если } x \in I \setminus \text{supp } \tilde{f}_n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Основной результат теперь формулируется следующим образом:

**Теорема 1.** *Множество функций  $S = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$  плотно в пространстве  $I^I$  и не содержит ни одной нетривиальной сходящейся подпоследовательности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства плотности множества  $S$  необходимо для любого  $\varepsilon > 0$  и любых двух конечных последовательностей различных точек  $(x_k)_{k=1}^m \subset I$ ,  $(y_k)_{k=1}^m \subset I$  подобрать функцию

$h_n \in S$  такую, что  $|y_k - h_n(x_k)| < \varepsilon$  для всех  $k = 1, \dots, m$ . Так как множество рациональных чисел плотно в отрезке  $I$ , можно подобрать конечные последовательности рациональных чисел  $A = (a_k)_{k=1}^m$ ,  $B = (b_k)_{k=1}^m$ ,  $C = (c_k)_{k=1}^m$  из  $I$  такие, что  $|y_k - c_k| < \varepsilon$  для всех  $k = 1, \dots, m$  и  $a_1 \leq x_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_m \leq x_m \leq b_m$  (можно считать, что последовательность точек  $(x_k)_{k=1}^m$  упорядочена по возрастанию). Кроме того, выбирая точки  $a_k, b_k$  из окрестностей  $(x_k - \delta/2m, x_k + \delta/2m)$  ( $k = 1, \dots, m$ ), можно считать, что выполнено также условие (\*). Поэтому функция  $f_{m,A,B,C}$  приобретает в проведенной ранее нумерации некоторый номер  $n$  и по построению функции  $h_n$  получаем  $|h_n(x_k) - y_k| < \varepsilon$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Плотность множества  $S \subset I^I$  доказана.

Отсутствие нетривиальных сходящихся подпоследовательностей получается из следующих оценок:

$$\begin{aligned} \|h_n - h_m\|_1 &\geq \|g_n - g_m\|_1 - \|h_n \cdot \chi_{\text{supp } \tilde{f}_n}\|_1 - \|h_m \cdot \chi_{\text{supp } \tilde{f}_m}\|_1 - \|\tilde{f}_n\|_1 - \|\tilde{f}_m\|_1 \\ &\geq \frac{1}{2} - 4\delta = \delta_1 > 0 \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m \neq n. \end{aligned}$$

Здесь через  $\chi_A$  мы обозначаем характеристическую функцию множества  $A \subset I$ . Предположим противное. Пусть нетривиальная подпоследовательность  $h_{n_k}(x)$  сходится для всех  $x \in I$  к некоторой функции  $h(x)$ . Переходя к подпоследовательности  $k_i$ , можно считать, что  $h_{n_{k_i}} \neq h_{n_{k_j}}$  для всех  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i \neq j$  (аксиома выбора для этого не требуется). Обозначим  $u_i = h_{n_{k_i}} - h_{n_{k_{i+1}}}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ). С одной стороны, последовательность  $u_i$  сходится поточечно к нулю, с другой стороны, имеем оценку  $\|u_i\| \geq \delta_1 > 0$  ( $i \in \mathbb{N}$ ). К сожалению, мы не можем сразу сослаться на теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, так как в доказательстве этой теоремы используется аксиома счетного выбора. Эта аксиома необходима, например, для доказательства счетной аддитивности меры Лебега, так как утверждение о том, что вещественная прямая  $\mathbb{R}$  является счетным объединением счетных множеств, не противоречит аксиомам теории  $ZF$  (см. [6, теорема 10.6]). Но в нашей ситуации функции  $u_i$  ступенчатые, т. е. имеют вид  $\sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \chi_{A_k}$ , где  $\alpha_k \in I$  и  $A_k$  — некоторые интервалы в  $I$ . Иначе говоря, все рассматриваемые интегралы являются на самом деле конечными интегральными суммами Римана. Поэтому сошлемся на

приводимую ниже упрощенную формулировку теоремы Лебега (теорему 2), в силу которой условия  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x) = 0$  ( $x \in I$ ) и  $\|u_i\| \geq \delta_1$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) противоречивы. Теорема 1 доказана.

В заключение приведем обещанную формулировку теоремы Лебега для интеграла Римана, которая доказывается средствами теории множеств Цермело — Френкеля.

**Теорема 2.** Пусть объединение множеств точек разрыва (в смысле определения Коши) функций  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) имеет нулевую меру Лебега. Если при некотором  $C > 0$  выполняется  $|f_n(x)| \leq C$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in [a, b]$ ) и последовательность  $f_n$  сходится почти всюду к интегрируемой по Риману функции  $f$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы, так как оно незначительно отличается от традиционного доказательства теоремы Лебега. Необходимо только аккуратно проследить за тем, чтобы в процессе доказательства нигде не была использована аксиома счетного выбора.

Выражаю благодарность А. Е. Гутману, заинтересовавшему меня задачей Пристли.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
2. Priestley W. M. Nets and sequences, an example // Amer. Math. Monthly 1968. V. 75. P. 1098–1099.
3. Priestley W. M. A sequentially closed conutable dense subset of  $I^I$  // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 24, N 2. P. 270–271.
4. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of Diophantine approximation. I // Acta Math. 1914. V. 37. P. 155–191.
5. Sierpiński W. Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel // Fund. Math. 1920. V. 1. P. 105–111.
6. Jech T. J. The axiom of choice. Amsterdam: North-Holland, 1973.

УДК 512.543.1

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ\*)

Г. В. Намсараева

Работа посвящена исследованию разрешимости линейных обратных задач для псевдопарabolических уравнений (называемых также уравнениями соболевского типа). Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть такие задачи, в которых вместе с решением неизвестными являются те или иные коэффициенты самого уравнения или (и) его правая часть (внешнее воздействие). В случае если неизвестны коэффициенты, обратная задача нелинейна, если же неизвестна правая часть, то обратная задача линейна (именно такая задача рассматривается в настоящей работе).

Исследованиям разрешимости обратных задач посвящены многочисленные работы как математиков, так и специалистов по математическому моделированию. Все эти работы перечислить невозможно, но как наиболее близкие по постановке задач и используемым методам отметим монографии [1–5]. Рассматриваемые в работе уравнения сами по себе изучаются также довольно давно (см., например, [5–10]), но исследованиям именно обратных задач для таких уравнений посвящено сравнительно мало работ, отметим лишь [11–14].

Пусть  $\Omega$  — интервал  $(0, 1)$  оси  $Ox$ ,  $Q$  — прямоугольник  $\Omega \times (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ ,  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $h(x, t)$ ,  $h_1(x, t)$ ,  $h_2(x, t)$  — известные функции, определенные при  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ .

**Обратная задача I.** Найти функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$ , связанные в

---

\*) Работа выполнена в рамках проекта «Государственное задание высшим учебным заведениям (2012–2014 гг.) для проведения НИР» (код проекта № 1.926.2011).

прямоугольнике  $Q$  уравнением

$$u_t - u_{xxt} + a(x, t)u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции  $u(x, t)$  условий

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (4)$$

**Обратная задача II.** Найти функции  $u(x, t)$ ,  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$ , связанные в прямоугольнике  $Q$  уравнением

$$u_t - u_{xxt} + a(x, t)u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) + q_1(t)h_1(x, t) + q_2(t)h_2(x, t), \quad (5)$$

при выполнении для функции  $u(x, t)$  условий

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (6)$$

а также условий (2) и (3).

В рассматриваемых обратных задачах (2) и (3) суть условия обычной первой начально-краевой задачи для псевдопарabolического уравнения (1) (или (5)) с известной правой частью, условия же (4) и (6) можно трактовать как условия переопределения. Необходимость этих условий диктуется именно наличием неизвестных коэффициентов  $q(t)$  или  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$ . Заметим, что ранее обратные задачи для псевдопарabolических уравнений с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной  $t$ , изучались лишь в случае переопределения интегрального вида [11–14]. Кроме того, обратная задача с неизвестной правой частью составного типа ранее не изучалась.

Выполним некоторые формальные построения, касающиеся задачи I. Положим в уравнении (1)  $x = 0$ . Пусть выполняется условие  $h(0, t) \neq 0$ . Тогда из равенства

$$u_t(0, t) - u_{xxt}(0, t) + a(0, t)u_{xx}(0, t) + c(0, t)u(0, t) = f(0, t) + q(t)h(0, t)$$

можно найти  $q(t)$ :

$$q(t) = \frac{-u_{xxt}(0, t) + a(0, t)u_{xx}(0, t) - f(0, t)}{h(0, t)}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} c_1(x, t) &= \frac{-h(x, t)}{h(0, t)}, & c_2(x, t) &= \frac{a(0, t)h(x, t)}{h(0, t)}, \\ f_1(x, t) &= f(x, t) - \frac{f(0, t)h(x, t)}{h(0, t)}. \end{aligned}$$

Получим

$$u_t - u_{xxt} + a(x, t)u_{xx} + c(x, t)u = c_1(x, t)u_{xxt}(0, t) + c_2(x, t)u_{xx}(0, t) + f_1(x, t). \quad (7)$$

Положим в уравнении (7)  $x = 1$ . Получим

$$\begin{aligned} u_t(1, t) - u_{xxt}(1, t) + a(1, t)u_{xx}(1, t) + c(1, t)u(1, t) \\ = c_1(1, t)u_{xxt}(0, t) + c_2(1, t)u_{xx}(0, t) + f_1(1, t). \end{aligned}$$

Следовательно, для функции  $v(x, t) = u_{xx}(x, t)$  выполняется условие

$$-v_t(1, t) + a(1, t)v(1, t) = c_1(1, t)v_t(0, t) + c_2(1, t)v(0, t) + f_1(1, t). \quad (8)$$

Продифференцируем уравнение (7) по  $x$  и положим  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} u_{xt}(0, t) - u_{xxtt}(0, t) + a_x(0, t)u_{xx}(0, t) + a(0, t)u_{xxx}(0, t) + c_x(0, t)u(0, t) \\ + c(0, t)u_x(0, t) = c_{1x}(0, t)u_{xxt}(0, t) + c_{2x}(0, t)u_{xx}(0, t) + f_{1x}(0, t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} -v_{xt}(0, t) &= -a_x(0, t)v(0, t) - a(0, t)v_x(0, t) + c_{1x}(0, t)v_t(0, t) \\ &\quad + c_{2x}(0, t)v(0, t) + f_{1x}(0, t). \end{aligned} \quad (9)$$

Дважды продифференцируем уравнение (7) по  $x$ . Получим

$$\begin{aligned} v_t - v_{xxt} + a_{xx}v + 2a_xv_x + av_{xx} + c_{xx}u + 2c_xu_x + cv \\ = c_{1xx}(x, t)v_t(0, t) + c_{2xx}(x, t)v(0, t) + f_{1xx}(x, t). \end{aligned} \quad (10)$$

В результате пришли к нелокальной задаче для функций  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$ . С помощью решения этой задачи и будет построено решение исходной обратной задачи.

Введем еще обозначения:

$$b_1(x, t) = a_{xx}(x, t) + c(x, t), \quad b_2(x, t) = 2a_x(x, t), \quad b_3(x, t) = a(x, t),$$

$$b_4(x, t) = 2c_x(x, t), \quad b_5(x, t) = c_{xx}(x, t),$$

$$F_1(x, t) = c_{1xx}(x, t)v_t(0, t) + c_{2xx}(x, t)v(0, t) + f_{1xx}(x, t),$$

$$\gamma_1(t) = -a(1, t), \quad \gamma_2(t) = c_1(1, t), \quad \gamma_3(t) = c_2(1, t),$$

$$\eta_1(t) = -a(0, t), \quad \eta_2(t) = c_{1x}(0, t), \quad \eta_3(t) = c_{2x}(0, t) - a_x(0, t),$$

$$\varphi_1(t) = f_1(1, t), \quad \psi_1(t) = f_{1x}(0, t).$$

Поскольку построенная нелокальная задача для уравнений вида (1) ранее не изучалась, исследуем ее независимо от исходной обратной задачи.

Пусть  $b_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $F_1(x, t)$  — заданные функции, определенные при  $(x, t) \in \overline{Q}$ ,  $\eta_j(t)$ ,  $\gamma_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\psi_1(t)$  — заданные функции, определенные при  $t \in [0, T]$ .

**Нелокальная задача I.** Найти функции  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$v_t - v_{xxt} + b_1(x, t)v + b_2(x, t)v_x + b_3(x, t)v_{xx} + b_4(x, t)u_x + b_5(x, t)u = F_1(x, t), \quad (11)$$

$$v = u_{xx}, \quad (12)$$

а также условиям

$$-v_t(1, t) = \gamma_1(t)v(1, t) + \gamma_2(t)v_t(0, t) + \gamma_3(t)v(0, t) + \varphi_1(t), \quad 0 < t < T, \quad (13)$$

$$-v_{xt}(0, t) = \eta_1(t)v_x(0, t) + \eta_2(t)v_t(0, t) + \eta_3(t)v(0, t) + \psi_1(t), \quad 0 < t < T, \quad (14)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (15)$$

$$u(1, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (16)$$

Определим для дальнейшего исследования пространство

$$V = \left\{ v(x, t) : \int_Q (v_t^2 + v_x^2 + v_{xx}^2) dx dt < +\infty \right\}.$$

Положим

$$\bar{\gamma}_2 = \max_{0 \leq t \leq T} |\gamma_2(t)|, \quad k_1 = 1 - \delta_1^2 \bar{\gamma}_2 \delta_2,$$

$$k_2 = 2 - \frac{\bar{\gamma}_2 \delta_2}{\delta_1^2} - \bar{\gamma}_2 \delta_1^2 \left(1 + \frac{1}{\delta_2}\right), \quad k_3 = 1 - \frac{\bar{\gamma}_2}{\delta_1^2} \left(1 + \frac{1}{\delta_2}\right).$$

Здесь  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия

$$b_i(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (17)$$

$$F_1(x, t) \in L_2(Q), \quad \varphi_1(t) \in L_2([0, T]), \quad \psi_1(t) \in L_2([0, T]), \quad (18)$$

$$\eta_2(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (19)$$

и существуют положительные числа  $\delta_1$  и  $\delta_2$  такие, что

$$k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad k_3 > 0. \quad (20)$$

Тогда нелокальная задача (11)–(16) имеет решение  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  такое, что  $u(x, t) \in V$ ,  $v(x, t) \in V$ .

**Доказательство.** Установим наличие подходящих априорных оценок решений настоящей задачи.

Умножим уравнение (11), записанное в переменных  $x$  и  $\tau$ , на функцию  $v_\tau - v_{xx\tau}$  и результат проинтегрируем от 0 до  $t$  по временной переменной  $t$  и от 0 до 1 по пространственной  $x$ . Выполнив дополнительно интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^1 v_{xx\tau}^2 dx d\tau + 2 \int_0^t \int_0^1 v_{x\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 v_\tau^2 dx d\tau \\ & - 2 \int_0^t v_{x\tau}(1, \tau) v_\tau(1, \tau) d\tau + 2 \int_0^t v_{x\tau}(0, \tau) v_\tau(0, \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^1 b_1 v_{xx} v_\tau dx d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_0^1 b_2 v_x v_\tau \, dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 b_3 v v_\tau \, dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 b_4 u_x v_\tau \, dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 b_5 v_\tau \, dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 b_1 v_{xx} v_{x\tau} \, dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 b_2 v_x v_{x\tau} \, dx d\tau \\
& - \int_0^t \int_0^1 b_3 v v_{x\tau} \, dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 b_4 u_x v_{x\tau} \, dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 b_5 u v_{x\tau} \, dx d\tau \\
& = \int_0^t \int_0^1 F_1(v_\tau - v_{x\tau}) \, dx d\tau.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись краевыми условиями (13) и (14), условиями теоремы, неравенством Юнга, неравенством

$$\omega^2(x) \leq \delta \int_0^1 \omega'^2(x) \, dx + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \int_0^1 \omega^2(x) \, dx, \quad (*)$$

справедливым при всех  $x \in [0, 1]$  (здесь  $\delta$  — произвольное положительное число), а также представлением

$$v(x, \tau) = \int_0^\tau v_\xi(x, \xi) \, d\xi,$$

получим, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
& (k_1 - \delta_0) \int_0^t \int_0^1 v_{xx\tau}^2 \, dx d\tau + (k_2 - \delta_0) \int_0^t \int_0^1 v_{x\tau}^2 \, dx d\tau + (k_3 - \delta_0) \int_0^t \int_0^1 v_\tau^2 \, dx d\tau \\
& \leq C_1 \left( \int_0^t \int_0^T \int_0^1 v_{xx\xi}^2(x, \xi) \, dx d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^T \int_0^1 v_{x\xi}^2(x, \xi) \, dx d\xi d\tau \right. \\
& \quad \left. + \int_0^t \int_0^T \int_0^1 v_\xi^2(x, \xi) \, dx d\xi d\tau \right) + C_2 \left( \int_0^T (\varphi_1^2(t) + \psi_1^2(t)) \, dt + \int_Q F_1^2(t) \, dx dt \right),
\end{aligned}$$

в котором  $\delta_0$  — произвольное положительное число, числа  $C_1$  и  $C_2$  определяются функциями  $b_j(x, t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $\eta_i(x, t)$ ,  $\gamma_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Поскольку числа  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  положительны, фиксируя  $\delta_0$  настолько малым, чтобы выполнялось

$$k_1 - \delta_0 > 0, \quad k_2 - \delta_0 > 0, \quad k_3 - \delta_0 > 0,$$

получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^1 (v_{xx\tau}^2 + v_{x\tau}^2 + v_\tau^2) dx d\tau \\ & \leq C_3 \int_0^t \int_0^T \int_0^1 (v_{xx\xi}^2(x, \xi) + v_{x\xi}^2(x, \xi) + v_\xi^2(x, \xi)) dx d\xi d\tau \\ & \quad + C_4 \left( \int_0^T (\varphi_1^2(t) + \psi_1^2(t)) dt + \int_Q F_1^2(t) dx dt \right). \end{aligned}$$

Применив лемму Гронуолла, приходим к априорной оценке

$$\int_0^t \int_0^1 (v_{xx\tau}^2 + v_{x\tau}^2 + v_\tau^2) dx d\tau \leq C_0 \left( \int_0^T (\varphi_1^2(t) + \psi_1^2(t)) dt + \int_Q F_1^2(t) dx dt \right), \quad (21)$$

в которой число  $C_0$  определяется функциями  $b_j(x, t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $\eta_i(x, t)$ ,  $\gamma_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а также числом  $T$ .

Из (21) следует очевидная оценка

$$\|v\|_V^2 + \|u\|_V^2 \leq M \left( \int_0^T (\varphi_1^2(t) + \psi_1^2(t)) dt + \int_Q F_1^2(t) dx dt \right). \quad (22)$$

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть  $\lambda \in [0, 1]$ . Рассмотрим задачу: найти функции  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$ , удовлетворяющие в прямоугольнике  $Q$  уравнению

$$\begin{aligned} & v_t - v_{xxt} + b_1(x, t)v + b_2(x, t)v_x + b_3(x, t)v_{xx} \\ & = F_1(x, t) - \lambda[b_4(x, t)u_x + b_5(x, t)u], \quad (11_\lambda) \end{aligned}$$

а также условиям

$$-v_t(1, t) = \lambda[\gamma_1(t)v(1, t) + \gamma_2(t)v_t(0, t) + \gamma_3(t)v(0, t)] + \varphi_1(t), \quad 0 < t < T, \quad (13_\lambda)$$

$$-v_{xt}(0, t) = \lambda[\eta_1(t)v_x(0, t) + \eta_2(t)v_t(0, t) + \eta_3(t)v(0, t)] + \psi_1(t), \quad 0 < t < T, \quad (14_\lambda)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$u(1, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T.$$

Обозначим через  $\Lambda$  множество тех чисел  $\lambda$ , для которых краевая задача  $(11_\lambda)$ ,  $(13_\lambda)$ ,  $(14_\lambda)$ ,  $(12)$ ,  $(15)$  и  $(16)$  разрешима в пространстве  $V$  для произвольной функции  $F(x, t) \in L_2(Q)$  и функций  $\varphi_1(t)$  и  $\psi_1(t)$  из пространства  $L_2([0, T])$ . Если будет доказано, что множество  $\Lambda$  непусто, открыто и замкнуто (в топологии отрезка  $[0, 1]$ ), то оно будет совпадать со всем отрезком  $[0, 1]$  [15].

Непустота  $\Lambda$  очевидна, так как число 0 принадлежит ему [10]. Открытость и замкнутость следуют из априорных оценок, полученных выше.

Отсюда по теореме о методе продолжения по параметру [15] краевая задача  $(11_\lambda)$ ,  $(13_\lambda)$ ,  $(14_\lambda)$ ,  $(12)$ ,  $(15)$ ,  $(16)$  разрешима для  $\lambda \in [0, 1]$ . Теорема доказана.

Вернемся к нелокальной задаче, полученной редукцией исходной обратной задачи. Положим

$$\bar{c}_1 = \max_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant t \leqslant T}} |c_{1xx}(x, t)|,$$

$$k'_1 = k_1 - \frac{\delta_3^2 \bar{c}_1}{2}, \quad k'_2 = k_2 - \frac{\bar{c}_1 \delta_4}{\delta_3^2}, \quad k'_3 = k_3 - \frac{\bar{c}_1}{2\delta_3^2} \left(1 + \frac{1}{\delta_4}\right).$$

Здесь  $\delta_3$  и  $\delta_4$  — некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

Сформулируем теорему существования решения для задачи: *найти функции  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$ , которые удовлетворяют уравнениям (10) и (12), а также условиям (8), (9), (15) и (16).*

**Теорема 1'.** Пусть выполняются условия

$$h(0, t) \neq 0, \quad h(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad t \in [0, T], \quad (23)$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_x(x, t) \in L_2(Q), \quad f_{xx}(x, t) \in L_2([0, T]), \quad (24)$$

$$a(x, t), c(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad c_{1xx}(x, t) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad (25)$$

и существуют положительные числа  $\delta_3$  и  $\delta_4$  такие, что

$$k'_1 > 0, \quad k'_2 > 0, \quad k'_3 > 0. \quad (26)$$

Тогда нелокальная задача (10), (12), (8), (9), (15) и (16) имеет решение  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$  такое, что  $v(x, t) \in V$  и  $u(x, t) \in V$ .

**Доказательство.** Повторяя доказательство теоремы 1, т. е. умножая уравнение (10), записанное в переменных  $x$  и  $\tau$ , на функцию  $v_\tau - v_{xx\tau}$  и интегрируя результат от 0 до  $t$  по временной переменной и от 0 до 1 по пространственной, воспользовавшись краевыми условиями (8) и (9), условиями теоремы, неравенством Юнга, неравенством (\*), представлением

$$v(x, \tau) = \int_0^\tau v_\xi(x, \xi) d\xi,$$

а также леммой Гронулла, придем к оценке вида (22). Из этой оценки и теоремы о методе продолжения по параметру следует разрешимость задачи (10), (12), (8), (9), (15), (16).

Теорема доказана.

Перейдем к изучению разрешимости исходной обратной задачи I.

**Теорема 2.** Пусть выполняются все условия теоремы 1'. Тогда обратная задача I имеет решение  $u(x, t)$  и  $q(t)$  такое, что  $u(x, t) \in V$ ,  $q(t) \in L_2([0, T])$ .

**Доказательство.** Пусть  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  — функции, являющиеся решением нелокальной задачи (10), (12), (8), (9), (15) и (16). Положим

$$\begin{aligned} w(x, t) = & u_t(x, t) - u_{xxt}(x, t) + a(x, t)u_{xx}(x, t) + c(x, t)u(x, t) \\ & - f_1(x, t) - c_1(x, t)u_{xxt}(0, t) + c_2(x, t)u_{xx}(0, t). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} w_{xx}(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in Q, \\ w_x(0, t) &= w(1, t) = 0, \quad 0 < t < T. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что  $w(x, t) \equiv 0$  в  $Q$ . Положим

$$q(t) = \frac{-u_{xxt}(0, t) + a(0, t)u_{xx}(0, t) - f(0, t)}{h(0, t)}.$$

Очевидно, что функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$  связаны в прямоугольнике  $Q$  уравнением (1). Осталось показать, что выполняется условие  $u(0, t) = 0$ . Положим в (1)  $x = 0$ . Получим  $u_t(0, t) + c(0, t)u(0, t) = 0$ . Из этого равенства и условия  $u(0, 0) = 0$  следует  $u(0, t) = 0$ . Принадлежность  $u(x, t)$  и  $q(t)$  требуемым классам очевидна. Теорема доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** На самом деле доказано, что решение  $u(x, t)$  будет таким, что функция  $u_{xx}(x, t)$  также является элементом пространства  $V$ .

Приведем еще один вариант теоремы о разрешимости обратной задачи I.

Вновь начнем с формальных построений. Продифференцируем уравнение (1) по переменной  $x$  и положим  $x = 0$ . Считая, что выполняется условие  $h_x(0, t) \neq 0$ , вычислим  $q(t)$ :

$$q(t) = \frac{-u_{xxxt}(0, t) + a_x(0, t)u_{xx}(0, t) + a(0, t)u_{xxx}(0, t) - f_x(0, t)}{h_x(0, t)}.$$

Положим  $v(x, t) = u_{xx}(x, t)$ . Тогда  $q(t)$  можно записать в виде

$$q(t) = \frac{-v_{xt}(0, t) + a_x(0, t)v(0, t) + a(0, t)v_x(0, t) - f_x(0, t)}{h_x(0, t)}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= \frac{-h(x, t)}{h_x(0, t)}, \quad a_2(x, t) = \frac{a(0, t)h(x, t)}{h_x(0, t)}, \\ a_3(x, t) &= \frac{a_x(0, t)h(x, t)}{h_x(0, t)}, \quad f_2(x, t) = f(x, t) - \frac{f_x(0, t)h(x, t)}{h_x(0, t)}. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} u_t - v_t + a(x, t)v + c(x, t)u \\ = a_1(x, t)v_{xt}(0, t) + a_2(x, t)v_x(0, t) + a_3(x, t)v(0, t) + f_2(x, t). \end{aligned} \quad (27)$$

Пусть в уравнении (27)  $x = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} u_t(0, t) - v_t(0, t) + a(0, t)v(0, t) + c(0, t)u(0, t) \\ = a_1(0, t)v_{xt}(0, t) + a_2(0, t)v_x(0, t) + a_3(0, t)v(0, t) + f_2(0, t). \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется условие

$$\begin{aligned} -v_t(0, t) = -a(0, t)v(0, t) + a_1(0, t)v_{xt}(0, t) + a_2(0, t)v_x(0, t) \\ + a_3(0, t)v(0, t) + f_2(0, t). \quad (28) \end{aligned}$$

Положим в (27)  $x = 1$ :

$$\begin{aligned} u_t(1, t) - v_t(1, t) + a(1, t)v(1, t) + c(1, t)u(1, t) \\ = a_1(1, t)v_{xt}(0, t) + a_2(1, t)v_x(0, t) + a_3(1, t)v(0, t) + f_2(1, t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} -v_t(1, t) = -a(1, t)v(0, t) + a_1(1, t)v_{xt}(0, t) \\ + a_2(1, t)v_x(0, t) + a_3(1, t)v(0, t) + f_2(1, t). \quad (29) \end{aligned}$$

Дважды продифференцируем уравнение (27) по  $x$ :

$$\begin{aligned} v_t - v_{xxt} + a_{xx}v + 2a_xv_x + av_{xx} + c_{xx}u + 2c_xu_x + cv \\ = a_{1xx}(x, t)v_{xt}(0, t) + a_{2xx}(x, t)v_x(0, t) + a_{3xx}(x, t)v(0, t) + f_{2xx}(x, t). \quad (30) \end{aligned}$$

В результате пришли к нелокальной задаче для функций  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$ . С помощью решения этой задачи и будет построено решение исходной обратной задачи.

Введем еще обозначения:

$$d_1(x, t) = a_{xx}(x, t) + c(x, t), \quad d_2(x, t) = 2a_x(x, t), \quad d_3(x, t) = a(x, t),$$

$$d_4(x, t) = 2c_x(x, t), \quad d_5(x, t) = c_{xx}(x, t),$$

$$F_2(x, t) = a_1(x, t)v_{xt}(0, t) + a_2(x, t)v_x(0, t) + a_3(x, t)v(0, t) + f_2(x, t),$$

$$\alpha_1(t) = a_1(0, t), \quad \alpha_2(t) = a_2(0, t), \quad \alpha_3(t) = a_3(0, t) - a(0, t),$$

$$\beta_1(t) = a_1(1, t), \quad \beta_2(t) = a_2(1, t), \quad \beta_3(t) = a_3(1, t) - a(1, t),$$

$$\varphi_2(t) = f_2(0, t), \quad \psi_2(t) = f_2(1, t).$$

Изучим нелокальную задачу в общем виде независимо от исходной обратной задачи.

Пусть  $d_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $F_2(x, t)$  — заданные функции, определенные при  $(x, t) \in \bar{Q}$ ,  $\alpha_j(t)$ ,  $\beta_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\varphi_2(t)$ ,  $\psi_2(t)$  — заданные функции, определенные при  $t \in [0, T]$ .

**Нелокальная задача II.** Найти функции  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$v_t - v_{xxt} + d_1(x, t)v_{xx} + d_2(x, t)v_x + d_3(x, t)v + d_4(x, t)u_x + d_5(x, t)u = F_2(x, t), \quad (31)$$

$$v = u_{xx}, \quad (32)$$

а также условиям

$$-v_t(0, t) = \alpha_1(t)v_{xt}(0, t) + \alpha_2(t)v_x(0, t) + \alpha_3(t)v(0, t) + \varphi_2(t), \quad (33)$$

$$-v_t(1, t) = \beta_1(t)v_{xt}(0, t) + \beta_2(t)v_x(0, t) + \beta_3(t)v(0, t) + \psi_2(t), \quad (34)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (35)$$

$$u(1, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (36)$$

Положим  $\bar{\beta}_1 = \max_{0 \leq t \leq T} |\beta_1(t)|$ ,

$$m_1 = 1 - \delta_5^2 \delta_6 - \frac{\bar{\beta}_1 \delta_6}{\delta_5^2}, \quad m_2 = 2 - \delta_5^2 \left(1 + \frac{1}{\delta_6}\right) - \frac{\bar{\beta}_1}{\delta_5^2} \left(1 + \frac{1}{\delta_6}\right), \quad m_3 = 1.$$

Здесь  $\delta_5$  и  $\delta_6$  — некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия

$$d_i(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (37)$$

$$F_2(x, t) \in L_2(Q), \quad \varphi_2(t) \in L_2([0, T]), \quad \psi_2(t) \in L_2([0, T]), \quad (38)$$

$$\alpha_1(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (39)$$

и существуют положительные числа  $\delta_5$  и  $\delta_6$  такие, что

$$m_1 > 0, \quad m_2 > 0. \quad (40)$$

Тогда нелокальная задача (31)–(36) имеет решение  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  такое, что  $u(x, t) \in V$ ,  $v(x, t) \in V$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Установим наличие подходящих априорных оценок решений настоящей задачи.

Умножим уравнение (31), записанное в переменных  $x$  и  $\tau$ , на функцию  $v_\tau - v_{xx\tau}$  и результат проинтегрируем от 0 до  $t$  по временной переменной  $t$  и от 0 до 1 по пространственной  $x$ . Проинтегрировав дополнительно по частям, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \int_0^1 v_{xx\tau}^2 dx d\tau + 2 \int_0^t \int_0^1 v_{x\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 v_\tau^2 dx d\tau \\
 & - 2 \int_0^t v_{x\tau}(1, \tau) v_\tau(1, \tau) d\tau + 2 \int_0^t v_{x\tau}(0, \tau) v_\tau(0, \tau) d\tau \\
 & + \int_0^t \int_0^1 d_1 v v_\tau dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 d_2 v_x v_\tau dx d\tau \\
 & + \int_0^t \int_0^1 d_3 v_{xx} v_\tau dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 d_4 u_x v_\tau dx d\tau \\
 & + \int_0^t \int_0^1 d_5 v_\tau dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 d_1 v v_{xx\tau} dx d\tau \\
 & - \int_0^t \int_0^1 d_2 v_x v_{xx\tau} dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 d_3 v_{xx} v_{xx\tau} dx d\tau \\
 & - \int_0^t \int_0^1 d_4 u_x v_{xx\tau} dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 d_5 u v_{xx\tau} dx d\tau \\
 & = \int_0^t \int_0^1 F_2(v_\tau - v_{xx\tau}) dx d\tau.
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись краевыми условиями (33) и (34), условиями тео-

мы, неравенством Юнга, неравенством

$$\omega^2(x) \leq \delta \int_0^1 \omega'^2(x) dx + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \int_0^1 \omega^2(x) dx, \quad (*)$$

справедливым при всех  $x \in [0, T]$  (здесь  $\delta$  — произвольное положительное число), а также представлением

$$v(x, \tau) = \int_0^\tau v_\xi(x, \xi) d\xi,$$

получим

$$\begin{aligned} & (m_1 - \delta'_0) \int_0^t \int_0^1 v_{xx\tau}^2 dx d\tau + (m_2 - \delta'_0) \int_0^t \int_0^1 v_{x\tau}^2 dx d\tau \\ & + (m_3 - \delta'_0) \int_0^t \int_0^1 v_\tau^2 dx d\tau \leq C'_1 \left( \int_0^t \int_0^T \int_0^1 v_{xx\xi}^2(x, \xi) dx d\xi d\tau \right. \\ & \left. + \int_0^t \int_0^T \int_0^1 v_{x\xi}^2(x, \xi) dx d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^T \int_0^1 v_\xi^2(x, \xi) dx d\xi d\tau \right) \\ & + C'_2 \left( \int_0^T (\varphi_2^2(t) + \psi_2^2(t)) dt + \int_Q F_2^2(t) dx dt \right), \end{aligned}$$

где  $\delta'_0$  — произвольное положительное число, числа  $C'_1$  и  $C'_2$  определяются функциями  $d_j(x, t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $\beta_i(x, t)$ ,  $\alpha_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Поскольку числа  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  положительны, фиксируя  $\delta'_0$  настолько малым, что  $m_1 - \delta'_0 > 0$ ,  $m_2 - \delta'_0 > 0$ ,  $m_3 - \delta'_0 > 0$ , имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^1 (v_{xx\tau}^2 + v_{x\tau}^2 + v_\tau^2) dx d\tau \\ & \leq C'_3 \int_0^t \int_0^T \int_0^1 (v_{xx\xi}^2(x, \xi) + v_{x\xi}^2(x, \xi) + v_\xi^2(x, \xi)) dx d\xi d\tau \end{aligned}$$

$$+ C'_4 \left( \int_0^T (\varphi_2^2(t) + \psi_2^2(t)) dt + \int_Q F_2^2(t) dxdt \right).$$

Применив лемму Гронуолла, получим априорную оценку

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^1 (v_{xx\tau}^2 + v_{x\tau}^2 + v_\tau^2) dx d\tau \\ & \leq C'_0 \left( \int_0^T (\varphi_2^2(t) + \psi_2^2(t)) dt + \int_Q F_2^2(t) dxdt \right), \quad (41) \end{aligned}$$

в которой число  $C'_0$  определяется функциями  $d_j(x, t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $\beta_i(x, t)$ ,  $\alpha_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а также числом  $T$ .

Из (41) следует очевидная оценка

$$\|v\|_V^2 + \|u\|_V^2 \leq M' \left( \int_0^T (\varphi_1^2(t) + \psi_1^2(t)) dt + \int_Q F_1^2(t) dxdt \right). \quad (42)$$

Повторяя доказательство с использованием теоремы о методе продолжения по параметру [15], получим, что краевая задача (31)–(36) разрешима в пространстве  $V$ . Теорема доказана.

Возрашаясь к нелокальной задаче (30), (32), (28), (29), (35), (36), полученной редукцией исходной обратной задачи, сформулируем теорему разрешимости этой задачи.

Положим

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \max_Q |a_{1xx}(x, t)|, \quad m'_1 = m_1 - \frac{\delta_7^2 \bar{a}_1 \delta_9}{2} - \frac{\delta_8^2 \bar{a}_1 \delta_{10}}{2} - \frac{\bar{a}_1}{2\delta_8^2}, \\ m'_2 &= m_2 - \frac{\delta_7^2 \bar{a}_1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\delta_9} \right) - \frac{\delta_8 \bar{a}_1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\delta_{10}} \right), \quad m'_3 = m_3 - \frac{\bar{a}_1}{2\delta_7^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_7$ ,  $\delta_8$ ,  $\delta_9$  и  $\delta_{10}$  — некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

Сформулируем теорему существования решения для задачи: *найти функции  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$ , которые удовлетворяют уравнениям (30) и (32), а также условиям (28), (29), (35) и (36).*

**Теорема 3'.** Пусть выполняются условия

$$h_x(0, t) \neq 0, \quad t \in [0, T], \quad a(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \quad c(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \quad (43)$$

$$f_2(x, t) \in L_2(Q), \quad f_{2x}(x, t) \in L_2(Q), \quad f_{2xx}(x, t) \in L_2([0, T]), \quad (44)$$

$$h(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \quad a_{1xx}(x, t) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad (45)$$

и существуют положительные числа  $\delta_7, \delta_8, \delta_9$  и  $\delta_{10}$  такие, что

$$m'_1 > 0, \quad m'_2 > 0, \quad m'_3 > 0. \quad (46)$$

Тогда нелокальная задача (30), (32), (28), (29), (35) и (36) имеет решение  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$  такое, что  $v(x, t) \in V$  и  $u(x, t) \in V$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Повторяя доказательство теоремы 3, т. е. умножая уравнение (30), записанное в переменных  $x$  и  $\tau$ , на функцию  $v_\tau - v_{xx\tau}$  и интегрируя результат от 0 до  $t$  по временной переменной и от 0 до 1 по пространственной, воспользовавшись краевыми условиями (28) и (29), условиями теоремы, неравенством Юнга, неравенством (\*), представлением

$$v(x, \tau) = \int_0^\tau v_\xi(x, \xi) d\xi$$

а также леммой Громуолла, придет к оценке вида (42). Из этой оценки и теоремы о методе продолжения по параметру следует разрешимость задачи (30), (32), (28), (29), (35), (36). Теорема доказана.

Перейдем к изучению разрешимости исходной обратной задачи I.

**Теорема 4.** Пусть выполняются все условия теоремы 3'. Тогда обратная задача I имеет решение  $u(x, t)$  и  $q(t)$  такое, что  $u(x, t) \in V$  и  $q(t) \in L_2([0, T])$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  — функции, являющиеся решением нелокальной задачи (30), (32), (28), (29), (35) и (36). Положим

$$\begin{aligned} w(x, t) = & u_t(x, t) - u_{xxt}(x, t) + a(x, t)u_{xx}(x, t) + c(x, t)u(x, t) - f_{2xx}(x, t) \\ & - a_{1xx}(x, t)u_{xt}(0, t) - a_{2xx}(x, t)u_x(0, t) - a_{3xx}(x, t)u(0, t). \end{aligned}$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} w_{xx}(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in Q, \\ w_x(0, t) &= w(1, t) = 0, \quad 0 < t < T. \end{aligned}$$

Тем самым  $w(x, t) \equiv 0$  в  $Q$ . Положим

$$q(t) = \frac{-u_{xxxt}(0, t) + a_x(0, t)u_{xx}(0, t) + a(0, t)u_{xxx}(0, t) - f_{2x}(0, t)}{h_x(0, t)}.$$

Очевидно, что функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$  связаны в прямоугольнике  $Q$  уравнением (1).

Осталось показать, что выполняется условие  $u(0, t) = 0$ . Положим в (1)  $x = 0$ . Получим  $u_t(0, t) + c(0, t)u(0, t) = 0$ . Из этого равенства и условия  $u(0, 0) = 0$  следует, что  $u(0, t) = 0$ . Принадлежность  $u(x, t)$  и  $q(t)$  требуемым классам очевидна. Теорема доказана.

Построим нелокальную задачу для обратной задачи II. Вновь начнем с формальных построений. Положим в уравнении (5)  $x = 0$ , а затем  $x = 1$ . Пусть выполняется условие

$$h_1(0, t)h_2(1, t) - h_1(1, t)h_2(0, t) \neq 0.$$

Тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} u_t(0, t) - u_{xxt}(0, t) + a(0, t)u_{xx}(0, t) + c(0, t)u(0, t) \\ = f(0, t) + q_1(t)h_1(0, t) + q_2(t)h_2(0, t), \\ u_t(1, t) - u_{xxt}(1, t) + a(1, t)u_{xx}(1, t) + c(1, t)u(1, t) \\ = f(1, t) + q_1(t)h_1(1, t) + q_2(t)h_2(1, t). \end{cases}$$

можно найти  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$ :

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{[-u_{xxt}(0, t) + a(0, t)u_{xx}(0, t) - f(0, t)]h_2(1, t)}{h_1(0, t)h_2(1, t) - h_1(1, t)h_2(0, t)} \\ &\quad - \frac{[-u_{xxt}(1, t) + a(1, t)u_{xx}(1, t) - f(1, t)]h_2(0, t)}{h_1(0, t)h_2(1, t) - h_1(1, t)h_2(0, t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2(t) &= \frac{[-u_{xxt}(0, t) + a(0, t)u_{xx}(0, t) - f(0, t)]h_1(1, t)}{h_1(0, t)h_2(1, t) - h_1(1, t)h_2(0, t)} \\ &\quad + \frac{[-u_{xxt}(1, t) + a(1, t)u_{xx}(1, t) - f(1, t)]h_1(0, t)}{h_1(0, t)h_2(1, t) - h_1(1, t)h_2(0, t)}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 J(t) &= h_1(0, t)h_2(1, t) - h_1(1, t)h_2(0, t), \\
 \chi_1(x, t) &= \frac{-h_1(x, t)h_2(1, t) + h_1(1, t)h_2(x, t)}{J(t)}, \\
 \chi_2(x, t) &= \frac{a(0, t)[h_1(x, t)h_2(1, t) - h_1(1, t)h_2(x, t)]}{J}, \\
 \chi_3(x, t) &= \frac{h_1(x, t)h_2(0, t) - h_1(0, t)h_2(x, t)}{J(t)}, \\
 \chi_4(x, t) &= \frac{a(1, t)[h_1(x, t)h_2(0, t) - h_1(0, t)h_2(x, t)]}{J(t)}, \\
 f_3(x, t) &= \frac{-f(0, t)[h_2(1, t) - h_1(1, t)] + f(1, t)[h_2(0, t) - h_1(0, t)]}{J(t)} + f(x, t).
 \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}
 u_t - u_{xxt} + a(x, t)u_{xx} + c(x, t)u &= f_3(x, t) + \chi_1(x, t)u_{xxt}(0, t) \\
 &\quad + \chi_2(x, t)u_{xx}(0, t) + \chi_3(x, t)u_{xxt}(1, t) + \chi_4(x, t)u_{xx}(1, t). \quad (47)
 \end{aligned}$$

Продифференцируем уравнение (47) по переменной  $x$  и положим  $x = 0$ :

$$\begin{aligned}
 u_{xt}(0, t) - u_{xxx}(0, t) + a_x(0, t)u_{xx}(0, t) + a(0, t)u_{xxx}(0, t) \\
 + c_x(0, t)u(0, t) + c(0, t)u_x(0, t) = f_{3x}(0, t) + \chi_{1x}(0, t)u_{xxt}(0, t) \\
 + \chi_{2x}(0, t)u_{xx}(0, t) + \chi_{3x}(0, t)u_{xxt}(1, t) + \chi_{4x}(0, t)u_{xx}(1, t).
 \end{aligned}$$

Пусть  $v = u_{xx}$ . Отсюда

$$\begin{aligned}
 v_{xt}(0, t) = a_x(0, t)v(0, t) + a(0, t)v_x(0, t) - f_{3x}(0, t) - \chi_{1x}(0, t)v_t(0, t) \\
 - \chi_{2x}(0, t)v(0, t) - \chi_{3x}(0, t)v_t(1, t) - \chi_{4x}(0, t)v(1, t). \quad (48)
 \end{aligned}$$

При  $x = 1$  получим

$$\begin{aligned}
 v_{xt}(1, t) = a_x(1, t)v(1, t) + a(1, t)v_x(1, t) - f_{3x}(1, t) - \chi_{1x}(1, t)v_t(0, t) \\
 - \chi_{2x}(1, t)v(0, t) - \chi_{3x}(1, t)v_t(1, t) - \chi_{4x}(1, t)v(1, t). \quad (49)
 \end{aligned}$$

Дважды дифференцируем уравнение (47) по  $x$ :

$$v_t - v_{xxt} + a_{xx}(x, t)v + 2a_x(x, t)v_x + a(x, t)v_{xx} + c_{xx}(x, t)u$$

$$+ 2c_x(x, t)u_x + c(x, t)v = \chi_{0xx}(x, t) + \chi_{1xx}(x, t)u_{xxt}(0, t) \\ + \chi_{2xx}(x, t)u_{xx}(0, t) + \chi_{3xx}(x, t)u_{xxt}(1, t) + \chi_{4xx}(x, t)u_{xx}(1, t). \quad (50)$$

Получили нелокальную задачу для функций  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$ . Доказав разрешимость этой задачи, сможем доказать разрешимость исходной обратной задачи II. Поскольку построенная нелокальная задача для уравнения вида (5) ранее не изучалась, исследуем ее независимо от исходной обратной задачи. Для этого вновь введем обозначения:

$$r_1(x, t) = a(x, t), \quad r_2(x, t) = 2a_x(x, t), \quad r_3(x, t) = a_{xx}(x, t) + c(x, t),$$

$$r_4(x, t) = 2c_x(x, t), \quad r_5(x, t) = c_{xx}(x, t),$$

$$F_3(x, t) = f_{3xx}(x, t) + \chi_{1xx}(x, t)u_{xxt}(0, t) + \chi_{2xx}(x, t)u_{xx}(0, t) \\ + \chi_{3xx}(x, t)u_{xxt}(1, t) + \chi_{4xx}(x, t)u_{xx}(1, t),$$

$$\mu_1(t) = -\chi_{1x}(0, t), \quad \mu_2(t) = -\chi_{2x}(0, t) + a_x(0, t), \quad \mu_3(t) = -\chi_{3x}(0, t),$$

$$\mu_4(t) = -\chi_{4x}(0, t), \quad \mu_5(t) = a(0, t), \quad \varphi_3(t) = -f_{3x}(0, t),$$

$$\nu_1(t) = -\chi_{1x}(1, t), \quad \nu_2(t) = -\chi_{2x}(1, t), \quad \nu_3(t) = -\chi_{3x}(1, t),$$

$$\nu_4(t) = -\chi_{4x}(1, t) + a_x(1, t), \quad \nu_5(t) = a(1, t), \quad \psi_3(t) = -f_{3x}(1, t).$$

Пусть  $r_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $F_3(x, t)$  — заданные функции, определенные при  $(x, t) \in \overline{Q}$ ,  $\mu_j(t)$ ,  $\nu_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $\varphi_3(t)$ ,  $\psi_3(t)$  — заданные функции, определенные при  $t \in [0, T]$ .

**Нелокальная задача III.** Найти функции  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$v_t - v_{xxt} + r_1(x, t)v_{xx} + r_2(x, t)v_x + r_3(x, t)v + r_4(x, t)u_x + r_5(x, t)u = F_3(x, t), \quad (51)$$

$$v = u_{xx}, \quad (52)$$

а также условиям

$$v_{xt}(0, t) = \mu_1(t)v_t(0, t) + \mu_2(t)v(0, t) + \mu_3(t)v_t(1, t) \\ + \mu_4(t)v(1, t) + \mu_5(t)v_x(0, t) + \varphi_3(t), \quad (53)$$

$$\begin{aligned} v_{xt}(1, t) &= \nu_1(t)v_t(0, t) + \nu_2(t)v(0, t) + \nu_3(t)v_t(1, t) \\ &\quad + \nu_4(t)v(1, t) + \nu_5(t)v_x(1, t)\psi_3(t), \end{aligned} \quad (54)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (55)$$

$$u_x(1, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (56)$$

Положим  $\bar{\mu}_4 = \max_{0 \leq t \leq T} |\mu_4(t)|$ ,  $\bar{\nu}_3 = \max_{0 \leq t \leq T} |\nu_3(t)|$ ,

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 2 - \delta_{11}^2 \delta_{12} - \frac{\bar{\nu}_3 \delta_{12}}{\delta_{11}^2} - \delta_{13}^2 \delta_{14} - \frac{\bar{\mu}_4 \delta_{14}}{\delta_{13}^2},$$

$$n_3 = 1 - \delta_{11}^2 \left(1 + \frac{1}{\delta_{12}}\right) - \frac{\bar{\nu}_3}{\delta_{11}^2} \left(1 + \frac{1}{\delta_{12}}\right) - \delta_{13}^2 \left(1 + \frac{1}{\delta_{14}}\right) - \frac{\bar{\mu}_4}{\delta_{13}^2} \left(1 + \frac{1}{\delta_{14}}\right).$$

Здесь  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{13}$  и  $\delta_{14}$  — некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 5.** Пусть выполняются условия

$$r_i(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (57)$$

$$F_3(x, t) \in L_2(Q), \quad \varphi_3(t) \in L_2([0, T]), \quad \psi_3(t) \in L_2([0, T]), \quad (58)$$

$$\mu_3(t) \geq 0, \quad \nu_4(t) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad (59)$$

и существуют положительные числа  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{13}$  и  $\delta_{14}$  такие, что

$$n_2 > 0, \quad n_3 > 0. \quad (60)$$

Тогда нелокальная задача (51)–(56) имеет решение  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  такое, что  $u(x, t) \in V$ ,  $v(x, t) \in V$ .

Вернемся к редуцированной нелокальной задаче (50), (52), (48), (49), (55), (56). Обозначим  $\bar{\chi}_1 = \max_Q |\chi_{1xx}(x, t)|$ ,  $\bar{\chi}_3 = \max_Q |\chi_{3xx}(x, t)|$ ,

$$\begin{aligned} n'_1 &= n_1 - \frac{\bar{\chi}_1 \delta_{17}^2}{2} - \frac{\bar{\chi}_3 \delta_{21}^2}{2}, \\ n'_2 &= n_2 - \frac{\bar{\chi}_1 \delta_{16}}{2 \delta_{15}^2} - \frac{\bar{\chi}_1 \delta_{18}}{2 \delta_{17}^2} - \frac{\bar{\chi}_3 \delta_{20} \delta_{19}^2}{2} - \frac{\bar{\chi}_3 \delta_{22} \delta_{21}^2}{2}, \\ n'_3 &= n_3 - \frac{2 \bar{\chi}_1}{\delta_{15}^2} \left(1 + \frac{1}{\delta_{16}}\right) - \frac{2 \bar{\chi}_1}{\delta_{17}^2} \left(1 + \frac{1}{\delta_{18}}\right) - \frac{\bar{\chi}_1 \delta_{15}^2}{2} \\ &\quad - 2 \bar{\chi}_3 \delta_{19}^2 \left(1 + \frac{1}{\delta_{20}}\right) - 2 \bar{\chi}_3 \delta_{21}^2 \left(1 + \frac{1}{\delta_{22}}\right) - \frac{\bar{\chi}_3}{2 \delta_{19}^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_{15}$ – $\delta_{22}$  — некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 5'.** Пусть выполняются условия

$$J(t) \neq 0, \quad t \in [0, T], \quad a(x, t), \quad c(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \quad f_3(x, t) \in L_2(Q), \quad (61)$$

$$\begin{aligned} f_{3x}(x, t) &\in L_2(Q), \quad f_{3xx}(x, t) \in L_2([0, T]), \\ h_1(x, t), \quad h_2(x, t) &\in C^2(\overline{Q}), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\chi_{2xx}(x, t) \leq 0, \quad \chi_4(x, t) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad (63)$$

существуют положительные числа  $\delta_{15} - \delta_{22}$  такие, что

$$n_1 > 0, \quad n'_2 > 0, \quad n'_3 > 0. \quad (64)$$

Тогда нелокальная задача (50), (52), (48), (49), (55) и (56) имеет решение  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$  такое, что  $v(x, t) \in V$  и  $u(x, t) \in V$ .

Перейдем к изучению разрешимости исходной обратной задачи II.

**Теорема 6.** Пусть выполняются все условия теоремы 5'. Тогда обратная задача II имеет решение  $u(x, t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  такое, что  $u(x, t) \in V$ ,  $q_1(t) \in L_2([0, T])$ ,  $q_2(t) \in L_2([0, T])$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 5, 5' и 6 аналогичны доказательствам теорем 1, 1' и 2 соответственно.

Приведем еще один вариант теоремы о разрешимости обратной задачи II.

Вновь построим нелокальную задачу. Продифференцируем уравнение (5) по переменной  $x$ . Положим  $x = 0$ , а затем  $x = 1$ . Пусть выполняется условие  $h_{1x}(0, t)h_{2x}(1, t) - h_{1x}(1, t)h_{2x}(0, t) \neq 0$ . Обозначим

$$J_1(t) = h_{1x}(0, t)h_{2x}(1, t) - h_{1x}(1, t)h_{2x}(0, t),$$

$$G_1(t) = -u_{xxxx}(0, t) + a_x(0, t)u_{xx}(0, t) + a(0, t)u_{xxx}(0, t) - f_x(0, t),$$

$$G_2(t) = -u_{xxxx}(1, t) + a_x(1, t)u_{xx}(1, t) + a(1, t)u_{xxx}(1, t) - f_x(1, t).$$

Тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} q_1(t)h_{1x}(0, t) + q_2(t)h_{2x}(0, t) = G_1(t), \\ q_1(t)h_{1x}(1, t) + q_2(t)h_{2x}(1, t) = G_2(t) \end{cases}$$

найдем

$$q_1(t) = \frac{G_1(t)h_{2x}(1, t) - G_2(t)h_{2x}(0, t)}{J_1(t)},$$

$$q_2(t) = \frac{G_2(t)h_{1x}(0, t) - G_1(t)h_{1x}(1, t)}{J_1(t)}.$$

Введем обозначения:

$$l_1(x, t) = \frac{h_{2x}(0, t)h_1(x, t) + h_{1x}(0, t)h_2(x, t)}{J_1(t)},$$

$$l_2(x, t) = \frac{-a(1, t)[h_{2x}(0, t)h_1(x, t) - h_{1x}(0, t)h_2(x, t)]}{J_1(t)},$$

$$l_3(x, t) = \frac{-a_x(1, t)[h_{2x}(0, t)h_1(x, t) - h_{1x}(0, t)h_2(x, t)]}{J_1(t)},$$

$$l_4(x, t) = \frac{-h_{2x}(1, t)h_1(x, t) + h_{1x}(1, t)h_2(x, t)}{J_1(t)},$$

$$l_5(x, t) = \frac{a(0, t)[h_{2x}(1, t)h_1(x, t) - h_{1x}(1, t)h_2(x, t)]}{J_1(t)},$$

$$l_6(x, t) = \frac{a_x(0, t)[h_{2x}(1, t)h_1(x, t) - h_{1x}(1, t)h_2(x, t)]}{J_1(t)},$$

$$f_4(x, t) = \frac{h_1(x, t)[f_x(1, t)h_{2x}(0, t) - f_x(0, t)h_{2x}(1, t)]}{J_1(t)} + \frac{h_2(x, t)[f_x(0, t)h_{1x}(1, t) - f_x(1, t)h_{1x}(0, t)]}{J_1(t)} + f(x, t).$$

Получим уравнение

$$u_t - u_{xxt} + a(x, t)u_{xx} + c(x, t)u = l_1(x, t)u_{xxxx}(1, t) + l_2(x, t)u_{xxx}(1, t) + l_3(x, t)u_{xx}(1, t) + l_4(x, t)u_{xxxx}(0, t) + l_5(x, t)u_{xxx}(0, t) + l_6(x, t)u_{xx}(0, t) + f_4(x, t).$$

Положим  $x = 0$ . Пусть  $v = u_{xx}$ . Тогда

$$-v_t(0, t) + a(0, t)v(0, t) = l_1(0, t)v_{xt}(1, t) + l_2(0, t)v_x(1, t) + l_3(0, t)v(1, t) + l_4(0, t)v_{xt}(0, t) + l_5(0, t)v_x(0, t)$$

$$+ l_6(0, t)v(0, t) + f_4(0, t). \quad (65)$$

При  $x = 1$  приходим к второму краевому условию:

$$\begin{aligned} -v_t(1, t) + a(1, t)v(1, t) &= l_1(1, t)v_{xt}(1, t) + l_2(1, t)v_x(1, t) \\ &+ l_3(1, t)v(1, t) + l_4(1, t)v_{xt}(0, t) + l_5(1, t)v_x(0, t) \\ &+ l_6(1, t)v(0, t) + f_4(1, t). \end{aligned} \quad (66)$$

Дважды продифференцировав уравнение (47) по  $x$ , имеем

$$\begin{aligned} v_t - v_{xxt} + a_{xx}(x, t)v + 2a_x(x, t)v_x + a(x, t)v_{xx} \\ + c_{xx}(x, t)u + 2c_x(x, t)u_x + c(x, t)v = l_{1xx}(x, t)v_{xt}(1, t) \\ + l_{2xx}(x, t)v_x(1, t) + l_{3xx}(x, t)v(1, t) + l_{4xx}(x, t)v_{xt}(0, t) \\ + l_{5xx}(x, t)v_x(0, t) + l_{6xx}(x, t)v(0, t) + f_{4xx}(x, t). \end{aligned} \quad (67)$$

Получили нелокальную задачу для функций  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$ . Доказав разрешимость этой задачи, сможем показать разрешимость исходной обратной задачи II. Поскольку построенная нелокальная задача для уравнения вида (5) ранее не изучалась, рассмотрим ее независимо от исходной обратной задачи. Для этого вновь введем обозначения:

$$s_1(x, t) = a(x, t), \quad s_2(x, t) = 2a_x(x, t), \quad s_3(x, t) = a_{xx}(x, t) + c(x, t),$$

$$s_4(x, t) = 2c_x(x, t), \quad s_5(x, t) = c_{xx}(x, t),$$

$$\begin{aligned} F_4(x, t) &= l_{1xx}(x, t)v_{xt}(1, t) + l_{2xx}(x, t)v_x(1, t) + l_{3xx}(x, t)v(1, t) \\ &+ l_{4xx}(x, t)v_{xt}(0, t) + l_{5xx}(x, t)v_x(0, t) + l_{6xx}(x, t)v(0, t) + f_{4xx}(x, t), \\ \rho_1(t) &= \frac{-h_{2x}(1, t)h_1(0, t) + h_{1x}(1, t)h_2(0, t)}{J_1(t)}, \\ \rho_2(t) &= \frac{a(0, t)[h_{2x}(1, t)h_1(0, t) - h_{1x}(1, t)h_2(0, t)]}{J_1(t)}, \\ \rho_3(t) &= \frac{a_x(0, t)[h_{2x}(1, t)h_1(0, t) - h_{1x}(1, t)h_2(0, t)]}{J_1(t)}, \\ \rho_4(t) &= \frac{h_{2x}(0, t)h_1(0, t) - h_{1x}(0, t)h_2(0, t)}{J_1(t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_5(t) &= \frac{-a(1,t)[h_{2x}(0,t)h_1(0,t) - h_{1x}(0,t)h_2(0,t)]}{J_1(t)}, \\
\rho_6(t) &= \frac{-a_x(1,t)[h_{2x}(0,t)h_1(0,t) - h_{1x}(0,t)h_2(0,t)]}{J_1(t)}, \\
\varphi_4(t) &= \frac{h_1(0,t)[f_x(1,t)h_{2x}(0,t) - f_x(0,t)h_{2x}(1,t)]}{J_1(t)} \\
&\quad + \frac{h_2(0,t)[f_x(0,t)h_{1x}(1,t) - f_x(1,t)h_{1x}(0,t)]}{J_1(t)} + f(0,t), \\
\iota_1(t) &= \frac{-h_{2x}(1,t)h_1(1,t) + h_{1x}(1,t)h_2(1,t)}{J_1(t)}, \\
\iota_2(t) &= \frac{a(0,t)[h_{2x}(1,t)h_1(1,t) - h_{1x}(1,t)h_2(1,t)]}{J_1(t)}, \\
\iota_3(t) &= \frac{a_x(0,t)[h_{2x}(1,t)h_1(1,t) - h_{1x}(1,t)h_2(1,t)]}{J_1(t)}, \\
\iota_4(t) &= \frac{h_{2x}(0,t)h_1(1,t) - h_{1x}(0,t)h_2(1,t)}{J_1(t)}, \\
\iota_5(t) &= \frac{-a(1,t)[h_{2x}(0,t)h_1(1,t) - h_{1x}(0,t)h_2(1,t)]}{J_1(t)}, \\
\iota_6(t) &= \frac{-a_x(1,t)[h_{2x}(0,t)h_1(1,t) - h_{1x}(0,t)h_2(1,t)]}{J_1(t)}, \\
\psi_4(t) &= \frac{h_1(1,t)[f_x(1,t)h_{2x}(0,t) - f_x(0,t)h_{2x}(1,t)]}{J_1(t)} \\
&\quad + \frac{h_2(1,t)[f_x(0,t)h_{1x}(1,t) - f_x(1,t)h_{1x}(0,t)]}{J_1(t)} + f(1,t).
\end{aligned}$$

Пусть  $s_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $F_4(x, t)$  — заданные функции, определенные при  $(x, t) \in \overline{Q}$ ,  $\rho_j(t)$ ,  $\iota_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $\varphi_4(t)$ ,  $\psi_4(t)$  — функции, определенные при  $t \in [0, T]$ .

**Нелокальная задача IV.** Найти функции  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$v_t - v_{xxt} + s_1(x, t)v_{xx} + s_2(x, t)v_x + s_3(x, t)v + s_4(x, t)u_x + s_5(x, t)u = F_4(x, t), \quad (68)$$

$$v = u_{xx}, \quad (69)$$

а также условиям

$$\begin{aligned} -v_t(0, t) &= \rho_1(t)v_{xt}(0, t) + \rho_2(t)v_x(0, t) + \rho_3(t)v(0, t) \\ &+ \rho_4(t)v_{xt}(1, t) + \rho_5(t)v_x(1, t) + \rho_6(t)v(1, t) + \varphi_4(t), \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} -v_t(1, t) &= \iota_1(t)v_{xt}(0, t) + \iota_2(t)v_x(0, t) + \iota_3(t)v(0, t) \\ &+ \iota_4(t)v_{xt}(1, t) + \iota_5(t)v_x(1, t) + \iota_6(t)v(1, t) + \psi_4(t), \end{aligned} \quad (71)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (72)$$

$$u_x(1, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (73)$$

Положим

$$\begin{aligned} \bar{\iota}_1 &= \max_{0 \leq t \leq T} |\iota_1(t)|, \quad \bar{\rho}_4 = \max_{0 \leq t \leq T} |\rho_4(t)|, \\ p_1 &= 1 - \delta_{23}^2 \delta_{24} - \frac{\bar{\iota}_1 \delta_{24}}{\delta_{23}^2} - \delta_{25}^2 \delta_{26} - \frac{\bar{\rho}_4 \delta_{26}}{\delta_{25}^2}, \\ p_2 &= 2 - \delta_{23}^2 \left(1 + \frac{1}{\delta_{24}}\right) - \frac{\bar{\iota}_1}{\delta_{23}^2} \left(1 + \frac{1}{\delta_{24}}\right) - \delta_{25}^2 \left(1 + \frac{1}{\delta_{26}}\right) - \frac{\bar{\rho}_4}{\delta_{25}^2} \left(1 + \frac{1}{\delta_{26}}\right), \\ p_3 &= 1. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_{23}$ — $\delta_{26}$  — некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 7.** Пусть выполняются условия

$$s_i(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (74)$$

$$F_4(x, t) \in L_2(Q), \quad \varphi_4(t) \in L_2([0, T]), \quad \psi_4(t) \in L_2([0, T]), \quad (75)$$

$$\rho_1(t) \geq 0, \quad \iota_4(t) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad (76)$$

и существуют положительные числа  $\delta_{23}$ ,  $\delta_{24}$ ,  $\delta_{25}$  и  $\delta_{26}$  такие, что

$$p_1 > 0, \quad p_2 > 0. \quad (77)$$

Тогда нелокальная задача (68)–(73) имеет решение  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  такое, что  $u(x, t) \in V$ ,  $v(x, t) \in V$ .

Вернемся к редуцированной нелокальной задаче (67), (69), (65), (66), (72), (73). Обозначим  $\bar{l}_1 = \max_Q |l_{1xx}(x, t)|$ ,

$$p'_1 = p_1 - \frac{\bar{l}_1 \delta_{27}^2 \delta_{28}}{2} - \frac{\bar{l}_1 \delta_{29}^2 \delta_{30}}{2} - \frac{\bar{l}_1}{2\delta_{29}^2},$$

$$p'_2 = p_2 - \frac{\bar{l}_1}{2\delta_{27}^2} \left(1 + \frac{1}{\delta_{28}}\right) - \frac{\bar{l}_1}{2\delta_{29}^2} \left(1 + \frac{1}{\delta_{30}}\right),$$

$$p'_3 = p_3 - \frac{\bar{l}_1}{2\delta_{27}^2}.$$

Здесь  $\delta_{27}$ – $\delta_{30}$  — некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 7'.** Пусть выполняются условия

$$J_1 \neq 0, \quad t \in [0, T], \quad a(x, t), c(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad f_3(x, t) \in L_2(Q), \quad (78)$$

$$\begin{aligned} f_{3x}(x, t) &\in L_2(Q), \quad f_{3xx}(x, t) \in L_2([0, T]), \\ h_1(x, t), h_2(x, t) &\in C^2(\bar{Q}), \end{aligned} \quad (79)$$

$$l_{2xx}(x, t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (80)$$

и существуют положительные числа  $\delta_{27}$ – $\delta_{30}$  такие, что

$$p'_1 > 0, \quad p'_2 > 0, \quad p'_3 > 0. \quad (81)$$

Тогда нелокальная задача (67), (69), (65), (66), (72), (73) имеет решение  $v(x, t)$  и  $u(x, t)$  такое, что  $v(x, t) \in V$  и  $u(x, t) \in V$ .

Перейдем к изучению разрешимости исходной обратной задачи II.

**Теорема 8.** Пусть выполняются все условия теоремы 7'. Тогда обратная задача II имеет решение  $u(x, t), q_1(t), q_2(t)$  такое, что  $u(x, t) \in V, q_1(t) \in L_2([0, T]), q_2(t) \in L_2([0, T])$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 7, 7' и 8 аналогичны доказательствам теорем 5, 5' и 6 соответственно.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York; Basel: Marcell Dekker Inc., 2000.
2. Anikonov Yu. E. Inverse and ill-posed problems. Utrecht: VSP, 1997.
3. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. ???: VNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).
4. Belov Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
5. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
6. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, неразрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
7. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroup of operators. Utrecht: VSP, 2003.
8. Альшин А. Б., Свешников А. Г., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2002.
9. Pyatkov S. G. Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht: VSP, 2002.
10. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
11. Кожанов А. И. О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов уравнениях составного типа // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. Т. 8, №2. 2008. С. 81–99.
12. Кожанов А. И. О разрешимости коэффициентных обратных задач для некоторых уравнений соболевского типа // Науч. ведомости Белгородск. гос. ун-та. Математика. Физика. Т. 5, №18. 2010. С. 88–98.
13. Аблабеков Б. С. Обратные задачи для уравнения Бенджамина — Бона — Махони // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования. Ханты-Мансийск: Югорск. НИИ информ. технологий, 2005. С. 6–9.
14. Fedorov V. E., Urzaeva A. V. An inverse problem for linear Sobolev type equations // J. Inverse Ill-posed Probl. 2004. V. 12, N 4. P. 387–395.
15. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

г. Улан-Удэ

27 сентября 2013 г.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
 ДЛЯ  $2n$ -ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
 С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ  
 ВРЕМЕНИ ПРИ  $n \geq 4$  С ПОЛНОЙ  
 МАТРИЦЕЙ УСЛОВИЙ СКЛЕИВАНИЯ<sup>\*)</sup>

С. В. Попов, А. Г. Синявский

Известно, что для параболических уравнений с меняющимся направлением времени гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежности решения гёльдеровским пространствам [1]. В настоящей работе рассматривается полная матрица условий склеивания для  $2n$ -параболических уравнений при  $n \geq 4$ . Отметим, что случаи  $n = 1, 2, 3$  исследованы в [2–4].

В области  $Q^+ = \mathbb{R}^+ \times (0, T)$  будем рассматривать систему уравнений

$$u_t^1 = Lu^1, \quad -u_t^2 = Lu^2, \quad L \equiv (-1)^{n+1} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}. \quad (1)$$

Ищется решение системы (1) из пространства Гёльдера  $H_x^{p,p/2n} t$ ,  $p = 2nl + \gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$u^1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x, T) = \varphi_2(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

и условиям склеивания

$$T_1 \vec{u}^1(0, t) = T_2 \vec{u}^2(0, t), \quad (3)$$

где  $\vec{u}^k = (u^k, u_x^k, \dots, \underbrace{u_{x\dots x}^k}_{2n-1})$ ,  $T_1, T_2$  — невырожденные матрицы с постоянными действительными коэффициентами.

---

<sup>\*)</sup> Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проекты № 5562, № 4402).

Предполагаем, что  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in H^p(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned}\omega_1(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} U(x, t; \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi, \\ \omega_2(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} U(\xi, T; x, t) \varphi_2(\xi) d\xi,\end{aligned}$$

и пользуемся интегральным представлением решения для системы (1):

$$\begin{aligned}u^1(x, t) &= \int_0^t \vec{U}_1(x, t; 0, \tau) \vec{\alpha}(\tau) d\tau + \omega_1(x, t), \\ u^2(x, t) &= \int_t^T \vec{U}_2(0, \tau; x, t) \vec{\beta}(\tau) d\tau + \omega_2(x, t),\end{aligned}\tag{4}$$

где  $\vec{U}_1, \vec{U}_2$  — вектор-строки  $\vec{U}_1 = (U, V_1, \dots, V_{n-1}), \vec{U}_2 = (U, W_1, \dots, W_{n-1})$ ,  $U$  — фундаментальное решение,  $V_p, W_p$  — элементарные решения Л. Каттабрига первого уравнения из (1) и  $\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t)$  — вектор-столбцы неизвестных плотностей с компонентами  $\alpha_p(t), \beta_p(t), p = 0, 1, \dots, n-1$ . Функции  $\omega_1(x, t), \omega_2(x, t)$  являются решениями уравнений (1) и удовлетворяют условиям (2) в  $\mathbb{R}$ .

Условия склеивания (3) перепишем в виде

$$\vec{u}^1(0, t) = (T_1^{-1} \cdot T_2) \vec{u}^2(0, t) = (P^{-1} J P) \vec{u}^2(0, t),\tag{5}$$

где  $P, J$  — невырожденная преобразующая и жорданова матрицы для матрицы  $T_1^{-1} T_2$ . Предполагаем, что все характеристические корни матрицы  $T_1^{-1} T_2$  являются действительными числами. Вместо условий склеивания (5) будем рассматривать условия склеивания вида

$$\vec{u}^1(0, t) = J \vec{u}^2(0, t),\tag{6}$$

считая, что в поставленной краевой задаче можно ввести замены  $Pu^1 = v^1, Pu^2 = v^2$ . Пусть матрица  $J$  состоит из одной или двух жордановых клеток. Без ограничения общности рассмотрим случай матрицы

$$J = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{2n-2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\sigma_{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в случае симметричной матрицы  $J$  мы находимся в условиях работы [2]. Будем считать, что коэффициенты  $\sigma_j$  матрицы  $J$  удовлетворяют условию единственности решения краевой задачи (1), (2), (6):

$$\int_0^T \left\{ \left[ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial^{2n-1-i} u}{\partial x^{2n-1-i}} \right]_{x=+0} + \left[ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial^{2n-1-i} u}{\partial x^{2n-1-i}} \right]_{x=-0} \right\} dt = 0.$$

**Теорема.** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p(\mathbb{R}^+)$ ,  $p = 2nl + \gamma$ ,  $n \geq 4$ , и  $\theta \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2n})$ . Тогда при выполнении  $2nl$  условий

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \dots, 2nl, \quad (7)$$

существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (6), из пространства

- 1)  $H_x^{p,p/2n} t(Q^+)$ , где  $0 < \gamma < n - 1 - 2n\theta$ ;
- 2)  $H_x^{q,q/2n} t$ ,  $q = 2nl + n - 1 - 2n\theta$ , если  $n - 1 - 2n\theta < \gamma < 1$ ;
- 3)  $H_x^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/2n} t$ , если  $\gamma = n - 1 - 2n\theta$ , где  $\varepsilon$  — сколь угодно малая положительная постоянная.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Известно [2, 5, 6], что если введенные плотности  $\vec{\alpha}(t)$ ,  $\vec{\beta}(t)$  принадлежат пространству  $H^{l-1+\frac{\gamma+1}{2n}}(0, T)$  и удовлетворяют условиям

$$\vec{\alpha}^{(s)}(0) = \vec{\beta}^{(s)}(T) = 0, \quad s = 0, \dots, l - 1, \quad (8)$$

то решения  $u^1(x, t)$ ,  $u^2(x, t)$  принадлежат  $H_x^{p,p/2n} t(Q^+)$ ,  $p = 2nl + \gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ .

Из условий склеивания (6) получим систему интегральных уравнений с операторами Абеля относительно неизвестных плотностей  $\vec{\alpha}(t)$ ,

$\vec{\beta}(t)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t \frac{\partial^i \vec{U}_1}{\partial x^i}(0, t; 0, \tau) \vec{\alpha}(\tau) d\tau + \frac{\partial^i \omega_1}{\partial x^i}(0, t) \\ = (-1)^i \sigma_i \left[ \int_t^T \frac{\partial^i \vec{U}_2}{\partial x^i}(0, \tau; 0, t) \vec{\beta}(\tau) d\tau + \frac{\partial^i \omega_2}{\partial x^i}(0, t) \right], \\ i = 0, 1, \dots, 2n - 3, \\ \int_0^t \frac{\partial^{2n-2} \vec{U}_1}{\partial x^{2n-2}}(0, t; 0, \tau) \vec{\alpha}(\tau) d\tau + \frac{\partial^{2n-2} \omega_1}{\partial x^{2n-2}}(0, t) \\ = \sigma_{2n-2} \int_t^T \frac{\partial^{2n-2} \vec{U}_2}{\partial x^{2n-2}}(0, \tau; 0, t) \vec{\beta}(\tau) d\tau + \sigma_{2n-2} \frac{\partial^{2n-2} \omega_2}{\partial x^{2n-2}}(0, t) \\ + \int_{-\infty}^0 \vec{B}_0(\eta) d\eta \cdot \vec{\beta}(t) + (-1)^n \frac{2n}{\Gamma(\frac{1}{2n})} \frac{\partial^{2n-1} \omega_2}{\partial x^{2n-1}}(0, t), \\ \int_0^\infty \vec{A}_0(\eta) d\eta \cdot \vec{\alpha}(t) + (-1)^n \frac{2n}{\Gamma(\frac{1}{2n})} \frac{\partial^{2n-1} \omega_1}{\partial x^{2n-1}}(0, t) \\ - \sigma_{2n-1} \int_{-\infty}^0 \vec{B}_0(\eta) d\eta \cdot \vec{\beta}(t) - (-1)^n \frac{2n\sigma_{2n-1}}{\Gamma(\frac{1}{2n})} \frac{\partial^{2n-1} \omega_2}{\partial x^{2n-1}}(0, t), \end{array} \right. \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{A}_i(\eta) &= \{\bar{f}^{(i)}(\eta), \bar{g}_1^{(i)}(\eta), \dots, \bar{g}_{n-1}^{(i)}(\eta)\}, \\ \vec{B}_i(\eta) &= \{\bar{f}^{(i)}(-\eta), \bar{h}_1^{(i)}(-\eta), \dots, \bar{h}_{n-1}^{(i)}(-\eta)\}, \\ \bar{f}^{(i)}(\eta) &= \frac{2nf^{(i)}(\eta)}{\Gamma(\frac{1+i}{2n})}, \quad \bar{g}_p^{(i)}(\eta) = \frac{2ng_p^{(i)}(\eta)}{\Gamma(\frac{1+i}{2n})}, \quad \bar{h}_p^{(i)}(\eta) = \frac{2nh_p^{(i)}(\eta)}{\Gamma(\frac{1+i}{2n})}, \end{aligned}$$

функции  $f(\eta)$ ,  $g_p(\eta)$ ,  $h_p(\eta)$  являются решениями линейного дифференциального уравнения  $(2n - 1)$ -го порядка

$$z^{(2n-1)}(\eta) - \frac{(-1)^n}{2n} \cdot \eta \cdot z(\eta) = 0.$$

При получении последнего равенства в (9) используются соотношения

$$\int_0^t \frac{\partial^{2n-1} V_p(x, t; 0, \tau)}{\partial x^{2n-1}} \Big|_{x=0} \alpha_p(\tau) d\tau = (-1)^n \alpha_p(t) \int_0^\infty g_p(\eta) d\eta,$$

$$\int_t^T \frac{\partial^{2n-1} W_p(0, \tau; x, t)}{\partial x^{2n-1}} \Big|_{x=0} \beta_p(\tau) d\tau = (-1)^n \beta_p(t) \int_{-\infty}^0 h_p(\eta) d\eta.$$

Для удобства записи будем считать  $T = 1$ . Из уравнений (9) при помощи формул обращения оператора Абеля [1, 7, 8], получим эквивалентную систему сингулярных интегральных уравнений  $2n$ -го порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin \frac{\pi(1+i)}{2n}} \vec{A}_i(0) \vec{\alpha}(t) + \sigma_i \operatorname{ctg} \frac{\pi(1+i)}{2n} \vec{B}_i(0) \vec{\beta}(t) \\ - \frac{\sigma_i}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{\tau}{t} \right)^{1-\frac{1+i}{2n}} \frac{\vec{B}_i(0) \vec{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_i(\tau)}{(t-\tau)^{1-\frac{1+i}{2n}}} d\tau, \\ i = 0, 1, \dots, 2n-3, \\ \int_0^t \frac{\partial^{2n-2} \vec{U}_1}{\partial x^{2n-2}}(0, t; 0, \tau) \vec{\alpha}(\tau) d\tau = \sigma_{2n-2} \int_t^1 \frac{\partial^{2n-2} \vec{U}_2}{\partial x^{2n-2}}(0, \tau; 0, t) \vec{\beta}(\tau) d\tau \quad (10) \\ + \Phi_{2n-2}(t) + \int_0^\infty \vec{A}_0(\eta) d\eta \cdot \vec{\beta}(t) + (-1)^n \frac{2n}{\Gamma(\frac{1}{2n})} \frac{\partial^{2n-1} \omega_2}{\partial x^{2n-1}}(0, t), \\ \int_0^\infty \vec{A}_0(\eta) d\eta \cdot (\vec{\alpha}(t) + \sigma_{2n-1} \vec{\beta}(t)) = \Phi_{2n-1}(t), \end{array} \right.$$

где введены новые обозначения:

$$\Phi_i(t) = \frac{2n}{\pi \Gamma(\frac{1+i}{2n})} \left[ \sigma_i (-1)^i \frac{\partial^i \omega_2}{\partial x^i}(0, t) - \frac{\partial^i \omega_1}{\partial x^i}(0, t) \right],$$

$$\Phi_{2n-1}(t) = (-1)^n \frac{2n}{\Gamma(\frac{1}{2n})} \left[ -\sigma_{2n-1} \frac{\partial^{2n-1} \omega_2}{\partial x^{2n-1}}(0, t) - \frac{\partial^{2n-1} \omega_1}{\partial x^{2n-1}}(0, t) \right].$$

Предпоследнее уравнение в (10) преобразуем с помощью последнего:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial^{2n-2} \vec{U}_1}{\partial x^{2n-2}}(0, t; 0, \tau) \vec{\alpha}(\tau) d\tau &= \sigma_{2n-2} \int_t^1 \frac{\partial^{2n-2} \vec{U}_2}{\partial x^{2n-2}}(0, \tau; 0, t) \vec{\beta}(\tau) d\tau \\ &+ \Phi_{2n-2}(t) + \frac{1}{\sigma_{2n-1}} \Phi_{2n-1}(t) - \frac{1}{\sigma_{2n-1}} \int_0^\infty \vec{A}_0(\eta) d\eta \cdot \vec{\alpha}(t) \\ &+ (-1)^n \frac{2n}{\Gamma(\frac{1}{2n})} \frac{\partial^{2n-1} \omega_2}{\partial x^{2n-1}}(0, t). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 F_0^s(t) &= \int_0^t \frac{\Phi_0^{(s+1)}(\tau) - \Phi_0^{(s+1)}(0)}{(t-\tau)^{1-\frac{1}{2n}}} d\tau, \\
 F_i^s(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_i^{(s)}(\tau) - \Phi_i^{(s)}(0)}{(t-\tau)^{1-\frac{1+i}{2n}}} d\tau, \quad i = 1, \dots, 2n-3, \\
 F_{2n-1}^s(t) &= \Phi_{2n-1}^{(s)}(t) - \Phi_{2n-1}^{(s)}(0), \\
 F_{2n-2}^s(t) &= \sigma_{2n-1} \left[ - \int_0^t \frac{\vec{A}_{2n-2}(0) \vec{\alpha}^{(s)}(\tau)}{(t-\tau)^{1-\frac{1}{2n}}} d\tau \right. \\
 &\quad + \sigma_{2n-2} \int_t^1 \frac{\vec{B}_{2n-2}(0) \vec{\beta}^{(s)}(\tau)}{(\tau-t)^{1-\frac{1}{2n}}} d\tau - \sigma_{2n-2} \int_t^1 \frac{\vec{B}_{2n-2}(0) \vec{\beta}^{(s)}(\tau)}{\tau^{1-\frac{1}{2n}}} d\tau \\
 &\quad \left. + \Phi_{2n-2}^{(s)}(t) - \Phi_{2n-2}^{(s)}(0) \right] + F_{2n-1}^s(t) \\
 &\quad + (-1)^n \frac{2n\sigma_{2n-1}}{\Gamma(\frac{1}{2n})} \left[ \frac{\partial^{2n+s-1} \omega_2}{\partial x^{2n-1} \partial t^s}(0, t) - \frac{\partial^{2n+s-1} \omega_2}{\partial x^{2n-1} \partial t^s}(0, 0) \right], \\
 G_j^s(t) &= (-1)^{1+j} \frac{d}{dt} \int_t^1 \frac{\Phi_i^{(s)}(1) - \Phi_j^{(s)}(\tau)}{(\tau-t)^{1-\frac{1+j}{2n}}} d\tau, \\
 s &= 0, \dots, l-1, \quad j = 1, \dots, 2n-2.
 \end{aligned}$$

Так как [5]  $\Phi_i^{l-1} \in H^{q_i}$ ,  $q_i = 1 + \frac{\gamma-i}{2n}$ , функции  $F_i^{l-1}(t)$ ,  $G_i^{l-1}(t)$  ( $i = 0, \dots, 2n-2$ ),  $F_{2n-1}^{l-1}(t)$  принадлежат пространству  $H^{(1+\gamma)/2n}(0, 1)$ , при чем  $F_i^{l-1}(t) = O(t^{(1+\gamma)/2n})$ ,  $G_i^{l-1}(t) = O((1-t)^{(1+\gamma)/2n})$  для малых  $t$  и  $1-t$  соответственно.

С помощью введенных обозначений перепишем систему (10):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \vec{A}_0(0) \vec{\alpha}(t) + \sigma_0 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \vec{B}_0(0) \vec{\beta}(t) \\ - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\frac{1}{2n}} \frac{\vec{B}_0(0) \vec{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \frac{\Phi_0(0)}{t^{1-\frac{1}{2n}}} + 2n \Phi'_0(0) t^{\frac{1}{2n}} + F_0^0(t), \\ \frac{1}{\sin \frac{\pi(1+i)}{2n}} \vec{A}_i(0) \vec{\alpha}(t) + \sigma_i \operatorname{ctg} \frac{\pi(1+i)}{2n} \vec{B}_i(0) \vec{\beta}(t) \\ - \frac{\sigma_i}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\frac{1+i}{2n}} \frac{\vec{B}_i(0) \vec{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \frac{\Phi_i(0)}{t^{1-\frac{1+i}{2n}}} + F_i^0(t), \\ i = 1, \dots, 2n-3, \\ \int_0^\infty \vec{A}_0(\eta) d\eta \cdot \vec{\alpha}(t) = F_{2n-2}^s(t) + \sigma_{2n-1} \sigma_{2n-2} \int_t^1 \frac{\vec{B}_{2n-2}(0) \vec{\beta}^{(s)}(\tau)}{\tau^{1-\frac{1}{2n}}} d\tau \\ + \sigma_{2n-1} \Phi_{2n-2}(0) + \Phi_{2n-1}(0) + (-1)^n \frac{2n \sigma_{2n-1}}{\Gamma(\frac{1}{2n})} \frac{\partial^{2n-1} \omega_2}{\partial x^{2n-1}}(0, 0), \\ \int_0^\infty \vec{A}_0(\eta) d\eta \cdot (\vec{\alpha}(t) + \sigma_{2n-1} \vec{\beta}(t)) = \Phi_{2n-1}(t). \end{array} \right. \quad (11)$$

Надо доказать существование таких решений  $\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t)$  системы (11) из пространства  $H^{l-1+\frac{\gamma+1}{2n}}(0, 1)$ , которые удовлетворяют условиям (8).

Предположим, что функции  $\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t)$  системы (11) принадлежат искомому пространству. Отметим, что определители матриц

$$\begin{pmatrix} f & g_1 & \dots & g_{n-1} \\ f'' & g_1'' & \dots & g_{n-1}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(2n-2)} & g_1^{(2n-2)} & \dots & g_{n-1}^{(2n-2)} \end{pmatrix}_{n \times n},$$

$$\begin{pmatrix} g_1' & g_2' & \dots & g_{n-1}' \\ g_1''' & g_2''' & \dots & g_{n-1}''' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^{(2n-3)} & g_2^{(2n-3)} & \dots & g_{n-1}^{(2n-3)} \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

в нуле отличны от нуля (см. [10, 11]). В силу этого из системы (11) получаем, что для того чтобы  $\vec{\alpha}(0) = 0$ , необходимо и достаточно вы-

полнения соотношений

$$\begin{cases} -\frac{\sigma_i}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{B}_i(0)\vec{\beta}(\tau)}{\tau^{\frac{1+i}{2n}}} d\tau = \Phi_i(0), & i = 1, 3, \dots, 2n-3, \\ \sigma_{2n-1} \int_0^\infty \vec{A}_0(\eta) d\eta \cdot \vec{\beta}(0) = \Phi_{2n-1}(0). \end{cases} \quad (12)$$

Кроме того, должны выполняться условия

$$\begin{cases} -\frac{\sigma_i}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{B}_i(0)\vec{\beta}(\tau)}{\tau^{\frac{1+i}{2n}}} d\tau = \Phi_i(0), & i = 0, 2, \dots, 2n-4, \\ \sigma_{2n-2} \int_t^\infty \frac{\vec{B}_{2n-2}(0)\vec{\beta}^{(s)}(\tau)}{\tau^{1-\frac{1}{2n}}} d\tau + \Phi_{2n-2}(0) + \frac{1}{\sigma_{2n-1}} \Phi_{2n-1}(0) \\ + (-1)^n \frac{2n}{\Gamma(\frac{1}{2n})} \frac{\partial^{2n-1} \omega_2}{\partial x^{2n-1}}(0, 0) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

При выполнении условий (12) и (13) с учетом того, что

$$\left[ \left( \frac{\tau}{t} \right)^{1-\frac{1+i}{2n}} - \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{1+i}{2n}} \right] \cdot \frac{1}{\tau-t} = \frac{1}{t^{1-\frac{1+i}{2n}} \tau^{\frac{1+i}{2n}}}, \quad (14)$$

систему (11) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \frac{\vec{A}_0(0)\vec{\alpha}(t)}{\sin \frac{\pi}{2n}} + \sigma_0 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \vec{B}_0(0)\vec{\beta}(t) - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{1}{2n}} \frac{\vec{B}_0(0)\vec{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau \\ = 2n\Phi'_0(0)t^{\frac{1}{2n}} + F_0^0(t), \\ \frac{\vec{A}_i(0)\vec{\alpha}(t)}{\sin \frac{\pi(1+i)}{2n}} + \sigma_i \operatorname{ctg} \frac{\pi(1+i)}{2n} \vec{B}_i(0)\vec{\beta}(t) - \frac{\sigma_i}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{1+i}{2n}} \frac{\vec{B}_i(0)\vec{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau \\ = F_i^0(t), \quad i = 1, \dots, 2n-3, \\ \int_0^\infty \vec{A}_0(\eta) d\eta \cdot \vec{\alpha}(t) = F_{2n-2}^0(t), \\ \int_0^\infty \vec{A}_0(\eta) d\eta \cdot (\vec{\alpha}(t) + \sigma_{2n-1}\vec{\beta}(t) - \sigma_{2n-1}\vec{\beta}(0)) = F_{2n-1}^0(t). \end{cases} \quad (15)$$

Полученную систему (15) перепишем в матричном виде:

$$\begin{cases} A_1 \vec{\alpha}(t) + \Delta_1 D_{11} A_1 \vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\Delta_1 D_{12}(\frac{t}{\tau}) A_1 \vec{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \mathcal{F}_1^0(t), \\ A_2 \vec{\alpha}(t) - \Delta_2 D_{21} A_2 \vec{\beta}(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\Delta_2 D_{22}(\frac{t}{\tau}) A_2 \vec{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \mathcal{F}_2^0(t), \end{cases} \quad (16)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \bar{f}(0) & \bar{g}_1(0) & \dots & \bar{g}_{n-1}(0) \\ \bar{f}''(0) & \bar{g}_1''(0) & \dots & \bar{g}_{n-1}''(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^\infty \bar{f}(\eta) d\eta & \int_0^\infty \bar{g}_1(\eta) d\eta & \dots & \int_0^\infty \bar{g}_{n-1}(\eta) d\eta \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \bar{f}'(0) & \bar{g}_1'(0) & \dots & \bar{g}_{n-1}'(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{f}^{(2n-3)}(0) & \bar{g}_1^{(2n-3)}(0) & \dots & \bar{g}_{n-1}^{(2n-3)}(0) \\ \int_0^\infty \bar{f}(\eta) d\eta & \int_0^\infty \bar{g}_1(\eta) d\eta & \dots & \int_0^\infty \bar{g}_{n-1}(\eta) d\eta \end{pmatrix},$$

$D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) — диагональные матрицы:

$$D_{11} = \text{diag} \left\{ \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, 0 \right\}_{k=0, \dots, n-2},$$

$$D_{12} = \text{diag} \left\{ \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n} \cdot \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{2k+1}{2n}}, 0 \right\}_{k=0, \dots, n-2},$$

$$D_{21} = \text{diag} \left\{ \cos \frac{2k\pi}{2n}, -1 \right\}_{k=1, \dots, n-1},$$

$$D_{22} = \text{diag} \left\{ \sin \frac{2k\pi}{2n} \cdot \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{2k+1}{2n}}, 0 \right\}_{k=1, \dots, n-1},$$

$$\Delta_1 = \text{diag} \{ \sigma_{2i} \}_{i=0, \dots, n-1}, \quad \Delta_2 = \text{diag} \{ \sigma_{2i+1} \}_{i=0, \dots, n-1},$$

$\mathcal{F}_1^s(t), \mathcal{F}_2^s(t)$  — векторы

$$\mathcal{F}_1^s(t) = \left( \sin \frac{\pi}{2n} [2n\Phi_0^{(s+1)}(0)t^{\frac{1}{2n}} + F_0^s(t)], \sin \frac{\pi(1+i)}{2n} F_i^s(t), F_{2n-2}^s(t) \right),$$

$$i = 2, 4, \dots, 2n-3,$$

$$\mathcal{F}_2^s(t) = \left( \sin \frac{\pi(1+i)}{2n} F_i^s(t), F_{2n-1}^s(t) \right),$$

$$i = 1, 3, \dots, 2n-3, \quad s = 0, \dots, l-1.$$

Положим

$$\vec{\beta}(0) = A_2^{-1} \mathcal{F}_3^0, \quad (17)$$

где  $\mathcal{F}_3^s(t)$  — вектор

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3^s(t) = & \left( -\frac{\sin^2 \frac{\pi(1+i)}{2n}}{\sigma_i \pi^2} \int_0^1 \frac{F_i^s(\tau)}{(1-\tau)^{\frac{1+i}{2n}}} d\tau + \frac{\sin \frac{\pi(1+i)}{2n}}{\sigma_i \pi} G_i^s(0), \right. \\ & \left. \frac{1}{\sigma_{2n-1}} \Phi_{2n-1}^{(s)}(0) \right), \quad i = 1, 3, \dots, 2n-3, \quad s = 0, \dots, l-1. \end{aligned}$$

Легко показать [7], что первые  $n-1$  условий из (17) равносильны условиям  $\beta_p(1) = 0$ ,  $p = 1, \dots, n-1$ .

Введем в (15) новые искомые функции  $\bar{\beta}(t) = \vec{\beta}(t) - \vec{\beta}(0)(1-t)$ . Тогда система (16) примет вид

$$\begin{cases} A_1 \vec{\alpha}(t) + \Delta_1 D_{11} A_1 \bar{\beta}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\Delta_1 D_{12} \left( \frac{\tau}{\tau-t} \right) A_1 \bar{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \overline{\mathcal{F}}_1(t), \\ A_2 \vec{\alpha}(t) - \Delta_2 D_{21} A_2 \bar{\beta}(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\Delta_2 D_{22} \left( \frac{\tau}{\tau-t} \right) A_2 \bar{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \overline{\mathcal{F}}_2(t), \end{cases} \quad (18)$$

где  $\overline{\mathcal{F}}_1(t)$ ,  $\overline{\mathcal{F}}_2(t)$  — векторы

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_1(t) = & \left( \sin \frac{\pi}{2n} \left[ -\frac{4n^2}{2n-1} \vec{B}_0(0) \vec{\beta}(0) F \left( -1 + \frac{1}{2n}, 1, 1 + \frac{1}{2n}; t \right) t^{\frac{1}{2n}} \right. \right. \\ & + 2n \Phi'_0(0) t^{\frac{1}{2n}} + F_0^0(t) \left. \right] \sin \frac{\pi(1+i)}{2n} \left[ -\frac{4n^2}{(2n-1-i)(1+i)} \vec{B}_i(0) \vec{\beta}(0) \right. \\ & \times F \left( -1 + \frac{1+i}{2n}, 1, 1 + \frac{1+i}{2n}; t \right) t^{\frac{1+i}{2n}} + F_i^0(t) \left. \right], F_4^0(t) \Bigg), \\ & i = 2, 4, \dots, 2n-3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_2(t) = & \left( \sin \frac{\pi(1+i)}{2n} \left[ -\frac{4n^2}{(2n-1-i)(1+i)} \vec{B}_i(0) \vec{\beta}(0) \right. \right. \\ & \times F \left( -1 + \frac{1+i}{2n}, 1, 1 + \frac{1+i}{2n}; t \right) t^{\frac{1+i}{2n}} + F_i^0(t) \left. \right], F_{2n-1}^0(t) \\ & + \sigma_{2n-1} \int_0^\infty \vec{A}_0(\eta) d\eta \cdot \vec{\beta}(0) t \Bigg), \quad i = 1, 3, \dots, 2n-3. \end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении  $2n$  условий (12), (13) получили систему (18). Далее, если  $l > 1$ , аналогично [7, 10], при выполнении  $2nl$  условий вида (7) придем к системе уравнений

$$\begin{cases} A_1 \vec{\alpha}^{(l-1)}(t) + \Delta_1 D_{11} A_1 \tilde{\beta}^{(l-1)}(t) \\ \quad - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\Delta_1 D_{12}(\frac{t}{\tau}) D(\frac{t}{\tau}) A_1 \tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \tilde{\mathcal{F}}_1(t), \\ A_2 \vec{\alpha}^{(l-1)}(t) - \Delta_2 D_{21} A_2 \tilde{\beta}^{(l-1)}(t) \\ \quad + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\Delta_2 D_{22}(\frac{t}{\tau}) A_2 \tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \tilde{\mathcal{F}}_2(t), \end{cases} \quad (19)$$

где  $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = \vec{\beta}^{(l-1)}(t) - \vec{\beta}^{(l-1)}(0)(1-t)$  и функции  $\tilde{\mathcal{F}}_1(t), \tilde{\mathcal{F}}_2(t)$  принадлежат пространству  $H^{(1+\gamma)/2n}(0, 1)$ , причем  $\tilde{\mathcal{F}}_{1,2}(t) = O(t^{\frac{1+\gamma}{2n}})$  для малых  $t$ .

Перейдем к доказательству существования функций  $\vec{\alpha}^{(l-1)}(t), \vec{\beta}^{(l-1)}(t)$  из пространства  $H^{(1+\gamma)/2n}$  в полученной системе уравнений (19). Так как определители матриц  $A_1$  и  $A_2$  не равны нулю, исключая  $\vec{\alpha}^{(l-1)}(t)$  из системы (19), имеем

$$K\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{B(t, \tau) \vec{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \vec{Q}(t), \quad (20)$$

где  $\vec{\beta}(t)$  — вектор с компонентами  $(\tilde{\beta}_p^{(l-1)}(t))$ ,  $p = 0, \dots, n-1$ , а матрицы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= A_1^{-1} \Delta_1 D_{11} A_1 + A_2^{-1} \Delta_2 D_{21} A_2, \\ B(t, \tau) &= A_1^{-1} \Delta_1 D_{12} \left( \frac{t}{\tau} \right) A_1 + A_2^{-1} \Delta_2 D_{22} \left( \frac{t}{\tau} \right) A_2, \\ \vec{Q}(t) &= A_1^{-1} \tilde{\mathcal{F}}_1(t) - A_2^{-1} \tilde{\mathcal{F}}_2(t). \end{aligned}$$

Систему сингулярных уравнений (20) можно переписать в виде

$$K\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{B}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^1 M(t, \tau) \vec{\beta}(\tau) d\tau = \vec{Q}(t), \quad (21)$$

где

$$B \equiv B(t, t), \quad M(t, \tau) = \frac{B - B(t, \tau)}{\tau - t}.$$

Для того чтобы выделить характеристическую часть оператора  $K$  в общем случае, перепишем систему сингулярных уравнений (21) в виде

$$B^{-1}K\vec{\beta} = B^{-1}\vec{Q}(t). \quad (22)$$

Пользуясь формулой перестановки Пуанкаре — Бертрана [8, 9], выделим характеристическую часть  $K^0$  оператора  $|B|B^{-1}K$  системы уравнений (22):

$$K^0\vec{\beta} \equiv a\vec{\beta}(t) + \frac{b}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (23)$$

где  $a = a(\sigma_j)$ ,  $b = b(\sigma_j)$ ,  $j = 0, \dots, 2n - 1$ , определяются в явном виде, как в [2, 7].

Полученную систему сингулярных интегральных уравнений

$$K^0\vec{\beta} = \vec{G}, \quad \vec{G} = K^*|B|B^{-1}\vec{Q} - k\vec{\beta} \quad (24)$$

можно решить в классе функций, ограниченных на концах отрезка  $[0, 1]$ . Имеем [8, 9]

$$\vec{\beta}(t) = \frac{1}{2}\vec{G}(t) + \frac{\chi(t)}{2\pi} \int_0^1 \frac{\vec{G}(\tau) d\tau}{\chi(\tau)(\tau - t)}, \quad (25)$$

где  $\chi(t) = t^{1/2+\theta}(1-t)^{1/2-\theta}$ ,  $\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{a}{b} \right|$ , если  $n$  четно, и  $\chi(t) = t^{1/2-\theta}(1-t)^{1/2+\theta}$ , если  $n$  нечетно.

Подставляя в (25) значения  $\vec{G}(t)$ , приходим к системе уравнений Фредгольма

$$\vec{\beta} + K^{**}k\vec{\beta} = \vec{Q}^*, \quad (26)$$

где

$$K^{**}k\vec{\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 N(t, \tau)\vec{\beta}(\tau) d\tau.$$

В силу леммы о принадлежности классу Гёльдера интеграла типа Коши на концах контура интегрирования (см. [1, 9]) при выполнении

неравенства  $\frac{1+\gamma}{2n} < \frac{1}{2} - \theta$ , т. е. при  $\gamma < n - 1 - 2n\theta$  ( $\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ ) получим, что решения уравнений Фредгольма (26) принадлежат пространству  $H^{\frac{1+\gamma}{2n}}(0, 1)$  и обращаются в нуль на концах 0, 1 порядка  $\frac{1+\gamma}{2n}$ . Кроме того, решения уравнений Фредгольма (26) удовлетворяют условию Гёльдера с показателем  $\frac{1}{2} - \theta$  при  $n - 1 - 2n\theta < \gamma < 1$  ( $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ ) и условию Гёльдера с показателем  $\frac{1}{2} - \theta - \varepsilon$  при  $\gamma = n - 1 - 2n\theta$ .

Теорема доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Если выполнены условия теоремы при  $\theta \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ , то существует единственное решение задачи (1), (2), (6) из искомого пространства  $H_x^{p,p/2n} t$  при выполнении  $2nl$  условий (7).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Если выполнены условия теоремы при  $\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ , то, как показано в [12], существует единственное решение задачи (1), (2), (6) из искомого пространства  $H_x^{p,p/2n} t$  при выполнении  $4nl - 2l + 2$  условий вида (7).

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Доказанная теорема, очевидно, остается справедливой, если жорданова матрица  $J$  состоит из не менее чем двух клеток.

Если матрица  $J$  состоит из одной клетки, то существует единственное решение задачи (1), (2), (6) из искомого пространства  $H_x^{p,p/2n} t$  при выполнении  $2nl$  условий (7).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
2. Попов С. В., Потапова С. В. Гёльдеровские классы решений параболических уравнений шестого порядка с меняющимся направлением времени с общей матрицей условий склейивания // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 94–107.
3. Попов С. В., Синявский А. Г. Исследование краевых задач для параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склейивания // Неклассические уравнения математической физики: Сб. науч. работ / Под ред. А. И. Кожанова. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2012. С. 167–176.
4. Туласынов М. С. Первая краевая задача для одного параболического уравнения с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склейивания // Вестн. Новосибирск. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 57–68.
5. Солонников В. А. О краевых задачах для линейных уравнений общего вида // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.

6. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
7. Потапова С. В., Попов С. В. Краевая задача для  $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции при  $n \geq 4$  // Мат. заметки ЯГУ. 2009. Т. 16, вып. 1. С. 32–55.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
9. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
10. Попов С. В., Потапова С. В. Разрешимость параболических уравнений  $2n$ -го порядка с меняющимся направлением эволюции // Вестн. Самарск. гос. ун-та. 2007. Т. 56, № 6. С. 162–175.
11. Потапова С. В., Попов С. В. Гёльдеровские классы решений параболических уравнений шестого порядка с меняющимся направлением времени эволюции // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, вып. 1. С. 58–81.
12. Попов С. В. Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени высокого порядка / Ред. Сиб. мат. журн. Новосибирск, 1988. 56 с. Деп. в ВИНТИ 07.12.88, № 8646–Б88.

г. Якутск

6 августа 2013 г.

О РАЗРЕШИМОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО  
НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ<sup>\*)</sup>

Н. С. Попов

**Введение**

Настоящая работа представляет собой исследование разрешимости пространственно нелокальных краевых задач с граничным условием А. А. Самарского с переменными коэффициентами для одномерных линейных псевдогиперболических уравнений второго порядка.

Пусть  $\Omega$  — интервал  $(0, 1)$  оси  $Ox$ ,  $Q$  — прямоугольник  $\Omega \times (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ . В области  $Q$  рассматривается уравнение

$$u_{tt} - a(x, t)u_{xx} + c(x, t)u - u_{xxt} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1.1)$$

с нелокальными краевыми условиями 1

$$u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (1.2)$$

$$u_x(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (1.3)$$

с нелокальными краевыми условиями 2

$$u(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (1.4)$$

$$u(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (1.5)$$

---

<sup>\*)</sup> Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.132.21.1349).

а также с нелокальными краевыми условиями 3

$$u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (1.6)$$

$$u(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (1.7)$$

где  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_1(t)$ ,  $\beta_2(t)$  — заданные функции, определенные при  $x \in \overline{\Omega} = [0, 1]$ ,  $t \in [0, T]$ .

**Краевая задача 1.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия 1 (1.2), (1.3), а также начальные условия

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (1.8)$$

**Краевая задача 2.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия 2 (1.4), (1.5), а также начальные условия (1.8).

**Краевая задача 3.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия 3 (1.6), (1.7), а также начальные условия (1.8).

Отметим, что в [1] методом регуляризации и продолжения по параметру исследована разрешимость начально-краевой задачи для гиперболического уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1.9)$$

с краевыми условиями 1, 2 или 3. В настоящей работе доказывается разрешимость краевых задач 1–3 методами, использованными при исследовании уравнения (1.9). В случае локальных краевых условий (1.2), (1.3), или (1.4), (1.5), или (1.6), (1.7), т. е. при выполнении условий  $\alpha_2(t) = \beta_1(t) \equiv 0$ , теоремы разрешимости аналогичных краевых задач для уравнений (1.1), называемых *псевдогиперболическими*,

доказаны в [2, 4]. Отметим также, что в [5] для волнового уравнения (1.9) в случае  $c = c(x)$  методом Фурье исследованы общие пространственно нелокальные краевые задачи с постоянными коэффициентами  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  при выполнении условия самосопряженности в  $L_2$  оператора  $-\frac{d^2}{dx^2} + c(x)$ , определенного на функциях, удовлетворяющих краевым условиям.

### Разрешимость краевой задачи

Определим пространства  $V_1$  и  $W_1$ :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v(x, t) : v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)), \\ &\quad v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\}, \\ W_1 &= \{v(x, t) : v(x, t) \in V_1, v_x(x, t) \in V_1\}. \end{aligned}$$

Нормы в этих пространствах определим естественным образом:

$$\begin{aligned} \|v\|_{V_1} &= \|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} \\ &\quad + \|v_t\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)}, \\ \|v\|_{W_1} &= \|v\|_{V_1} + \|v_x\|_{V_1}. \end{aligned}$$

Определим функции, которые понадобятся ниже. Пусть  $\nu_0$  — число из отрезка  $[0, 1]$ . Положим

$$\begin{aligned} a_i(x, t) &= \frac{\beta_i(t) - \alpha_i(t)}{2}(x - \nu_0)^2 + [\nu_0 \beta_i(t) + (1 - \nu_0) \alpha_i(t)](x - \nu_0), \quad i = 1, 2, \\ \Delta(t) &= [1 - a_1(0, t)][1 - a_2(1, t)] - a_1(1, t)a_2(0, t), \\ b_1(x, t) &= \frac{1}{\Delta(t)} \{a_1(x, t)[1 - a_2(1, t)] + a_2(x, t)a_1(1, t)\}, \\ b_2(x, t) &= \frac{1}{\Delta(t)} \{a_1(x, t)a_2(0, t) + a_2(x, t)[1 - a_1(0, t)]\}, \\ A_1(x, t) &= \{b_2(x, t)b_1(1, t) - b_1(x, t)[1 + b_2(1, t)]\} \Delta(t), \\ A_2(x, t) &= \{b_1(x, t)b_2(0, t) - b_2(x, t)[1 + b_1(0, t)]\} \Delta(t). \end{aligned}$$

Пусть  $\xi$  — вектор  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$  из пространства  $\mathbb{R}^4$ . Определим линейные формы  $\Phi_1(t, \xi)$ ,  $\Phi_2(t, \xi)$  и  $\Phi(x, t, \xi)$ :

$$\begin{aligned}\Phi_1(t, \xi) = & [b_{1xx}(0, t) - 2b_{1t}(0, t)]\xi_1 + [b_{2xx}(0, t) - 2b_{2t}(0, t)]\xi_2 \\ & + [b_{1xx}(0, t) - b_{1tt}(0, t) - c(0, t)b_1(0, t) - c(0, t) + b_{1xxt}(0, t)]\xi_3 \\ & + [b_{2xx}(0, t) - b_{2tt}(0, t) - c(0, t)b_2(0, t) + b_{2xxt}(0, t)]\xi_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(t, \xi) = & [b_{1xx}(1, t) - 2b_{1t}(1, t)]\xi_1 + [b_{2xx}(1, t) - 2b_{2t}(1, t)]\xi_2 \\ & + [b_{1xx}(1, t) - b_{1tt}(1, t) - c(1, t)b_1(1, t) + b_{1xxt}(1, t)]\xi_3 \\ & + [b_{2xx}(1, t) - b_{2tt}(1, t) - c(1, t)b_2(1, t) - c(1, t) + b_{2xxt}(1, t)]\xi_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(x, t, \xi) = & A_1(x, t)\Phi_1(t, \xi) + A_2(x, t)\Phi_2(t, \xi) + [b_{1xx}(x, t) - 2b_{1t}(x, t)]\xi_1 \\ & + [b_{2xx}(x, t) - 2b_{2t}(x, t)]\xi_2 + [b_{1xx}(x, t) - b_{1tt}(x, t) - c(x, t)b_1(x, t) + b_{1xxt}(x, t)]\xi_3 \\ & + [b_{2xx}(x, t) - b_{2tt}(x, t) - c(x, t)b_2(x, t) + b_{2xxt}(x, t)]\xi_4.\end{aligned}$$

Определим функцию  $\tilde{f}(x, t)$ :

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) + A_1(x, t)f(0, t) + A_2(x, t)f(1, t).$$

Введем обозначение  $f_1(x, t, u) = f(x, t) + (a - 1)u_{xx}$ , тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(x, t, u) &= f_1(x, t) + A_1(x, t)f_1(0, t) + A_2(x, t)f_1(1, t) \\ &= f(x, t) + (a - 1)u_{xx}(x, t) + A_1(x, t)f(0, t) + A_1(x, t)(a - 1)u_{xx}(0, t) \\ &\quad + A_2(x, t)f(1, t) + A_2(x, t)(a - 1)u_{xx}(1, t) \\ &= \tilde{f}(x, t) + A_1(x, t)(a - 1)u_{xx}(0, t) + A_2(x, t)(a - 1)u_{xx}(1, t).\end{aligned}$$

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия

$$a(x, t), c(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad \alpha_i(t) \in C^3([0, T]), \quad \beta_i(t) \in C^3([0, T]), \quad i = 1, 2;$$

$$|\Delta(t)| \geq \delta_0 > 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \tag{2.1}$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_x(x, t) \in L_2(Q). \tag{2.2}$$

Тогда существует единственная функция  $u(x, t)$  из пространства  $V_1$ , являющаяся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1.1) и удовлетворяющая условиям (1.2), (1.3), (1.8).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\bar{w} = (w_t(0, t), w_t(1, t), w(0, t), w(1, t))$ . Доказательство теоремы 1 основано на исследовании разрешимости в пространстве  $W_1$  следующей вспомогательной начально-краевой задачи для «существенно нагруженного» [2, 3] псевдогиперболического уравнения: *найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения*

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} + c(x, t)w - w_{xxt} &= \tilde{f}_1(x, t, u) + A_1(x, t)[w_{xx}(0, t) + w_{xxt}(0, t)] \\ &\quad + A_2(x, t)[w_{xx}(1, t) + w_{xxt}(1, t)] + \Phi(x, t, \bar{w}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (2.5)$$

Искомая разрешимость устанавливается с помощью метода продолжения по параметру. Основой для применения метода продолжения по параметру и для предельного перехода по параметру регуляризации являются априорные оценки.

Найдя решение  $w(x, t)$  краевой задачи (2.3)–(2.5), положим

$$u(x, t) = w(x, t) + b_1(x, t)w(0, t) + b_2(x, t)w(1, t).$$

Эта функция и будет искомым решением краевой задачи 1.

Пусть  $\lambda$  — число из отрезка  $[0, 1]$ . Рассмотрим семейство начально-краевых задач: *найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения*

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} + cw - w_{xxt} &= \tilde{f}_1(x, t, u) + \lambda[A_1(x, t)(w_{xx}(0, t) + w_{xxt}(0, t)) \\ &\quad + A_2(x, t)(w_{xx}(1, t) + w_{xxt}(1, t)) + \Phi(x, t, \bar{w})] \end{aligned} \quad (2.6)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.4), (2.5).

Покажем, что данная краевая задача имеет решение, принадлежащее пространству  $W_1$  для всех чисел  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ . Для доказательства воспользуемся методом продолжения по параметру.

Обозначим через  $\Lambda$  множество тех чисел  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ , для которых краевая задача (2.6), (2.4), (2.5) при выполнении условий (2.1),

(2.2) имеет решение  $w(x, t)$ , принадлежащее пространству  $W_1$ . Если покажем, что множество  $\Lambda$  непусто, открыто и замкнуто, то оно будет совпадать со всем отрезком  $[0, 1]$ .

При  $\lambda = 0$  краевая задача (2.6), (2.4), (2.5) при выполнении условий (2.1), (2.2) разрешима в пространстве  $W_1$  (см. [2]). Из этого следует, что число 0 принадлежит множеству  $V$ , стало быть, множество  $\Lambda$  непусто.

Открытость и замкнутость множества  $\Lambda$  доказывается с помощью априорных оценок. Установим их наличие.

Положим

$$\begin{aligned} F = & \tilde{f}_1(x, t, u) + \lambda[A_1(x, t)[w_{xx}(0, t) + w_{xxt}(0, t)] \\ & + A_2(x, t)[w_{xx}(1, t) + w_{xxt}(1, t)] + \Phi(x, t, \bar{w})]. \end{aligned}$$

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} (w_{x\tau\tau} - w_{xxx} + cw_x + c_x w - w_{xxxx\tau}) \\ & \times \left[ w_{x\tau} - \left( x - \frac{1}{2} \right) (w_{xx} + w_{xxt}) + \frac{1}{4} w_{x\tau\tau} - \gamma w_{xxxx\tau} \right] dx d\tau \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} F_x \left[ w_{x\tau} - \left( x - \frac{1}{2} \right) (w_{xx} + w_{xxt}) + \frac{1}{4} w_{x\tau\tau} - \gamma w_{xxxx\tau} \right] dx d\tau, \end{aligned}$$

где  $\gamma$  — фиксированное положительное число, величина которого будет уточнена ниже.

Интегрируя по частям и используя указанное выше начальное условие для функции  $w(x, t)$ , нетрудно от данного равенства перейти к следующему:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [w_{xt}^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t)] dx + \frac{4\gamma + 1}{8} \int_{\Omega} w_{xxt}^2(x, t) dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} w_{xxx}^2(x, t) dx \\ & + \frac{1}{4} \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dx d\tau + \gamma \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxxx\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{4} \int_0^t [w_{xx}^2(0, \tau) + w_{xxt}^2(0, \tau)] d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + w_{xx}^2(1, \tau) + w_{xx\tau}^2(1, \tau)] d\tau = -\lambda\gamma \int_0^t \int_{\Omega} [A_{1x}(x, \tau)(w_{xx}(0, \tau) + w_{xxt}(0, \tau)) \\
& \quad + A_{2x}(x, \tau)(w_{xx}(1, \tau) + w_{xxt}(1, \tau))] w_{xxx\tau} dx d\tau \\
& \quad + \int_{\Omega} \left(x - \frac{1}{2}\right) w_{xt}(x, t) w_{xx}(x, t) dx - \frac{1}{4} \int_{\Omega} w_{xx}(x, t) w_{xxt}(x, t) dx \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Omega} \left(x - \frac{1}{2}\right) w_{xx\tau}[w_{x\tau\tau} - w_{xxx}] dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} [\tilde{f}_{1x} - cw_x - c_x w + \lambda\Phi_x] \\
& \quad \times \left[w_{x\tau} - \left(x - \frac{1}{2}\right)(w_{xx} + w_{xx\tau}) + \frac{1}{4}w_{x\tau\tau} - \gamma w_{xxx\tau}\right] dx d\tau \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} [w_{x\tau}^2 + w_{xx}^2] dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} \left(x - \frac{1}{2}\right) w_{xx} w_{xxx\tau} dx d\tau \\
& \quad + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} [A_{1x}(x, \tau)(w_{xx}(0, \tau) + w_{xxt}(0, \tau)) + A_{2x}(x, \tau)(w_{xx}(1, \tau) \\
& \quad + w_{xxt}(1, \tau))] \left[w_{x\tau} - \left(x - \frac{1}{2}\right)(w_{xx} + w_{xx\tau}) + \frac{1}{4}w_{x\tau\tau}\right] dx d\tau. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (2.7) оценим с помощью неравенства Юнга:

$$\begin{aligned}
& \left| \lambda\gamma \int_0^t \int_{\Omega} [A_{1x}(x, \tau)(w_{xx}(0, \tau) + w_{xxt}(0, \tau)) + A_{2x}(x, \tau)(w_{xx}(1, \tau) \right. \\
& \quad \left. + w_{xxt}(1, \tau))] w_{xxx\tau} dx d\tau \right| \leq \frac{\gamma}{2} \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dx d\tau + 2\gamma \max_{\bar{Q}} [A_{1x}^2(x, t)] \\
& \quad \times \left[ \int_0^t w_{xx}^2(0, \tau) d\tau + \int_0^t w_{xx\tau}^2(0, \tau) d\tau \right] + 2\gamma \max_{\bar{Q}} [A_{2x}^2(x, t)] \\
& \quad \times \left[ \int_0^t w_{xx}^2(1, \tau) d\tau + \int_0^t w_{xx\tau}^2(1, \tau) d\tau \right]. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Для второго слагаемого правой части равенства (2.7) имеет место оценка

$$\left| \int_{\Omega} \left( x - \frac{1}{2} \right) w_{xt}(x, t) w_{xx}(x, t) dx \right| \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} w_{xt}^2(x, t) dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} w_{xx}^2(x, t) dx. \quad (2.9)$$

Для третьего слагаемого правой части равенства (2.7) имеет место оценка

$$\left| \frac{1}{4} \int_{\Omega} w_{xx}(x, t) w_{xxt}(x, t) dx \right| \leq \frac{1}{8} \int_{\Omega} w_{xx}^2(x, t) dx + \frac{1}{8} \int_{\Omega} w_{xxt}^2(x, t) dx. \quad (2.10)$$

Используя неравенство Юнга и элементарные неравенства вложения, нетрудно показать, что оставшиеся слагаемые правой части равенства (2.7) оцениваются сверху величиной

$$\begin{aligned} & \delta \left[ \gamma \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dxd\tau + \int_0^t (w_{xx}^2(0, \tau) + w_{xx\tau}^2(0, \tau) + w_{xx}^2(1, \tau) \right. \\ & \left. + w_{xx\tau}^2(1, \tau)) d\tau \right] + K_1 \left[ \int_0^t \int_{\Omega} (w_{xx}^2 + w_{x\tau}^2 + w_{xx\tau}^2 + w_{x\tau\tau}^2 + w_{xxx}^2) dxd\tau \right. \\ & \left. + \int_0^t \int_{\Omega} (f_1^2 + f_{1x}^2) dxd\tau \right] \end{aligned}$$

с произвольным положительным числом  $\delta$  и числом  $K_1$ , определяемым функциями  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_1(t)$  и  $\beta_2(t)$ , а также числами  $\delta$  и  $\gamma$ . Так как  $f_1(x, t, u) = f(x, t) + (a-1)[w_{xx}(x, t) + b_{1xx}(x, t)w(0, t) + b_{2xx}(x, t)w(1, t)]$ , справедливы оценки

$$f_1^2(x, t, u) \leq K_2 [f^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t) + b_{1xx}^2(x, t)w^2(0, t) + b_{2xx}^2(x, t)w^2(1, t)],$$

$$\begin{aligned} f_{1x}^2(x, t, u) & \leq K_3 [f_x^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t) + b_{1xx}^2(x, t)w^2(0, t) + b_{2xx}^2(x, t)w^2(1, t) \\ & + w_{xxx}^2(x, t) + b_{1xxx}^2(x, t)w^2(0, t) + b_{2xxx}^2(x, t)w^2(1, t)]. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} w^2(0, t) + w^2(1, t) &\leq C_1 \int_{\Omega} [w_x^2(x, t) + w^2(x, t)] dx \\ &\leq C_2 \int_{\Omega} [w_{xx}^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t)] dx. \end{aligned}$$

Далее выберем число  $\gamma$  так, что

$$2\gamma \max \left\{ \max_{\bar{\Omega}} [A_{1x}^2(x, t)], \max_{\bar{\Omega}} [A_{2x}^2(x, t)] \right\} < \frac{1}{4}.$$

Используя неравенства (2.8)–(2.10), а также подбирая число  $\delta$  малым, нетрудно получить, что из (2.7) следует неравенство

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [w_{xt}^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t)] dx + \int_{\Omega} [w_{xxt}^2(x, t) + w_{xxx}^2(x, t) + w_{x\tau\tau}^2(x, t)] dx \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2(x, t) dx d\tau + \int_0^t [w_{xx}^2(0, \tau) + w_{xx\tau}^2(0, \tau) + w_{xx}^2(1, \tau) \\ &+ w_{xx\tau}^2(1, \tau)] d\tau \leq K_4 \left[ \int_0^t \int_{\Omega} (w_{x\tau}^2 + w_{xx}^2 + w_{xx\tau}^2 + w_{x\tau\tau}^2 + w_{xxx}^2) dx d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_{\Omega} (f^2 + f_x^2) dx d\tau \right], \quad (2.11) \end{aligned}$$

в котором число  $K_4$  определяется лишь функциями  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_1(t)$  и  $\beta_2(t)$ . Из (2.11) с помощью леммы Гронуолла нетрудно получить первую априорную оценку

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [w_{xt}^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t) + w_{xxt}^2(x, t) + w_{xxx}^2(x, t) + w_{x\tau\tau}^2(x, t)] dx \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2(x, t) dx d\tau + \int_0^t [w_{xx}^2(0, \tau) + w_{xx\tau}^2(0, \tau) + w_{xx}^2(1, \tau) \\ &+ w_{xx\tau}^2(1, \tau)] d\tau \leq K_5 \int_0^T \int_{\Omega} (f^2 + f_x^2) dx d\tau, \quad (2.12) \end{aligned}$$

постоянная  $K_5$  в которой определяется числом  $T$ , а также функциями  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_1(t)$  и  $\beta_2(t)$ . Наконец, продифференцировав по  $x$  уравнение (2.6), с помощью (2.12) нетрудно получить вторую априорную оценку

$$\int_0^t \int_{\Omega} [w_{\tau\tau}^2 + w_{x\tau\tau}^2] dx d\tau \leq K_6 \int_0^T \int_{\Omega} (f^2 + f_x^2) dx d\tau, \quad (2.13)$$

постоянная  $K_6$  в которой определяется числом  $T$ , функциями  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_1(t)$  и  $\beta_2(t)$ .

Оценок (2.12) и (2.13) вполне достаточно для доказательства открытости и замкнутости множества  $\Lambda$ . Действительно, эти оценки означают выполнение неравенств

$$\begin{aligned} \|w\|_{W_1} &\leq M_1(\|f\|_{L_2(Q)} + \|f_x\|_{L_2(Q)}), \\ \|F\|_{L_2(Q)} + \|F_x\|_{L_2(Q)} &\leq M_2\|w\|_{W_1}. \end{aligned}$$

С помощью полученных неравенств, применяя стандартные приемы доказательства открытости и замкнутости множества  $\Lambda$  (см. [6]), несложно установить требуемое. Конкретные реализации можно найти, например, в [7, 8].

Другими словами, краевая задача (2.6), (2.4), (2.5) при выполнении условий теоремы имеет решение  $w(x, t)$ , принадлежащее пространству  $W_1$  при всех значениях  $\lambda$ , в том числе и при  $\lambda = 1$ .

Положим

$$u(x, t) = w(x, t) + b_1(x, t)w(0, t) + b_2(x, t)w(1, t).$$

Очевидно, что функция  $u(x, t)$  принадлежит пространству  $V_1$  и является решением поставленной краевой задачи.

Единственность решений краевой задачи (1.1)–(1.3), (1.8) в пространстве  $V_1$  следует из оценки (2.12).

Теорема полностью доказана.

### Разрешимость краевых задач 2 и 3

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия

$$a(x, t), c(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad \alpha_i(t), \beta_i(t) \in C^3([0, T]), \quad i = 1, 2; \quad (3.1)$$

$$\alpha_1^2(t) + \beta_2^2(t) \leq 2\alpha_2(t)\beta_1(t) \quad \text{при } t \in [0, T]; \quad (3.2)$$

$$\alpha_1(t) - \alpha_2(t) \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \quad (3.3)$$

$$\alpha_2(t) + \beta_1(t) = 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \quad (3.4)$$

$$\exists \mu_0 \in (0; 3/2) : [\mu_0 + 5\alpha'_1(t)]\xi_1^2 + 4\alpha'_2(t)\xi_1\xi_2 + [\mu_0 - 5\beta'_2(t)]\xi_2^2 \geq 0 \\ \text{при } t \in [0, T], \xi \in \mathbb{R}^2; \quad (3.5)$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q), \quad f_{xt}(x, t) \in L_2(Q), \quad (3.6) \\ f(x, 0) \equiv 0 \quad \text{при } x \in \bar{\Omega}, \quad f_x(0, 0) = f_x(1, 0) \equiv 0.$$

Тогда существует единственная функция  $u(x, t)$  из пространства  $V_1$ , являющаяся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1.1) и удовлетворяющая условиям (1.4), (1.5), (1.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разрешимости краевой задачи 2 основано на методе регуляризации этих задач краевыми задачами вида 1, использовании теоремы 1, априорных оценок и предельном переходе. Пусть  $\varepsilon$  — положительное число. Положим

$$\alpha_{1\varepsilon}(t) = \alpha_1(t) + \varepsilon, \quad \beta_{2\varepsilon}(t) = \beta_2(t) - \varepsilon.$$

Рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются начальные условия (1.8), а также нелокальные условия

$$u(0, t) = \alpha_{1\varepsilon}(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (3.7)$$

$$u(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_{2\varepsilon}(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (3.8)$$

Покажем, что полученная краевая задача для любого  $\varepsilon > 0$  при выполнении условий (3.1)–(3.3) имеет решение  $u(x, t)$  такое, что  $u(x, t) \in V_1$ ,  $u_t(x, t) \in V_1$ .

Положим  $\Delta_{0\varepsilon}(t) = \alpha_{1\varepsilon}(t)\beta_{2\varepsilon}(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)$ . Заметим, что в силу условия (3.2) при  $t \in [0, T]$  выполняется неравенство

$$\Delta_{0\varepsilon}(t) = -\varepsilon^2 + \varepsilon(\beta_2(t) - \alpha_1(t)) + \alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t) \leq -\frac{\varepsilon^2}{2},$$

или  $\varepsilon^2 - 2\varepsilon(\beta_2(t) - \alpha_1(t)) - 2\alpha_1(t)\beta_2(t) + 2\alpha_2(t)\beta_1(t) \geq 0$ , где дискриминант неположительный:

$$\begin{aligned} & (\beta_2(t) - \alpha_1(t))^2 + 2(\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)) \\ & = \beta_2^2(t) + \alpha_1^2(t) - 2\alpha_2(t)\beta_1(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, условия (3.7), (3.8) эквивалентны исследованным условиям краевой задачи 1:

$$u_x(0, t) = \frac{\beta_{2\varepsilon}(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u(0, t) - \frac{\alpha_2(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (3.7')$$

$$u_x(1, t) = -\frac{\beta_1(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u(0, t) + \frac{\alpha_{1\varepsilon}(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (3.8')$$

Если положить  $\nu_0 = 0$ , то функция  $\Delta(t)$ , вычисленная по этим условиям, имеет вид

$$\Delta(t) = 1 - \frac{1}{2\Delta_{0\varepsilon}(t)} [\alpha_{1\varepsilon}(t) - \alpha_2(t)].$$

Согласно (3.3) имеем  $\Delta(t) \geq 1$ . Выполнение этого неравенства и условия (3.1), (3.5) означают, что для краевой задачи (1.1), (1.8), (3.7'), (3.8') выполняются все условия теоремы 1. Тогда эта задача будет иметь решение, принадлежащее  $V_1$ . Более того, если вместо задачи (1.1), (1.8), (3.7'), (3.8') рассмотреть «продифференцированную по  $t$ » задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$u_{ttt} - a(x, t)u_{xxt} - a_t(x, t)u_{xx} + c(x, t)u_t + c_t(x, t)u - u_{xxtt} = f_t(x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.8), а также условия

$$\begin{aligned} u_{xt}(0, t) &= \frac{\beta_{2\varepsilon}(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u_t(0, t) - \frac{\alpha_2(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u_t(1, t) \\ &+ \left( \frac{\beta_{2\varepsilon}(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} \right)_t u(0, t) - \left( \frac{\alpha_2(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} \right)_t u(1, t), \quad 0 < t < T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xt}(1, t) &= -\frac{\beta_1(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u_t(0, t) + \frac{\alpha_{1\varepsilon}(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} u_t(1, t) \\ &- \left( \frac{\beta_1(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} \right)_t u(0, t) + \left( \frac{\alpha_{1\varepsilon}(t)}{\Delta_{0\varepsilon}(t)} \right)_t u(1, t), \quad 0 < t < T, \end{aligned}$$

то нетрудно показать, повторяя доказательство теоремы 1, что данная задача будет иметь решение  $u(x, t)$  такое, что  $u(x, t) \in V_1$ ,  $u_t(x, t) \in V_1$ .

Вернемся к краевой задаче (1.1), (1.8), (3.7), (3.8). Как следует из доказанного, эта задача имеет решение  $u_\varepsilon(x, t)$  такое, что  $u_\varepsilon(x, t) \in V_1$ ,  $u_{\varepsilon t}(x, t) \in V_1$ . Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} (u_{\varepsilon\tau\tau\tau} - u_{\varepsilon xx\tau} + cu_{\varepsilon\tau} + c_\tau u_\varepsilon - u_{\varepsilon xx\tau\tau}) \\ & \quad \times \left[ u_{\varepsilon\tau\tau} - \mu \left( x - \frac{1}{2} \right) (u_{\varepsilon x\tau} + u_{\varepsilon x\tau\tau}) + \frac{1}{4} u_{\varepsilon\tau\tau\tau} - \frac{1}{4} u_{\varepsilon xx\tau\tau} \right] dx d\tau \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} f_{1\tau} \left[ u_{\varepsilon\tau\tau} - \mu \left( x - \frac{1}{2} \right) (u_{\varepsilon x\tau} + u_{\varepsilon x\tau\tau}) + \frac{1}{4} u_{\varepsilon\tau\tau\tau} - \frac{1}{4} u_{\varepsilon xx\tau\tau} \right] dx d\tau, \end{aligned}$$

где  $\mu \in (\mu_0; 3/2)$ . Интегрируя по частям и используя начальные условия (1.8) для функции  $u(x, t)$ , условия (3.6), нелокальные краевые условия (3.7), (3.8), от данного равенства перейдем к следующему:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_{\varepsilon tt}^2(x, t) + u_{\varepsilon xt}^2(x, t)] dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} u_{\varepsilon extt}^2(x, t) dx + \frac{1}{8} \int_{\Omega} u_{\varepsilon xxxt}^2(x, t) dx \\ & + \frac{1}{4} \int_0^t \int_{\Omega} u_{\varepsilon\tau\tau\tau}^2 dx d\tau + \frac{3-2\mu}{4} \int_0^t \int_{\Omega} u_{\varepsilon x\tau\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{4} \int_0^t \int_{\Omega} u_{\varepsilon xx\tau\tau}^2 dx d\tau \\ & + \frac{\mu}{4} \int_0^t [u_{\varepsilon\tau\tau}^2(0, \tau) + u_{\varepsilon\tau\tau}^2(1, \tau) + u_{\varepsilon x\tau}^2(0, \tau) + u_{\varepsilon x\tau}^2(1, \tau)] d\tau \\ & + \int_0^t \left\{ \left[ \frac{\mu}{4} + \frac{5}{4} \alpha'_1(\tau) \right] u_{\varepsilon x\tau\tau}^2(0, \tau) + \alpha'_2(\tau) u_{\varepsilon x\tau\tau}(0, \tau) u_{\varepsilon x\tau\tau}(1, \tau) \right. \\ & \quad \left. + \left[ \frac{\mu}{4} - \frac{5}{4} \beta'_2(\tau) \right] u_{\varepsilon x\tau\tau}^2(1, \tau) \right\} d\tau + \frac{1}{4} \alpha_{1\varepsilon}(t) u_{\varepsilon extt}^2(0, t) \\ & \quad + \frac{1}{2} \alpha_2(t) u_{\varepsilon extt}(0, t) u_{\varepsilon extt}(1, t) - \frac{1}{4} \beta_{2\varepsilon}(t) u_{\varepsilon extt}^2(1, t) \\ & = \mu \int_{\Omega} \left( x - \frac{1}{2} \right) u_{\varepsilon tt}(x, t) u_{\varepsilon xt}(x, t) dx - \frac{1}{4} \int_{\Omega} u_{\varepsilon xt}(x, t) u_{\varepsilon extt}(x, t) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu \int_0^t \int_{\Omega} \left( x - \frac{1}{2} \right) u_{\varepsilon x \tau \tau} [u_{\varepsilon \tau \tau \tau} - u_{\varepsilon x x \tau}] dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} [f_{1\tau} - c u_{\varepsilon \tau} - c_{\tau} u_{\varepsilon}] \\
& \times \left[ u_{\varepsilon \tau \tau} - \mu \left( x - \frac{1}{2} \right) (u_{\varepsilon x \tau} + u_{\varepsilon x \tau \tau}) + \frac{1}{4} u_{\varepsilon \tau \tau \tau} - \frac{1}{4} u_{\varepsilon x x \tau \tau} \right] dx d\tau \\
& + \frac{\mu}{2} \int_0^t \int_{\Omega} [u_{\varepsilon \tau \tau}^2 + u_{\varepsilon x \tau}^2] dx d\tau - \mu \int_0^t \int_{\Omega} \left( x - \frac{1}{2} \right) u_{\varepsilon x \tau} u_{\varepsilon x x \tau \tau} dx d\tau \\
& + \int_0^t [(u_{\varepsilon x \tau}(1, \tau) + u_{\varepsilon x \tau \tau}(1, \tau)) u_{\varepsilon \tau \tau}(1, \tau) - (u_{\varepsilon x \tau}(0, \tau) + u_{\varepsilon x \tau \tau}(0, \tau)) \\
& \times u_{\varepsilon \tau \tau}(0, \tau)] d\tau + \frac{1}{4} \int_0^t [u_{\varepsilon x \tau}(1, \tau) u_{\varepsilon \tau \tau \tau}(1, \tau) - u_{\varepsilon x \tau}(0, \tau) u_{\varepsilon \tau \tau \tau}(0, \tau)] d\tau \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t u_{\varepsilon x \tau \tau}(0, \tau) [\alpha_1'''(\tau) u_{\varepsilon x}(0, \tau) + 3\alpha_1''(\tau) u_{\varepsilon x \tau}(0, \tau) + \alpha_2''(\tau) u_{\varepsilon x}(1, \tau) \\
& + 3\alpha_2''(\tau) u_{\varepsilon x \tau}(1, \tau)] d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t u_{\varepsilon x \tau \tau}(1, \tau) [\beta_1'''(\tau) u_{\varepsilon x}(0, \tau) + 3\beta_1''(\tau) u_{\varepsilon x \tau}(0, \tau) \\
& + \beta_2'''(\tau) u_{\varepsilon x}(1, \tau) + 3\beta_2''(\tau) u_{\varepsilon x \tau}(1, \tau)] d\tau. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Из условий (3.2)–(3.6) вытекает выполнение неравенств

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left\{ \left[ \frac{\mu}{4} + \frac{5}{4} \alpha_1'(\tau) \right] u_{\varepsilon x \tau \tau}^2(0, \tau) + \alpha_2'(\tau) u_{\varepsilon x \tau \tau}(0, \tau) u_{\varepsilon x \tau \tau}(1, \tau) \right. \\
& \left. + \left[ \frac{\mu}{4} - \frac{5}{4} \beta_2'(\tau) \right] u_{\varepsilon x \tau \tau}^2(1, \tau) \right\} d\tau \geq \frac{\mu - \mu_0}{4} \int_0^t [u_{\varepsilon x \tau \tau}^2(0, \tau) + u_{\varepsilon x \tau \tau}^2(1, \tau)] d\tau, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \alpha_{1\varepsilon}(t) u_{\varepsilon x t t}^2(0, t) + \frac{1}{2} \alpha_2(t) u_{\varepsilon x t t}(0, t) u_{\varepsilon x t t}(1, t) - \frac{1}{4} \beta_{2\varepsilon}(t) u_{\varepsilon x t t}^2(1, t) \geq 0.$$

Для первого и второго слагаемых правой части равенства (3.9) имеют

место оценки, аналогичные (2.9), (2.10):

$$\left| \int_{\Omega} \left( x - \frac{1}{2} \right) u_{\varepsilon tt}(x, t) u_{\varepsilon xt}(x, t) dx \right| \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} u_{\varepsilon tt}^2(x, t) dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} u_{\varepsilon xt}^2(x, t) dx, \quad (3.11)$$

$$\left| \frac{1}{4} \int_{\Omega} u_{\varepsilon xt}(x, t) u_{\varepsilon xt}(x, t) dx \right| \leq \frac{1}{8} \int_{\Omega} u_{\varepsilon ext}^2(x, t) dx + \frac{1}{8} \int_{\Omega} u_{\varepsilon extt}^2(x, t) dx. \quad (3.12)$$

Используя неравенство

$$\int_0^t [v^2(0, \tau) + v^2(1, \tau)] d\tau \leq \delta \int_0^t \int_{\Omega} v_x^2(x, \tau) dx d\tau + C(\delta) \int_0^t \int_{\Omega} v^2(x, \tau) d\tau,$$

в котором  $\delta$  — произвольное положительное число, оценивая правую часть равенства (3.9) с помощью неравенства Юнга и элементарных интегральных неравенств, учитывая неравенства (3.10)–(3.12) и применяя лемму Гронуолла, получаем, что для решений краевой задачи (1.1), (1.8), (3.7), (3.8) имеет место априорная оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [u_{\varepsilon tt}^2(x, t) + u_{\varepsilon xt}^2(x, t) + u_{\varepsilon extt}^2(x, t) + w_{\varepsilon ext}^2(x, t)] dx \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} [u_{\varepsilon \tau \tau \tau}^2(x, t) + u_{\varepsilon x \tau \tau}^2(x, t) + u_{\varepsilon x x \tau \tau}^2(x, t)] dx d\tau \\ & + \int_0^t [u_{\varepsilon \tau \tau}^2(0, \tau) + u_{\varepsilon \tau \tau}^2(1, \tau) + u_{\varepsilon x \tau}^2(0, \tau) + u_{\varepsilon x \tau}^2(1, \tau) \\ & + u_{\varepsilon x \tau \tau}^2(0, \tau) + u_{\varepsilon x \tau \tau}^2(1, \tau)] d\tau \leq K_7 \int_0^T \int_{\Omega} (f^2 + f_{\tau}^2) dx d\tau, \end{aligned} \quad (3.12)$$

в которой постоянная  $K_7$  определяется числом  $T$ , а также функциями  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_1(t)$  и  $\beta_2(t)$ . Наконец, используя эту оценку, уравнение (1.1) и продифференцированное по переменной  $t$  уравнение

(1.1), нетрудно получить вторую априорную оценку

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon xx}^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} u_{\varepsilon x x \tau}^2(x, t) dx d\tau \leq K_8 \int_0^T \int_{\Omega} (f^2 + f_{\tau}^2) dx d\tau \quad (3.13)$$

с постоянной  $K_8$ , определяемой числом  $T$  и заданными функциями  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_1(t)$  и  $\beta_2(t)$ .

Оценок (3.12), (3.13) достаточно для осуществления предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в краевой задаче (1.1), (1.8), (3.7), (3.8). Предельная функция принадлежит пространству  $V_1$  и является искомым решением краевой задачи 2.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия

$$a(x, t), c(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad \alpha_i(t), \beta_i(t) \in C^3([0, T]), \quad i = 1, 2;$$

$$\alpha_2(t) \geq -1, \quad \beta_2(t) \leq 0 \quad \text{при } t \in [0, T];$$

$$\exists \mu_0 \in (0; 3/2) : [\mu_0(1 + \alpha_2^2(t)) - 5\beta_2'(t)]\xi_1^2 + 4(\alpha_2(t) - \beta_1(t))\xi_1\xi_2 \geq 0 \\ \text{при } t \in [0, T], \quad \xi \in \mathbb{R}^2;$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q), \quad f_{xt}(x, t) \in L_2(Q),$$

$$f(x, 0) \equiv 0 \quad \text{при } x \in \bar{\Omega}, \quad f_x(1, 0) \equiv 0.$$

Тогда существует единственная функция  $u(x, t)$  из пространства  $V_1$ , являющаяся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1.1) и удовлетворяющая условиям (1.6)–(1.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данной теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 2. Регуляризующей будет следующая задача: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются напочальные условия (1.8), а также условия

$$u_x(0, t) = \left[ \alpha_1(t) - \frac{\alpha_2(t)\beta_1(t)}{\beta_2(t) - \varepsilon} \right] u(0, t) + \frac{\alpha_2(t)}{\beta_2(t) - \varepsilon} u(1, t), \quad 0 < t < T,$$

$$u_x(1, t) = -\frac{\beta_1(t)}{\beta_2(t) - \varepsilon} u(0, t) + \frac{1}{\beta_2(t) - \varepsilon} u(1, t), \quad 0 < t < T.$$

Эта задача имеет решение  $u(x, t)$  такое, что  $u(x, t) \in V_1$ ,  $u_t(x, t) \in V_1$ . Априорные оценки, равномерные по  $\varepsilon$ , выводятся, как в доказательстве теоремы 2. Предельный переход осуществляется стандартным образом; предельная функция принадлежит пространству  $V_1$  и является решением краевой задачи 3. Теорема доказана.

### Заключение

1. Утверждения теорем 1–3 справедливы и для более общих уравнений вида

$$u_{tt} - a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u_t + d(x, t)u - u_{xxt} = f(x, t)$$

при выполнении необходимых условий гладкости на входные данные.

2. Условия  $f(x, 0) \equiv 0$ ,  $f_x(0, 0) = f_x(1, 0) \equiv 0$  теорем 2 и 3 являются техническими, и от них вполне можно отказаться. В краевых условиях задач 1–3 вполне возможно присутствие свободных членов  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ .

3. Полученный по ходу доказательства теоремы 1 результат о разрешимости краевой задачи (2.3)–(2.5) для «существенно нагруженного» уравнения (2.3) имеет и самостоятельное значение.

4. Единственность решений при выполнении условий теорем 1–3 очевидна.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bouziani A. Strong solution for a mixed problem with nonlocal condition for certain pluriparabolic equation // Hiroshima Math. J. 1997. V. 27, N 3.
1. Кожанов А. И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Докл. АН. 2009. Т. 427, № 6. С. 747–749.
2. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
3. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012.
4. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
5. Лажетич Н. Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1072–1077.
6. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

- 
7. Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 769–774.
  8. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.

г. Якутск

5 июня 2013 г.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО И ЖЕСТКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯМИ ОДНОГО  
КЛАССА НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ  
СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

М. А. Сагадеева

**Введение**

Пусть  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  и  $\mathfrak{U}$  — гильбертовы пространства. На интервале  $\mathfrak{J} \subset \mathbb{R}$  при  $t_0 \in \mathfrak{J}$  рассмотрим задачу Шоултера — Сидорова [1]

$$L(x(t_0) - x_0) = 0 \quad (1)$$

для уравнения соболевского типа [2–6]

$$L\dot{x}(t) = M_t x(t) + f(t) + B u(t), \quad (2)$$

здесь  $L, M_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$  (т. е. операторы линейны и непрерывны) при каждом  $t \in \mathfrak{J}$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$ , а вектор-функции  $u : [0, T] \rightarrow \mathfrak{U}$ ,  $f : [0, T] \rightarrow \mathfrak{Y}$  подлежат дальнейшему определению.

Введем в рассмотрение функционал качества

$$J(u) = \alpha \sum_{q=0}^1 \int_{t_0}^T \|z^{(q)}(t) - z_d^{(q)}(t)\|_{\mathfrak{Z}}^2 dt + (1-\alpha) \sum_{q=0}^{\theta} \int_{t_0}^T \langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle_{\mathfrak{U}} dt, \quad (3)$$

где  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $\theta = 0, 1$ ,  $[t_0, T] \subset \mathfrak{J}$ . Здесь  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{Z}$  — гильбертовы пространства,  $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  — самосопряженные и положительно определенные операторы,  $z_d = z_d(t, u)$  — плановое наблюдение из некоторого гильбертова пространства наблюдений  $\mathfrak{Z}$ , а  $z = Cx$ ,  $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Z})$ . Результаты исследования задачи оптимального управления

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_{\partial}} J(u), \quad \alpha \in (0, 1) \quad (4)$$

и задачи жесткого управления

$$J(v) = \min_{u \in \mathcal{U}_\theta} J(u), \quad \alpha = 1 \quad (5)$$

для системы леонтьевского типа — конечномерного аналога уравнения соболевского типа —

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t) + Bu(t)$$

с начальным условием Шоуолтера — Сидорова (1) представлены в [7]. Здесь  $\mathcal{U}_\theta$  — некоторое выпуклое компактное подмножество допустимых управлений в пространстве управлений  $\mathcal{U}$ .

Несмотря на схожесть постановок задачи оптимального и жесткого управления системой, эти задачи несут разную смысловую нагрузку. При оптимальном управлении учитывается величина управляющего воздействия приведения системы в нужное состояние, а при жестком управлении эта величина не учитывается, т. е. при жестком управлении надо привести систему в нужное состояние, невзирая на затраченные для этого усилия.

Оптимальное управление решениями задачи Коши для линейных стационарных (при  $M_t \equiv M$ ) уравнений соболевского типа (2) впервые изучалось в [8]. В [9, 10] рассмотрена задача оптимального управления решениями начально-конечных задач для линейных стационарных уравнений соболевского типа первого и второго порядков соответственно. Задаче оптимального управления решениями полулинейных стационарных уравнений соболевского типа посвящена монография [11].

Кроме того оптимальное управление для нестационарных уравнений соболевского типа рассматривается в [12], где зависимость от времени оператора  $M$  имеет вид домножения на скалярную функцию. В данной работе в рамках теории уравнений соболевского типа [5] ставится задача оптимального и жесткого управления для уравнения с оператор-функцией  $M_t$  (впервые такое уравнение рассматривается в [13]).

Отметим также, что в настоящее время методами оптимального управления активно исследуются задачи о восстановлении динамически искаженных сигналов — задачи оптимального измерения [14].

В разд. 1 приведены необходимые сведения из теории нестационарных уравнений соболевского типа [13, 15]. В разд. 2 строится сильное решение задачи Шоултера — Сидорова для нестационарного уравнения, а затем в разд. 3 доказывается существование и единственность решения задачи оптимального управления решениями такого уравнения.

Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь личные пристрастия автора.

## 1. Относительно спектрально ограниченная оператор-функция

Доказательства утверждений, приведенных в этом разделе, можно найти в [13] (см. также [15]).

Пусть  $\mathfrak{X}$  и  $\mathfrak{Y}$  — банаховы пространства,  $\mathfrak{J}$  — промежуток в  $\mathbb{R}$ ,  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ ,  $M_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$  для всех  $t \in \mathfrak{J}$ .

Следуя терминологии, используемой в [5], множества  $\rho^L(M_t) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M_t)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\}$  и  $\sigma^L(M_t) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M_t)$  будем называть соответственно *L-резольвентным множеством* и *L-спектром* оператор-функции  $M_t$ .

Очевидно, что если  $\ker L \cap \ker M_t \neq \{0\}$  при некотором  $t \in \mathfrak{J}$ , то  $\rho^L(M_t) = \emptyset$ .

**Лемма 1** [5]. Пусть  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ ,  $M_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$  для  $t \in \mathfrak{J}$ . Тогда *L-резольвентное множество*  $\rho^L(M_t)$  оператора  $M_t$  открыто, а *L-спектр*  $\sigma^L(M_t)$  оператора  $M_t$  замкнут.

При  $t \in \mathfrak{J}$  оператор-функции  $(\mu L - M_t)^{-1}$ ,  $R_\mu^L(M_t) = (\mu L - M_t)^{-1}L$  и  $L_\mu^L(M_t) = L(\mu L - M_t)^{-1}$  комплексного переменного  $\mu \in \mathbb{C}$  с областью определения  $\rho^L(M_t)$  будем называть соответственно *L-резольвентной*, *правой* и *левой L-резольвентами* оператора  $M_t$ .

В дальнейшем будут использоваться тождества, справедливые при фиксированном  $t \in \mathfrak{J}$  и любых  $\mu, \lambda \in \rho^L(M)$ :

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu)(\lambda L - M_t)^{-1}L(\mu L - M_t)^{-1} &= (\mu L - M_t)^{-1} - (\lambda L - M_t)^{-1}, \\ L(\mu L - M_t)^{-1}M_t &= M_t(\mu L - M)^{-1}L. \end{aligned} \tag{6}$$

**Лемма 2.** Пусть  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ ,  $M_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$  для  $t \in \mathfrak{J}$ . Тогда  $L$ -резольвента, правая и левая  $L$ -резольвенты оператора  $M_t$  аналитичны по  $\mu$  в  $\rho^L(M_t)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Оператор-функция  $M_t$  называется *спектрально ограниченной относительно* оператора  $L$  (или просто  $(L, \sigma)$ -ограниченной), если

$$\exists a_t \in C(\mathfrak{J}; \mathbb{R}_+) \forall t \in \mathfrak{J} \max\{|\mu| : \mu \in \sigma^L(M_t)\} \leq a_t < +\infty.$$

В силу равенств (6) справедлива

**Теорема 1.** Пусть оператор-функция  $M_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}))$  сильно дифференцируема по  $t \in \mathfrak{J}$  и  $(L, \sigma)$ -ограничена. Тогда оператор-функция  $(\mu L - M_t)^{-1}$  сильно дифференцируема по  $t \in \mathfrak{J}$  при  $\mu \in E_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 2a_t\}$ .

Пусть оператор-функция  $M_t$   $(L, \sigma)$ -ограничена, а контур  $\gamma_t = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = 2a_t\}$ . Рассмотрим интегралы

$$P_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} R_\mu^L(M_t) d\mu, \quad Q_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} L_\mu^L(M_t) d\mu,$$

которые существуют в силу леммы 2. В [5] показано, что при фиксированном  $t \in \mathfrak{J}$  операторы  $P_t : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  и  $Q_t : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Y}$  являются проекторами.

**Лемма 3.** Пусть оператор-функция  $M_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}))$  сильно дифференцируема по  $t \in \mathfrak{J}$  и  $(L, \sigma)$ -ограничена. Тогда оператор-функции  $P_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{X}))$  и  $Q_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{Y}))$  сильно дифференцируемы по  $t \in \mathfrak{J}$ .

Положим  $\mathfrak{X}_t^0 = \ker P_t$ ,  $\mathfrak{Y}_t^0 = \ker Q_t$ ,  $\mathfrak{X}_t^1 = \text{im } P_t$ ,  $\mathfrak{Y}_t^1 = \text{im } Q_t$  для всех  $t \in \mathfrak{J}$ . Обозначим через  $L_{t,k}$  и  $M_{t,k}$  сужение операторов  $L$  и  $M_t$  на  $\mathfrak{X}_t^k$ ,  $k = 0, 1$ .

**Теорема 2.** Пусть оператор-функция  $M_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}))$  равномерно непрерывна и сильно дифференцируема по  $t \in \mathfrak{J}$ , а также  $(L, \sigma)$ -ограничена. Тогда

(i) имеет место действие операторов  $L_{t,k} : \mathfrak{X}_t^k \rightarrow \mathfrak{Y}_t^k$ ,  $M_{t,k} : \mathfrak{X}_t^k \rightarrow \mathfrak{Y}_t^k$  для всех  $t \in \mathfrak{J}$ ,  $k = 0, 1$ ;

(ii) существуют операторы  $M_{t,0}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}_t^0; \mathfrak{X}_t^0)$ ,  $t \in \mathfrak{J}$ , причем, если оператор-функция  $M_t : \mathfrak{J} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$  сильно дифференцируема, то оператор-функция  $M_{t,0}^{-1}(I - Q_t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X}_t^0)$  сильно дифференцируема по  $t \in \mathfrak{J}$ , а при условии сильной непрерывности оператор-функции  $\frac{d}{dt}M_t$  оператор-функция  $\frac{d}{dt}(M_{t,0}^{-1}(I - Q_t))$  также сильно непрерывна по  $t \in \mathfrak{J}$ ;

(iii) существуют операторы  $L_{t,1}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}_t^1; \mathfrak{X}_t^1)$ ,  $t \in \mathfrak{J}$ , при этом оператор-функция  $L_{t,1}^{-1}Q_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X}_t^1))$  сильно непрерывна по  $t \in \mathfrak{J}$ ;

(iv) операторы  $M_{t,1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_t^1, \mathfrak{Y}_t^1)$ ,  $t \in \mathfrak{J}$ , таковы, что оператор-функция  $M_{t,1}P_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_t^1)$  сильно непрерывна по  $t \in \mathfrak{J}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** следует из равенств (6), теоремы 1 и леммы 3. Подробнее см. в [15].

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Нетрудно показать, что  $L_{t,1}^{-1} \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}_t^1))$  в предположении  $\mathfrak{Y}_t^1 \equiv \mathfrak{Y}^1$ .

При условии  $(L, \sigma)$ -ограниченности оператор-функции  $M_t$  в условиях теоремы 2 построим операторы  $H_t = M_{t,0}^{-1}L_{t,0} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_t^0)$  и  $S_t = L_{t,1}^{-1}M_{t,1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_t^1)$ , с помощью которых сформулируем следующее

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.**  $(L, \sigma)$ -ограниченную оператор-функцию  $M_t$  будем называть  $(L, 0)$ -ограниченной, если  $H_t \equiv \mathbb{O}$  для всех  $t \in \mathfrak{J}$ .

**Теорема 3.** Пусть оператор-функция  $M_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$  равномерно непрерывна и сильно дифференцируема по  $t \in \mathfrak{J}$ , а также  $(L, 0)$ -ограничена. Тогда  $\ker L = \mathfrak{X}_t^0$ ,  $\text{im } L = \mathfrak{Y}_t^1$  для всех  $t \in \mathfrak{J}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** для каждого фиксированного  $t \in \mathfrak{J}$  см. в [5].

В дальнейшем будем обозначать  $\ker L = \ker P_t = \mathfrak{X}^0$ ,  $\ker Q_t = \mathfrak{Y}_t^0$ ,  $\text{im } P_t = \mathfrak{X}_t^1$ ,  $\text{im } L = \text{im } Q_t = \mathfrak{Y}^1$ . Через  $L_0$  обозначим сужение оператора  $L$  на  $\mathfrak{X}^0$ , через  $L_{t,1}$  — сужение оператора  $L$  на  $\mathfrak{X}_t^1$ , через  $M_{t,k}$ ,  $k = 0, 1$ , — сужение операторов  $M_t$  на  $\mathfrak{X}^0$  и  $\mathfrak{X}_t^1$  соответственно,  $t \in \mathfrak{J}$ .

## 2. Сильные решения задачи Шоултера — Сидорова для нестационарного уравнения соболевского типа

Рассмотрим задачу Шоултера — Сидорова (1) для нестационарного однородного уравнения соболевского типа вида

$$L\dot{x}(t) = M_tx(t), \quad (7)$$

где, как и выше,  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ ,  $M_t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$  для всех  $t \in \mathfrak{J}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Оператор  $X(t, \tau) = L_{t,1}^{-1}\tilde{Y}(t)\tilde{Y}^{-1}(\tau)L_{\tau,1}P_\tau$  назовем *эволюционным (разрешающим) оператором* уравнения (7), где

$$\tilde{Y}(t) = I_{\mathfrak{Y}^1} + \int_{t_0}^t T_{t_1} dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_n} \cdots \int_{t_0}^{t_2} T_{t_n} T_{t_{n-1}} \cdots T_{t_1} dt_1 \dots dt_n \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1)$$

с оператором  $T_t = M_{t,1}L_{t,1}^{-1} \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1))$ .

**Лемма 4.** Эволюционный оператор  $X(t, \tau)$  обладает следующими фундаментальными свойствами:

- (i)  $X(t, t) = P_t$ ;
- (ii)  $X(t, s)X(s, \tau) = X(t, \tau)$ ;
- (iii)  $X(t, \tau)|_{\mathfrak{X}_\tau^\perp} = [X(\tau, t)|_{\mathfrak{X}_t^\perp}]^{-1}$ ;
- (iv)  $\|X(t, \tau)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leq K \exp\left(\int_{\tau}^t \|T_s\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1)} ds\right)$  ( $\tau \leq t$ ).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Вектор-функцию  $x \in H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(\mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(\mathfrak{X})\}$  называется *сильным решением* уравнения (2), если она почти всюду на  $\mathfrak{J}$  обращает его в тождество. Сильное решение  $x = x(t)$  уравнения (2) называется *сильным решением задачи Шоуолтера — Сидорова* (1), (2), если оно удовлетворяет (1).

С помощью эволюционного оператора можно задать решение задачи Шоуолтера — Сидорова (1), (7) в виде  $x(t) = X(t, t_0)x_0$ .

**Теорема 4.** Пусть оператор-функция  $M_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}))$  сильно дифференцируема по  $t \in \mathfrak{J}$  и  $(L, 0)$ -ограничена. Тогда для любых  $x_0 \in \mathfrak{X}$  и  $f \in H^1(\mathfrak{Y})$  существует единственное сильное решение  $x \in H^1(\mathfrak{X})$  задачи Шоуолтера — Сидорова (1) для уравнения  $L\dot{x}(t) = M_t x(t) + f(t)$ , имеющее вид

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, \tau)L_{\tau,1}^{-1}Q_\tau f(\tau) d\tau - M_{t,0}^{-1}(I - Q_t)f(t).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Подействуем проектором  $(I - Q_t)$  на уравнение  $L\dot{x}(t) = M_t x(t) + f(t)$ , получим

$$(I - Q_t)L\dot{x}(t) = (I - Q_t)M_t x(t) + (I - Q_t)f(t),$$

$$\begin{aligned} L(I - P_t)\dot{x}(t) &= M_t(I - P_t)x(t) + (I - Q_t)f(t), \\ 0 &= (I - P_t)x(t) + M_{t,0}^{-1}(I - Q_t)f(t). \end{aligned}$$

Как и прежде, обозначим  $x^0(t) = (I - P_t)x(t)$ , тогда

$$x^0(t) = -M_{t,0}^{-1}(I - Q_t)f(t).$$

Вновь сделаем замену  $Lx(t) = y(t) \in \mathfrak{Y}^1$  для всех  $t \in \mathfrak{J}$  и получим

$$\begin{aligned} (L\dot{x}(t)) &= \dot{y}(t) = M_t x(t) + f(t) = M_t x^0(t) + M_t P_t x(t) + f(t) \\ &= M_t(-M_{t,0}^{-1}(I - Q_t)f(t)) + M_t P_t x(t) + f(t) \\ &= M_t P_t x(t) + Q_t f(t) = M_t L_{t,1}^{-1}y(t) + Q_t f(t). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение  $L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t)$  можно представить в виде системы двух уравнений

$$\dot{y}(t) = T_t y(t) + Q_t f(t), \quad (8)$$

$$0 = x^0(t) + M_{t,0}^{-1}(I - Q_t)f(t) \quad (9)$$

на подпространствах  $\mathfrak{Y}^1$  и  $\mathfrak{X}^0$  соответственно. Для любого  $x_0 \in \mathfrak{X}$  получим  $Lx_0 = y_0 \in \mathfrak{Y}^1$ , и задача Шоултера — Сидорова  $L(x(t_0) - x_0) = 0$  примет вид  $y(t_0) - y_0 = 0$ . Тогда решение уравнения (8) согласно [16, с. 138–153] имеет вид

$$y(t) = \tilde{Y}(t)\tilde{Y}^{-1}(t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \tilde{Y}(t)\tilde{Y}^{-1}(\tau)Q_\tau f(\tau) d\tau.$$

В силу приведенных выше рассуждений справедливы равенства  $P_t x(t) = L_{t,1}^{-1}y(t)$  и  $y_0 = L_{t_0,1}P_{t_0}x_0$ , а следовательно,

$$P_t x(t) = L_{t,1}^{-1}\tilde{Y}(t)\tilde{Y}^{-1}(t_0)L_{t_0,1}P_{t_0}x_0 + \int_{t_0}^t L_{t,1}^{-1}\tilde{Y}(t)\tilde{Y}^{-1}(\tau)Q_\tau f(\tau) d\tau,$$

причем эта функция класса  $H^1(\mathfrak{X})$  по построению в силу условий теоремы и теоремы 2. Функция  $x^0(t) = -M_{t,0}^{-1}(I - Q_t)f(t) \in H^1(\mathfrak{X})$  в силу теоремы 2(ii) разрешает уравнение (9), откуда в силу определения 4 следует утверждение теоремы.

**3. Оптимальное и жесткое управление  
решениями задачи Шоуолтера — Сидорова  
для нестационарного уравнения**

Выделим в пространстве  $H^1(\mathfrak{U})$  замкнутое выпуклое подмножество  $H_\partial^1(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}_{ad}$  — множество допустимых управлений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** Вектор-функцию  $v \in H_\partial^1(\mathfrak{U})$  назовем *оптимальным (жестким) управлением* решениями задачи (1), (2), если

$$J(v) = \min_{u \in H_\partial^1(\mathfrak{U})} J(u), \quad \alpha \in (0, 1) \quad (\alpha = 1),$$

где пары  $(x, u) \in \mathfrak{X} \times H_\partial^1(\mathfrak{U})$  удовлетворяют (1), (2).

В силу теоремы 4 при любых  $x_0 \in \mathfrak{X}$ ,  $f \in H^1(\mathfrak{Y})$  и  $u \in H^1(\mathfrak{U})$  существует единственное сильное решение  $x \in H^1(\mathfrak{X})$  задачи (1), (2), имеющее вид

$$\begin{aligned} x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s)L_{s,1}^{-1}Q_s(f(s) + Bu(s)) ds \\ - M_{t,0}^{-1}(I - Q_t)(f(t) + Bu(t)). \end{aligned} \quad (10)$$

Зафиксируем  $x_0 \in \mathfrak{X}$ ,  $f \in H^1(\mathfrak{Y})$  и рассмотрим (10) как отображение  $D : u \rightarrow x(u)$ .

**Лемма 5.** Пусть пространства  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$  и  $\mathfrak{U}$  гильбертовы. Пусть оператор-функция  $M_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}))$  сильно дифференцируема по  $t \in \mathfrak{J}$ ,  $(L, 0)$ -ограничена, а элементы  $x_0 \in \mathfrak{X}$ ,  $f \in H^1(\mathfrak{Y})$  фиксированы. Тогда отображение  $D : H^1(\mathfrak{U}) \rightarrow H^1(\mathfrak{X})$ , определенное формулой (10), непрерывно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу того, что  $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$  и оператор-функция  $M_t$  нужного класса гладкости по  $t$ , а также вида решения (10), утверждение леммы следует из теорем 2 и 4.

В пространстве  $H^1(\mathfrak{Y})$  введем скалярное произведение

$$[y, z] = \sum_{q=0}^1 \int_{t_0}^T \langle y^{(q)}, z^{(q)} \rangle_{\mathfrak{Y}} dt.$$

**Теорема 5.** Пусть пространства  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$  и  $\mathfrak{U}$  гильбертовы. Пусть оператор-функция  $M_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}))$  сильно дифференцируема по  $t \in \mathfrak{J}$  и  $(L, 0)$ -ограничена. Тогда при любых  $x_0 \in \mathfrak{X}$ ,  $f \in H^1(\mathfrak{Y})$  существует единственное оптимальное управление  $v \in H_\partial^1(\mathfrak{U})$  задачи (1)–(4).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пользуясь отображением  $D$  из леммы 5, перепишем функционал стоимости (3) в виде

$$J(u) = \|Cx(t; u) - z_d\|_{H^1(\mathfrak{J})}^2 + [\eta, u],$$

где  $\eta^{(k)}(t) = N_k u^{(k)}$ ,  $k \in \{0, 1\}$ . Откуда

$$J(u) = \pi(u, u) - 2\lambda(u) + \|z_d - Cx(t; 0)\|_{H^1(\mathfrak{J})}^2,$$

где  $\pi(u, u) = \|C(x(t; u) - x(t; 0))\|_{H^1(\mathfrak{J})}^2 + [\eta, u]$  — билинейная непрерывная коэрцитивная форма на  $H^1(\mathfrak{U})$ , а

$$\lambda(u) = \langle z_d - Cx(t; 0), C(x(t; u) - x(t; 0)) \rangle_{H^1(\mathfrak{J})}$$

— линейная непрерывная на  $H^1(\mathfrak{U})$  форма. Значит, утверждение теоремы следует из [17, гл. 1].

Аналогично формулируется результат о существовании решения задачи жесткого управления.

**Следствие.** Пусть пространства  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$  и  $\mathfrak{U}$  гильбертовы. Пусть оператор-функция  $M_t \in C(\mathfrak{J}; \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}))$  сильно дифференцируема по  $t \in \mathfrak{J}$  и  $(L, 0)$ -ограничена. Тогда при любых  $x_0 \in \mathfrak{X}$  и  $f \in H^1(\mathfrak{Y})$  существует единственное жесткое управление  $v \in H_\partial^1(\mathfrak{U})$  задачи (1)–(3), (5).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Загребина С. А. О задаче Шоултера — Сидорова // Изв. вузов. Математика. 2007. № 3. С. 22–28.
2. Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999.
3. Pyatkov S. G. Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002.
4. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Shmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002.

5. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
- 6.. Demidenko G. V., Uspenskii S. V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
7. Келлер А. В. Об алгоритме решения задач оптимального и жесткого управления // Программные продукты и системы. 2011. № 3. С. 42.
8. Свиридов Г. А., Ефремов А. А. Задача оптимального управления для одного класса линейных уравнений типа Соболева // Изв. вузов. Математика. 1996. № 12. С. 75–84.
9. Манакова Н. А., Дыльков А. Г. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для одной эволюционной модели // Мат. заметки ЯГУ. 2012, Т. 19, № 2. С. 111–127.
10. Замышляева А. А., Цыпленкова О. Н. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска — Лява // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2012. Т. 264, № 5. С. 13–24.
11. Манакова Н. А. Оптимальное управление решениями полулинейных уравнений соболевского типа. Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.
12. Сагадеева М. А., Бадоян А. Д. Оптимальное управление решениями нестационарных уравнений соболевского типа специального вида в относительно секториальном случае // Вестн. Магн. Гос. Университета. Математика. 2013. Вып. 15. С. 68–80.
13. Сагадеева М. А. Исследование устойчивости решений линейных уравнений соболевского типа первого порядка: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск: ЧелГУ, 2006.
14. Шестаков А. Л., Свиридов Г. А. Новый подход к измерению динамическиискаженных сигналов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2010. Т. 192, № 16. С. 116–120.
15. Сагадеева М. А. Разрешимость нестационарной задачи теории фильтрации // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2012. Т. 286, № 27. С. 86–98.
16. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
17. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.

г. Челябинск

27 сентября 2013 г.

ТЕОРЕМА О РАСЩЕПЛЕНИИ  
В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ  
Г. А. Свиридов, Дж. К. Аль-Делфи

Теория  $\sigma$ -ограниченных операторов в банаховых пространствах к настоящему времени достаточно хорошо развита (см., например, [1; 2, гл. 4]), имеет многочисленные приложения [3–6] и даже распространена на локально выпуклые пространства [7]. Настало время распространения этой теории и на квазибанаховые пространства [8], причем необходимость диктуется не только желанием пополнить теорию, но и стремлением к более полному исследованию неклассических моделей математической физики. По традиции [1] начнем с базовых определений [8], которые иллюстрируем примерами из квазисоболевских пространств [9]. Затем приведем доказательство теоремы о расщеплении, которая регламентирует расщепление пары квазибанаховых пространств в прямые суммы, а также расщепление действий пары линейных операторов, отображающих одно квазибанахово пространство в другое.

### 1. Квазибанаховы пространства

Пусть  $\mathfrak{U}$  — некоторый (вообще говоря, бесконечномерный) линеал. Отображение  $\mathfrak{u}\|\cdot\| : \mathfrak{U} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *квазинормой*, если

- (i)  $\forall u \in \mathfrak{U} \quad \mathfrak{u}\|u\| \geq 0$ , причем  $\mathfrak{u}\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ , где  $0 \in \mathfrak{U}$ ;
- (ii)  $\forall u \in \mathfrak{U} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \mathfrak{u}\|\alpha u\| = |\alpha| \mathfrak{u}\|u\|$ ;
- (iii)  $\forall u, v \in \mathfrak{U} \quad \mathfrak{u}\|u + v\| \leq K(\mathfrak{u}\|u\| + \mathfrak{u}\|v\|)$ , где  $K \in [1, +\infty)$ .

Если  $K = 1$ , то квазинорма  $\mathfrak{u}\|\cdot\|$  называется *нормой*. Линеал  $\mathfrak{U}$ , снабженный квазинормой  $\mathfrak{u}\|\cdot\|$ , называется *квазинормированным пространством*. В дальнейшем, не теряя общности, будем отождествлять линеал  $\mathfrak{U}$  и квазинормированное пространство  $(\mathfrak{U}, \mathfrak{u}\|\cdot\|)$ .

Последовательность  $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$  назовем *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall k, l \in \mathbb{N} (k, l > N) \Rightarrow (\underline{\mathfrak{U}}\|u_k - u_l\| < \varepsilon).$$

Последовательность  $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$  называется *сходящейся*, если

$$\exists u \in \mathfrak{U} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} (k > N) \Rightarrow (\underline{\mathfrak{U}}\|u_k - u\| < \varepsilon).$$

Вектор  $u \in \mathfrak{U}$  называется *пределом сходящейся* последовательности и обозначается  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ . Квазинормированное пространство  $\mathfrak{U}$  называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность  $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$  имеет предел  $u \in \mathfrak{U}$ . Полное квазинормированное пространство  $\mathfrak{U}$  называется *квазибанаховым*.

Будем говорить, что квазибанахово пространство  $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}, \underline{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$  *вложено* в квазибанахово пространство  $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}, \underline{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ , если  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$ ; *непрерывно вложено*  $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ , если оно вложено,  $\underline{\mathfrak{F}}\|u\| \leq \text{const}_{\mathfrak{U}} \|u\|$  при всех  $u \in \mathfrak{U}$  и константа не зависит от  $u$ ; *плотно и непрерывно вложено*, если в добавок  $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$ , причем замыкание понимается в смысле квазинормы  $\underline{\mathfrak{F}}\|\cdot\|$ .

**ПРИМЕР 1.** Пусть последовательность  $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$  такова, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$ . По аналогии с пространствами Соболева  $W_q^m$  введем в рассмотрение *квазисоболевские пространства*

$$l_q^m = \left\{ u = \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda^{\frac{m}{2}} |u_k|)^q < +\infty \right\},$$

где  $m \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}_+$ . Пространства  $l_q^m$  квазибанаховы при всех  $m \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}_+$  с квазинормой

$$\underline{\mathfrak{q}}^m \|u\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda^{\frac{m}{2}} |u_k|)^q \right)^{1/q},$$

при этом они тоже банаховы, только если  $q \in [1, +\infty)$ . Если  $q \in (0, 1)$ , то константа равна  $K = 2^{1/q}$ . Заметим еще, что если  $m = 0$ , то  $l_q^0 = l_q$ . Наконец, имеют место аналоги теорем вложения Соболева:  $l_q^m \subset l_q^n$  плотно и непрерывно при всех  $m \geq n$ .

Пусть  $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}, \underline{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$  и  $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}, \underline{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$  — квазибанаховы пространства. Линейный оператор  $L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ , отображающий пространство  $\mathfrak{U}$  в

пространство  $\mathfrak{F}$ , называется *ограниченным*, если  $\mathfrak{F}\|Lu\| \leq \text{const}_{\mathfrak{U}} \|u\|$  при всех  $u \in \mathfrak{U}$  и константа не зависит от  $u$ , и *непрерывным*, если  $\lim_{k \rightarrow \infty} Lu_k = L(\lim_{k \rightarrow \infty} u_k)$  для любой сходящейся последовательности  $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$ .

В квазибанаховых пространствах справедливо базовое утверждение функционального анализа — линейный оператор ограничен точно тогда, когда он непрерывен. Множество линейных непрерывных операторов, отображающих пространство  $\mathfrak{U}$  в пространство  $\mathfrak{F}$ , обозначим символом  $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ . Это пространство квазибанахово с квазинормой

$$\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})\|L\| = \sup_{\mathfrak{U}\|u\|=1} \mathfrak{F}\|Lu\|.$$

Оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  называется *топлинейным* (т. е. топологическим и линейным) *изоморфизмом*, если существует обратный оператор  $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$ .

**ПРИМЕР 2.** Пусть неубывающая последовательность  $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$  такова, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$ . Введем в рассмотрение квазиоператор Лапласа  $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$ . Оператор  $\Lambda$  принадлежит  $\mathcal{L}(l_q^m; l_q^{m-2})$  при всех  $m \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}_+$ , причем существует квазиоператор Грина  $\Lambda^{-1}u = \{\lambda_k^{-1} u_k\}$ , который принадлежит  $\mathcal{L}(l_q^{m-2}; l_q^m)$ . Таким образом, квазиоператор Лапласа  $\Lambda : l_q^m \rightarrow l_q^{m-2}$  — топлинейный изоморфизм при всех  $m \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}_+$ .

## 2. Теорема о расщеплении

Пусть  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  — квазибанаховы пространства,  $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ . Введем в рассмотрение *L-резольвентное множество*

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$$

и *L-спектр*  $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$  оператора  $M$ . Нетрудно показать, что множество  $\rho^L(M)$  всегда открыто, поэтому *L-спектр* оператора  $M$  всегда замкнут. Также нетрудно показать, что *L-резольвента*  $(\mu L - M)^{-1}$  оператора  $M$  голоморфна на  $\rho^L(M)$ .

Оператор  $M$  называется *спектрально ограниченным относительно оператора L* (коротко,  $(L, \sigma)$ -ограниченным), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \forall \mu \in \mathbb{C} (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

ПРИМЕР 3. Пусть  $\mathfrak{U} = l_q^{m+2}$ ,  $\mathfrak{F} = l_q^m$ . Зададим операторы  $L, M \in \mathcal{L}(l_q^{m+2}; l_q^m)$  формулами  $L = \lambda - \Lambda$ ,  $M = \alpha\Lambda$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  — некоторые константы. Поскольку  $L$ -спектр  $\sigma^L(M)$  оператора  $M$  состоит из точек  $\{\mu_k = \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}, k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\}\}$ , оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим квазиоператор Грина  $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(l_q^m; l_q^{m+2})$  как оператор  $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(l_q^m; l_q^m)$ , что возможно в силу аналога теоремы вложения Соболева. Положим  $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = l_q^m$ ,  $L = \Lambda^{-1}$ ,  $M = \mathbb{I}$  — единичный оператор на  $l_q^m$ . Поскольку  $L$ -спектр  $\sigma^L(M)$  оператора  $M$  в этом случае состоит из точек  $\{\lambda_k\}$ , оператор  $M$  не является  $(L, \sigma)$ -ограниченным.

Пример 3 показывает существование относительно  $\sigma$ -ограниченных операторов, а пример 4 устанавливает тот факт, что не все операторы относительно  $\sigma$ -ограничены.

Пусть оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен. Выберем контур  $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$  и построим операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(M) d\mu,$$

где  $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$  — правая, а  $L_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$  — левая  $L$  резольвенты оператора  $M$ , причем интегралы понимаются в смысле Римана.

**Лемма 1.** Пусть оператор  $M$   $(L, \sigma)$ -ограничен. Тогда операторы  $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  ( $\equiv \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U})$ ) и  $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$  — проекторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения почти дословно повторяет соответствующее доказательство для случая банаховых пространств (см. [1; 2, гл. 4]), поэтому опускается.

Положим  $\mathfrak{U}^0 = \ker P$ ,  $\mathfrak{U}^1 = \text{im } P$ ,  $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$ ,  $\mathfrak{F}^1 = \text{im } Q$  и через  $L_k$  и  $M_k$  обозначим сужение операторов  $L$  и  $M$  на  $\mathfrak{U}^k$ ,  $k = 0, 1$ , соответственно.

ПРИМЕР 5. Пусть пространства  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{F}$  и операторы  $L, M$  такие, как в примере 3. Тогда

$$\mathfrak{U}^0 = \begin{cases} \{\mathbf{0}\}, & \text{если } \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : u_k = 0, k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\}\}; \end{cases}$$

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \text{если } \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : u_l = 0, \lambda_l = \lambda\}. \end{cases}$$

Подпространства  $\mathfrak{F}^k$ ,  $k = 0, 1$ , определяются аналогично.

**Теорема 1** (теорема о расщеплении). *Пусть оператор  $M$  ( $L, \sigma$ )-ограничен. Тогда*

- (i)  $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$ ,  $k = 0, 1$ ;
- (ii) существуют операторы  $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$  и  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение (i) вытекает из легко проверяемых тождеств  $LP = QL$  и  $MP = QM$ . Для доказательства (ii) заметим, что оператор  $M_0^{-1}$  равен сужению оператора

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} \frac{d\mu}{\mu}$$

на подпространство  $\mathfrak{F}^0$ , а оператор  $L_1^{-1}$  равен сужению оператора

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} d\mu$$

на подпространство  $\mathfrak{F}^1$ . Подробнее см. в [2, гл. 4].

Введем в рассмотрение операторы  $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$  и  $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$ .

**Следствие 1.** *Пусть оператор  $M$  ( $L, \sigma$ )-ограничен. Тогда*

$$(\mu L - M)^{-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} H^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q, \quad |\mu| > a.$$

Будем говорить, что  $\infty$  — *устранимая особая точка*  $L$ -резольвенты оператора  $M$ , если  $H \equiv \mathbb{O}$ ; *полюс порядка*  $p \in \mathbb{N}$ , если  $H^p \neq \mathbb{O}$ , а  $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$ ; *существенно особая точка*, если  $H^k \neq \mathbb{O}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Удобно в дальнейшем устранимую особую точку в бесконечности называть *полюсом порядка нуль*, а  $(L, \sigma)$ -ограниченный оператор  $M$  называть  *$(L, p)$ -ограниченным*, если  $\infty$  — несущественная особая точка его  $L$ -резольвенты.

**ПРИМЕР 6.** Пусть пространства  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{F}$  и операторы  $L, M$  такие, как в примере 3. Тогда оператор  $M$  ( $L, 0$ )-ограничен. Действительно, как нетрудно показать, в данном случае  $H = \mathbb{O}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Свиридов Г. А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.
2. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semi-groups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
3. Загребина С. А., Москвичева П. О. Устойчивость в моделях Хоффа. Saarbrucken: LAMBERT Acad. Publ., 2012.
4. Замысляева А. А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка. Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.
5. Манакова Н. А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа. Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.
6. Сагадеева М. А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа. Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.
7. Федоров В. Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 8. С. 131–160.
8. Al-Delfi J. K. Quasi-Banach space for the sequence space  $l_p$ , where  $0 < p < 1$  // J. College Education. Math. Al-Mustansiriyah University (Baghdad, Iraq). 2007. N 3. P. 285–295.
9. Аль-Делфи Дж. К. Квазисоболевы пространства  $l_p^m$  // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика, механика, физика. 2013. Т. 5, № 1. С. 107–109.

г. Челябинск

28 сентября 2013 г.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ  
ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Л. А. Телешева

**1. Постановка обратной задачи**

Пусть  $Q$  — прямоугольник  $\{(x, t) : x \in (0, 1), t \in (0, T), T < \infty\}$ . Далее, пусть  $f(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $h(x, t)$  — функции определенные в  $\overline{Q}$ ,  $u_0(x)$  — известная функция, определенная при  $x \in [0, 1]$ . Требуется найти функции  $u(x, t)$ ,  $q(t)$ , связанные в прямоугольнике  $Q$  уравнением

$$u_t + u_{xxxx} + c(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t), \quad (1)$$

причем для функции  $u(x, t)$  должны выполняться условия

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u_{xxx}(0, t) = 0, \quad u_{xxx}(1, t) = 0, \quad (3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1]. \quad (5)$$

Обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка изучены сравнительно мало. В работах [1, 2] неизвестный параметр зависит от пространственной переменной  $x$ . Обратные задачи для параболического уравнения с параметром, зависящим от временной переменной  $t$ , ранее рассматривались только в случае интегрального преопределения [3, 4]. В подобной постановке задачи ранее не изучались. Для доказательства существования решения поставленной обратной задачи нам потребуется разрешимость нелокальной задачи для уравнения параболического типа.

## 2. Разрешимость нелокальной задачи

Пусть  $f(x, t)$ ,  $c(x, t)$  — заданные функции, определенные в  $\bar{Q}$ , функции  $\alpha_i(t)$ ,  $\beta_i(t)$ ,  $\gamma_i(t)$ ,  $\delta_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) заданы и определены при  $t \in [0, T]$ . Требуется найти функцию  $v(x, t)$ , удовлетворяющую в прямогоугольнике  $Q$  уравнению

$$v_t + v_{xxxx} + c(x, t)v = f(x, t), \quad (6)$$

для которой выполняются условия

$$\begin{cases} v_x(0, t) = \alpha_1(t)v(0, t) + \alpha_2(t)v(1, t) + \alpha_0(t), & t \in (0, T), \\ v_x(1, t) = \beta_1(t)v(0, t) + \beta_2(t)v(1, t) + \beta_0(t), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} v_{xxx}(0, t) = \gamma_1(t)v(0, t) + \gamma_2(t)v(1, t) + \gamma_0(t), & t \in (0, T), \\ v_{xxx}(1, t) = \delta_1(t)v(0, t) + \delta_2(t)v(1, t) + \delta_0(t), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (8)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (9)$$

Для простоты изложения теорем и доказательств введем обозначения:

$$\eta_1(t) = \delta_1(t) - \beta'_1(t) + \alpha_2(t)c(0, t), \eta_2(t) = \delta_2(t) - \beta'_2(t) - c(1, t)\beta_2(t),$$

$$\eta_3(t) = \alpha'_1(t) - \gamma_1(t) + \alpha_1(t)c(0, t), \eta_4(t) = \alpha'_2(t) - \gamma_2(t) - \beta_1(t)c(1, t),$$

$$\eta_5(t) = \alpha'_2(t)c(0, t) - \beta'_1(t)c(1, t).$$

В дальнейшем будет существенно использоваться следующее интегральное неравенство:

$$w^2(y, t) \leq \delta_0 \int_0^1 w_x^2(x, t) dx + \frac{4}{\delta_0} \int_0^1 w^2(x, t) dx, \quad (10)$$

в котором  $\delta_0$  — произвольное положительное число,  $y \in [0, 1]$ ,  $t \in (0, T)$ .

**Теорема 1.** Пусть выполняются включения  $c(x, t) \in C^1(\bar{Q})$ ,  $f(x, t) \in L_2(\bar{Q})$ ,  $f_t(x, t) \in L_2(\bar{Q})$ ,  $\alpha_i(t) \in C^1([0, T])$ ,  $\beta_i(t) \in C^1([0, T])$ ,  $\gamma_i(t) \in C^1([0, T])$ ,  $\delta_i(t) \in C^1([0, T])$  ( $i = 1, 2$ ).

Кроме того, пусть выполняются условия

$$\alpha_1(t)\xi^2 + [\alpha_2(t) - \beta_1(t)]\xi\zeta - \beta_2(t)\zeta^2 \geq 0,$$

$$\begin{aligned} c_t(x, t) &\leqslant 0 \text{ при } (x, t) \in \overline{Q}, \\ c(x, t) - \frac{\delta}{\delta_0^2} [\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \delta_1^2(t) + \delta_2^2(t)] &\geqslant 0, \\ c(x, t) - \frac{4}{\delta \delta_0^2} [\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \delta_1^2(t) + \delta_2^2(t)] &\geqslant 0, \end{aligned}$$

где  $\delta$  и  $\delta_0$  — положительные числа такие, что

$$\delta^2 \delta_0^2 \leqslant \frac{1}{4}, \quad \frac{4\delta_0^2}{\delta^2} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Тогда существует решение нелокальной задачи (6)–(9) такое, что  $v(x, t) \in W_2^{4,1}(\overline{Q})$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^{4,1}(Q), v_{xxt}(x, t) \in L_2(Q)\}.$$

Воспользуемся методом регуляризации. Пусть  $\varepsilon$  — фиксированное положительное число. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти решение уравнения

$$v_t + v_{xxxx} - \varepsilon v_{xxt} + c(x, t)v = f(x, t), \tag{6_\varepsilon}$$

удовлетворяющее условиям (7)–(9)

Доказательство разрешимости этой задачи будет проведено ниже с помощью метода продолжения по параметру, решение задачи (6)–(9) будет получено с помощью предельного перехода. Поскольку и для применения теоремы о методе продолжения по параметру, и для последующего предельного перехода необходимы хорошие априорные оценки, установим вначале их наличие.

Рассмотрим равенство:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^1 [v_\tau + v_{xxxx} - \varepsilon v_{xxt} + c(x, \tau)v](v_\tau - v_{xx\tau}) dx d\tau \\ = \int_0^t \int_0^1 f(x, \tau)(v_\tau - v_{xx\tau}) dx d\tau. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и используя условия (7)–(9), нетрудно от данного равенства перейти к следующему:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^1 v_\tau^2 dx d\tau + (1 + \varepsilon) \int_0^t \int_0^1 v_{x\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^1 v_{xx}^2(x, t) dx \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^1 v_{xxx}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 c(x, t) v_x^2(x, t) dx \\
& \quad + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 v_{xx\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^1 c(x, t) v^2(x, t) dx \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 c_\tau(x, \tau) v^2 d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 c_\tau(x, \tau) v_x^2 d\tau + (1 + \varepsilon) \int_0^t [\alpha_1(\tau) v_\tau^2(0, \tau) \\
& \quad + [\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)] v_\tau(1, \tau) v_\tau(0, \tau) - \beta_2(\tau) v_\tau^2(1, \tau)] d\tau \\
& = [\delta_1(t) v(0, t) + \delta_2(t) v(1, t)] v_{xx}(1, t) - [\gamma_1(t) v(0, t) + \gamma_2(t) v(1, t)] v_{xx}(0, t) \\
& \quad + \delta_0(t) v_{xx}(1, t) - \gamma_0(t) v_{xx}(0, t) \\
& \quad + \int_0^t [\frac{[\eta_2(\tau) - \varepsilon \beta'_2(\tau)]'}{2} + \beta'_2(\tau) c(1, \tau)] v^2(1, \tau) d\tau \\
& \quad - \int_0^t [\eta_1(\tau) - \varepsilon \beta'_1(\tau)] v_\tau(1, \tau) v(0, \tau) d\tau \\
& \quad + \int_0^t [\frac{[\eta_3(\tau) - \varepsilon \alpha'_1(\tau)]'}{2} - \alpha'_1(\tau) c(0, \tau)] v^2(0, \tau) d\tau \\
& \quad - \int_0^t [\eta_4(\tau) - \varepsilon \alpha'_2(\tau)] v_\tau(0, \tau) v(1, \tau) d\tau \\
& + \int_0^t [\beta'_1(\tau) - \delta'_1(\tau)] v(0, \tau) v_{xx}(1, \tau) d\tau + \int_0^t [\beta_1(\tau) - \delta_1(\tau)] v_\tau(0, \tau) v_{xx}(1, \tau) d\tau \\
& + \int_0^t [\beta'_2(\tau) - \delta'_2(\tau)] v(1, \tau) v_{xx}(1, \tau) d\tau + \int_0^t [\beta_2(\tau) - \delta_2(\tau)] v_\tau(1, \tau) v_{xx}(1, \tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t [\gamma'_1(\tau) - \alpha'_1(\tau)] v(0, \tau) v_{xx}(0, \tau) d\tau + \int_0^t [\gamma_1(\tau) - \alpha_1(\tau)] v_\tau(0, \tau) v_{xx}(0, \tau) d\tau \\
& + \int_0^t [\gamma'_2(\tau) - \alpha'_2(\tau)] v(1, \tau) v_{xx}(0, \tau) d\tau + \int_0^t [\gamma_2(\tau) - \alpha_2(\tau)] v_\tau(1, \tau) v_{xx}(0, \tau) d\tau \\
& \quad - \int_0^t [\delta_0(\tau) - (1 + \varepsilon) \beta'_0(\tau)] v_\tau(1, \tau) d\tau - \\
& \quad \int_0^t [(1 + \varepsilon) \alpha'_0(\tau) + \gamma_0(\tau)] v_\tau(0, \tau) d\tau \\
& - \int_0^t [\alpha'_2(\tau) c(0, \tau) - \beta'_1(\tau) c(1, \tau)] v(1, \tau) v(0, \tau) d\tau - \int_0^t [\delta'_0(\tau) - \beta'_0(\tau)] v_{xx}(1, \tau) d\tau \\
& \quad + \int_0^t [\alpha'_0(\tau) - \gamma'_0(\tau)] v_{xx}(0, \tau) d\tau + \int_0^t c(1, \tau) \beta'_0(\tau) v(1, \tau) d\tau \\
& \quad - \int_0^t c(0, \tau) \alpha'_0(\tau) v(0, \tau) d\tau \\
& \quad - \int_0^t [\delta_2(\tau) - (1 + \varepsilon) \beta'_2(\tau) - c(1, \tau) \beta_2(\tau)] u_\tau(1, \tau) u(1, \tau) d\tau \\
& \quad - \int_0^t [(1 + \varepsilon) \alpha'_1(\tau) - c(0, \tau) \alpha_1(\tau) - \gamma_1(\tau)] u_\tau(0, \tau) u(0, \tau) d\tau \\
& - \int_0^t \int_0^1 c_x(x, \tau) v v_{x\tau} dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 f(x, \tau) v_\tau dx d\tau - \int_0^1 \int_0^t f(x, \tau) v_{xx\tau} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Учитывая, что три последних слагаемых левой части данного равенства неотрицательны (из условий теоремы) получим неравенство

$$\int_0^t \int_0^1 v_\tau^2 dx d\tau + (1 + \varepsilon) \int_0^t \int_0^1 v_{x\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^1 v_{xx}^2(x, t) dx$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^1 v_{xxx}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 c(x, t) v_x^2(x, t) dx + \int_0^t \int_0^1 \varepsilon v_{xx\tau}^2 dxd\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 c(x, t) v^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 c_\tau(x, \tau) v^2 d\tau \leq |\Phi|,
\end{aligned}$$

где через  $\Phi$  обозначена правая часть предыдущего равенства.

Применим к первым двум слагаемым в правой части неравенство Юнга, затем используем интегральные неравенства (10), получим следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
& |[\delta_1(t)v(0, t) + \delta_2(t)v(1, t)]v_{xx}(1, t) + [\gamma_1(t)v(0, t) + \gamma_2(t)v(1, t)]v_{xx}(0, t)| \\
& \leq \frac{\delta_0^2}{2} v_{xx}^2(1, t) + \frac{1}{\delta_0^2} [\delta_1^2(t)v^2(0, t) + \delta_2^2(t)v^2(1, t)] + \frac{\delta_0^2}{2} v_{xx}^2(0, t) \\
& \quad + \frac{1}{\delta_0^2} [\gamma_1^2(t)v^2(0, t) + \gamma_2^2(t)v^2(1, t)] \\
& \leq \frac{\delta}{\delta_0^2} [\delta_1^2(t) + \delta_2^2(t) + \gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t)] \int_0^1 v_x^2(x, t) dx \\
& \quad + \frac{4}{\delta_0^2 \delta} [\delta_1^2(t) + \delta_2^2(t) + \gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t)] \int_0^1 v^2(x, t) dx \\
& \quad + \delta_0^2 [\delta \int_0^1 v_{xxx}^2(x, t) dx + \frac{4}{\delta} \int_0^1 v_{xx}^2(x, t) dx]
\end{aligned}$$

Остальные слагаемые входящие в выражение  $\Phi$ , с помощью неравенств Юнга и (10) будут подчиняться неотрицательным слагаемым левой части. Покажем это на примере шестого слагаемого:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t [\eta_1(\tau) - \varepsilon \beta'_1(\tau)] v_\tau(1, \tau) v(0, \tau) d\tau \right| \\
& \leq \frac{\delta^2}{2} \int_0^t v_\tau^2(1, \tau) d\tau + \frac{1}{2\delta^2} \int_0^t [\eta_1(\tau) - \varepsilon \beta'_1(\tau)]^2 v^2(0, \tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\delta^2 C}{2} \int_0^t \int_0^1 (v_{x\tau}^2 + v_\tau^2) dx d\tau + \frac{C}{2\delta^2} \max_{t \in [0, T]} |[\eta_1(t) - \varepsilon \beta'_1(t)]^2| \\ &\quad \times \int_0^t \int_0^1 (v_x^2 + v^2) dx d\tau \end{aligned}$$

Применяя все вышесказанное к правой части неравенства и используя лемму Громуолла, получим оценку

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_0^1 v_\tau^2 dx d\tau + \int_0^1 v_{xx}^2(x, t) dx + \int_0^1 v_{xxx}^2(x, t) dx \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 v_{x\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 v_{xx\tau}^2 dx d\tau \leq \bar{N}. \end{aligned}$$

где  $\bar{N}$  — постоянная, зависящая только от исходных данных и числа  $\varepsilon$ .

Очевидно, что также имеет место неравенство

$$\int_0^t \int_0^1 v_{xxxx}^2 dx d\tau \leq \bar{N}.$$

Разрешимость задачи  $(6_\varepsilon)$ ,  $(7)-(9)$  доказывается с помощью теоремы о методе продолжения по параметру [5]. Пусть  $\lambda$  — число из отрезка  $[0, 1]$ . Рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $v(x, t)$  являющуюся решением уравнения  $(6_\varepsilon)$ , удовлетворяющую условиям  $(9)$ , а также условиям

$$\begin{cases} v_x(0, t) = \lambda[\alpha_1(t)v(0, t) + \alpha_2(t)v(1, t)] + \alpha_0(t), & t \in (0, T), \\ v_x(1, t) = \lambda[\beta_1(t)v(0, t) + \beta_2(t)v(1, t)] + \beta_0(t), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (7_\lambda)$$

$$\begin{cases} v_{xxx}(0, t) = \lambda[\gamma_1(t)v(0, t) + \gamma_2(t)v(1, t)] + \gamma_0(t), & t \in (0, T), \\ v_{xxx}(1, t) = \lambda[\delta_1(t)v(0, t) + \delta_2(t)v(1, t)] + \delta_0(t), & t \in (0, T). \end{cases} \quad (8_\lambda)$$

Как известно, данная задача разрешима в пространстве  $V$ , если имеет место априорная оценка всевозможных ее решений в пространстве  $V$  [5]. Поскольку (11) и есть требуемая оценка, получили, что

задача  $(6_\varepsilon)$ ,  $(7_\lambda)$ ,  $(8_\lambda)$ ,  $(9)$  разрешима при всех  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ , т. е. и при  $\lambda = 1$ .

Далее установим оценки, равномерные по  $\varepsilon$ . Повторим действия получения неравенства  $(11)$  за исключением слагаемого в правой части, представляющего собой интеграл от функции  $f(x, \tau)v_{xxx\tau}$ . Для этого слагаемого выполним интегрирование по частям по переменной  $\tau$ . Применяя к возникшим интегралам неравенство Юнга и повторяя все остальные выкладки, проделанные ранее, получим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^1 v_\tau^2 dx d\tau + \int_0^1 v_{xx}^2(x, t) dx + \int_0^1 v_{xxx}^2(x, t) dx \\ & + \int_0^t \int_0^1 v_{x\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 v_{xx\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 v_{xxx\tau}^2 dx d\tau \leq N_0, \end{aligned}$$

где  $N_0$  — постоянная, зависящая только от исходных данных и не зависящая от  $\varepsilon$ . Эта оценка позволяет перейти к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и в пределе получить требуемое решение.

Теорема доказана.

### 3. Разрешимость обратной задачи

Рассмотрим упрощенную ситуацию: пусть  $c(x, t) \equiv c(t)$ .

Для простоты изложения теоремы и доказательства введем следующие обозначения:

$$f_1(x, t) = f(x, t) - \frac{f(0, t)h(x, t)}{h(0, t)}, \quad h_1(x, t) = \frac{h(x, t)}{h(0, t)},$$

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= f_{1x}(0, t), \quad \beta_0(t) = f_{1x}(1, t), \quad \gamma_0(t) = f_{1xxxx}(0, t), \quad \delta_0(t) = f_{1xxxx}(1, t), \\ \alpha_1(t) &= h_{1x}(0, t), \quad \beta_2(t) = h_{1x}(1, t), \quad \gamma_1(t) = h_{1xxx}(0, t), \quad \delta_2(t) = h_{1xxx}(1, t). \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Пусть для функций  $c(t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $f_t(x, t)$ ,  $\alpha_i(t)$ ,  $\beta_i(t)$ ,  $\gamma_i(t)$  ( $i = 0, 2$ ),  $f_{1xxxx}(x, t)$ ,  $f_{1xxxxt}(x, t)$ ,  $h_{xxxx}(x, t)$ ,  $h_{xxxxt}(x, t)$  выполняются включения  $c(t) \in C^1([0, T])$ ,  $f(x, t) \in L_2(\overline{Q})$ ,  $f_t(x, t) \in L_2(\overline{Q})$ ,  $\alpha_i(t) \in C^1([0, T])$ ,  $\beta_i(t) \in C^1([0, T])$ ,  $\gamma_i(t) \in C^1([0, T])$ ,  $\delta_i(t) \in C^1([0, T])$  ( $i = 0, 2$ ),  $f_{1xxxx} \in L_2(\overline{Q})$ ,  $f_{1xxxxt} \in L_2(\overline{Q})$ ,  $h(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_{xxxx}(x, t) \in$

$L_2(Q)$ ,  $h_{xxxx}(x, t) \in C(\overline{Q})$ ,  $h_{xxxxt}(x, t) \in C(\overline{Q})$ . Далее, пусть выполняются условия

$$\left[ \alpha_1(t) - \frac{1}{2} h_{xxxx}^2(x, t) \right] \xi^2 + [\alpha_2(t) - \beta_1(t)] \xi \zeta - \beta_2(t) \zeta^2 \geq 0,$$

$$h(0, t) \neq 0, \text{ при } t \in [0, T],$$

$$c(t) \geq c_0 > 0, \text{ при } t \in [0, T].$$

Тогда существует решение обратной задачи (1)–(5) такое, что  $u(x, t) \in W_2^{4,1}(\overline{Q})$ ,  $q(t) \in L_2(Q)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу: найти функцию  $v(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$v_t + v_{xxxx} + c(t)v = f_{1xxxx}(x, t) + h_{1xxxx}(x, t)v(0, t) \quad (12)$$

и условиям

$$\begin{cases} v_x(0, t) = \alpha_1(t)v(0, t) + \alpha_0(t), & t \in (0, T), \\ v_x(1, t) = \beta_2(t)v(1, t) + \beta_0(t), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} v_{xxx}(0, t) = \gamma_1(t)v(0, t) + \gamma_0(t), & t \in (0, T), \\ v_{xxx}(1, t) = \delta_2(t)v(1, t) + \delta_0(t), & t \in (0, T). \end{cases} \quad (14)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in (0, 1). \quad (15)$$

Разрешимость нелокальной задачи (12)–(15) покажем с помощью метода продолжения по параметру. Пусть  $\lambda$  — число из отрезка  $[0, 1]$ . Рассмотрим задачу: найти функцию  $v(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$v_t + v_{xxxx} + c(t)v = f_{1xxxx}(x, t) + \lambda h_{1xxxx}(x, t)v(0, t) \quad (12_\lambda)$$

и условиям (13)–(15).

Из теоремы 1 следует существование решения задачи (12 $_\lambda$ ), (13)–(15) при  $\lambda = 0$ . Для того чтобы получить разрешимость задачи при всех  $\lambda$  (в том числе и при  $\lambda = 1$ ), достаточно установить наличие равномерной по  $\lambda$  априорной оценки решений этой задачи в пространстве

$W_2^{4,1}(Q)$ . Для получения необходимых неравенств рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^1 [v_\tau + v_{xxxx} + c(\tau)v][v_\tau - v_{xx\tau}] dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^1 [f_{1xxxx}(x, \tau) + h_{1xxxx}(x, \tau)v(0, tau)][v_\tau - v_{xx\tau}] dx d\tau. \end{aligned}$$

Повторяя действия при получении неравенства (11) и учитывая условия теоремы 2, имеем оценку

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^1 v_\tau^2 dx d\tau + \int_0^1 v_{xx}^2(x, t) dx + \int_0^1 v_{xxx}^2(x, t) dx \\ &+ \int_0^t \int_0^1 v_{x\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 v_{xxxx}^2 dx d\tau \leq N_1, \end{aligned}$$

где  $N_1$  — постоянная, зависящая только от исходных данных. Из полученной оценки согласно теореме о методе продолжений по параметру следует разрешимость нелокальной задачи  $(12_\lambda)$ , (13)–(15) при всех  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ . В частности, разрешима задача (12), (13)–(15).

Покажем, что с помощью решения  $v(x, t)$ , можно построить решение  $u(x, t), q(t)$  исходной обратной задачи. Имеем

$$u_{xxxx}(x, t) = v(x, t), \quad (16)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (17)$$

$$u_{xxx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (18)$$

Из этих равенств находим  $u(x, t)$ .

Далее, положим  $w(x, t) = v_t + v_{xxxx} + c(t)v - f(x, t)$ . Очевидно, что выполняются равенства

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, t) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad w_x(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad w_{xxx}(1, t) = 0.$$

Следовательно,  $w(x, t) \equiv 0, t \in [0, T]$ .

Другими словами, для определенной по решению функции  $v(x, t)$  задачи (12)–(15),  $u(x, t)$  выполняется уравнение (1). Теперь очевидно, что функции  $u(x, t)$  и  $q(t) = \frac{u_{xxxx}(0, t) - f(0, t)}{h(0, t)}$  связаны в прямоугольнике  $Q$  уравнением (1). Покажем, что для функции  $u(x, t)$  выполняется условие  $u_{xxx}(0, t) = 0$ . Продифференцируем уравнение (1) трижды по переменной  $x$  и положим  $x = 0$ , получим  $u_{xxxt}(0, t) + c(t)u_{xxx}(0, t) = 0$ , и так как  $c(t) \geq c_0 > 0$  при  $t \in [0, T]$  и имеет место условие (5), то  $u_{xxx}(0, t) = 0$ . Следовательно, для функции  $u(x, t)$  выполняются условия (2)–(5).

Стало быть, построенные функции  $u(x, t)$ ,  $q(t)$  принадлежат требуемым классам и дают решение задачи (1)–(5). Теорема доказана.

В общем случае  $c = c(x, t)$  вместо уравнения (12) появится уравнение с дополнительными слагаемыми  $c_x(x, t)$ ,  $c_{xx}(x, t)$ ,  $c_{xxx}(x, t)$  и  $c_{xxxx}(x, t)$ . Тем самым задача нахождения функции  $u(x, t)$  окажется не распадающейся на две независимые задачи нахождения функции  $v(x, t)$  по уравнению (12) и условиям (13)–(15) и далее нахождения функции  $u(x, t)$  по уравнению (16) и условиям (17), (18). Каких-либо принципиальных затруднений общий случай не порождает, необходимые априорные оценки легко выводятся с помощью некоторых условий малости на величины  $|c_x(x, t)|$ ,  $|c_{xx}(x, t)|$ ,  $|c_{xxx}(x, t)|$  и  $|c_{xxxx}(x, t)|$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллова Г. А. Обратная задача для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при решении в случае интегрального преопределения // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т.10, вып. 1. С.34–35.
2. Кожанов А. И., Кириллова Г. А. О некоторых обратных задачах для параболического уравнения четвертого порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, вып. 1. С.35–48.
3. Телешева Л. А. Обратная задача для параболических уравнений высокого порядка: случай неизвестного коэффициента, зависящего от времени // Вестник БГУ. Математика и информатика. 2010/9. С. 175–182
4. Телешева Л. А. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при производной по времени // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 180–201.
5. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.

О  $n$ -ПЕРИОДИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНЫХ  
СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ

Ф. М. Федоров

Исходя из основной теоремы гауссовых систем [1], в [2] с общих позиций рассмотрена теория периодических бесконечных систем [3]. В данной статье применим подход работы [2] для изучения почти периодических бесконечных систем, хотя эти системы в достаточной мере рассмотрены в [3–5].

Пусть задана следующая однородная гауссова система:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{j,j+p}}{a_{j,j}} x_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

В [1] получена основная теорема о необходимых и достаточных условиях существования нетривиального решения однородных бесконечных гауссовых систем (1).

**Теорема.** Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения однородной гауссовой системы (1) является выполнение следующих условий для каждого  $j$ :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_{j,j+p}}{a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} S(j+k)} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где для унификации обозначений принято  $\prod_{k=0}^{-1} S(j+k) = 1$  для всех  $j$ .

При выполнении условий (2) решением системы (1) являются выражения вида

$$x_i = \frac{(-1)^i x_0}{\prod_{k=0}^{i-1} S(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $x_0$  — произвольное вещественное число,  $S(k)$  удовлетворяют уравнениям (2) для каждого  $j$ .

Система уравнений (2) называется *характеристикой*, а числа  $S(i)$  — *характеристическими числами* соответствующего решения (3) гауссовой системы (1) [1, 3, 4].

Напомним, что если коэффициенты первого уравнения системы (1) сохраняются для всех других уравнений системы, то такие системы называются *периодическими*, а если периодически повторяются коэффициенты более чем одного из первых уравнений для других уравнений системы, то такие системы называются *почти периодическими*.

Рассмотрим частный случай гауссовой системы, а именно почти периодическую систему, при этом полагаем, что периодически повторяются с периодом  $n$  коэффициенты первых  $n$  уравнений для других уравнений системы.

Итак, коэффициенты системы (1) (для простоты полагаем  $a_{j,j} = 1$ ) имеют вид

$$a_{j,j+p} = \begin{cases} a_p, & j = nl, \\ b_p, & j = nl + 1, \\ \dots \\ g_p, & j = nl + n - 1, \end{cases} \quad p \geq 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

При этом в выражении (4) в силу предположения о  $a_{j,j}$  должны выполняться равенства  $a_0 = b_0 = \dots = g_0 = 1$ .

В этом случае характеристика (2) каждого решения уравнения си-

стемы (1) с коэффициентами (4) на основании теоремы 1 имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_p}{\prod_{k=0}^{p-1} S(j+k)} = 0, \quad j = nl, \\ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p b_p}{\prod_{k=0}^{p-1} S(j+k)} = 0, \quad j = nl + 1, \\ \dots \\ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p g_p}{\prod_{k=0}^{p-1} S(j+k)} = 0, \quad j = nl + n - 1, \end{array} \right. \quad p \geq 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Сами уравнения в системе (5) являются бесконечными системами в зависимости от  $j$ . Например, первое уравнение распишется так:

$$\left\{ \begin{array}{l} j = 0 \quad a_0 - \frac{1}{S(0)} \left( a_1 - \frac{a_2}{S(1)} + \frac{a_3}{S(1)S(2)} - \frac{a_4}{\prod_{k=1}^{p-1} S(k)} + \dots \right) = 0, \\ j = n \quad a_0 - \frac{1}{S(n)} \left( a_1 - \frac{a_2}{S(n+1)} + \frac{a_3}{\prod_{k=1}^{p-1} S(n+k)} - \dots \right) = 0, \\ \dots, \\ j = nl \quad a_0 - \frac{1}{S(nl)} \left( a_1 - \frac{a_2}{S(nl+1)} + \frac{a_3}{\prod_{k=1}^{p-1} S(nl+k)} - \dots \right) = 0, \\ \dots, \end{array} \right. \quad (6)$$

где  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Сравнивая каждое уравнение системы (6) друг с другом, можно считать, что

$$S(0) = S(n) = S(2n) = \dots = S(nl) = \dots = S^{(0)} = \text{const}. \quad (7)$$

Тогда появляется возможность циклического допущения выполнения соотношений:

$$\begin{aligned} S(1) &= S(n+1) = S(2n+1) = \dots = S(nl+1) = \dots = S^{(1)} = \text{const}, \dots \\ S(n-1) &= S(n+n-1) = \dots = S(nl+n-1) = \dots = S^{(n-1)} = \text{const}. \end{aligned} \quad (8)$$

Найдем решения системы (1) с коэффициентами (4), если они существуют, для которых выполнены условия (8). Пусть удовлетворяют

ся условия (8). Тогда первая система в (5) с учетом (7) и (8) преобразуется в одно уравнение:

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{np+l} a_{np+l}}{\prod_{k=0}^{l-1} S^{(k)}} \mu^p(n) = 0, \quad (9)$$

где

$$\frac{1}{S^{(0)} S^{(1)} \dots S^{(n-1)}} = \mu(n). \quad (10)$$

Для унификации обозначений здесь и ниже считаем, что  $\prod_{k=0}^{-1} S^{(k)} = 1$ .

Аналогично расписывая, как и (6), вторую систему в (5), с учетом (7) и (8) также преобразуем ее в одно уравнение:

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{np+l} b_{np+l}}{\prod_{k=1}^l S^{(k)}} \mu^p(n) = 0, \quad (11)$$

Продолжая таким образом для остальных систем в (5), получим уравнения, аналогичные (9) и (11), которые в общем случае выглядят так:

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{np+l} g_{np+l}^t}{\prod_{k=t}^{l+t-1} S^{(k)}} \mu^p(n) = 0, \quad t = 0, 1, \dots, n-1, \quad (12)$$

$$g_{np+l}^0 = a_{np+l}, \quad g_{np+l}^1 = b_{np+l}, \dots, g_{np+l}^{n-1} = g_{np+l}.$$

В частности, при  $t = 0$  и  $t = 1$  получим соответственно соотношения (9) и (11) соответственно.

Поскольку  $\prod_{k=t}^{l+t-1} S^{(k)} = \prod_{k=0}^{l-1} S^{(k+t)}$ , выражение (12) окончательно примет вид

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{np+l} g_{np+l}^t}{\prod_{k=0}^{l-1} S^{(k+t)}} \mu^p(n) = 0, \quad t = 0, 1, \dots, n-1. \quad (13)$$

Систему (13) можно называть *характеристикой* самой системы (1) с коэффициентами (4).

Необходимо подчеркнуть, что при раскрытии формулы (13) по  $t$  нужно учитывать соотношения (7) и (8), вследствие чего имеют место периодические равенства с периодом  $n$ :

$$S^{(0)} = S^{(n)} = S^{(2n)} = \dots, \quad S^{(1)} = S^{(n+1)} = S^{(2n+1)} = \dots, \quad (14)$$

и т. д.

Введем обозначение

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{np} g_{np+l}^t \mu^p(n) = f_l^t(\mu, n), \quad (15)$$

при этом допускаем, что степенные ряды в (15) имеют общий круг абсолютной сходимости с радиусом  $R > 0$ . Тогда (13) перепишется так:

$$f_0^t(\mu, n) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{(-1)^l f_l^t(\mu, n)}{S^{(t)} \prod_{k=1}^{l-1} S^{(k+t)}} = 0, \quad t = 0, 1, \dots, n-1. \quad (16)$$

Отсюда

$$S^{(t)} = S^{(t)}(n) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{(-1)^{l+1} f_l^t(\mu, n)}{f_0^t(\mu, n) \prod_{k=1}^{l-1} S^{(k+t)}} = 0, \quad t = \overline{0, n-1}, \quad (17)$$

при этом полагаем, что  $f_0^t(\mu, n) \neq 0$ .

Первые три уравнения относительно  $S^{(0)} = S^{(0)}(n)$ ,  $S^{(1)} = S^{(1)}(n)$ ,  $S^{(2)} = S^{(2)}(n)$  в (17) имеют следующий вид (аргументы  $\mu, n$  для функций  $f_l^t(\mu, n)$  опущены):

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= \frac{f_1^0}{f_0^0} - \frac{f_2^0}{f_0^0 S^{(1)}} + \frac{1}{S^{(1)} S^{(2)}} \left[ \frac{f_3^0}{f_0^0} + \sum_{l=4}^{n-1} \frac{(-1)^{l+1} f_l^0}{f_0^0 \prod_{k=3}^{l-1} S^{(k)}} \right], \\ S^{(1)} &= \frac{f_1^1}{f_0^1} + \frac{1}{S^{(2)}} \sum_{l=2}^{n-1} \frac{(-1)^{l+1} f_l^1}{f_0^1 \prod_{k=3}^l S^{(k)}}, \\ S^{(2)} &= \sum_{l=1}^{n-2} \frac{(-1)^{l+1} f_l^2}{f_0^2 \prod_{k=3}^{l+1} S^{(k)}} + \frac{(-1)^n f_{n-1}^2}{f_0^2 S^{(0)} \prod_{k=3}^{n-1} S^{(k)}}. \end{aligned} \quad (18)$$

В последнем уравнении учтено равенство  $S^{(n)} = S^{(0)}$ , которое следует из соотношений (14). Очевидно, что решение системы (18) сводится к решению одного квадратного уравнения, решив которое найдем

$$\begin{aligned} S^{(0)}(n) &= E_0(\mu, n, S^{(3)}(n), S^{(4)}(n), \dots, S^{(n-1)}(n)); \\ S^{(1)}(n) &= E_1(\mu, n, S^{(3)}(n), S^{(4)}(n), \dots, S^{(n-1)}(n)); \\ S^{(2)}(n) &= E_2(\mu, n, S^{(3)}(n), S^{(4)}(n), \dots, S^{(n-1)}(n)). \end{aligned} \quad (19)$$

При  $t = 3$  соотношение (17) дает

$$S^{(3)}(n) = \sum_{l=1}^{n-3} \frac{(-1)^{l+1} f_l^3}{f_0^3 \prod_{k=4}^{l+2} S^{(k)}} + \frac{(-1)^{n-1} f_{n-2}^3}{f_0^3 S^{(0)} \prod_{k=4}^{n-1} S^{(k)}} + \frac{(-1)^n f_{n-1}^3}{f_0^3 S^{(0)} S^{(1)} \prod_{k=4}^{n-1} S^{(k)}}. \quad (20)$$

Подставляя значения  $S^{(0)}, S^{(1)}$  из (19) в (20), получим алгебраическое уравнение относительно  $S^{(3)}$ , решив которое, найдем

$$S^{(3)}(n) = E_3(\mu, n, S^{(4)}(n), S^{(5)}(n), \dots, S^{(n-1)}(n)). \quad (21)$$

В свою очередь, подставляя (21) в (19), перепишем (19) в виде

$$\begin{aligned} S^{(0)}(n) &= \overline{E}_0(\mu, n, S^{(4)}(n), S^{(5)}(n), \dots, S^{(n-1)}(n)); \\ S^{(1)}(n) &= \overline{E}_1(\mu, n, S^{(4)}(n), S^{(5)}(n), \dots, S^{(n-1)}(n)); \\ S^{(2)}(n) &= \overline{E}_2(\mu, n, S^{(4)}(n), S^{(5)}(n), \dots, S^{(n-1)}(n)). \end{aligned} \quad (22)$$

Продолжая этот процесс для  $t = 4$  и далее, в конце концов получим

$$S^{(n-2)}(n) = \overline{\overline{E}}_{n-2}(\mu, n, S^{(n-1)}(n)), \quad (23)$$

следовательно,

$$S^{(0)}(n) = \overline{\overline{E}}_0(\mu, n, S^{(n-1)}(n)), \dots, S^{(n-3)}(n) = \overline{\overline{E}}_{n-3}(\mu, n, S^{(n-1)}(n)). \quad (24)$$

При  $t = n - 1$  соотношение (17) с учетом (23) и (24) дает уравнение относительно одного неизвестного  $S^{(n-1)}(n)$ , решив которое найдем  $S^{(n-1)}(n)$  и тем самым выразим все  $S^{(i)}(n)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ , через  $\mu$ :

$$S^{(0)}(n) = F_0(\mu, n), S^{(1)}(n) = F_1(\mu, n), \dots, S^{(n-1)}(n) = F_{n-1}(\mu, n). \quad (25)$$

С учетом (25) соотношение (10) дает следующее характеристическое уравнение для определения параметра  $\mu$ :

$$1 - \mu F_0(\mu, n)F_1(\mu, n)\dots F_{n-1}(\mu, n) = 0. \quad (26)$$

**Теорема.** Если  $\mu$  является корнем уравнения (26), то выражение вида

$$\begin{aligned} x_{ni} &= (-1)^{ni}\mu^i x_0, \quad x_{ni+1} = \frac{(-1)^{ni+1}\mu^i x_0}{S^{(0)}}, \quad x_{ni+2} = \frac{(-1)^{ni+2}\mu^i x_0}{S^{(0)}S^{(1)}}, \\ &\dots, x_{ni+(n-1)} = \frac{(-1)^{ni+(n-1)}\mu^i x_0}{S^{(0)}S^{(1)}\dots S^{(n-2)}}, \quad i = 0, 1, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (27)$$

является решением гауссовой системы (1) с коэффициентами (4).

**Доказательство.** В силу выполнения условий (8) для характеристических чисел  $S(i)$  и условий (14) для чисел  $S^{(i)}$  характеристика (5) искомого решения преобразуется в конечную систему (16), как в этом убедились выше. Пусть  $\mu_0$  является корнем уравнения (26). Это значение  $\mu_0$  подставляем в (25) и находим все  $S^{(i)}(n)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Очевидно, что при этих значениях  $S^{(i)}(n)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , уравнение (26) с учетом (10) превращается в тождество. Поскольку выражения (25) являются решением (10), система (10) удовлетворяется при  $\mu = \mu_0$ .

Тогда с учетом соотношений (7), (8) и (14) и теоремы 1, т. е. формулы (3), легко убеждаемся, что выражение (27) является решением гауссовой системы (1) с коэффициентами (4). Действительно, формула (3) при  $0 \leq i \leq n-1$  и формула (27) при  $i = 0$  совпадают. Далее, сравнивая формулу (3) при  $0 \leq i \leq 2n-1$  и формулу (27) при  $i = 1$  и т. д., убеждаемся, что эти выражения полностью совпадают, тем самым теорема доказана.

Теорему 2 можно доказать и непосредственно, используя априори заданные выражения (27).

Не нарушая общности, доказательство теоремы проведем для первой системы в (1) с коэффициентами (4), т. е. для кратных числу  $n$

индексов  $j$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} a_p x_{j+p} &= \sum_{p=0}^{\infty} a_p x_{nl+p} = \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} x_{nl+np} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{np+1} x_{nl+np+1} \\ &\quad + \sum_{p=0}^{\infty} a_{np+2} x_{nl+np+2} + \cdots + \sum_{p=0}^{\infty} a_{np+n-1} x_{nl+np+n-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя соотношения (27) при  $\mu = \mu_0$  в (28), получим

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{n(l+p)} a_{np} \mu_0^{l+p} x_0 &- \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(l+p)} a_{np+1} \mu_0^{l+p} x_0}{S^{(0)}} + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{n(l+p)} \\ &\times \frac{a_{np+2} \mu_0^{l+p} x_0}{S^{(0)} S^{(1)}} + \cdots + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(l+p)+(n-1)} a_{np+(n-1)} \mu_0^{l+p} x_0}{S^{(0)} S^{(1)} \dots S^{(n-2)}} \\ &= (-1)^{nl} \mu_0^l x_0 \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{np+i} a_{np+i} \mu_0^p}{\prod_{k=0}^{i-1} S^{(k)}} \right]. \end{aligned}$$

С учетом уравнения (16) при  $t = 0$  и обозначений (15) получим

$$(-1)^{nl} \mu_0^l x_0 \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i f_i^0(\mu_0, n)}{\prod_{k=0}^{i-1} S^{(k)}} \right] = 0,$$

что показывает удовлетворение уравнений системы (1) с коэффициентами (4) при  $j = nl$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Аналогично доказывается удовлетворение остальных уравнений системы (1) поочередно при  $j = nl + 1$ ,  $j = nl + 2, \dots$ ,  $j = nl + n - 1$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Теорема доказана.  $\square$

Пусть задана последовательность чисел  $a_{j,j}$  таких, что  $a_{j,j} \neq 0$  для любого  $j$ . Составим из этих чисел и из коэффициентов  $a_p$ ,  $b_p, \dots, g_p$  системы (1) систему коэффициентов  $a_{j,j+p}$  следующим образом:

$$a_{j,j+p} = \begin{cases} a_p a_{j+p,j+p}, & j = nl, l = 0, 1, \dots, p = 0, 1, \dots, \\ b_p a_{j+p,j+p}, & j = nl + 1, l = 0, 1, \dots, p = 0, 1, \dots, \\ \dots \\ g_p a_{j+p,j+p}, & j = nl + n - 1, l = 0, 1, \dots, p = 0, 1, \dots. \end{cases} \quad (29)$$

Построим из коэффициентов (29), (13) гауссову однородную бесконечную систему, краткая запись которой имеет вид

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = \begin{cases} \sum_{p=0}^{\infty} a_p a_{j+p,j+p} x_{j+p} = 0, & j = nl, \\ \sum_{p=0}^{\infty} b_p a_{j+p,j+p} x_{j+p} = 0, & j = nl + 1, \\ \dots, \\ \sum_{p=0}^{\infty} g_p a_{j+p,j+p} x_{j+p} = 0, & j = nl + n - 1, \end{cases} \quad (30)$$

где  $l = 0, 1, 2, \dots$

Без труда доказывается следующая

**Теорема.** Решения бесконечной системы с разностными индексами (1) с коэффициентами (4) и системы (30) с одним и тем же характеристическим уравнением (26) изоморфны.

**Следствие.** Выражения вида

$$\begin{aligned} x_{ni} &= \frac{(-1)^{ni} \mu^i x_0}{a_{ni,ni}}, & x_{ni+1} &= \frac{(-1)^{ni+1} \mu^i x_0}{S^{(0)} a_{ni+1,ni+1}}, & \dots, \\ x_{ni+(n-1)} &= \frac{(-1)^{ni+(n-1)} \mu^i x_0}{S^{(0)} S^{(1)} \dots S^{(n-2)} a_{ni+n-1,ni+n-1}}, & i &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

являются решениями бесконечной системы (30), где  $\mu$  — корни характеристического уравнения (26).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При  $n = 1$  система (30), очевидно, периодическая [2, 3]. При  $n = 2$  и  $n = 3$  системы вида (30) ранее названы почти периодическими системами [3–5]. При  $n \rightarrow \infty$  получим гауссову систему в общем виде.

Таким образом, гауссовым бесконечным системам вида (30) можно дать общее название —  *$n$ -периодические бесконечные системы с периодом  $n$* . Ясно, что при  $n = 1$  такие системы названы просто периодическими системами.

Теперь рассмотрим конкретные примеры, когда  $n = 2$  и  $n = 3$ . Эти случаи специально изучены ранее [3–5] и, как указано выше, соответствующие им бесконечные системы названы почти периодическими.

Более того, именно эти случаи в данной статье получили прямое обобщение на произвольное число  $n$ . Итак, пусть  $n = 2$ .

Тогда теорема 2, точнее, формула (27) дает

$$x_{2i} = \mu^i x_0, \quad x_{2i+1} = \frac{-1\mu^i x_0}{S^{(0)}(2)},$$

где  $\mu$  определяется из характеристического уравнения (26), которое в данном случае с учетом обозначений (25) имеет вид

$$1 - \mu F_0(\mu, 2)F_1(\mu, 2) = 1 - \mu S^{(0)}(2)S^{(1)}(2) = 0.$$

Если привести обозначения в соответствие с работой [5], т. е.  $S^{(0)}(2) = S'$ ,  $S^{(1)}(2) = S''$ , то обозначение (10) дает

$$\frac{1}{S^{(0)}(2)S^{(1)}(2)} = \mu(2) = \frac{1}{S'S''} = \mu.$$

Введем функции  $f_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$ , согласно [5]. Тогда характеристическое уравнение перепишется следующим образом:

$$f_2(\mu)\varphi_2(\mu) - \mu f_1(\mu)\varphi_1(\mu) = 0.$$

Тем самым результаты данного примера полностью совпадают с результатами работы [3].

При  $n = 3$  в силу теоремы 2 имеем

$$x_{3i} = (-1)^i \mu^i x_0, \quad x_{3i+1} = \frac{(-1)^{i+1} \mu^i x_0}{S^{(0)}(3)}, \quad x_{3i+2} = \frac{(-1)^i \mu^i x_0}{S^{(0)}(3)S^{(1)}(3)}.$$

Далее аналогично предыдущему примеру убеждаемся, что результаты данного примера полностью совпадают с результатом работы [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. М. К теории гауссовых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 209–217.
2. Федоров Ф. М. К теории периодических бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 1. С. 141–152.
3. Федоров Ф. М. Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.
4. Федоров Ф. М. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и их приложения. Новосибирск: Наука, 2011.
5. Федоров Ф. М. Об обобщениях почти периодических бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 147–154.

## ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ

С. Н. БЕРНШТЕЙНА

Хохолов В. Б.

Для треугольной матрицы узлов интерполяции  $\mathfrak{M} = \{x_{k,n}\}$  на отрезке  $[-1, 1]$  по  $n$ -й строке  $-1 \leq x_{0,n} < x_{1,n} < \dots < x_{n,n} \leq 1$ ,  $n = 3, 4, 5, \dots$ , для любой непрерывной функции  $f(x) \in C[-1, 1]$  определим интерполяционный процесс Лагранжа  $\{L_n(\mathfrak{M}, f, x)\}_{n=3}^{\infty}$ :

$$L_n(\mathfrak{M}, f, x) = \sum_{k=0}^n f(x_{k,n}) l_{k,n}(\mathfrak{M}, x), \quad (1)$$

где

$$l_{k,n} = \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})}, \quad \omega_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_{k,n}).$$

Следуя С. Н. Бернштейну [1], при любом  $n \geq 3$  для функции  $f(x) \in C[-1, 1]$  положим

$$B_n(\mathfrak{M}, f, x) = \sum_{k=0}^n f(x_{k,n}) \lambda_{k,n}(\mathfrak{M}, x), \quad (2)$$

где

$$\lambda_{0,n}(\mathfrak{M}, x) = l_{0,n}(\mathfrak{M}, x), \quad \lambda_{n,n}(\mathfrak{M}, x) = l_{n,n}(\mathfrak{M}, x),$$

$$\lambda_{1,n}(\mathfrak{M}, x) = \frac{3l_{1,n}(\mathfrak{M}, x) + l_{2,n}(\mathfrak{M}, x)}{4},$$

$$\lambda_{n-1,n}(\mathfrak{M}, x) = \frac{3l_{n-1,n}(\mathfrak{M}, x) + l_{n-2,n}(\mathfrak{M}, x)}{4},$$

$$\lambda_{k,n}(\mathfrak{M}, x) = \frac{l_{k-1,n}(\mathfrak{M}, x) + 2l_{k,n}(\mathfrak{M}, x) + l_{k+1,n}(\mathfrak{M}, x)}{4}.$$

Миллз и Варма [2] рассмотрели процесс (2) в случае матрицы Чебышева второго рода, т. е. матрицы  $U$ ,  $n$ -я строка которой состоит из нулей многочлена

$$\omega_{n+1}(U, x) = (1 - x^2)U_{n-1}(x),$$

где  $U_{n-1}$  — многочлен Чебышева второго рода степени  $n - 1$ , и показали, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - B_n(U, f, x)| = 0$$

для любой функции  $f(x) \in C[-1, 1]$  (на самом деле в [2] получен более сильный результат о порядке наилучшего приближения).

Пусть  $\alpha, \beta > -1$  и  $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n=3}^\infty$  — последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $w(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$ . В качестве матрицы интерполяции возьмем матрицу, составленную из корней многочлена  $(1 - x^2)P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x)$ , и по  $n$ -й строке этой матрицы  $\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)} = \{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ ,  $n = 3, 4, \dots$ ,  $-1 = x_{n,n} < x_{n-1,n} < \dots < x_{1,n} = 1$ , запишем по формуле (2) многочлен  $B_n(\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)}, f, x)$  для функции  $f(x) \in C[-1, 1]$ .

**Теорема 1.** Если  $|\alpha| = |\beta| = 1/2$ , то для любой функции  $f(x) \in C[-1, 1]$  справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - B_n(\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)}, f, x)| = 0.$$

Ключевым моментом доказательства является установление справедливости неравенств

$$\sum_{k=2}^{n-2} |l_k(\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)}, x) + l_{k+1}(\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)}, x)| \leq C^{(\alpha, \beta)} \quad \text{при } |\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2},$$

где  $C^{(\alpha, \beta)} > 0$  зависят только от  $\alpha$  и  $\beta$ .

Пусть  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_l$ , где  $\mathfrak{M}_l$  — матрица равноотстоящих узлов на отрезке  $[-1, 1]$ :  $x_{k,n} = -1 + \frac{2k}{n}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

В [1] С. Н. Бернштейн заметил, что для матрицы  $\mathfrak{M}_l$  подобное (2) «внесение поправок уже не является достаточным». Также известно, что процесс  $\{L_n(\mathfrak{M}_l, f, x)\}_{n=1}^\infty$  сходится в окрестности точки  $x = 0$  и справедлива

**Теорема 2** [3]. Для каждого  $r > 0$  найдется такая постоянная  $A_r$ , что

$$\max_{|x| \leq r/\sqrt{n}} \lambda_{n+1}(\mathfrak{M}_l, x) \leq A_r \ln n.$$

Здесь  $\lambda_n(\mathfrak{M}_l, x)$  — функция Лебега интерполяционного процесса Лагранжа (1).

Обозначим через  $\mu_n(\mathfrak{M}_l, x)$  функцию Лебега процесса (2).

**Теорема 3.** Для каждого  $r > 0$  найдется такая постоянная  $B_r$ , что

$$\max_{|x| \leq r/\sqrt{n}} \mu_{n+1}(\mathfrak{M}_l, x) \leq B_r \ln n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Удалось лишь показать, что  $B_r < A_r$ .

На рис. 1 показано поведение многочлена Лагранжа (1) и многочлена (2) при приближении функции  $f(t) = |t|$ ,  $n = 10$ .

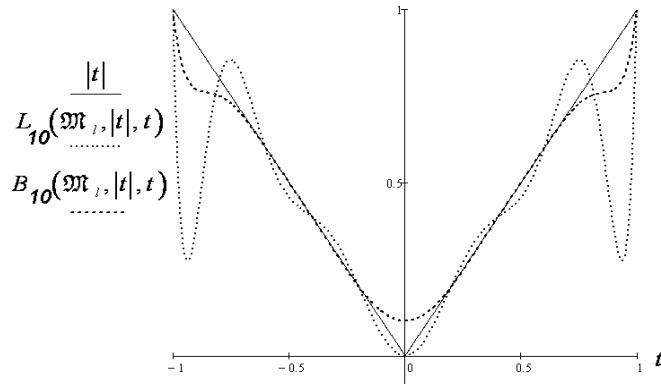


Рис. 1.

**Теорема 4.** Для каждого  $r > 0$  найдется  $x'$ ,  $|x'| \leq r/\sqrt{n}$ , такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(\mathfrak{M}_l, x')}{\ln n} = c > 0.$$

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Бернштейн С. Н. Об одном видоизменении интерполяционной формулы Лагранжа // Полн. собр. соч.: В 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2. С. 130–140.
2. Mills T. M., Varma A. K. A new proof of S. A. Teljakovskii's approximation theorem // Stud. Sci. Math. Hung. 1979. V. 14. P. 241–246.
3. Runck P. O. Über Konvergenzfragen bei Polynominterpolation mit aquidistanten Knoten. I-II // J. Reine Angew. Math. 1961. Bd 208, Heft 1–2. S. 51–69; 1962. Bd 210, Heft 3–4. S. 175–204.

г. Якутск

19 февраля 2013 г.

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ  
МОДЕЛИ ШЕСТАКОВА — СВИРИДЮКА  
ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА  
С ИНЕРЦИОННОСТЬЮ И РЕЗОНАНСАМИ

Ю. В. Худяков

**Введение**

В ряде работ [1, 2] А. Л. Шестаковым и Г. А. Свиридюком предложена и на качественном уровне обоснована математическая модель измерительного устройства (ИУ), использование которой позволяет восстановить динамически искаженные сигналы. Одной из составных частей этой модели служит *система уравнений леонтьевского типа* [3]

$$L\dot{x} = Mx + Du, \quad (1)$$

где квадратные матрицы  $L$  и  $M$  моделируют конструкцию ИУ, причем  $L$  не предполагается обратимой, вектор-функция  $x = x(t)$  есть состояние ИУ, а вектор-функция  $u = u(t)$  — входящий сигнал. Система дифференциальных уравнений (1) дополняется алгебраической системой

$$y = Cx, \quad (2)$$

где вектор-функция  $y = y(t)$  моделирует сигнал на выходе ИУ, матрицы  $D$  и  $C$  прямоугольные, их размеры таковы, чтобы вход и выход  $y$  имели одинаковую размерность.

Еще одну часть модели ИУ представляет *функционал штрафа*

$$\begin{aligned} J(u) = \alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|y^{(q)}(t) + S\tilde{y}^{(q)}(t) - Sy_0^{(q)}(t)\|^2 dt \\ + (1 - \alpha) \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (3)$$

где  $y_0 = y_0(t)$  — наблюдение, полученное в ходе натурного эксперимента;  $N_k, k = 0, 1, \dots, q$ , квадратные симметрические положительно определенные матрицы, параметры  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}_+ (= \{0\} \cup \mathbb{R}_+)$  такие, что  $\alpha + \beta = 1$ . В модели входной сигнал  $v_n$ , называемый также *измерением*, предполагается искаженным как механической инерционностью ИУ, так резонансами в его цепях. Задача восстановления измерения  $v$  по *наблюдению*  $y$  заключается в минимизации функционала  $J$ :

$$J(v) = \min_{u \in \mathcal{U}_\partial} J(u) \quad (4)$$

на множестве *допустимых измерений*  $\mathcal{U}_\partial$  — замкнутом выпуклом подмножестве *пространства измерений*  $\mathcal{U}$ . Условия на множество  $\mathcal{U}_\partial$  формализуют априорную информацию об измерении (как говорят метрологи, «нельзя измерить неизвестное»).

Замыкает модель ИУ *условие Шоуолтера — Сидорова*

$$(R_\alpha^L(M))^{p+1}(x(0) - x_0) = 0, \quad (5)$$

которое в случае обратимости матрицы  $L$  превращается в классическое условие Коши

$$x(0) = x_0 \quad (6)$$

для системы (1). Здесь  $R_\alpha^L(M) = (\alpha L - M)^{-1}L$  — *правая L-резольвента* матрицы  $M$ ,  $p$  — порядок полюса *L-резольвенты*  $(\mu L - M)^{-1}$  матрицы  $M$  в точке  $\infty$ ,  $\alpha \in \rho^L(M)$  — *L-резольвентное множество* матрицы  $M$ . Поскольку системы леонтьевского типа являются конечномерными аналогами уравнений соболевского типа [4], преимущество условия (5) перед условием (6) выглядит очень весомо [5].

Основываясь на качественном анализе модели Шестакова — Свиридиюка в случае учета только инерционности и оригинальном численном методе, предложенном А. В. Келлер [6], был разработан алгоритм численного восстановления измерения, искаженного инерционностью ИУ [7]. Результаты вычислительных экспериментов [8] показали хорошую согласованность с результатами натурных экспериментов [9]. Более того, была сделана попытка численного анализа модели ИУ (1)–(5) при наличии резонансов [10], которая вскрыла некоторые недостатки модели и используемого алгоритма. В данной статье эти недостатки

ликвидированы, в частности, объяснена необходимость вырожденной матрицы  $L$  при наличии резонансов в цепях ИУ, уточнен вид функционала качества, а также сделана замена многочленов, используемых ранее [6–8], тригонометрическими многочленами в алгоритме.

### 1. Точное решение

Введем в рассмотрение пространства состояний  $\mathfrak{N}$ , измерений  $\mathfrak{U}$  и наблюдений  $\mathfrak{Y}$  при некотором фиксированном  $\tau \in \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} &= \{x \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\}, \\ \mathfrak{U} &= \{u \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\}, \\ \mathfrak{Y} &= C[\mathfrak{N}].\end{aligned}$$

Кроме того, необходимым является пространство  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{Y}$ . Выделим в  $\mathfrak{U}$  замкнутое выпуклое подмножество  $\mathfrak{U}_\partial$  — множество допустимых измерений. Требуется найти *оптимальное измерение*  $v \in \mathfrak{U}_\partial$  почти всюду на  $(0, \tau)$ , удовлетворяющее системе леонтьевского типа

$$L\dot{z} = Mz + Du \quad (7)$$

при начальных условиях Шоуолтера — Сидорова

$$[(\mu L - M)^{-1} L]^{p+1}(z(0) - z_0) = 0 \quad (8)$$

и минимизирующее значение функционала

$$\begin{aligned}J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u) &= \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} \left( \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|Sz^{(q)}(u, t) + S\bar{z}_0^{(q)}(t) - Sz_0^{(q)}(t)\|^2 dt + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle dt \right). \quad (9)\end{aligned}$$

Здесь  $z = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_m)$ , причем  $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_r)$  и  $\dot{x} = \text{col}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_r)$  — вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно;  $u = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_n)$  и  $y = \text{col}(y_1, y_2, \dots, y_m)$  — вектор-функции измерений и наблюдений соответственно;  $z_0(t) = \text{col}(x_{01}(t), x_{02}(t), \dots, x_{0r}(t), y_{01}(t), y_{02}(t), \dots, y_{0m}(t))$  —

наблюдаемые состояние системы и сигнал, получаемые в ходе натурального эксперимента,  $Sz_0(t)$  — те наблюдаемые величины, по которым проводится восстановление динамически искаженного сигнала;  $\bar{z}_0(t)$  — наблюдаемые состояние системы и выходящий сигнал, получаемые в ходе натурального эксперимента при нулевых значениях полезных измеряемых сигналов,  $S\bar{z}_0(t)$  — те наблюдаемые величины (при нулевых значениях полезных измеряемых сигналов), по которым проводится восстановление динамически искаженного сигнала;  $z(t)$  — моделируемые состояние системы и выходящий сигнал, получаемые в ходе натурального эксперимента,  $Sz(t)$  — те моделируемые величины, по которым проводится восстановление динамически искаженного сигнала;  $n = k + m$  — число параметров состояний системы;  $L$  и  $M$  — квадратные матрицы порядка  $n$ , представляющие собой взаимовлияние скоростей состояния и состояния ИУ соответственно, причем  $\det L = 0$ ,  $D$  — квадратная матрица порядка  $n$ , характеризующие взаимовлияние параметров измерения и связь между состоянием системы и наблюдением соответственно,  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\theta = 0, 1, \dots, p + 1$ ,  $\|\cdot\|$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — евклидовы норма и скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$  соответственно.

Необходимость рассмотрения модели (7)–(9) вместо (1)–(5) обусловлена наличием практических задач, в которых: 1) восстановление полезных динамически искаженных сигналов происходит не по всем наблюдаемым параметрам, а только по части из них; 2) кроме того, резонансы в цепях ИУ влияют на значения наблюдаемых величин не только опосредованно через состояния системы, поэтому корректнее принять вид  $y = Cx + Fu$ , а не (2).

Системы леонтьевского типа являются конечномерным частным случаем *уравнений соболевского типа*. Поэтому при их изучении будем использовать идеи, методы и результаты общей теории [11], адаптированные к конечномерной ситуации. Следуя [3], матрицу  $M$  назовем *L-регулярной*, если существует число  $\alpha \in \mathbb{C}$  такое, что  $\det(\alpha L - M) \neq 0$ . Если матрица  $M$  *L-регулярна*, то существует число  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , равное нулю, если в точке  $\infty$  *L-резольвента*  $(\mu L - M)^{-1}$  матрицы  $M$  имеет устранимую особую точку, и равное порядку полюса в точке  $\infty$  матриц-функции  $(\mu L - M)^{-1}$  в противном случае. Учитывая этот факт, в дальнейшем *L-регулярную* матрицу  $M$  будем называть *(L, p)-регулярной*,

$p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ .

Задача (7)–(9) в гильбертовых пространствах и в более общей постановке (в частности, требовалось еще найти вектор состояний) рассматривалась М. В. Плехановой как «задача оптимального управления». Поэтому без доказательства приводим следующий результат, почерпнутый из [12] и адаптированный к данной ситуации.

**Теорема 1.** Пусть матрица  $M$   $(L, p)$ -регулярна,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , причем  $\det M \neq 0$ . Тогда для любых  $z_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{Y}$  существует единственное решение  $(z, v) \in \mathfrak{Z} \times \mathfrak{U}_\partial$  задачи (7)–(9), где

$$\begin{aligned} z(v, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} & \left[ \sum_{q=0}^p (M^{-1}(Q_k - \mathbb{I}_n)L)^q M^{-1}(\mathbb{I}_n - Q_k)(Dv)^{(q)}(t) \right. \\ & + \left( \left( L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)} z_0 \\ & \left. + \int_0^t \left[ \left( L - \frac{t-s}{k} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)-1} \left( L - \frac{t-s}{k} M \right)^{-1} Q_k(Dv(s)) ds \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $Q_k = (kL_k^L(M))^{p+1}$ .

Заметим, что условие  $\det M \neq 0$  не снижает общности рассматриваемой задачи. Действительно, при условии  $(L, p)$ -регулярности матрицы  $M$  в результате замены  $z = e^{\lambda t}w$  перейдем к уравнению  $L\dot{v} = (M - \lambda L)v + Du$  того же вида, что и (4), но  $\det(M - \lambda L) \neq 0$ . Отметим еще, что при решении задачи восстановления динамически искаженного сигнала нас интересует только нахождение функции  $v$  как одного из решений задач (7)–(9), существующего в силу теоремы 1, поэтому  $v$  будем в дальнейшем называть *точным решением задачи оптимального измерения с учетом инерционности и резонансов*.

## 2. Приближенные решения

Пусть матрица  $M$   $(L, p)$ -регулярна, причем  $\det M \neq 0$ . Согласно теореме 1 приближенное решение задачи (7)–(9)  $(z_k, v_k^l)$  будем искать

в виде

$$\begin{aligned}
 z_k(v_k^l, t) = & \sum_{q=0}^p (M^{-1}(Q_k - \mathbb{I}_n)L)^q M^{-1}(\mathbb{I}_n - Q_k) (Dv_k^l)^{(q)}(t) \\
 & + \left( \left( L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)} z_0 \\
 & + \sum_{j=0}^{14} \left[ \left( \left( L - \frac{T-s_j}{k} M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)-1} \left( L - \frac{T-s_j}{k} M \right)^{-1} Q_k (Dv_k^l(s_j)) \right] \Delta c_j,
 \end{aligned} \tag{10}$$

$s_j$  и  $c_j$  — узлы и веса квадратурной формулы Гаусса соответственно, причем  $k = \max\{k_1; k_2\}$ , где

$$\begin{aligned}
 k_1 &> \frac{1}{\alpha} \sum_{l=q+1}^n |a_l| + 1, \\
 k_2 &> \frac{1}{|a_q|(n-q)^{n-q}} \sum_{l=0}^q |a_l|(n-q+1)^{n-l} + 1, \quad |t| < 1,
 \end{aligned}$$

$t \in [0, 1]$ ,  $\alpha > \max \left\{ 1, |a_q|^{-1} \left( \sum_{l=0}^q |a_l| \right) \right\}$ ,  $a_l$  — коэффициенты многочлена  $\det(\mu L - M)$ ,  $q \leq n$  — его степень. Обоснование именно такого выбора  $k \in \mathbb{N}$  см. в [8]. Вектор  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  тот же, что и в разд. 1, в дальнейшем предполагается фиксированным.

Алгоритм построен в предположении о том, что известны только частоты резонансов  $\omega_i$ , причем возникающие как в  $i$ -х цепях ИУ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , так и на  $i$ -х выходах ИУ,  $i = r+1, r+2, \dots, r+m$ , а амплитуды резонансов неизвестны.

По данным натурного эксперимента при нулевом значении входящего сигнала проводится их интерполярование с использованием тригонометрического ряда  $\sum_{j=0}^{\infty} \nu_j \sin \varphi_j t$ . В качестве  $\varphi_j$  принимаются значения частот резонансов  $\omega_j$  и другие, близкие по значению к ним, так как частоты резонансов известны не точно. На основании результатов интерполяции находятся значения  $\bar{z}_0$  и  $\bar{z}_0^l$  в узлах квадратурной формулы Гаусса.

По данным натурного эксперимента с неизвестным входящим сигналом проводится их интерполирование полиномом Лагранжа, определяется вид  $z_0(t)$ . Затем определяется значение этой функции и ее производной в узлах квадратурной формулы Гаусса.

Прежде всего заметим, что  $u^\ell(t)$  будем искать в виде

$$u^l = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\ell} a_{1j} \sin jt + a_{\omega_1} \sin \omega_1 t \\ \sum_{j=0}^{\ell} a_{2j} \sin jt + a_{\omega_2} \sin \omega_2 t \\ \dots \\ \sum_{j=0}^{\ell} a_{rj} \sin jt + a_{\omega_r} \sin \omega_r t \\ a_{\omega_{k+1}} \sin \omega_{r+1} t \\ a_{\omega_{k+2}} \sin \omega_{r+2} t \\ \dots \\ a_{\omega_{k+m}} \sin \omega_{r+m} t \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $\ell \in \mathbb{N}$ . По построению пространство  $\mathfrak{U}$  сепарабельно, значит, существует последовательность  $\{\mathfrak{U}^\ell\}$  конечномерных подпространств  $\mathfrak{U}^\ell \subset \mathfrak{U}$ , монотонно исчерпывающих пространство  $\mathfrak{U}$ , т. е.  $\mathfrak{U}^\ell \subset \mathfrak{U}^{\ell+1}$  и  $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \mathfrak{U}^\ell$  плотно в  $\mathfrak{U}$ . Поэтому ввиду первого слагаемого в формуле (8) необходимо брать  $\ell$  таким, что  $\ell > p$ . Теперь подставим  $u^\ell$  в (7) и после всех вычислений результат подставим в функционал (9), получим  $J^\ell = J^\ell(a)$ . Затем, подставив  $z_k(v_k^l, t)$  вида (10) в (9), получим  $J_k^\ell = J_k^\ell(a)$  с искомым вектором коэффициентов

$$a = (a_{10}, \dots, a_{1\ell}, a_{\omega_1}, \dots, a_{r0}, \dots, a_{r\ell} a_{\omega_r}, a_{\omega_{r+1}}, \dots, a_{\omega_{r+m}}).$$

Функционал  $J^\ell$  задан на конечномерном пространстве, изоморфном  $\mathfrak{U}^\ell$ .

Обратимся к множеству допустимых измерений  $\mathfrak{U}_\partial$ . Как правило, в приложениях оно не только замкнуто и выпукло, но еще и ограничено. Пусть множество  $\mathfrak{U}_\partial$  замкнуто, выпукло и ограничено, тогда существует последовательность выпуклых компактов  $\{\mathfrak{U}_\partial^\ell\}$ ,  $\mathfrak{U}_\partial^\ell \subset \mathfrak{U}^\ell$ , монотонно исчерпывающая множество  $\mathfrak{U}^\ell$ . В наших рассмотрениях можно построить выпуклый компакт в множестве векторов  $\{a\}$ , изоморфный множеству  $\mathfrak{U}_\partial^\ell$ . В дальнейшем удобно обозначить построенный компакт

тем же символом  $\mathfrak{U}_\partial^\ell$ . Далее, функционал  $J^\ell$  непрерывен на  $\mathfrak{U}^\ell$  по построению, поэтому в силу теоремы Вейерштрасса он будет иметь минимум  $v^\ell$  на  $\mathfrak{U}_\partial^\ell$ . Подставив коэффициенты найденного минимума в (11), получим  $v_k^\ell$ . Найденное таким образом  $v_k^\ell$ , т. е.  $J(v_k^\ell) = \min_{u^\ell \in \mathfrak{U}_\partial^\ell} J_k(u^\ell)$  назовем *приближенным решением задачи оптимального измерения с учетом резонансов*.

### 3. Сходимость приближенных решений

Учитывая общность постановок исследуемых задач, достаточно показать сходимость приближенных решений задачи оптимального измерения.

**Лемма 1.** Пусть матрица  $M$   $(L, p)$ -регулярна,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  и  $\det M \neq 0$ , а множество  $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$  компактно и выпукло. Тогда функционал из (9) является сильно выпуклым на  $\mathfrak{U}_\partial$ , т. е. для любых  $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}_\partial$  существует такое  $T > 0$ , что для любого  $\gamma \in [0, 1]$  выполняется неравенство

$$J(\gamma u_1 + (1 - \gamma)u_2) \leq \gamma J(u_1) + (1 - \gamma)J(u_2) - \gamma(1 - \gamma)T\|u_1 - u_2\|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1 основывается на тождественных преобразованиях, непрерывности  $J(u)$ , выпуклости и компактности  $\mathfrak{U}_\partial$  при оценке  $T$ .

**Лемма 2.** Пусть матрица  $M$   $(L, p)$ -регулярна,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ,  $\det M \neq 0$ . Тогда  $v^\ell$  — минимизирующая значение функционала из (9) последовательность на компактном и выпуклом множестве  $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$  и  $v^\ell \rightarrow v$  при  $\ell \rightarrow \infty$ , при этом  $J(v^\ell) \rightarrow J(v)$  и существует  $T > 0$ , для которого выполняется неравенство  $T\|v^\ell - v\|^2 \leq J(v^\ell) - J(v)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем последовательность  $\{\mathfrak{U}^\ell\}_{\ell=1}^\infty$  конечномерных подпространств пространства  $\mathfrak{U}$  такую, что  $\mathfrak{U}^\ell \supset \mathfrak{U}^k$  при  $\ell \leq k$ ,  $\mathfrak{U}^\ell \cap \mathfrak{U}_\partial \neq \emptyset$  при всех  $\ell \in \mathbb{N}$  и  $\bigcup_{\ell=1}^\infty \mathfrak{U}^\ell$  плотно в  $\mathfrak{U}$ . Например, все эти требования выполнены для вектор-функций из (11).

Из выпуклости и компактности множества  $\mathfrak{U}_\partial$  следует существование последовательности  $\{\mathfrak{U}_\partial^\ell\}$  конечномерных множеств, являющихся

выпуклыми компактами  $\overline{\mathfrak{U}_\partial^\ell} \subset \mathfrak{U}$  и монотонно исчерпывающих  $\mathfrak{U}_\partial$ , т. е.  $\overline{\mathfrak{U}_\partial^\ell} \subset \mathfrak{U}_\partial^{\ell+1}$  и  $\bigcup_{\ell=p+1}^{\infty} \mathfrak{U}_\partial^\ell = \mathfrak{U}_\partial$ . Следовательно,  $J(v^{\ell+1}) \leq J(v^\ell)$ , а значит, для последовательности  $\{v^\ell\}$  существует предел  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} J(v^\ell)$ , равный  $J(v)$  в силу непрерывности функционала из (9).

Таким образом, последовательность  $\{v^\ell\}$  является минимизирующей.

По теореме Мазура компактное выпуклое множество слабо компактно, т. е.  $\mathfrak{U}_\partial$  слабо компактно. Учитывая, что функционал определен и ограничен на слабо компактном множестве, получаем, что по теореме Вейерштрасса минимизирующая последовательность  $\{v^\ell\}$  слабо сходится к  $v$ .

Воспользуемся теоремой о сильно выпуклой и полунепрерывной снизу функции на выпуклом компактном множестве (или обобщением теоремы Вейерштрасса), в силу которой последовательность  $\{v^\ell\}$  сходится при  $\ell \rightarrow \infty$  к  $v$  по норме пространства  $\mathfrak{U}$  так, что выполняется неравенство  $T\|v^\ell - v\|^2 \leq J(v^\ell) - J(v)$ .

**Лемма 3.** Пусть матрица  $M$  ( $L, p$ )-регулярна,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ,  $\det M \neq 0$ . Тогда  $v_k^\ell$  является минимизирующей значение функционала  $J_k(v_k^\ell)$  последовательностью на компактном выпуклом множестве  $\mathfrak{U}_\partial^\ell \subset \mathfrak{U}_\partial$  и  $v_k^\ell \rightarrow v^\ell$  при  $k \rightarrow \infty$  и фиксированном  $\ell > p$ , так что  $v_k^\ell \rightarrow v^\ell$  по норме  $\mathfrak{U}^\ell$ . При этом  $J_k(v_k^\ell) \rightarrow J(v^\ell)$  и существует  $T > 0$ , для которого выполняется неравенство  $T\|v_k^\ell - v^\ell\|^2 \leq J_k(v_k^\ell) - J(v^\ell)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу того, что функционалы  $J_k(u)$  и  $J(u)$  непрерывны и ограничены на  $\mathfrak{U}_\partial^\ell$ , справедливо неравенство

$$|\inf J_k(u) - \inf J(u)| \leq \sup |J_k(u) - J(u)|.$$

Стало быть, последовательность  $\{v_k^\ell\}$  является минимизирующей при  $k \rightarrow \infty$  и сходится к  $v^\ell$  так, что  $J_k(v_k^\ell) \rightarrow J(v^\ell)$  при  $\ell > p$ .

Так как по лемме 1 функционал  $J_k(v)$  является сильно выпуклой непрерывной функцией на выпуклом компактном множестве  $\mathfrak{U}_\partial^\ell$ , по теореме о сильно выпуклой и полунепрерывной снизу функции на выпуклом замкнутом множестве последовательность  $\{v_k^\ell\}$  сходится к  $v^\ell$

по норме в  $\mathfrak{U}$  и справедливо неравенство

$$T\|v_k^\ell - v^\ell\|^2 \leq J_k(v_k^\ell) - J(v^\ell).$$

**Теорема 2.** Пусть матрица  $M$   $(L, p)$ -регулярна,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ,  $\det M \neq 0$ . Пусть  $(z, v)$  точное, а  $(z_k^\ell, v_k^\ell)$  — приближенное решения задачи оптимального измерения (7)–(9) на выпуклом компактном множестве  $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$ . Тогда для любых  $z_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{Y}$  последовательность  $\{v_k^\ell\}$  сходится к  $v$  по норме в  $\mathfrak{U}$ , а последовательность  $\{z_k^\ell\}$  сходится к  $z = z(v)$  по норме в  $\mathfrak{Z}$  при  $k \rightarrow \infty$ ,  $\ell \rightarrow \infty$  так, что  $J_k(v_k^\ell) \rightarrow J(v)$ , причем существует  $T > 0$ , для которого выполняется неравенство

$$T\|v_k^\ell - v\|^2 \leq J_k(v_k^\ell) - J(v).$$

### Заключение

В статье рассмотрен новый подход к восстановлению динамически искаженных сигналов с использованием методов теории оптимального управления. Приведены постановка задачи оптимальных измерений, доказано существование и единственности решения этой задачи, представлены алгоритм ее численного решения и результаты вычислительного эксперимента.

В качестве дальнейших направления исследований выделим следующие: проведение вычислительных экспериментов для оценки эффективности алгоритма программы, использование данного метода для решения задачи восстановления динамически искаженных сигналов с учетом «шумов».

Автор выражает признательность проф. А. Л. Шестакову, Г. А. Свиридику и А. В. Келлер за консультации при написании статьи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2010. № 16. вып. 5. С. 116–120.
2. Shestakov A. L., Sviridyuk G. A. Optimal measurement of dynamically distorted signals // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2011. № 17. вып. 8. С. 70–75.
3. Свиридюк Г. А., Брычев С. В. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа // Изв. вузов. Математика. 2003. № 8. С. 46–52.

4. Свиридов Г. А. Задача Коши для линейного сингулярного операторного уравнения типа Соболева // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2168–2171.
5. Свиридов Г. А., Загребина С. А. Задача Шоултера — Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2010. Т. 3. № 1. С. 104–125.
6. Келлер А. В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой уравнений с начальными условиями Шоултера — Сидорова // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2008. № 27. С. 50–56.
7. Шестаков А. Л., Келлер А. В., Назарова Е. И. Численное решение задачи оптимального измерения // Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 107–115.
8. Келлер А. В., Назарова Е. И. Свойство регуляризуемости и численное решение задачи динамического измерения // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2010. № 16. С. 32–38.
9. Шестаков А. Л. Измерительный преобразователь динамических параметров с итерационным принципом восстановления сигнала // Приборы и системы управления. 1992. № 10. С. 23–24.
10. Келлер А. В., Захарова Е. В. Задача оптимального измерения с учетом резонансов: алгоритм программы и вычислительный эксперимент // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2012. № 27. Вып. 13. С. 58–68.
11. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semi-groups of operators. Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.
12. Плеханова М. В. Оптимальное управление распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск, 2006.

г. Челябинск

5 октября 2013 г.

УДК 517.925.41:519.833

СОЗДАНИЕ ОХРАНЯЕМОЙ ТЕРРИТОРИИ:  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ  
ПОПУЛЯЦИИ И ОЦЕНКА ЗАТРАТ

М. Д. Васильев, М. П. Григорьев,  
Ю. И. Трофимцев

Рассмотрим влияние создания охраняемой территории на динамику популяции при наличии добычи на неохраняемой части, а также оценим затраты на природоохранные мероприятия. При этом величину добычи будем считать случайной величиной.

Пусть система двух дифференциальных уравнений с параметрами описывает развитие популяции одновременно на охраняемой территории и вне ее:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = gx(t) + d_1(s)(y(t) - x(t)) - f(x, \omega), \\ \frac{dy}{dt} = ay(t) + d_2(s)(x(t) - y(t)) - cy^2(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x(t)$  и  $y(t)$  — плотности некоторой популяции вне охраняемой территории и внутри нее,  $f(x, \omega) = h(\omega)x(t) + b(\omega)$  — функция, описывающая добычу популяции на неохраняемой территории,  $h(\omega)$ ,  $b(\omega)$  — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{I}, P)$ ,  $a$  и  $g$  — коэффициенты прироста популяции вне охраняемой территории и внутри нее,  $c$  — коэффициент конкуренции внутри популяции на охраняемой территории,  $d_1(s)$  и  $d_2(s)$  — коэффициенты обмена особями между охраняемой территорией и остальной частью ареала популяции,  $s$  — доля заповедной территории. Коэффициент  $g$  — любое действительное число, все остальные коэффициенты неотрицательны.

Слагаемое  $h(\omega)x(t)$  в функции добычи  $f(x, \omega)$  интерпретируется как величина плановой добычи популяции, а слагаемое  $b(\omega)$  — как величина браконьерской добычи. Как показано в [1], выбранный вид

---

© 2013 Васильев М. Д., Григорьев М. П., Трофимцев Ю. И.

плановой добычи не приводит к возникновению бифуркаций в системе уравнений (1).

Существование решений системы дифференциальных уравнений (1) обеспечивают выполнение условий теоремы существования и единственности решения задачи Коши на  $\mathbb{R}^3 \times \Omega$  и измеримость коэффициентов  $h(\omega)$ ,  $b(\omega)$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\text{Im}$ .

Построим фазовые портреты траекторий системы (1), предполагая, что  $g-h > 0$  и коэффициент  $a$  удовлетворяет неравенству  $a > g-h$ . Данные соотношения следуют из естественно-научного смысла задачи.

Основным методом решения поставленной задачи является исследование устойчивости по первому приближению особых точек системы дифференциальных уравнений [2].

Устойчивость системы (1) полностью изучена в работах [3–5] при  $f(x, \omega) = b(\omega)$  (в [5]  $a < g$ ).

Пусть  $(x_1, y_1)$  — особая точка системы (1), лежащая в первой четверти:  $x_1 \geq 0$ ,  $y_1 \geq 0$ . Рассмотрим соответствующую линейную систему для (1):

$$\begin{cases} \dot{x} = (g - h - d_1)x + d_1y, \\ \dot{y} = d_2x + (a - d_2 - 2cy_1)y. \end{cases} \quad (2)$$

Характеристическое уравнение системы (2)

$$\lambda^2 - (g - h - d_1 + a - d_2 - 2cy_1)\lambda + (g - h - d_1)(a - d_2 - 2cy_1) - d_1d_2 = 0 \quad (3)$$

имеет дискриминант

$$D = (g - h - d_1 - a + d_2 + 2cy_1)^2 + 4d_1d_2 \geq 0. \quad (4)$$

Тогда в системе (1) нет особых точек типа фокуса и центра.

Коэффициент  $b(\omega)$  не меняет фазовых портретов траекторий системы, он перемещает особую точку по плоскости. Пусть в (1)  $b(\omega) = 0$  для почти всех  $\omega$ . В этом случае имеем две особые точки — начало координат и вторую с координатами

$$x = \frac{d_1y}{d_1 - g + h}, \quad y = \frac{a}{c} + \frac{(g - h)d_2}{(d_1 - g + h)c}. \quad (5)$$

Рассмотрим три возможных случая.

1. При  $d_1 - (g - h) = 0$  есть только одна особая точка  $(0, 0)$  и характеристическое уравнение линеаризованной системы

$$\lambda^2 - (a - d_2)\lambda - d_1d_2 = 0$$

имеет действительные корни разных знаков

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a - d_2 \pm \sqrt{(a - d_2)^2 + 4d_1d_2}).$$

Особая точка  $(0, 0)$  — седло.

2. При  $d_1 - (g - h) < 0$  система также имеет в первой четверти только особую точку  $(0, 0)$ , тип которой определяется знаками корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 - [(g - h - d_1) + (a - d_2)]\lambda + (g - h - d_1)(a - d_2) - d_1d_2 = 0, \quad (6)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(g - h - d_1) + (a - d_2) \pm \Delta, \quad (7)$$

где

$$\Delta = \sqrt{[(g - h - d_1) + (a - d_2)]^2 - 4[(g - h - d_1)(a - d_2) - d_1d_2]}.$$

Дискриминант характеристического уравнения приводится к виду

$$\Delta = [(g - h - d_1) - (a - d_2)]^2 + 4d_1d_2 > 0,$$

следовательно, корни уравнения — действительные числа.

Преобразуем в дискриминанте вычитаемое:

$$(g - h - d_1)(a - d_2) - d_1d_2 = (a - d_2)(g - h) - d_1a.$$

В зависимости от знака полученного выражения возможны следующие варианты.

(а)  $(a - d_2)(g - h) - d_1a > 0$ . Сводя последнее неравенство к виду  $(a - d_2)(g - h) > d_1a$ , получим  $a - d_2 > 0$ . Тогда  $(g - h - d_1) + (a - d_2) > 0$ . Также

$$\Delta < (g - h - d_1) + (a - d_2).$$

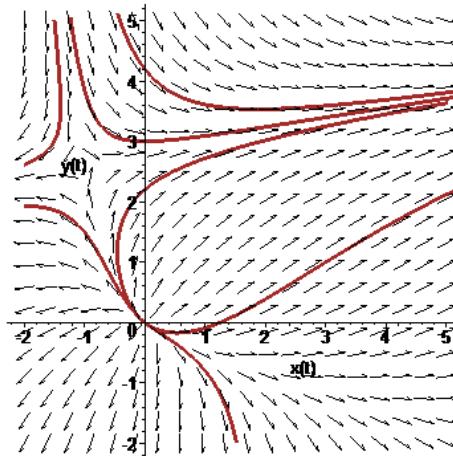


Рис. 1. Особая точка  $(0; 0)$  — неустойчивый узел  
( $b = 0$ ,  $c = 1.5$ ,  $a = 6$ ,  $g - h = 5$ ,  $d_1 = 1.4$ ,  $d_2 = 1.5$ ).

Значит, оба корня характеристического уравнения положительны, и особая точка  $(0, 0)$  является неустойчивым узлом (рис. 1).

(б)  $(a - d_2)(g - h) - d_1 a < 0$ . Из неравенства

$$\Delta > (g - h - d_1) + (a - d_2) \quad (8)$$

получаем, что корни характеристического уравнения имеют разные знаки. Начало координат — седло.

(в)  $(a - d_2)(g - h) - d_1 a = 0$ . Имеем корни характеристического уравнения  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = (g - h - d_1) + (a - d_2) > 0$ , и особая точка  $(0, 0)$  будет вырожденным узлом.

3. При  $d_1 - (g - h) > 0$  в первой четверти две особые точки. Начало координат является седлом, что следует из выражений (6)–(8). Во второй особой точке имеем устойчивый узел.

Пусть все коэффициенты системы не равны нулю. В этом случае система (1) имеет особые точки тех же типов, что и в случае, рассмотренном выше. Однако они могут переместиться из первой четверти.

Рассмотрим уравнения для нахождения особых точек:

$$\begin{cases} (g-h)x + d_1(y-x) - b = 0, \\ ay + d_2(x-y) - cy^2 = 0. \end{cases}$$

Особые точки — точки пересечения прямой

$$x = \frac{d_1 y}{d_1 - g + h} - \frac{b}{d_1 - g + h} \quad (9)$$

и параболы

$$x = \frac{c}{d_2} y^2 + \frac{d_2 - a}{d_2} y = \frac{c}{d_2} \left( y + \frac{d_2 - a}{2c} \right)^2 - \frac{(d_2 - a)^2}{4cd_2}. \quad (10)$$

В зависимости от знаков разностей  $d_1 - (g-h)$  и  $d_2 - a$  имеем следующие возможности.

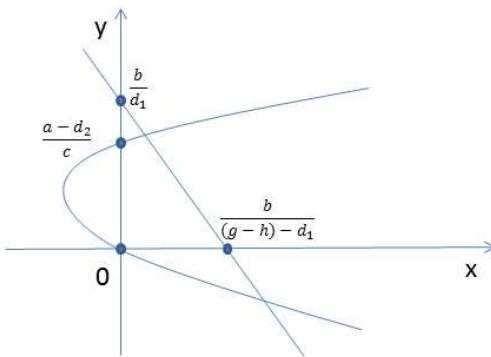


Рис. 2.

1)  $d_1 - (g-h) = 0$ . Система (1) имеет особую точку с координатами

$$x = \frac{b(d_2 - a)}{d_1 d_2} + \frac{c b^2}{d_1^2 d_2}, \quad y = \frac{b}{d_1}.$$

При  $d_2 - a \geq 0$  и при  $d_2 - a < 0$ ,  $b \geq \frac{d_1(a-d_2)}{c}$  особая точка — седло.  
При  $d_2 - a < 0$ ,  $b < \frac{d_1(a-d_2)}{c}$  особых точек нет.

2)  $d_1 - (g - h) < 0$ .

(а)  $d_2 - a < 0$ . Геометрически (рис. 2) получаем, что при

$$\frac{b}{d_1} \geq \frac{a - d_2}{c} \quad (11)$$

система (1) имеет одну особую точку — седло. Неравенство (11) означает, что если прямая (9) отсекает на оси  $Oy$  отрезок, больший отсекаемого параболой (10), то в первой четверти есть одна особая точка. В отличие от случая, когда  $b(\omega) = 0$  для почти всех  $\omega$  и особая точка — неустойчивый узел (см. рис. 1), здесь в первую четверть перемещается вторая особая точка — седло (рис. 3). Это означает, что при большой величине браконьерской добычи возникает возможность вымирания субпопуляций. Условие (11) гораздо проще аналогичного условия, полученного в [4]. При

$$\frac{b}{d_1} < \frac{(a - d_2)}{c}$$

особых точек нет (рис. 4).

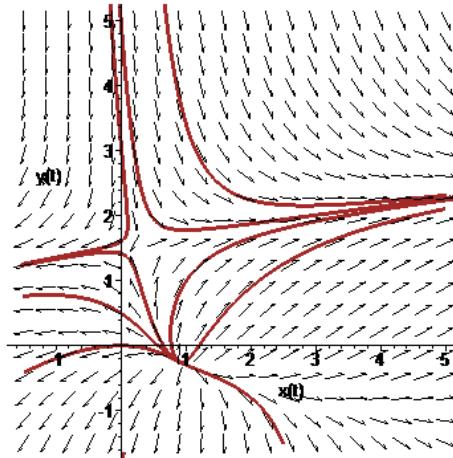


Рис. 3. Одна особая точка в первой четверти — седло  
( $b = 3, c = 3, a = 6, g - h = 5, d_1 = 1.4, d_2 = 1.5$ ).

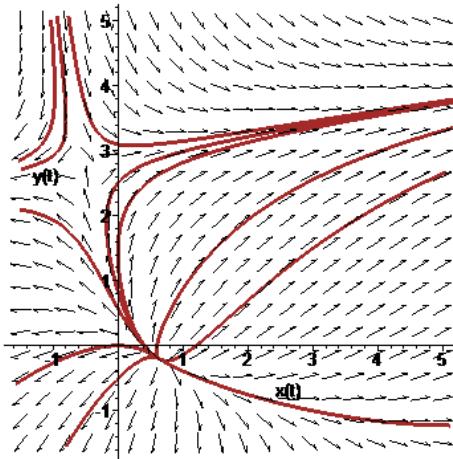


Рис. 4. Нет особых точек в первой четверти  
( $b = 2$ ,  $c = 1.5$ ,  $a = 6$ ,  $g - h = 5$ ,  $d_1 = 1.4$ ,  $d_2 = 1.5$ ).

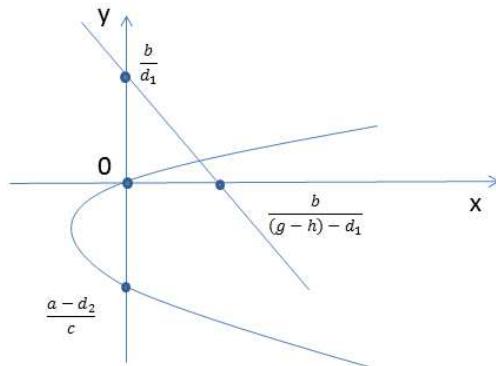


Рис. 5.

(b)  $d_2 - a > 0$ . Из расположения прямой и параболы следует, что в первой четверти всегда будет одна особая точка (рис. 5). В этом случае тип этой точки — седло.

3)  $d_1 - (g-h) > 0$ . Для определения координат особых точек имеем

уравнение

$$y^2 - \frac{ad_1 + d_2(g-h) - a(g-h)}{c(d_1 - g + h)}y + \frac{bd_2}{c(d_1 - g + h)} = 0, \quad (12)$$

координата  $x$  задается выражением (9). Дискриминант уравнения (12) равен

$$\frac{[ad_1 + d_2(g-h) - a(g-h)]^2}{4c^2(d_1 - g + h)^2} - \frac{bd_2}{c(d_1 - g + h)},$$

от его знака зависит количество особых точек. Кроме того, это количество зависит от значения разности  $d_1y - b$ , входящей в (9), причем величина  $y$  определяется из (12).

Введем обозначение

$$D = \frac{(ad_1 + d_2(g-h) - a(g-h))^2}{4cd_2(d_1 - g + h)}. \quad (13)$$

Если  $b > D$ , то у системы (1) в первой четверти нет особых точек.

Если  $b = D$ , то в первой четверти одна особая точка — седло при  $d_2 - a \geq 0$  и  $d_2 - a < 0$ ,  $(a - d_2)(d_1 - g + h) \leq d_1d_2$ .

Если  $d_2 - a < 0$ ,  $(a - d_2)(d_1 - g + h) > d_1d_2$ , то особых точек система не имеет.

Если  $b < D$ , то

- система имеет две особые точки — седло и устойчивый узел в следующих случаях:

$$d_2 - a \geq 0;$$

$$(a - d_2)(d_1 - g + h) < d_1d_2, \quad b \geq \frac{d_1(a - d_2)}{c};$$

$$(a - d_2)(d_1 - g + h) > d_1d_2,$$

$$\frac{d_1(a - d_2)}{c} < b < \frac{d_1(ad_1 + d_2(g-h) - a(g-h))}{2c(d_1 - g + h)};$$

- система имеет одну особую точку — устойчивый узел при

$$(a - d_2)(d_1 - g + h) < d_1d_2, \quad b < \frac{d_1(a - d_2)}{c};$$

$$(a - d_2)(d_1 - g + h) > d_1d_2, \quad b \leq \frac{d_1(a - d_2)}{c};$$

$$(a - d_2)(d_1 - g + h) = d_1 d_2, \quad b = \frac{d_1(ad_1 + d_2(g - h) - a(g - h))}{2c(d_1 - g + h)};$$

- особых точек системы (1) в первой четверти нет при

$$\frac{d_1(ad_1 + d_2(g - h) - a(g - h))}{2c(d_1 - g + h)} < b.$$

Рассмотрим создание охраняемой территории с сохранением добычи популяции на неохраняемой части ее ареала и возможностью существования миграции особей между охраняемой и остальной частями территории с точки зрения экономики. Эколого-экономические модели для охраняемой популяции с динамикой, описываемой линейными дифференциальными уравнениями, рассматривались в [6].

Математическая задача формулируется как неантагонистическая иерархическая игра двух лиц — управляющего центра и агента, пользователя природными ресурсами. Цели игроков заключаются в выработке оптимальных стратегий для получения максимального экономического выигрыша.

В качестве принципа оптимальности выберем равновесие по Нэшу, заключающееся в том, что ни один из игроков не может получить выгоды при одностороннем изменении своей стратегии.

Построим функции выигрыша каждого из игроков в момент времени  $t_0$ . Выигрыш управляющего центра имеет вид

$$K_0(s, h, \omega) = \begin{cases} l_1(1 - s) - l_2 s - l_3 b(\omega) - \frac{l_4 s}{1-s}(x(t_0) - y(t_0)) \\ \quad + \frac{\lambda}{1-s}(h(\omega)x(t_0) - m), & h(\omega)x(t_0) > m, \\ l_1(1 - s) - l_2 s - l_3 b(\omega) - \frac{l_4 s}{1-s}(x(t_0) - y(t_0)), \\ \quad h(\omega)x(t_0) \leq m, \end{cases} \quad (14)$$

где  $s$  — доля заповедной части территории,  $h(\omega)x(t_0)$  — величина добычи популяции в момент времени  $t_0$ ,  $l_1$  — затраты агента на использование неохраняемой территории,  $l_2$  — затраты центра на содержание охраняемой территории,  $l_3 b(\omega)$  — убыток от браконьерской добычи,  $m$  — размер оптимальной величины добычи,  $\frac{l_4 s}{1-s}(x(t_0) - y(t_0))$  — затраты на содержание части популяции, перешедшей с неохраняемой территории в заповедную зону,  $\frac{\lambda}{1-s}$  — ставка штрафа за превышение

нормы добычи, зависящая от доли  $s$  заповедной части территории: чем больше эта доля, тем выше ставка штрафа.

Выигрыш пользователя описывается функцией

$$K_1(s, h, \omega) = \begin{cases} h(\omega)x(t_0)(p - qh(\omega)x(t_0)) - l_1(1 - s) \\ -\frac{\lambda}{1-s}(b(\omega) - m), & h(\omega)x(t_0) > m, \\ h(\omega)x(t_0)(p - qh(\omega)x(t_0)) - l_1(1 - s), \\ h(\omega)x(t_0) \leq m, \end{cases} \quad (15)$$

где  $p$  — цена продажи единицы добычи,  $q$  — затраты на добычу одной единицы; они растут как квадрат добытого.

Все неравенства в (14) и (15) выполняются для почти всех  $\omega$ .

Стратегией центра является выбор оптимальной доли  $s^*$  заповедной территории, стратегией пользователя — выбор оптимальной величины добычи  $h^*x(t_0)$  с учетом поведения центра.

Набор стратегий  $(s^*, h^*)$  называется *ситуацией равновесия по Нэшу* в иерархической игре, если для любых стратегий  $s$  и  $h$  из соответствующих множеств стратегий для почти всех  $\omega$  имеют место неравенства для функций выигрыша, зависящих от случайных параметров:

$$K_0(s^*, h^*, \omega) \geq K_0(s^*, h, \omega), \quad K_1(s^*, h^*, \omega) \geq K_1(s, h^*, \omega).$$

Определение взято из [7] и дополнено.

Получаем следующее оптимальное значение  $s$ :

$$s^* = 1 - \sqrt{\frac{\lambda(h(\omega)x(t_0) - m) - l_4(x(t_0) - y(t_0))}{l_1 + l_2}}, \quad h(\omega)x(t_0) > m. \quad (16)$$

Здесь  $0 \leq s^* \leq 1$  при

$$\frac{l_4(x(t_0) - y(t_0))}{h(\omega)x(t_0) - m} \leq \lambda < \frac{l_1 + l_2 + l_4(x(t_0) - y(t_0))}{h(\omega)x(t_0) - m},$$

$s^* = 0$  при

$$\lambda \geq \frac{l_1 + l_2 + l_4(x(t_0) - y(t_0))}{h(\omega)x(t_0) - m}.$$

Если  $h(\omega)x(t_0) \leq m$ , то оптимальной величины доли охраняемой территории не существует.

Оптимальная величина добычи равна

$$h^*(\omega)x(t_0) = \begin{cases} \frac{p(1-s)-\lambda}{2q(1-s)}, & p > \frac{\lambda}{1-s}, \\ 0, & p \leq \frac{\lambda}{1-s}, \end{cases} \quad (17)$$

при  $h(\omega)x(t_0) > m$ ;  $b^*(\omega) = \frac{p}{2q}$  при  $h(\omega)x(t_0) \leq m$ .

Величина оптимальной добычи при наличии штрафов зависит от цены продажи единицы добычи: если цена продажи единицы добычи  $p$  меньше ставки штрафа  $\frac{\lambda}{1-s}$ , то промысел убыточен и нецелесообразен.

Величина  $f(x_0) = h(\omega)x(t_0) + b(\omega)$ , описывающая добычу популяции вне охраняемой территории, является случайной. Будем предполагать, что случайная величина браконьерской добычи  $b(\omega)$  равномерно распределена на отрезке  $[v, w]$ , а величина  $h(\omega)$  — нормально распределена с математическим ожиданием  $\bar{h}$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Следовательно, величина  $h(\omega)x(t_0)$  нормально распределена с математическим ожиданием  $\bar{h}x(t_0)$  и дисперсией  $\sigma^2 x^2(t_0)$ .

Тогда плотность распределения случайной величины  $f(x_0)$  имеет вид [8] (рис. 6):

$$f_1(z) = \frac{1}{w-v} \left[ \Phi\left(\frac{\bar{h}}{\sigma} + \frac{w-z}{x(t_0)\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\bar{h}}{\sigma} + \frac{v-z}{x(t_0)\sigma}\right) \right]. \quad (18)$$

Здесь  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  — функция Лапласа.

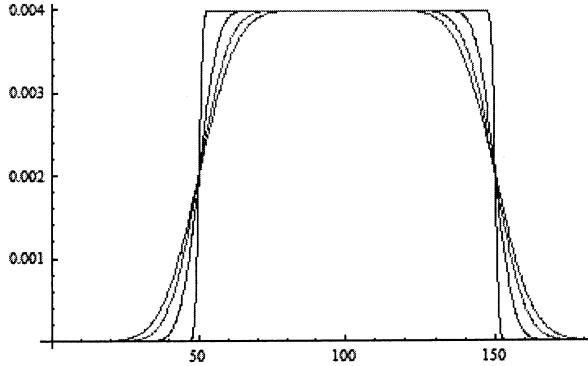


Рис. 6. Плотность распределения случайной величины  $f(x_0)$ .

Найдем плотности распределения функций выигрыша  $K_0(s, b, \omega)$  и  $K_1(s, b, \omega)$ . Плотность распределения  $K_0(s, b, \omega)$  при  $h(\omega)x(t_0) > m$  представляет собой распределение разности нормальной и равномерно распределенных случайных величин:

$$f_2(z) = \frac{1}{l_3(w-v)} \left[ \Phi\left(\frac{\bar{h}}{\sigma} - \frac{(1-s)(z+l_3v+Q)}{\lambda x(t_0)\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\bar{h}}{\sigma} - \frac{(1-s)(z+l_3w+Q)}{\lambda x(t_0)\sigma}\right) \right]. \quad (19)$$

Здесь  $\Phi(z)$  — функция Лапласа,

$$Q = \frac{1}{1-s} [\lambda m + l_4 s(x(t_0) - y(t_0))] + l_1(s-1) + l_2 s.$$

При  $h(\omega)x(t_0) \leq m$  функция выигрыша центра  $K_0(s, b, \omega)$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[-l_3w, -l_3v]$ .

Плотность распределения функции выигрыша  $K_1(s, b, \omega)$  имеет вид плотности распределения линейной функции от квадрата нормальной случайной величины (рис. 7):

$$f_3(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}q(L-z)} \exp\left\{-\frac{L-z+qA^2}{2qC^2}\right\} \operatorname{ch} \frac{A\sqrt{L-z}}{\sqrt{q}C^2}, \quad L-z > 0. \quad (20)$$

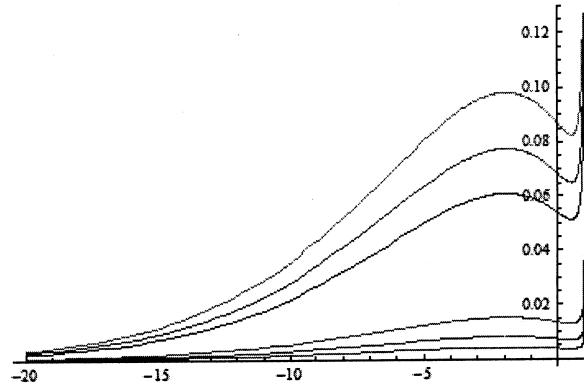


Рис. 7. Плотность распределения функции выигрыша  $K_1(s, b, \omega)$ .

В формуле (20) при  $h(\omega)x(t_0) > m$

$$A = \bar{h}x(t_0) - \frac{1}{2q} \left( p - \frac{\lambda}{1-s} \right), \quad C = x(t_0)\sigma,$$

$$L = -l_1(1-s) + \frac{1}{4q} \left( p - \frac{\lambda}{1-s} \right)^2 + \frac{\lambda m}{1-s};$$

при  $h(\omega)x(t_0) \leq m$

$$A = \bar{h}x(t_0) - \frac{p}{2q}, \quad C = x(t_0)\sigma, \quad L = -l_1(1-s) + \frac{p^2}{4q}.$$

Сравним плотности распределения функции выигрыша агента  $K_1(s, b, \omega)$  при  $f(x_0) = h(\omega)x(t_0) + b(\omega)$  и  $\bar{K}_1(s, b, \omega)$  при  $f(x) = b(\omega)$  [9]. В последнем случае предполагаем, что  $b(\omega)$  представляет собой сумму двух независимых случайных величин — равномерно распределенной на отрезке  $[v, w]$  (бреконьерская добыча) и нормально распределенной  $N(\bar{h}, \sigma)$  (плановая добыча). Тогда плотность распределения случайной величины  $b(\omega)$  имеет вид [8]:

$$f_4(z) = \frac{1}{w-v} \left[ \Phi\left(\frac{\bar{h}+w-z}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\bar{h}+v-z}{\sigma}\right) \right].$$

Выигрыш пользователя описывается функцией

$$\bar{K}_1(s, b, \omega) = \begin{cases} b(\omega)(p - qb(\omega)) - l_1(1-s) - \frac{\lambda}{1-s}(b(\omega) - m), & b(\omega) > m, \\ b(\omega)(p - qb(\omega)) - l_1(1-s), & b(\omega) \leq m, \end{cases} \quad (21)$$

Плотность распределения  $\bar{K}_1(s, b, \omega)$  имеет вид

$$f_5(z) = \frac{1}{2(w-v)\sqrt{2\pi q(L-z)}} \left[ \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{z_3}^{z_4} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]. \quad (22)$$

В формуле (22)

$$z_1 = \frac{\bar{h}+v+P}{\sigma} - \frac{\sqrt{L-z}}{\sqrt{q}\sigma}, \quad z_2 = \frac{\bar{h}+w+P}{\sigma} - \frac{\sqrt{L-z}}{\sqrt{q}\sigma},$$

$$z_3 = \frac{\bar{h}+v+P}{\sigma} + \frac{\sqrt{L-z}}{\sqrt{q}\sigma}, \quad z_4 = \frac{\bar{h}+w+P}{\sigma} + \frac{\sqrt{L-z}}{\sqrt{q}\sigma},$$

$$P = \frac{1}{2q} \left( p - \frac{\lambda}{1-s} \right) \text{ при } b(\omega) > m, P = \frac{p}{2q} \text{ при } b(\omega) \leq m.$$

Плотности для случайных величин  $K_1(s, b, \omega)$  и  $\bar{K}_1(s, b, \omega)$  приведены на рис. 8 (кривая плотности  $\bar{K}_1(s, b, \omega)$  слева). Таким образом, для величины  $\bar{K}_1(s, b, \omega)$  разброс значений будет большим во всех случаях, а затраты агента, описываемые функцией выигрыша  $\bar{K}_1(s, b, \omega)$ , существенно выше. На рис. 8 для получения характерной кривой распределения в заданном масштабе полагается, что браконьерская добыча в полтора раза больше плановой.

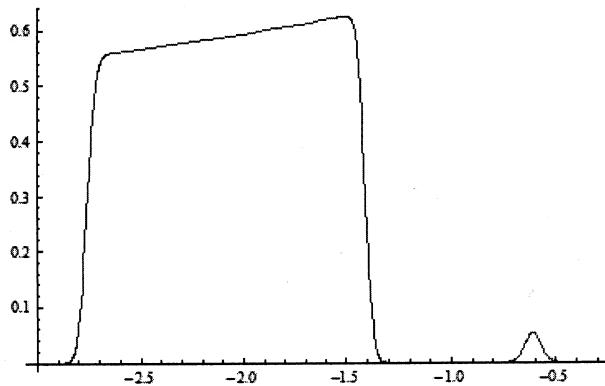


Рис. 8. Сравнение плотностей распределения случайных величин функций добычи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
2. Григорьев М. П., Половинкин Ю. Т., Романова Н. А., Софронов Е. Т., Трофимцев Ю. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Изд. 2. М.: Вузовск. кн., 2008.
3. Толстыхин О. Н., Трофимцев Ю. И. Экологический менеджмент. Новосибирск: Наука, 1998.
4. Леонов А. М., Трофимцев Ю. И. Особые точки и бифуркационные параметры модели восстановления популяции // Мат. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, № 2. С. 106–118.
5. Vasilyev M. D. The stability of ODE system in the models of dynamics // Abstr. Int. Young Scientists Conf. Mathematical Modeling. Linyi, China, May 24–25, 2010. Yakutsk: IMI YSU, 2010.
6. Мазалов В. В., Реттиева А. Н. Равновесие по Нэшу в задачах охраны окружающей среды // Мат. моделирование. 2006. Т. 18, № 5. С. 73–90.

- 
7. Петросян Л. А., Данилов Н. Н. Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985.
  8. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. М.: Сов. радио, 1974.
  9. Васильев М. Д., Трофимцев Ю. И. Эколого-экономическая модель охраняемой популяции со случайной величиной добычи // Тр. Междунар. науч. чтений «Приморские зори–2012». Вып. 1. Владивосток: Изд-во ТАНЭБ, 2012. С. 75–78.

г. Якутск

18 июня 2013 г.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ФИЛЬТРАЦИИ  
В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ\*)  
А. В. Григорьев

Большинство реальных грунтовых пород отличаются трещиновато-пористым строением. Эти особенности строения трещиновато-пористых сред отражены в соответствующих моделях теории фильтрации, которые часто называют моделями двойной пористости.

Математическое моделирование таких сред основано на идее взаимопроникающих пористых континуумов. Совокупность элементов каждого пористого континуума рассматривается как отдельная гомогенная среда, для которой записывается уравнение фильтрации, но с дополнительными слагаемыми, отвечающими обменному потоку между составляющими средами. В 1960 г. Г. И. Баренблatt, И. П. Желтов и И. Н. Кочина [1] предложили базовую модель теории фильтрации жидкостей в трещиновато-пористых породах. Трещиновато-пористая порода понимается как среда, содержащая поровые блоки, разделенные между собой системой трещин. Такие математические модели традиционно широко исследуются на основе метода конечных элементов. В этой связи можно отметить типичные работы [2, 3].

В данной работе рассмотрены классические модели двойной пористости. Мы получили из базовой модели Баренблatta упрощенную псевдопараболическую модель, которая соответствует тому, что основные фильтрационные потоки идут по трещинам, а основные запасы флюида находятся в пористых блоках. Проведено численное исследование фильтрации в трещиновато-пористых средах.

---

\*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00719А).

### 1. Постановка задачи

Обобщенная модель двойной пористости [4, 5] описывается следующей системой уравнений:

$$c_{11}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_1}{\partial t} + c_{12}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_2}{\partial t} - \operatorname{div}(d_1(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u_1) + r(\mathbf{x})(u_1 - u_2) = f_1(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

$$c_{21}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_1}{\partial t} + c_{22}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_2}{\partial t} - \operatorname{div}(d_2(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u_2) + r(\mathbf{x})(u_2 - u_1) = f_2(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

в области  $\Omega$  при  $0 < t \leq T$  с коэффициентами  $d_\alpha = k_\alpha/\mu$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Здесь  $u_\alpha$  — давление,  $k_\alpha$  — проницаемость среды,  $\mu$  — вязкость жидкости,  $c_{\alpha\beta}$  — коэффициенты пороемкости,  $r(\mathbf{x})$  — обменный переток между средами. Индекс  $\alpha = 1$  означает принадлежность трещиноватой среде,  $\alpha = 2$  — пористой.

Рассмотрим базовые допущения. Переток характеризуется тем, что

$$r(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Для коэффициентов при производных по времени имеют место соотношения

$$\begin{aligned} c_{12}(\mathbf{x}) &= c_{21}(\mathbf{x}), \\ \sum_{\alpha, \beta=1}^2 c_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \zeta_\alpha \zeta_\beta &\geq \delta_c \sum_{\alpha=1}^2 \zeta_\alpha^2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \delta_c = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Для случая  $c_{12} = c_{21} = 0$  получим модель Баренблатта [1]:

$$c_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u_1}{\partial t} - \operatorname{div}(d_1(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u_1) + r(\mathbf{x})(u_1 - u_2) = f_1(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

$$c_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u_2}{\partial t} - \operatorname{div}(d_2(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u_2) + r(\mathbf{x})(u_2 - u_1) = f_2(\mathbf{x}, t). \quad (4)$$

Начально-краевая задача ставится в ограниченной области  $\Omega$  при  $t \in (0, T]$ . Положим, например,

$$r(\mathbf{x}) \geq 0, \quad d_1(\mathbf{x}) > 0, \quad d_2(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

граничные условия возьмем в виде

$$u_\alpha(\mathbf{x}, t) = g_\alpha^d(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad t \in (0, T], \quad (5)$$

$$d_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial u_\alpha}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = g_\alpha^n(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad t \in (0, T], \quad (6)$$

где  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $n$  — внешняя нормаль к границе. Возьмем начальное условие в виде

$$u_\alpha(\mathbf{x}, 0) = u_\alpha^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \alpha = 1, 2. \quad (7)$$

Более подробно рассмотрим случай постоянных коэффициентов, а также потребуем выполнения следующих условий для правых частей:

$$f_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad \alpha = 1, 2.$$

Тип трещиноватости, при котором линейные размеры раскрытия трещин значительно превосходят характерные размеры диаметров пор, является наиболее распространенным. Так что проницаемость трещин значительно больше проницаемости пористых блоков. Объем пустотного пространства, приходящегося на трещины, значительно меньше объема, представленного порами. Поэтому коэффициент пористости трещин (отношение объема, занятого трещинами, к общему объему породы) существенно меньше коэффициента пористости блоков. Тем самым основные фильтрационные потоки идут по трещинам, а основные запасы флюида находятся в пористых блоках:

$$d_1 \gg d_2, \quad c_1 \ll c_2.$$

Сделаем систему уравнений (3), (4) безразмерной с учетом выше принятых допущений следующим образом:

$$c_1 = c, \quad d_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad d_2 = d.$$

В таком случае система примет вид

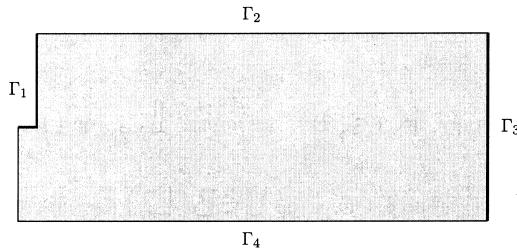
$$c \frac{\partial u_1}{\partial t} - \operatorname{div} \operatorname{grad} u_1 + r(u_1 - u_2) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - d \operatorname{div} \operatorname{grad} u_2 + r(u_2 - u_1) = 0 \quad (9)$$

с малыми параметрами  $c, d$ .

В предельном случае можно пренебречь данными параметрами. Тогда

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} u_1 + r(u_1 - u_2) = 0, \quad (10)$$

Рис. 1. Расчетная область  $\Omega$ .

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + r(u_2 - u_1) = 0. \quad (11)$$

Из уравнений (10), (11) получаем

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \gamma \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \operatorname{grad} u_1 - \operatorname{div} \operatorname{grad} u_1 = 0, \quad (12)$$

где  $\gamma = \frac{1}{r}$ . Таким образом, получаем упрощенную модель двойной пористости, которая описывается одним псевдопараболическим уравнением (12).

## 2. Модельная задача

Рассмотрим двумерную задачу в области  $\Omega$ , которая отображена на рис. 1. В рассмотренном случае граничные условия заданы в виде

$$u_\alpha(\mathbf{x}, t) = 1 - \exp(-\delta t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad u_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad (13)$$

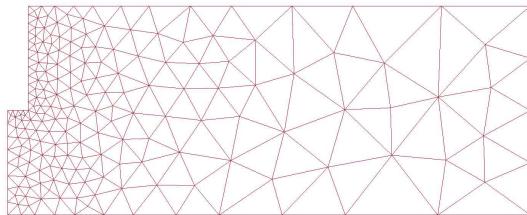
$$d_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial u_\alpha}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad t \in (0, T], \quad (14)$$

где  $\Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$ ,  $\Gamma_N = \Gamma_2 \cup \Gamma_4$ .

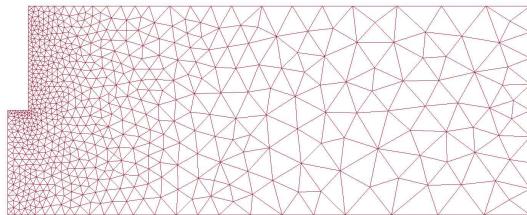
Уравнение (12) дополняется простейшим начальным условием, соответствующим отсутствию движения в трещиноватой и пористой средах:

$$u_\alpha(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \alpha = 1, 2. \quad (15)$$

В поставленной задаче (12)–(15) на части границы  $\Gamma_1$  производится процесс нагнетания (повышается давление от 0 до 1). Скорость подъема давления зависит от параметра  $\delta$ .



(a)



(b)

Рис. 2. Расчетные сетки: (a) — сетка 1, 206 узлов, 358 треугольников; (b) — сетка 2, 700 узлов, 1294 треугольника.

### 3. Вычислительный алгоритм

При поиске приближенного решения нестационарной задачи фильтрации для простоты введем равномерную сетку по времени с шагом  $\tau$ :

$$\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{T\} = \{t^n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N, \tau N = T\},$$

и обозначим  $y^n = y(t^n)$ ,  $t^n = n\tau$ . По пространству используем конечно-элементную аппроксимацию, состоящую из стандартных лагранжевых конечных элементов [3, 8] степени 2. В области  $\Omega$  проводится триангуляция. На этой расчетной сетке определим пространство конечных элементов  $V \subset H^2(\Omega)$ . При этом расчетная сетка сгущена к участкам с наибольшими градиентами решения.

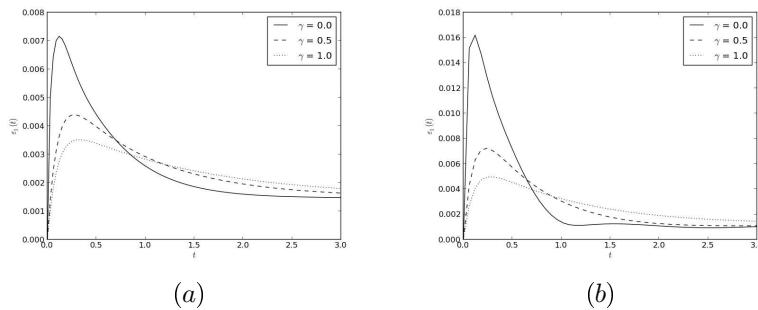


Рис. 3. Расчеты на сетке 1 с шагом  $\tau = 0.06$ : (a) —  $\varepsilon_1(t)$ , (b) —  $\varepsilon_2(t)$ .

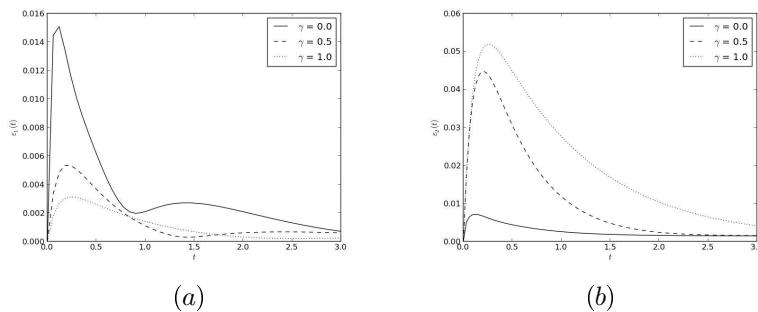


Рис. 4. Расчеты на сетке 1 с шагом  $\tau = 0.03$ : (a) —  $\varepsilon_1(t)$ , (b) —  $\varepsilon_2(t)$ .

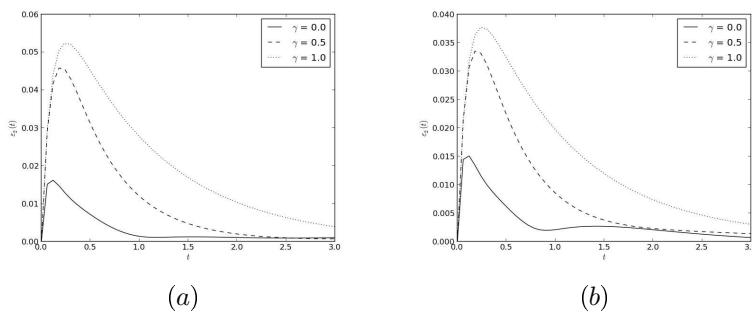


Рис. 5. Расчеты на сетке 2 с шагом  $\tau = 0.06$ : (a) —  $\varepsilon_1(t)$ , (b) —  $\varepsilon_2(t)$ .

Запишем чисто неявную схему [6] по времени для псевдопарabolического уравнения (12). Приближенное решение определяется как решение следующей вариационной задачи:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{y_1^{n+1} - y_1^n}{\tau} v \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \frac{\operatorname{grad} y_1^{n+1} - \operatorname{grad} y_1^n}{\tau} \operatorname{grad} u^{n+1} \operatorname{grad} v \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \operatorname{grad} y_1^{n+1} \operatorname{grad} v \, d\mathbf{x} = 0, \quad v \in V, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (16)$$

Найдя  $y_1$ , имеем возможность вычислить  $y_2$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{y_2^{n+1} - y_2^n}{\tau} v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} y_2^{n+1} v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} y_1^{n+1} v \, d\mathbf{x}, \\ & v \in V, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения (16), (17) дополним начальными условиями

$$\int_{\Omega} y_{\alpha}^0 v \, d\mathbf{x} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad v \in V. \quad (18)$$

В дальнейшем можно переходить к численной реализации данного вычислительного алгоритма.

#### 4. Результаты расчетов

Приведем результаты численных расчетов, которые выполнены на сетках, приведенных на рис. 2. Для оценки точности приближенного решения используется эталонное (квазиточное) решение  $\bar{u}_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , которое будет представлять решение на очень подробной сетке ( $\tau = 0.01$ , расчетная сетка содержит 10041 узлов, 19664 треугольных элемента). Контроль приближенного решения (зависимость от параметров задачи) будем проводить путем сравнения с эталонным. На рис. 3–5 показаны зависимости нормы приближенного решения

$$\varepsilon_{\alpha}(t) = \|u_{\alpha} - \bar{u}_{\alpha}\|, \quad (19)$$

где

$$\|u_{\alpha} - \bar{u}_{\alpha}\|^2 = \int_{\Omega} (u_{\alpha} - \bar{u}_{\alpha})^2 \, d\mathbf{x}, \quad \alpha = 1, 2.$$



(a)



(b)

Рис. 6. Решения в момент времени  $t = 1$ : (a) —  $u_1$ , (b) —  $u_2$ .

(a)



(b)

Рис. 7. Решения в момент времени  $t = 3$ : (a) —  $u_1$ , (b) —  $u_2$ .

На рис. 6 и 7 отображены решения в моменты времени  $t = 1$  и  $t = 3$  соответственно.

На основе анализа проведенных расчетов можно сделать следующие выводы.

- Норма погрешности решения затухает при достаточно больших  $t$ . При этом решение в трещинах  $u_1$  устанавливается быстрее, нежели решение в порах  $u_2$ .
- Наблюдается сходимость численного решения к квазиточному как по пространству (со вторым порядком), так и по времени (с первым порядком).
- Точность приближенного решения слабо зависит от параметра псевдопараболичности  $\gamma$  и является максимальной при  $\gamma = 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Barenblatt G. I., Zheltov I. P., Kochina I. N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [Strata] // J. Appl. Math. Mech. 1960. V. 24. P. 1286–1303.
2. Callari C., Federico F. Fem validation of a double porosity elastic model for consolidation of structurally complex clayey soils, International journal for numerical and analytical methods in geomechanics // 2000. V. 24. P. 367–402.
3. Gallagher R. H. Finite element analysis: fundamentals. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1975.
4. Lewallen K. T., Wang H. F. Consolidation of a double-porosity medium // Intern. J. Solids and Structures. 1998. V. 35. P. 4845–4867.
5. Maryska J., Severyn O., Tauchman M., Tondr D. Modelling of processes in fractured rock using fem/fvm on multidimensional domains // J. Comput. Appl. Math. 2008. V. 215. P. 495–502.
6. Samarskii A. A. The theory of difference schemes. CRC, 2001.
7. Wang H. Theory of linear poroelasticity: with applications to geomechanics and hydrogeology. Princeton: Princeton Univ. Press, 2000.
8. Zienkiewicz O. C., Morgan K. Finite elements and approximation, Courier Dover Publications, 2006.

РАЗРАБОТКА МОДУЛЯ ПО СОЗДАНИЮ  
УПРОЩЕННОЙ СТРУКТУРНОЙ  
3D МОДЕЛИ НЕФТИНОГО ПЛАСТА  
Ю. М. Григорьев, М. В. Харбанов

Для повышения эффективности бурения новых скважин (ВНС) и зарезки боковых стволов (ЗБС) требуются разные виды исследований. Одним из таких исследований является геолого-гидродинамическое моделирование на специализированных программных продуктах. Такое моделирование целесообразно проводить в районах интенсивной добычи, где есть неопределенности с уровнем водо-нефтяного контакта (ВНК), а также в районах, где есть нагнетательные скважины, с целью определения границ фронта нагнетательных вод (ФНВ).

Геолого-гидродинамическое моделирование имеет свои преимущества перед другими видами исследований и свои недостатки. К преимуществам можно отнести маленькие экономические затраты на исследование: не требуется остановки скважин, т. е. отсутствует простояивание работающего фонда, а также не требуется мобилизации многочисленных человеческих ресурсов и техники. К недостаткам же относится то, что требуются специалисты со знанием работы на геологическом и гидродинамическом ПО, а при их отсутствии возникает сложность с приобщением других работников к моделированию в связи со сложностью геологических и гидродинамических ПО для восприятия и освоения. Также одним из недостатков является то, что для исследования одного региона требуется относительно большое время, что не позволяет исследовать с помощью моделирования достаточное количество кандидатов в ЗБС и ВНС. Перечисленные недостатки приводят к отказу от моделирования как одного из видов исследования для обоснования бурения ЗБС или ВНС. Поэтому с целью устранения сложности

в построении геологической модели пласта, а также чтобы оптимизировать время создания модели, в данной работе разработан модуль для создания упрощенной структурной 3D модели пласта по скважинным данным. Такая простая 3D модель пласта может понадобиться для быстрой оценки дебита, его прогноза, границ ФНВ, а также для исследовательских работ, в частности, при исследовании добычи в условиях конусообразования воды [1].

Для построения этой модели в разработанном модуле используется интерполяция глубин кровли коллектора и его мощности с помощью геостатистического метода — обыкновенного кrigинга [2–6].

### **1. Методика интерполяции данных с помощью обыкновенного кrigинга**

Для построения структурной 3D модели пласта по данным в скважинах необходимо, в первую очередь, по известным глубинам кровли коллектора в скважинах проинтерполировать глубины по всей области с тем, чтобы получить карту кровли коллектора. Затем точно так же проинтерполировать мощность коллектора. С помощью этих данных и создается 3D сетка пласта для дальнейшего использования в гидродинамическом симуляторе. При выборе метода интерполяции рассмотрим наиболее известные методы: метод обратных взвешенных расстояний (ОВР), метод поверхности тренда и кrigинг [6].

В методе обратных взвешенных расстояний [6] точки, находящиеся ближе к тем, в которых производится оценивание, оказывают большее влияние по сравнению с удаленными точками. Вес точки уменьшается как функция от расстояния. Таким образом достигается внос большего вклада более близких точек в определение интерполируемого значения по сравнению с более удаленными точками. Но в случае неравномерно расположенных точек данных метод может давать не совсем корректные результаты из-за того, что будет слишком мало или наоборот слишком много значений в некоторой окрестности по сравнению с другими.

В методе поверхности тренда [6] строится поверхность наилучшего приближения на основе математических уравнений таких, как полиномы или сплайны. Для этого используется правило наименьших квад-

ратов. Поверхность тренда может быть разных порядков. Это определяется в зависимости от типа использованного уравнения, который, в свою очередь, показывает величину волнистости поверхности. Чем сложнее поверхность тренда, тем больший порядок она имеет. Недостатком этого метода является то, что при небольшом количестве точек данных экстремальные значения могут довольно существенно влиять на параметры уравнения, а полученные поверхности очень подвержены краевым эффектам (полиномы высоких порядков способны резко менять направление возле границ области построения и приводить к нереальным результатам).

Кригинг [2–6] оптимизирует процедуру интерполяции на основе статистической природы поверхности. Кригинг схож с интерполяцией ОВР, он определяет вес окружающих измеренных точек, чтобы вычислить искомое значение в неизмеренной ячейке. Точки, которые располагаются ближе к оцениваемой ячейке, имеют большее влияние. Но присвоение веса окружающим точкам в методе кригинга немногого усложнено по сравнению с методом ОВР. В обычном кригинге вес зависит от модели вариограммы, расстояния до оцениваемой точки и пространственного распределения точек данных вокруг оцениваемой точки, в результате учитываются не только расстояния от интерполируемой точки, но и расстояние между самими точками так, что вес более близких друг к другу точек уменьшается. Существует два основных вида кригинга. Универсальный кригинг используется тогда, когда поверхность оценивается по неравномерно распределенным отсчетам при наличии тренда. Обыкновенный кригинг — более широко используемый метод кригинга. Основой данного метода является предположение, что постоянное среднее значение неизвестно. В универсальном кригинге предполагается, что в данных имеется какая-либо доминирующая тенденция, которую можно смоделировать с помощью детерминистической полиномиальной функции. Универсальный кригинг применяется тогда, когда вы знаете, что в данных существуют определенные тенденции, и способны провести научное описание для их подтверждения. Преимуществом кригинга является то, что он дает не только интерполированные значения, но и оценку возможной ошибки этих значений, а также обеспечивает реализацию с наименьшей дис-

версии.

Рассмотрев главные методы интерполяции, для методики построения структурной модели пласта по скважинным данным мы выбрали метод обыкновенного кригинга.

**1.1. Основные понятия и допущения при использовании метода кригинга.** При интерполяции методом кригинга случайной переменной  $Z(x)$  важным понятием является ковариация значений этой переменной, взятых с интервалом  $\Delta x$ . Это будет функция интервала  $\Delta x$ , показывающая, в какой степени значения переменной, разделенные интервалом  $\Delta x$ , имеют склонность находиться по одну сторону от среднего [2–5]:

$$\begin{aligned} Cov[Z(x), Z(x + \Delta x)] \\ = E[(Z(x) - m_z)(Z(x + \Delta x) - m_z)] = C(\Delta x), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m_z$  — среднее значение случайной переменной  $Z(x)$ , литер  $E$  означает среднее по  $x$ . Однако пользоваться ковариацией несколько проблематично, поскольку необходимо знать среднее  $m_z$ . Поэтому удобнее пользоваться несколько иной характеристикой изменчивости — вариограммой  $\gamma(h)$ , которая есть половина среднего квадрата разности значений в точках, разделенных расстоянием  $h$ . Вариограмму можно рассчитать прямо из данных [2–5]:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}E[(Z(x + h) - Z(x))^2]. \quad (2)$$

Вариограмма  $\gamma(h)$  имеет вид возрастающей функции и используется для составления системы уравнений для интерполяции. Чтобы определить вариограмму по скважинным данным, для каждой пары точек на площасти рассчитывается расстояние  $h$  между ними и половина квадрата разности значений параметра, что дает нам одну точку в координатах расстояние — квадрат параметра. Все множество таких точек (отображающее все возможные пары) называют *вариограммным облаком* (см. маленькие точки на рис. 1). Затем горизонтальная ось  $h$  разбивается на одинаковые интервалы, и для каждого интервала усредняются вертикальные координаты попавших в него точек обла-

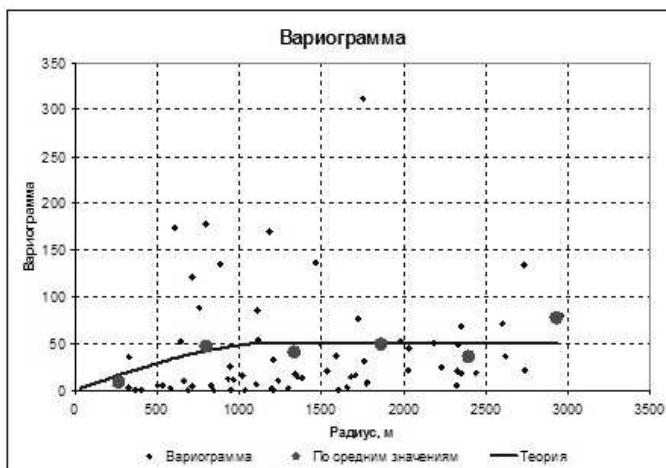


Рис. 1. Характерный вид вариограммы.

ка. Точки с усредненными координатами определяют так называемую *экспериментальную вариограмму* (жирные точки на рис. 1).

Для экспериментальной вариограммы подбирается математическая модель (сплошная линия на рис. 1). Если вариограмма при больших  $h$  выходит на постоянный уровень, то это свидетельствует о стационарности случайной переменной. При этом максимальный уровень вариограммы называется ее *порогом*. Порог вариограммы равен дисперсии случайной переменной. Стоит отметить, что кригингом можно пользоваться только тогда, когда переменная стационарна, т. е. ее вариограмма выходит на плато. Расстояние, на котором вариограмма достигает порога, называется *радиусом вариограммы*. Радиус дает информацию о пространственном размере области корреляции данных. Предел вариограммы при стремлении  $h$  к нулю называется *эффектом самородков*. Данный термин пришел из рудной геостатистики, но в наших условиях он выражает случайную ошибку измерений параметра. Наконец, одной из ключевых характеристик является кривизна вариограммы на начальном участке. Она выражает то, насколько гладкими (или, наоборот, резкими) являются изменения параметра в простран-

стве. Основными математическими моделями вариограмм являются сферическая, экспоненциальная, гауссовская и кубическая.

**1.2. Система уравнений для обыкновенного кригинга.** Выразим значение случайной переменной  $Z(x)$  в точке  $x_0$  через известные значения  $Z(x)$  [2–5]:

$$Z(x_0) = \sum \lambda_i Z(x_i), \quad (3)$$

где  $\lambda_i$  — весовые коэффициенты. В этом случае система уравнений обыкновенного кригинга имеет вид [2–5]:

$$\begin{vmatrix} C(0) & C_{12} & \dots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C(0) & \dots & C_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C(0) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ \dots \\ C_{n0} \\ 1 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где  $C_{ij}$  — ковариация случайной переменной  $Z(x)$  в точках  $i$  и  $j$ , которая, в свою очередь, находится с помощью вариограммы [2–5]

$$C_{ij} = C(0) - \gamma(h), \quad (5)$$

$C_0$  — дисперсия случайной переменной  $Z(x)$ .

Обыкновенный кригинг сам выбирает уровень, на который решение выходит при удалении от точек данных на расстояние, большее радиуса вариограммы. Это его важное преимущество. Факторами, которые учитывает кригинг, являются

- расстояние между оцениваемой точкой и данными,
- расстояние между данными,
- структура переменной, определяемая трендом,
- структура переменной, определяемая вариограммой.

## 2. Модуль по построению структурной 3D модели пласта

Модуль по построению упрощенной геологической модели пласта реализован в Excel с помощью языка программирования Visual Basic for Application и представляет собой три листа в Excel: «Входные данные по структуре», «Вариограмма Z» и «Вариограмма Нэфф».

В самом начале работы пользователю необходимо задать входные данные в листе «Входные данные по структуре» (рис. 2) — границы сетки, т. е. интересуемой области, размерность сетки и скважинные данные в виде координат скважин, вертикальных глубин кровли коллектора и мощностей.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2	Способ определения карты кровли коллектора:	Импортировать											Построить геологическую модель
3													
4													
5													
6	Данные по сетке:												
7	Границы сетки:												
8	Узлы сетки	X	Y										
9		м	м										
10	1-ая точка	136400	57800										
11	2-ая точка	140450	57800										
12	3-ая точка	136400	61650										
13													
14													
15	Пласт:	16П14											
16	Построение геологической модели по узлам:	Импорт координат скважин			Импорт входных данных								
17	Узлы	X	Y	Zkr_abs									Создать файл "Schedule"
18		м	м	м									
19	1122892	139271	59977	2697.8	8.9	15.9							
20	1109	140142	60795	2699.2	5.6	15.0							
21	11115	140041	60795	2694.5	7.3	14.1							
22	111992	1399913	600852	2691.8	8.3	16.6							
23	1118	1401113	60185	2699.5	10.0	14.9							
24	11123	140125	60285	2698.5	11.1	15.0							
25	113	140168	58887	2701.3	11.4	15.5							
26	1143	138986	58241	2688.5	8.6	15.2							
27	1144	139538	58241	2690.5	8.6	15.2							
28	1145	140092	58361	2704.9	11.6	15.2							
29	1259	140069	61272	2686.1	4.3	14.8							
30	111992	1399913	600851	2693.1	26.3	3.9							
31	2638	139775	61038	2692.8	2.4	14.1							
32													

Рис. 2. Лист «Входные данные по структуре».

После ввода входных данных пользователь переходит в лист «Вариограмма Z» (рис. 3). В этом листе пользователь должен получить модель вариограммы для глубин кровли коллектора. Для этого необходимо нажать на кнопку «Построить вариограмму глубин». При этом макрос, приписанный этой кнопке, строит вариограммное облако глубин по данным, которые введены в первом листе, находит экспериментальную вариограмму в виде больших точек и затем подбирает модельную вариограмму в виде сплошной линии.

Пользователь может сам направлять расчет по определению модельной вариограммы, задав модель вариограммы, шаг вариограммы, начальные значения порога и радиуса вариограммы, а также диапазон, в котором программа будет искать модельную вариограмму с наименьшей дисперсией. Это введено для того, чтобы пользователь имел возможность подправить вариограмму. В конечном итоге результаты расчета — порог и радиус вариограммы — записываются в ячейках «результаты расчета».

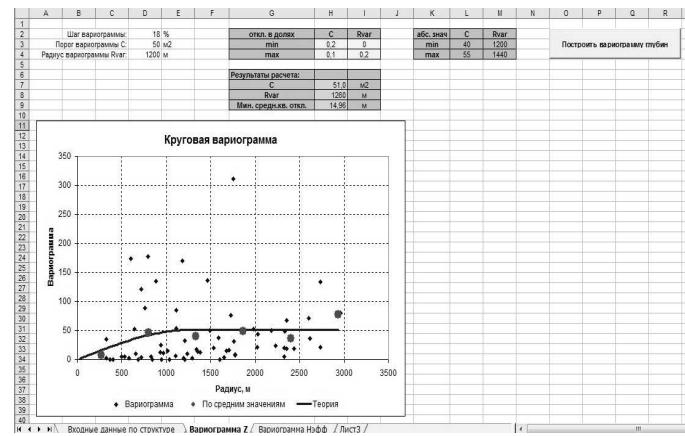


Рис. 3. Лист «Вариограмма Z».

Затем пользователь точно так же получает вариограмму для эффективной мощности в листе «Вариограмма Нэфф» (рис. 4). После определения вариограмм при нажатии кнопки «Построить геол. модель» в 1-м листе получается файл с геологической моделью.

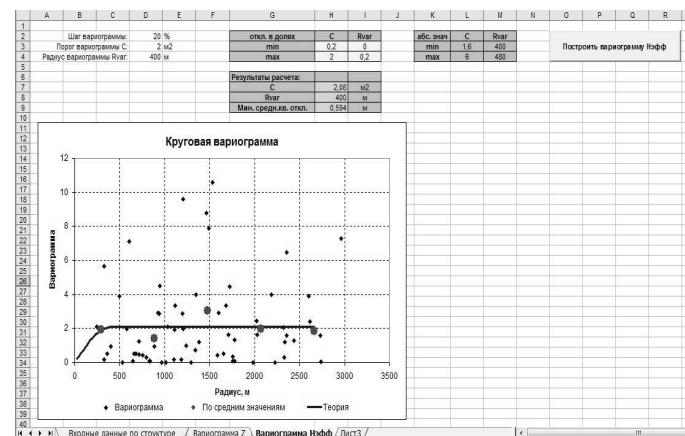


Рис. 4. Лист «Вариограмма Нэфф».

### 3. Пример создания карты кровли коллектора и 3D модели пласта

С помощью данного модуля была построена карта кровли коллектора и 3D модель части пласта некоторого месторождения. Карта кровли коллектора пласта изображена на рис. 5. Результат получился в достаточной степени схожим с реальным представлением пласта.

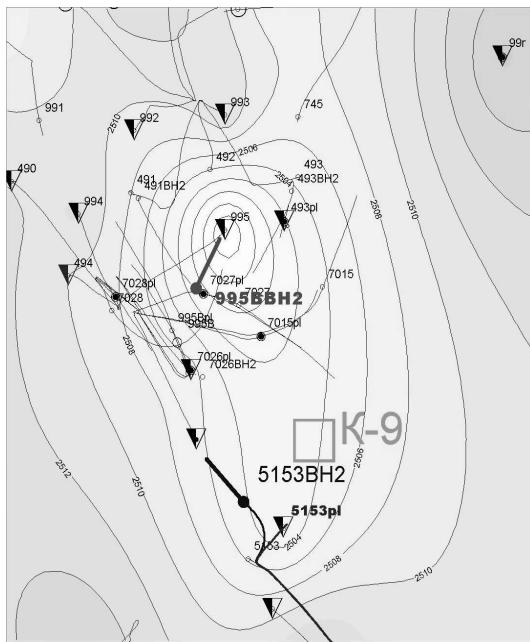


Рис. 5. Карта кровли коллектора.

Перевернутыми треугольниками изображены скважины, по которым была построена карта. 3D сетка пласта изображена с помощью гидродинамического симулятора на рис. 6.

### Заключение

В данной работе разработан модуль по построению упрощенной геологической модели пласта по скважинным данным с помощью гео-

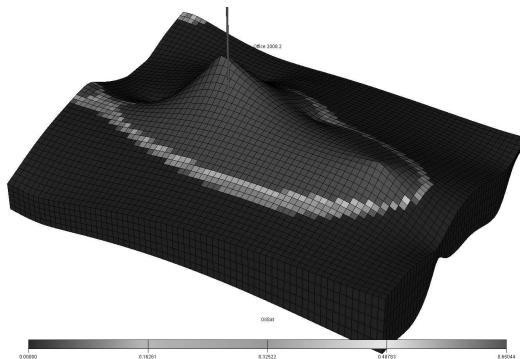


Рис. 6. 3D модель пласта.

статистического метода обычного кригинга. Упрощенная структурная 3D модель пласта строится по известным глубинам кровли коллектора и эффективным мощностям в скважинах. Модуль представляет собой уже готовый к использованию продукт и позволяет в течение малого времени создать 3D сетку любого пласта. Такая сетка пласта легко распознается многими гидродинамическими симуляторами. Поэтому модуль дает возможность быстро провести гидродинамическое моделирование, не обладая геологической моделью пласта.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Григорьев Ю. М., Харбанов М. В. Влияние величины депрессии и расположения горизонтальной скважины на добычу нефти в условиях конусообразования воды // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 1. С. 159–170.
- Дюбуру О. Использование геостатистики для включения в геологическую модель сейсмических данных. 2002. (European Association of Geoscientists Engineers).
- Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики. М.; Ижевск: РХД, 2009.
- Демьянов В., Савельева Е. Геостатистика. Теория и практика. М.: Наука, 2010.
- Армстронг М. Основы линейной геостатистики. 1998. (Centre for Specialized Training in Geostatistics).
- 3D визуализация, топографический анализ, построение поверхностей. ESRI White paper// ArcGis 3D Analyst. 2002.

г. Якутск

25 марта 2013 г.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ  
РАЗДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТИ  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ\*)  
П. Е. Захаров

1. Введение

Теория и практика методов декомпозиции области (domain decomposition, DD) для стационарных краевых задач подробно рассмотрены в [1–4]. Различают методы декомпозиции области с налеканием и без налекания подобластей. Приближенное решение нестационарной задачи может быть получено после стандартной неявной аппроксимации по времени и решения соответствующих дискретных уравнений на каждом временном слое одним из вариантов методов DD для стационарной задачи. Учитывая переходящее свойство нестационарной задачи (см., например, реализацию, основанную на методе Шварца [5, 6]), можно построить оптимальный итеративный метод DD, где количество итераций не зависит от размера сетки времени и пространства.

Такая особенность нестационарных задач полностью учитывается в безытерационных схемах DD. В некоторых случаях возможно [7, 8] использование только одной итерации альтернирующего метода Шварца для параболического уравнения второго порядка без потери точности приближенного решения. Безытерационные схемы DD связаны с особыми вариантами аддитивных схем (схем расщепления) — регионально-аддитивными схемами [9].

Схемы декомпозиции области для нестационарных задач могут быть выделены методом декомпозиции области, выбором оператора де-

---

\*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00719А).

композиции (обменом граничных условий) и схемой расщепления. Для дифференциальной задачи используют методы декомпозиции области

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{\alpha=1}^p \overline{\Omega}_\alpha, \quad \overline{\Omega}_\alpha = \Omega_\alpha \cup \partial\Omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

с налеганием подобластей ( $\Omega_{\alpha\beta} \equiv \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$ ) или без налегания ( $\Omega_{\alpha\beta} = \emptyset$ ) [2, 4]. Методы без налегания подобластей связаны с явной формулировкой граничных условий в интерфейсных границах. Эти методы широко используются в задачах, где для каждой отдельной подобласти вводится своя собственная вычислительная сетка (триангуляция). В общем, также используются схемы DD с налеганием подобластей. Методы декомпозиции области с минимальным налеганием, где ширина налегания равна размеру сетки ( $\Omega_{\alpha\beta} = \mathcal{O}(h)$ ), часто могут быть интерпретированы как методы без налегания, дополненные соответствующими граничными условиями на интерфейсах.

В данной работе рассматривается двукомпонентная схема декомпозиции области без налегания для приближенного решения краевой задачи для параболического уравнения.

## 2. Модельная параболическая задача

Рассмотрим модельную начально-краевую задачу для параболического уравнения второго порядка. В ограниченной области  $\Omega$  неизвестная функция  $u(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^m \left( k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

где  $k(\mathbf{x}) \geq \kappa > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Уравнение (1) дополняется однородным граничным условием Дирихле

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T. \quad (2)$$

Также дополнительно вводим начальное условие

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3)$$

Таким образом, рассматривается нестационарная задача диффузии (1)–(3) для множества функций  $u(\mathbf{x}, t)$ , удовлетворяющих граничным условиям (2). Вместо (1) и (2) будем использовать дифференциально-операторную запись

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f(t), \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

где

$$\mathcal{A} = -\sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right).$$

Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения (4) с начальным условием

$$u(0) = u^0. \quad (5)$$

Для множества функций (2) определим гильбертово пространство  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$  со скалярным произведением и нормой

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \|u\| = (u, u)^{1/2}.$$

В  $\mathcal{H}$  оператор диффузионного переноса  $\mathcal{A}$  самосопряжен и положительно определен:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \geq \kappa \delta \mathcal{E}, \quad \delta = \delta(\Omega) > 0, \quad (6)$$

где  $\mathcal{E}$  — единичный оператор в  $\mathcal{H}$ .

Для решения задачи (4)–(6) определим простейшую априорную оценку, которая будет отправной точкой для рассматриваемых сеточных задач. Самосопряженный положительно определенный оператор  $\mathcal{D}$  может быть связан с гильбертовым пространством  $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$  со скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}u, v), \quad \|u\|_{\mathcal{D}} = (u, u)_{\mathcal{D}}^{1/2}.$$

В  $\mathcal{H}$  уравнение (4) скалярно умножаем на  $\mathcal{A}u$ . С учетом (6) имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{\mathcal{A}}^2 + \|\mathcal{A}u\|^2 = (f, \mathcal{A}u). \quad (7)$$

Принимая во внимание неравенство

$$(f, \mathcal{A}u) \leq \| \mathcal{A}u \|^2 + \frac{1}{4} \| f \|^2,$$

из (7) получаем

$$\frac{d}{dt} \| u \|^2_{\mathcal{A}} \leq \frac{1}{2} \| f \|^2.$$

Используя лемму Гронуолла, приходим к желаемой оценке

$$\| u \|^2_{\mathcal{A}} \leq \| u^0 \|^2_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2} \int_0^t \| f(\theta) \|^2 d\theta, \quad (8)$$

которая выражает устойчивость решения задачи (4)–(6) относительно начального значения и правой части.

### 3. Разностная аппроксимация

Детальное изучение аппроксимаций по пространству и времени будем проводить на примере начально-краевой задачи в прямоугольной области

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2 \}.$$

Приближенное решение задается в узлах равномерной прямоугольной сетки области  $\Omega$ :

$$\bar{\omega} = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2 \},$$

а через  $\omega$  и  $\partial\omega$  обозначим множество внутренних и граничных узлов соответственно ( $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ ). Для сеточных функций  $y(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \partial\omega$ , определим гильбертово пространство  $H = L_2(\omega)$  со скалярным произведением и нормой

$$(y, w) = \sum_{\mathbf{x} \in \omega} y(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) h_1 h_2, \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}.$$

Предполагая, что коэффициент  $k(\mathbf{x})$  в  $\Omega$  достаточно гладкий, используем дискретный оператор диффузии

$$\begin{aligned} Ay = & -\frac{1}{h_1^2}k(x_1 + h_1/2, x_2)(y(x_1 + h_1, x_2) - y(x_1, x_2)) \\ & + \frac{1}{h_1^2}k(x_1 - h_1/2, x_2)(y(x_1, x_2) - y(x_1 - h_1, x_2)) \\ & - \frac{1}{h_2^2}k(x_1, x_2 + h_2/2)(y(x_1, x_2 + h_2) - y(x_1, x_2)) \\ & + \frac{1}{h_2^2}k(x_1, x_2 - h_2/2)(y(x_1, x_2) - y(x_1, x_2 - h_2)). \end{aligned} \quad (9)$$

В пространстве  $H$  оператор  $A$  самосопряжен и положительно определен:

$$A = A^* \geq \kappa(\delta_1 + \delta_2)E, \quad \delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (10)$$

После аппроксимации по пространству из уравнений (1), (2) переходим к дифференциальному-разностному уравнению

$$\frac{dy}{dt} + Ay = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad 0 < t < T. \quad (11)$$

С учетом (3) дополним (11) начальным условием

$$y(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \quad (12)$$

Для решения дифференциальному-разностной задачи Коши (11), (12) выполняется следующая априорная оценка (см. (8)):

$$\|y\|_A^2 \leq \|u^0\|_A^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|f(\theta)\|^2 d\theta. \quad (13)$$

Теперь уделим внимание аппроксимации по времени. При построении схемы декомпозиции области для задачи (11), (12) как отправная точка используется стандартная двухслойная схема. Пусть  $\tau$  — шаг по времени и  $y^n = y(t^n)$ ,  $t^n = n\tau$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $N\tau = T$ . Уравнение (11) аппроксимируем двухслойной схемой с весами

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - \sigma)y^n) = \varphi^n, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (14)$$

где  $\varphi^n = f(t^n + \sigma\tau)$ , и дополним начальным условием

$$y^0 = u^0. \quad (15)$$

На достаточно гладких решениях задачи разностная схема (14), (15) имеет ошибку аппроксимации  $\mathcal{O}(\tau^2 + (\sigma - 1/2)\tau + h^2)$ , где  $h^2 = (h_1^2 + h_2^2)/2$ .

**Теорема 3.1.** Разностная схема (14), (15) безусловно устойчива при  $\sigma \geq 0.5$ , и для численного решения выполняется оценка

$$\|y^{n+1}\|_D^2 \leq \|y^n\|_D^2 + \frac{\tau}{2}\|\varphi^n\|^2, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (16)$$

где

$$D = A + (\sigma - 1/2)\tau A^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем разностную схему (14):

$$(E + (\sigma - 1/2)\tau A) \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + A \frac{y^{n+1} + y^n}{2} = \varphi^n,$$

скалярно умножим на  $\tau A(y^{n+1} + y^n)$ . Поскольку  $\sigma \geq 1/2$ , а значит,  $D \geq A$ , имеем

$$\|y^{n+1}\|_D^2 - \|y^n\|_D^2 + \frac{\tau}{2}\|A(y^{n+1} + y^n)\|^2 = \tau(\varphi^n, A(y^{n+1} + y^n)).$$

Учитывая, что

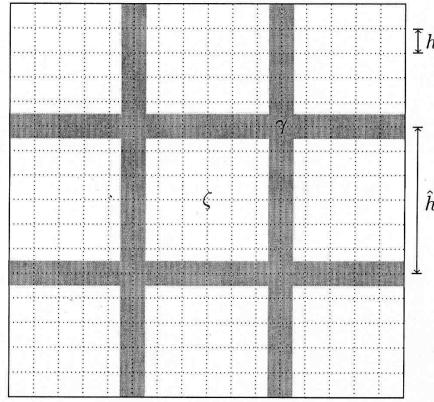
$$(\varphi^n, A(y^{n+1} + y^n)) \leq \frac{1}{2}\|A(y^{n+1} + y^n)\|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi^n\|^2,$$

получаем требуемую оценку (16).

Априорная оценка (16) для решения задачи (14), (15) является дискретным аналогом априорной оценки (13) для решения дифференциально-разностной задачи (11), (12) ( $D = A + \mathcal{O}(\tau)$ ).

#### 4. Разделение области

Рассмотрим метод декомпозиции области без налегания. На дискретном уровне определяем в области множество подобластей и интерфейсных узлов, далее решаем подзадачи в отдельности. На непрерывном уровне эта декомпозиция связана с подобластями, у которых ширина равна соответствующему шагу по пространству.

Рис. 1. Декомпозиция сетки:  $\omega = \zeta \cup \gamma$ .

Сетку  $\omega$  делим на множество прямоугольных подобластей  $\zeta$ , которые соединены между собой множеством внутренних граничных узлов  $\gamma$ . Подобласти  $\zeta$  не связаны между собой и могут быть рассмотрены параллельно. Фрагмент сетки показан на рис. 1. Решение задачи при такой декомпозиции можно разделить на 3 этапа.

**ЭТАП 1.** Вычисление условий на границах подобластей явной схемой

$$\frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} + Ay^n = \varphi^n, \quad \mathbf{x} \in \gamma. \quad (17)$$

**ЭТАП 2.** Вычисление решения в подобластих неявной схемой

$$\begin{aligned} y^{n+1/2} &= y^n, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \\ \frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} + Ay^{n+1/2} &= \varphi^n, \quad \mathbf{x} \in \zeta. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение исходной задачи с использованием только схем (17), (18) является условно устойчивым, поэтому дополнительно вводится этап коррекции в  $\gamma$ .

**ЭТАП 3.** Коррекция условий на границе подобластей неявной схемой

$$y^{n+1} = y^{n+1/2}, \quad \mathbf{x} \in \zeta,$$

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + Ay^{n+1} = \varphi^n, \quad \mathbf{x} \in \gamma. \quad (19)$$

Вычислительная и коммуникационная сложность параллельной реализации этапов 1–3 меньше, чем у параллельного алгоритма решения неявной схемой, у которого параллелизм построен на уровне алгебраических операций.

### 5. Исследование устойчивости и сходимости

Введем функцию принадлежности подобласти  $\gamma$ :

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \gamma, \\ 0, & \mathbf{x} \in \zeta. \end{cases} \quad (20)$$

Схему (17) и (18) умножаем на  $\chi$  и  $(1 - \chi)$  соответственно и суммируем:

$$\frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} + (1 - \chi)Ay^{n+1/2} + \chi Ay^n = \varphi^n. \quad (21)$$

Аналогично сложим схемы (18) и (19):

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \chi Ay^{n+1} + (1 - \chi)Ay^{n+1/2} = \varphi^n. \quad (22)$$

Схема (21), (22) представляет собой регионально-аддитивную схему, которую можно интерпретировать как разностную схему Дугласа — Рекфорда

$$\frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} + A_1 y^{n+1/2} + A_2 y^n = \varphi^n, \quad (23)$$

$$\frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau} + A_2(y^{n+1} - y^n) = 0, \quad (24)$$

где

$$A_1 = \chi_1 A, \quad \chi_1 = \chi, \quad A_2 = \chi_2 A, \quad \chi_2 = 1 - \chi.$$

Схему Дугласа — Рекфорда (23), (24) записываем в более общем виде как факторизованную схему:

$$B_1 B_2 \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + Ay^n = \varphi^n, \quad (25)$$

где

$$B_\alpha = E + \sigma \tau \chi_\alpha A, \quad \alpha = 1, 2, \quad (26)$$

с правой частью, определенной в виде  $\varphi^n = f(\sigma t^{n+1} + (1-\sigma)t^n)$ . Прямая подстановка подтверждает, что схема (25), (26) совпадает со схемой (23), (24) при  $\sigma = 1$ .

Сформулируем основную теорему устойчивости для факторизованной схемы (25), (26) [10].

**Теорема 5.1.** *Факторизованная регионально-аддитивная схема (25), (26) безусловно устойчива для  $\sigma \geq 1/2$ , и для дискретного решения выполняется оценка*

$$\|B_2 y^{n+1}\|_A \leq \|B_2 y^n\|_A + \tau \|B_1^{-1} \varphi^n\|_A, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (27)$$

Основным вопросом при построении схем декомпозиции области для нестационарных задач является оценка скорости сходимости для приближенного решения. Точность зависит от вычислительной сетки (ширины налегания), поэтому регионально-аддитивные схемы являются условно сходящимися.

Точность анализируется стандартным способом — через рассмотрение соответствующей задачи для погрешности

$$z^n(\mathbf{x}) = y^n(\mathbf{x}) - u^n(\mathbf{x}), \quad x \in \omega,$$

где  $u^n(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t^n)$  — точное решение дифференциальной задачи (1)–(3). Из (25), (26) приходим к задаче для погрешности

$$B_1 B_2 \frac{z^{n+1} - z^n}{\tau} + A z^n = \psi^n, \quad (28)$$

$$z^0 = 0. \quad (29)$$

Учитывая (27) из задачи (28), (29), получаем

$$\|B_2 z^{n+1}\|_A \leq \sum_{k=0}^n \tau \|B_1^{-1} \psi^k\|_A, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (30)$$

Для погрешности аппроксимации имеем

$$\psi^n = \varphi^n - B_1 B_2 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - A u^n. \quad (31)$$

Учитывая (26), из (31) выводим

$$\psi^n = \psi_1^n + \psi_2^n,$$

$$\begin{aligned}\psi_1^n &= \varphi^n - (E + (\sigma - 1/2)\tau A) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - A \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \\ \psi_2^n &= -\sigma^2 \tau^2 \chi_1 A \chi_2 A \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}.\end{aligned}$$

Первый член погрешности стандартный для схем с весами, тогда как второй член получается из разделения на подобласти. Для достаточно гладких решений для задачи (1), (3) получаем

$$\psi_1^n = \mathcal{O}(h^2 + \tau^2 + (\sigma - 1/2)\tau).$$

Рассмотрим член  $\psi_2^n$  более подробно. Учитывая, что  $\|B_\alpha\| \geq 1$  при  $\sigma > 0$ , имеем

$$\begin{aligned}\|B_1^{-1} \psi_2^n\|_A &\leq \sigma^2 \tau^2 \left\| \chi_1 A \chi_2 A \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right\|_A \leq \sigma^2 \tau^2 M \| (1 - \chi_2) A \chi_2 \|_A \\ &\leq \sigma^2 \tau^2 M \|A \chi_2\|_A + \sigma^2 \tau^2 M \|\chi_2 A \chi_2\|_A = \sigma^2 \tau^2 M \|\chi_2\|_{A^3} + \sigma^2 \tau^2 M \|\chi_2\|_A.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|B_1^{-1} \psi_2^n\|_A = \mathcal{O}(\sigma^2 \tau^2 \|\chi_2\|_{A^3}).$$

Данные аргументы позволяют нам сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 5.2.** Для погрешности факторизованной регионально-аддитивной разностной схемы (25), (26) при  $\sigma \geq 1/2$  для задачи (1)–(3) получаем оценку

$$\|B_2 z^{n+1}\|_A \leq M(h^2 + \tau^2 + (\sigma - 1/2)\tau + \sigma^2 \tau^2 \|\chi_2\|_{A^3}). \quad (32)$$

Для схем декомпозиции области без налегания, рассматриваемых здесь, с дискретными эллиптическими операторами второго порядка (9) оценка (32) дает неравенство

$$\|B_2 z^{n+1}\|_A \leq M(h^2 + \tau^2 + (\sigma - 1/2)\tau + \sigma^2 \tau^2 \hat{h}^{-1/2} h^{-3/2}). \quad (33)$$

Заметим, что при  $\sigma = 1/2$  повышается порядок точности по  $\tau$ . Рассматриваемая факторизованная схема при  $\hat{h} = 1$  соответствует схеме с весами, и погрешность аппроксимации равна  $\mathcal{O}(h^2 + \tau^2 + (\sigma - 1/2)\tau)$ .

## 6. Численные эксперименты

Численные эксперименты проводились для параболического уравнения (1), где

$$k(\mathbf{x}) = 1, \quad f(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \leq T = 0.05. \quad (34)$$

Задача (1)–(3), (34) рассматривается в единичном квадрате  $l_1 = l_2 = 1$  с начальным условием

$$u^0(\mathbf{x}) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (35)$$

Решение задачи (1)–(3), (34), (35) записывается в виде

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp(-2\pi^2 t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2).$$

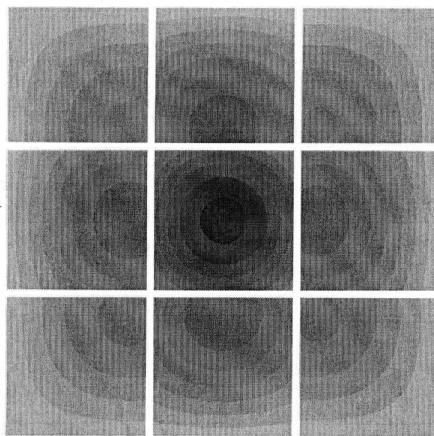
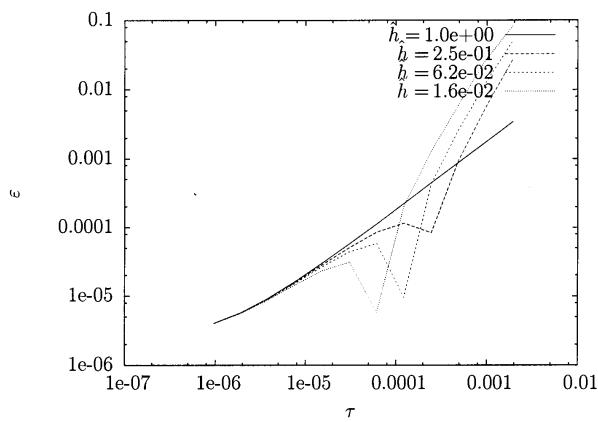
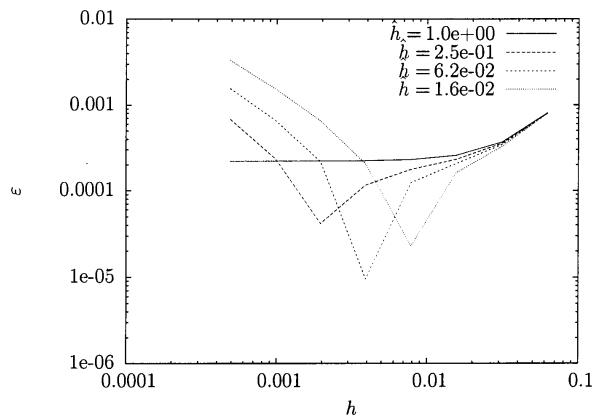


Рис. 2. Разница точного и приближенного решения  
при разделении области на 9 частей.

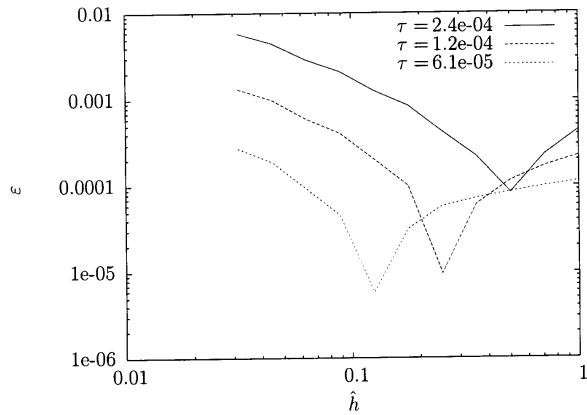
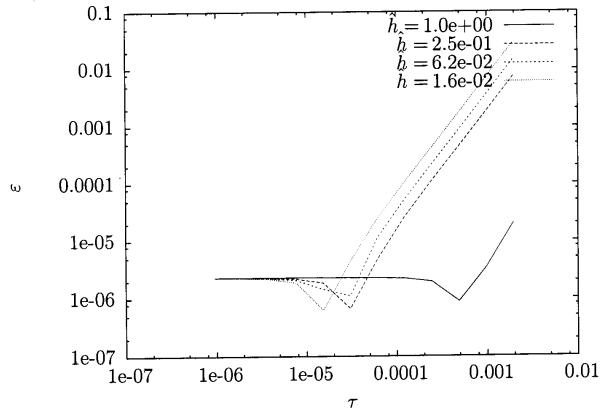
Погрешность приближенного решения вычисляем по формуле

$$\varepsilon(t^n) = \|y^n(\mathbf{x}) - u^n(\mathbf{x})\|$$

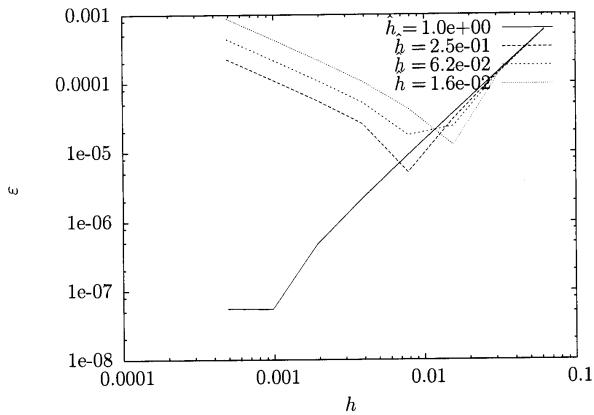
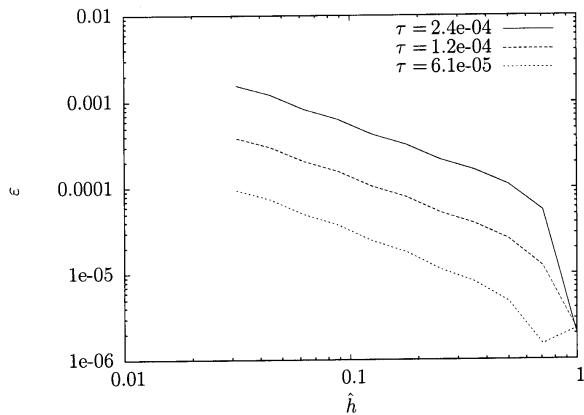
в норме  $H = L_2(\omega)$ . На рис. 2 изображена норма  $\|y^n(\mathbf{x}) - u^n(\mathbf{x})\|$  решения факторизованной регионально-аддитивной схемой, значение увеличивается от светлого до темного.

Рис. 3. Зависимость от шага по времени при  $\sigma = 1$ .Рис. 4. Зависимость от шага по пространству при  $\sigma = 1$ .

Численные эксперименты проводились на вычислительном кластере Северо-восточного федерального университета им. М. К. Аммосова. Для выявления асимптотической зависимости погрешности от параметров задачи вычисления проводились в большом диапазоне параметров. Все графики для погрешности  $\varepsilon = \varepsilon(T)$  заданы в логарифмическом масштабе.

Рис. 5. Зависимость от размера подобластей при  $\sigma = 1$ .Рис. 6. Зависимость от шага по времени при  $\sigma = 1/2$ .

Для факторизованной схемы первого порядка ( $\sigma = 1$ ) при увеличении шага по времени сперва преобладает член погрешности  $\mathcal{O}(\tau)$ , потом начинает преобладать  $\mathcal{O}(\tau^2)$  для  $\hat{h} > 1$  (рис. 3). При уменьшении шага по пространству наблюдается увеличение погрешности на конечный момент времени (рис. 4). Погрешность с определенного момента увеличивается при уменьшении размера подобласти (рис. 5).

Рис. 7. Зависимость от шага по пространству при  $\sigma = 1/2$ .Рис. 8. Зависимость от размера подобластей при  $\sigma = 1/2$ .

Для факторизованной схемы второго порядка ( $\sigma = 1/2$ ) при увеличении  $\tau$  погрешность имеет второй порядок  $\mathcal{O}(\tau^2)$ , что соответствует теоретической оценке (рис. 6). На рис. 7 легко увидеть член погрешности  $\mathcal{O}(h^2)$ . Проведенные численные эксперименты подтверждают теоретическую оценку (33).

Для исследования зависимости погрешности от временного шага

$\tau$  варьировали от  $2^{-9}$  (26 временных слоев) до  $2^{-20}$  (52429 временных слоев) при  $h_1 = h_2 = 2^{-8}$  (65536 узлов в сетке) (см. рис. 3 и 6). Исследование зависимости погрешности от шага по пространству проводилось для  $h_1$  и  $h_2$ , равных от  $2^{-4}$  (256 узлов в сетке) до  $2^{-11}$  (4194304 узлов в сетке) при  $\tau = 2^{-13}$  (410 временных слоев) (см. рис. 4 и 7). Для исследования зависимости погрешности от размера подобласти использовалось до 1024 вычислительных ядер при  $h_1 = h_2 = 2^{-8}$  (см. рис. 5 и 8).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mathew T. Domain decomposition methods for the numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2008.
2. Quarteroni A., Valli A. Domain decomposition methods for partial differential equations. Oxford: Clarendon Press, 1999.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
4. Toselli A., Widlund O. Domain decomposition methods — algorithm and theory. Berlin: Springer-Verl., 2005.
5. Cai X.-C. Additive Schwarz algorithms for parabolic convection-diffusion equations // Numer. Math. 1991. V. 60, N 1. P. 41–61.
6. Cai X.-C. Multiplicative Schwarz methods for parabolic problems // SIAM J. Sci. Comput. 1994. V. 15, N 3. P. 587–603.
7. Kuznetsov Yu. A. New algorithm for approximate realization of implicit difference schemes // Sov. J. Number. Methods (Eng.) 2009. V. 25, N 7. P. 810–826.
8. Kuznetsov Yu. A. Overlapping domain decomposition methods for fe-problems with elliptic singular perturbed operators // Proc. 4th Int. Symp. Domain decomposition methods for partial differential equations. Moscow, 1990. P. 223–241.
9. Samarskii A. A., Matus P. P., Vabishchevich P. N. Difference schemes with operator factors. Mathematics and its Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
10. Вабищевич П. Н. Аддитивные операторно-разностные схемы (схемы расщепления). М.: URSS, 2013.

УДК 517.928.4:517.929.5

О ДВУМЕРНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
РЕАКЦИИ ОКИСЛЕНИЯ ОКСИДА  
УГЛЕРОДА НА НАНОЧАСТИЦАХ  
ПАЛЛАДИЯ\*)

Е. А. Лашина, Н. А. Чумакова, Г. А. Чумаков

При математическом моделировании динамики каталитических реакций часто используются системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, причем в системах присутствуют быстрые и медленные переменные. В этом случае динамика системы в значительной мере определяется структурой фазового пространства подсистемы относительно быстрых переменных, которую следует рассматривать в зависимости от параметров, являющихся значениями медленных переменных. Таким образом, принципиально важным становится изучение свойств семейства «быстрых» подсистем по возможности меньшей размерности.

Работа посвящена исследованию кинетической модели реакции окисления оксида углерода на наночастицах палладия. Построение модели проводилось на основании экспериментальных данных, согласно которым в некоторой области значений управляющих параметров динамика скорости реакции сильно нелинейна, а именно наблюдаются сложные многопикиевые колебания (например, см. [1, 2]). Целью нашей работы является изучение структуры фазового пространства подсистемы быстрых переменных кинетической модели, предложенной в [2].

---

\*) Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН (Междисциплинарный проект 80).

### 1. Кинетическая модель

В условиях автоколебаний скорости реакции окисления CO палладий на поверхности катализатора присутствует в двух фазах: металлической и оксидной. На поверхности металлического палладия присутствуют адсорбированные соединения  $\text{CO}[\text{Pd}]$  и  $\text{O}[\text{Pd}]$ , а также свободные активные центры  $[\text{Pd}]$ ; на поверхности оксидной фазы —  $\text{CO}[\text{PdO}]$  и свободные активные центры  $[\text{PdO}]$ . Предполагается, что общее число активных центров палладия неизменно в ходе реакции, хотя в условиях автоколебаний соотношение числа центров типа  $[\text{Pd}]$  и  $[\text{PdO}]$  меняется.

Для описания экспериментальных данных в работе [2] предложен механизм реакции окисления CO, состоящий из 6 стадий, причем стадии 1 и 4 обратимы:

- 1)  $\text{CO(g)} + [\text{Pd}] \leftrightarrow \text{CO}[\text{Pd}]$ ,
- 2)  $\text{O}_2(\text{g}) + 2[\text{Pd}] \rightarrow 2\text{O}[\text{Pd}]$ ,
- 3)  $\text{CO}[\text{Pd}] + \text{O}[\text{Pd}] \rightarrow \text{CO}_2(\text{g}) + 2[\text{Pd}]$ ,
- 4)  $\text{CO(g)} + [\text{PdO}] \leftrightarrow \text{CO}[\text{PdO}]$ ,
- 5)  $\text{CO}[\text{PdO}] \rightarrow \text{CO}_2(\text{g}) + [\text{Pd}]$ ,
- 6)  $\text{O}[\text{Pd}] \rightarrow [\text{PdO}]$ .

Здесь использованы следующие обозначения:  $[\text{Pd}]$  и  $[\text{PdO}]$  — активный центр на поверхности металлического и оксидного палладия;  $\text{CO}[\text{Pd}]$  и  $\text{O}[\text{Pd}]$  — оксид углерода и кислород, адсорбированные на металлической поверхности;  $\text{CO}[\text{PdO}]$  — оксид углерода, адсорбированный на оксиде палладия;  $\text{CO(g)}$ ,  $\text{O}_2(\text{g})$  и  $\text{CO}_2(\text{g})$  — оксид углерода, кислород и диоксид углерода в газовой фазе над поверхностью катализатора.

На основании данного механизма и закона действующих поверхностей построим кинетическую модель, описывающую динамику безразмерных концентраций  $x$ ,  $y$  и  $v$  соединений  $\text{CO}[\text{Pd}]$ ,  $\text{O}[\text{Pd}]$  и  $\text{CO}[\text{PdO}]$ . Отметим, что  $x$ ,  $y$  и  $v$  определяются как доли активной поверхности, занятой соответствующим веществом, поэтому  $x, y, v \in [0, 1]$ . Дополнительно предполагается, что доля  $\xi$  металлической фазы  $[\text{Pd}]$  на наночастицах палладия изменяется в ходе реакции [2], так что  $\xi = 0$  соответствует случаю, когда вся поверхность палладия является оксидной, а  $\xi = 1$  — металлической. Поскольку в условиях автоколебаний на по-

верхности наночастиц палладия присутствуют обе фазы [Pd] и [PdO], далее будем рассматривать  $0 < \xi < 1$ .

Кинетическая наномодель является системой четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1(1 - x - y) - k_{-1}(y)x - k_3(y)xy\xi - \frac{x}{\xi}\dot{\xi}, \\ \dot{y} &= k_2(y)(1 - x - y)^2\xi - k_3(y)xy\xi - \alpha\varepsilon y - \frac{y}{\xi}\dot{\xi}, \\ \dot{\xi} &= \varepsilon(v(1 - \xi) - \alpha y \xi), \\ \dot{v} &= k_4(1 - v) - k_{-4}v - \varepsilon v + \frac{v}{1 - \xi}\dot{\xi}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k_i > 0$  — так называемые константы скоростей стадий 1–6,  $i = \pm 1, 2, 3, \pm 4, 5, 6$ ,  $\varepsilon = k_5$  и  $\alpha = k_6/k_5$ , точками обозначены производные по времени. Индекс  $i > 0$  соответствует «прямой» реакции (стрелка в стадии направлена слева направо), а  $i < 0$  — «обратной» реакции (стадии 1 и 4).

В модели (1) предполагается, что активность катализатора определяется составом его поверхности, и для  $j = -1, 2, 3$  константы скоростей стадий  $k_j = k_j(y) > 0$  не являются постоянными, а зависят от концентрации  $y$  адсорбированного кислорода:

$$k_j(y) \equiv k_j^{\text{av}} + \Delta k_j \cdot s(y), \quad j = -1, 2, 3, \quad (2)$$

где постоянные  $\Delta k_j$  и  $k_j^{\text{av}}$  положительны. Функция  $s(y)$  непрерывно дифференцируема при  $y \in [0, 1]$  и имеет вид

$$s(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq y_c - \delta, \\ \tilde{s}(y), & y_c - \delta < y < y_c + \delta, \\ -1, & y_c + \delta \leq y \leq 1, \end{cases} \quad (3)$$

при этом  $s(y)$  монотонна, так что  $\frac{d\tilde{s}(y_c \pm \delta)}{dy} = 0$  и  $\frac{d\tilde{s}(y)}{dy} < 0$  при  $y_c - \delta < y < y_c + \delta$ . Параметры  $\delta \in (0, 0.5)$  и  $y_c \in (\delta, 1 - \delta)$  определяют ширину и расположение интервала значений  $y$ , на котором  $s(y)$  изменяется от +1 до -1, т. е. наблюдается изменение каталитических свойств поверхности металлической фазы палладия.

Правая часть системы (1) относительно вектора переменных  $(x, y, v, \xi)$  рассматривается в области  $\Omega = G \times I_v \times I_\xi$ , где

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}, \\ I_v &= \{v \in R : 0 \leq v \leq 1\}, \quad I_\xi = \{\xi \in R : 0 < \xi < 1\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что согласно экспериментальным данным образование оксида палладия (стадия 6) и его восстановление (стадия 5) происходят более медленно по сравнению с остальными стадиями реакции. Поэтому кинетическая модель (1) содержит малый параметр  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Изучение системы (1) проводилось методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и вычислительной математики [3–5]. Численное исследование выполнено в случае, когда

$$\tilde{s}(y) = \sin\left(\frac{\pi}{2\delta}(y_c - y)\right), \quad \Delta k_j = \frac{k_j^l - k_j^r}{2}, \quad k_j^{\text{av}} = \frac{k_j^r + k_j^l}{2}, \quad (5)$$

где  $k_j^l > k_j^r > 0$ ,  $j = -1, 2, 3$ , и принимают следующие значения [2]:

$$\begin{aligned} k_{-1}^l &= 49.82, \quad k_{-1}^r = 0.19, \quad k_2^l = 10^5, \quad k_2^r = 2 \cdot 10^4, \\ k_3^l &= 1.18 \cdot 10^5, \quad k_3^r = 11.8, \quad y_c = 0.37, \quad \delta = 0.1. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом из (2), (3) и (5) следует, что  $k_j(0) = k_j^l$  и  $k_j(1) = k_j^r$ .

## 2. Вырожденная система

Рассмотрим вырожденную систему уравнений, полагая  $\varepsilon = 0$  в (1). С точки зрения химии это условие означает, что на оксидной фазе  $[PdO]$  не происходит химического превращения (стадия 5), а возможна только адсорбция–десорбция CO (стадия 4). Активной для химических превращений веществ остается только металлическая фаза палладия (стадии 1–3).

При  $\varepsilon = 0$  математическая модель (1) распадается на систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1(1 - x - y) - k_{-1}(y)x - k_3(y)xy\xi, \\ \dot{y} &= k_2(y)(1 - x - y)^2\xi - k_3(y)xy\xi, \\ \dot{\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

и уравнение

$$\dot{v} = k_4(1 - v) - k_{-4}v. \quad (8)$$

Общее решение линейного уравнения (8) имеет вид

$$v(t) = e^{-at}(v_0 - b) + b, \quad a = k_4 + k_{-4}, \quad b = k_4/a, \quad 0 \leq v_0 \leq 1.$$

Поскольку из условия на параметры модели (1) следует, что  $a > 0$  и  $0 < b < 1$ , то для любых начальных данных  $v(0) = v_0 \in I_v$  функция  $v(t)$  монотонна,  $v(t) \rightarrow b$  при  $t \rightarrow +\infty$  и  $v(t) = v_s \equiv b$  является асимптотически устойчивым положением равновесия уравнения (8). Отметим, что решение  $v(t)$  попадает в  $\eta$ -окрестность значения  $v_s$  за время

$$t^* = \frac{1}{k_4 + k_{-4}} \ln \frac{|v_0 - v_s|}{\eta}.$$

Следовательно, при больших  $k_4 + k_{-4}$  наблюдается быстрая стабилизация компоненты  $v(t)$  к стационарному значению, состояние поверхности оксидного палладия становится близким к равновесному.

Уравнение  $\dot{\xi} = 0$  имеет постоянное решение  $\xi(t) \equiv \xi_0$ ,  $\xi_0 \in (0, 1)$ , которое соответствует постоянству соотношения фаз [Pd] и [PdO] на поверхности катализатора.

### 3. Однопараметрическое семейство двумерных динамических систем

Рассмотрим семейство динамических систем относительно переменных  $x$  и  $y$  в области  $G$  с параметром  $0 < \xi_0 \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1(1 - x - y) - k_{-1}(y)x - k_3(y)xy\xi_0 \equiv P(x, y, \xi_0), \\ \dot{y} &= k_2(y)(1 - x - y)^2\xi_0 - k_3(y)xy\xi_0 \equiv \xi_0 Q(x, y). \end{aligned} \quad (9)$$

Покажем, что  $G$  является инвариантной областью для системы (9), т. е. если  $(x_0, y_0) \in G$ , то решение системы (9) с начальными данными  $x(0) = x_0$  и  $y(0) = y_0$  определено для всех  $0 \leq t < +\infty$  и  $(x(t), y(t)) \in G$ .

Заметим, что для доказательства этого свойства без ограничения общности можно положить  $\xi_0 = 1$  и обозначить  $P(x, y, 1) = P(x, y)$ .

Векторное поле системы (9) на границе  $\partial G$  области  $G$  всюду за исключением точек  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$  направлено внутрь  $G$ . Векторное поле касается  $\partial G$  в точке  $(1, 0)$ :  $P(1, 0) = -k_{-1}^r < 0$  и  $Q(1, 0) = 0$ . При всех

значениях параметров  $P(0, 1) = Q(0, 1) = 0$ , т. е.  $(x_s, y_s) = (0, 1)$  — стационарное состояние системы (1). Матрица Якоби

$$A = \begin{pmatrix} P_x(0, 1) & P_y(0, 1) \\ Q_x(0, 1) & Q_y(0, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_{-1}^r + k_3^r) & -k_1 \\ -k_3^r & 0 \end{pmatrix}$$

имеет характеристические корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(k_1 + k_{-1}^r + k_3^r) \pm \sqrt{(k_1 + k_{-1}^r + k_3^r)^2 + 4k_1 k_3^r}}{2},$$

и  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ . Откуда следует, что стационарное состояние  $(0, 1)$  системы (9) является седлом. Собственные векторы  $(a_1, b_1)$  и  $(a_2, b_2)$  матрицы  $A$ , соответствующие  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , таковы, что  $b_1/a_1 = k_3^r/|\lambda_1| > 0$  и  $b_2/a_2 = -k_3^r/\lambda_2 < -1$ . Следовательно, в малой окрестности неподвижной точки  $(0, 1)$  одна из выходящих сепаратрис лежит в  $G$ , а входящие сепаратрисы не принадлежат области  $G$ .

**Лемма 1.** Существует область  $G_\theta \subset G$ ,  $0 < \theta \ll 1$ , такая, что граница  $\partial G_\theta$  области  $G_\theta$  является циклом без контакта для системы (9), т. е. во всех точках множества  $\partial G_\theta$  векторное поле системы (9) направлено внутрь области  $G_\theta$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим точку  $(1, 0)$ . Так как  $P(1, 0) < 0$ , существуют  $0 < \theta_1 \ll 1$  и множество

$$U_{\theta_1} = \{(x, y) : 1 - \theta_1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \theta_1, x + y \leq 1\}$$

такие, что  $P(x, y) < 0$  для всех  $(x, y) \in U_{\theta_1}$ . Кроме того, поскольку  $Q(x, 0) > 0$  для  $0 \leq x < 1$  и  $Q(x, y) < 0$  для  $x + y = 1$  и  $0 < x < 1$ , векторное поле на границе  $\partial U_{\theta_1}$  при  $x = 1 - \theta_1$  направлено внутрь области  $G \setminus U_{\theta_1}$ .

Рассмотрим главные изоклины системы (9), т. е. множества точек области  $G$ , в которых  $P(x, y) = 0$  или  $Q(x, y) = 0$ . Пусть  $(x, y) \in G$  и  $P(x, y) = 0$ , тогда

$$x = x_P(y) \equiv \frac{k_1(1 - y)}{k_1 + k_{-1}(y) + k_3(y)y}, \quad y \in [0, 1]. \quad (10)$$

Уравнение  $Q(x, y) = 0$  при каждом  $y \in [0, 1]$  является квадратным относительно переменной  $x$  и имеет два положительных вещественных корня

$$x_{1,2}(y) = 1 - y + A(y)/2 \pm \sqrt{A(y)(1 - y) + A^2(y)/4},$$

где  $A(y) = k_3(y)y/k_2(y)$ . Очевидно, что  $x_{1,2}(0) = 1$ , а при  $y \neq 0$  имеем  $x_1(y) + y > 1$  и  $(x_1(y), y) \notin G$ , в то время как  $x_2(y) + y < 1$  и  $(x_2(y), y) \in G$  для всех  $y \in [0, 1]$ . Следовательно, вторая главная изоклина определяется функцией  $x_Q(y)$ , где

$$x = x_Q(y) \equiv 1 - y + A(y)/2 - \sqrt{A(y)(1-y) + A^2(y)/4}, \quad y \in [0, 1]. \quad (11)$$

Рассмотрим функции  $x_P(y)$  и  $x_Q(y)$ , задаваемые в (10), (11). Так как

$$x_P(1) = x_Q(1) = 0, \quad \frac{dx_Q}{dy}(1) = 0, \quad \frac{dx_P}{dy}(1) < 0,$$

существует  $0 < \theta_2 \ll 1$  такое, что  $x_P(y) > x_Q(y)$  для всех  $y \in [1 - \theta_2, 1]$ . Выберем  $\theta_3 = \theta_3(\theta_2) \in (x_Q(1-\theta_2), x_P(1-\theta_2))$  такое, что  $P(\theta_3, 1 - \theta_2) > 0$ ,  $P(\theta_2, 1 - \theta_2) < 0$  и  $Q(x, 1 - \theta_2) < 0$  для  $\theta_3 \leq x \leq \theta_2$ . Отметим, что поскольку графики функций  $x_P(y)$  и  $x_Q(y)$  для  $y \in [0, 1]$  лежат в области  $G$ , то  $\theta_3 < \theta_2$  и  $\theta_3 \rightarrow 0$  при  $\theta_2 \rightarrow 0$ . Кроме того, так как  $P(0, y) > 0$  для  $0 \leq y < 1$ , то  $\theta_2$  и  $\theta_3$  можно выбрать так, что  $P(\theta_3, y) > 0$  для  $0 \leq y < 1 - \theta_2$ .

Пусть  $G_\theta = G \setminus \{U_{\theta_1} \cup \Pi_{\theta_2} \cup U_{\theta_2}\}$ , где  $\theta = \max_{i=1,2} \theta_i$  и

$$\Pi_{\theta_2} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \theta_3(\theta_2), 0 \leq y \leq 1 - \theta_2\},$$

$$U_{\theta_2} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \theta_2, 1 - \theta_2 \leq y \leq 1, x + y \leq 1\},$$

Тогда в точках границы  $\partial G_\theta$  области  $G_\theta$  векторное поле системы (9) направлено внутрь  $G_\theta$ . Лемма 1 доказана.

**Следствие 1.** Если область  $G_\theta$  определена условиями леммы 1 и  $(x_0, y_0) \in G_\theta$ , то решение  $(x(t), y(t))$  задачи Коши для системы (9) с начальными данными  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  существует, единственno и  $(x(t), y(t)) \in G_\theta$  для всех  $0 \leq t < +\infty$ .

**Следствие 2.** Существует  $\theta_0 > 0$  такое, что утверждение леммы 1 справедливо для всех  $0 < \theta < \theta_0$  и  $\partial G_\theta \rightarrow \partial G$  при  $\theta \rightarrow 0$ .

Это утверждение следует из способа построения области  $G_\theta$ .

На основании теоремы существования и единственности решения задачи Коши, теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных и следствий 1 и 2 из леммы 1 справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $(x_0, y_0) \in G$ . Тогда решение  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  системы (9), удовлетворяющее условию  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , существует, единственno и  $(x(t), y(t)) \in G$  для всех  $0 \leq t < +\infty$ .

#### 4. Анализ положений равновесия при $0 < \xi_0 < 1$

Рассмотрим главные изоклины системы (9) для  $0 < \xi_0 < 1$ , а именно множества точек  $(x, y) \in G$ , в которых  $P(x, y, \xi_0) = 0$  либо  $Q(x, y) = 0$ . Выражая  $x$  из уравнения  $P(x, y, \xi_0) = 0$  как функцию от  $y$  и  $\xi_0$ , получим формулу, аналогичную (10):

$$x = x_P(y, \xi_0) = \frac{k_1(1-y)}{k_1 + k_{-1}(y) + k_3(y)y\xi_0}. \quad (12)$$

Отсюда следует, что для любого  $0 < \xi_0 < 1$  изоклина (12) лежит в области  $G$ , причем значения  $x_P(1, \xi_0) = 0$  и  $x_P(0, \xi_0) = k_1/(k_1 + k_{-1}(0)) < 1$  не зависят от  $\xi_0$ .

Вторая изоклина  $Q(x, y) = 0$  не зависит от  $\xi_0$ . Представив это уравнение как  $(1-x-y)^2 - (\sqrt{A} \cdot \sqrt{x})^2 = 0$ , получим формулу, аналогичную (12):

$$x_Q(y) = f(y)(1-y), \quad (13)$$

где

$$f(y) = \frac{\sqrt{4(1-y)+A(y)} - \sqrt{A(y)}}{\sqrt{4(1-y)+A(y)} + \sqrt{A(y)}}. \quad (14)$$

Отметим, что  $f(y) \in (0, 1)$  при  $y \in (0, 1)$ ,  $f(0) = 1$  и  $f(1) = 0$ . Тогда  $0 < x_Q(y) + y < 1$  при  $0 < y < 1$ ,  $x_Q(0) = 1$  и  $x_Q(1) = 0$ .

Стационарные состояния  $(x_s, y_s)$  системы (9) являются точками пересечения главных изоклин, т. е. решениями системы уравнений  $P(x_s, y_s, \xi_0) = 0$ ,  $Q(x_s, y_s) = 0$ . Тогда выполнены равенства

$$x_s = x_Q(y_s), \quad x_s = x_P(y_s, \xi_0), \quad (15)$$

т. е.  $x_Q(y_s) = x_P(y_s, \xi_0)$ .

**Индекс особой точки [3].** Пусть  $C$  — простая замкнутая кривая,  $v$  — заданное на ней векторное поле, а  $d$  — некоторая прямая на плоскости  $(x, y)$ . Предположим, что существует только конечное число

точек  $M_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) кривой  $C$ , в которых вектор  $v(M)$  направлен параллельно прямой  $d$ . Предположим, что кривая  $C$  обходится точкой  $M$  в положительном направлении, и пусть  $p$  есть число точек  $M_k$ , при прохождении через которые вектор  $v(M)$  проходит через направление прямой  $d$ , двигаясь против часовой стрелки. Пусть, далее,  $q$  — число точек  $M_k$ , в которых вектор  $v(M)$  проходит направление прямой  $d$ , двигаясь по часовой стрелке. Точки  $M_k$ , в которых вектор  $v(M)$  достигает направления  $d$ , двигаясь, скажем, по часовой стрелке, а потом начинает двигаться в обратном направлении (или наоборот), мы не будем принимать во внимание. Тогда индекс кривой  $C$  равен  $(p - q)/2$ .

*Индексом* (или индексом Пуанкаре) изолированной особой точки векторного поля  $v$ , соответствующего динамической системе, называется индекс любой замкнутой кривой  $C$ , содержащей внутри себя особую точку, причем такой, что ни внутри  $C$ , ни на  $C$  нет других особых точек поля  $v$ .

Из свойств векторного поля на границе  $G_\theta$  следует

**Лемма 3.** Сумма индексов особых точек системы (9), расположенных в  $G_\theta$ , равна +1 при достаточно малых  $\theta$ .

Аналогично [6] сформулируем два утверждения, вытекающие из свойств главных изоклин и леммы 3.

**Следствие 3.** Система (9) не может иметь в области  $G$  особой точки с индексом, по модулю большим единицы.

**Принцип нечетности.** Если в  $G_\theta$  при достаточно малых  $\theta$  имеется особая точка с индексом, равным  $-1$ , то в  $G_\theta$  имеется по крайней мере ещё две особые точки с индексом  $+1$ , причем особые точки с индексами, равными  $+1$  или  $-1$ , при убывании координаты  $y$  чередуются так что  $+1, -1, +1, \dots$ . Таким образом, число стационарных точек в  $G_\theta$  с ненулевым индексом всегда нечетное, и число особых точек типа узла (фокуса) всегда на единицу больше числа седел.

Заметим, что для всех значений параметров система (9) имеет стационарное состояние  $(x_s, y_s) = (0, 1)$ . Рассмотрим матрицу Якоби первых производных правых частей системы (9) в точке  $(0, 1)$ :

$$\begin{pmatrix} P_x(0, 1, \xi_0) & P_y(0, 1, \xi_0) \\ \xi_0 Q_x(0, 1) & \xi_0 Q_y(0, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 - k_{-1}^r - k_3^r \xi_0 & -k_1 \\ -k_3^r \xi_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \frac{k_1 + k_{-1}^r + k_3^r \xi_0 \mp \sqrt{(k_1 + k_{-1}^r + k_3^r \xi_0)^2 + 4k_1 k_3^r \xi_0}}{2}.$$

Собственный вектор  $h_1 = (-\lambda_1, k_3^r \xi_0)$  соответствует собственному значению  $\lambda_1 < 0$ , и  $h_2 = (-\lambda_2, k_3^r \xi_0)$  — собственному значению  $\lambda_2 > 0$ . Стационарное состояние  $(x_s, y_s) = (0, 1)$  системы (9) является седлом, причем поскольку  $-\lambda_1/(k_3^r \xi_0) > 0$ , обе входящие сепаратрисы лежат вне области  $G$ . Кроме того,  $-\lambda_2/(k_3^r \xi_0) < -1$ , и в окрестности точки  $(0, 1)$  одна выходящая сепаратриса лежит вне области  $G$ , в то время как вторая располагается в  $G$ .

Рассмотрим  $y \in [0, 1]$ . Выразим  $\xi_0$  из (15) как функцию от  $y_s$ :

$$\xi_0 = \xi(y_s) = \frac{1}{k_3(y_s)y_s} \left[ k_1 \frac{1 - f(y_s)}{f(y_s)} - k_{-1}(y_s) \right]. \quad (16)$$

Выражение (16) в неявном виде задает зависимость координаты  $y_s$  стационарного состояния  $(x_s, y_s)$  системы (9) от параметра  $\xi_0$ , координата  $x_s$  однозначно определяется формулой (13).

Если  $\frac{d\xi(y_s)}{dy_s} \neq 0$  для всех  $y_s \in [0, 1]$ , то по теореме о неявной функции можно определить зависимость  $y_s = \psi(\xi_0)$  так, что  $\xi_0 - \xi(\psi(\xi_0)) \equiv 0$ . В этом случае для всех значений параметра  $\xi_0$  система (9) в области  $G \setminus \partial G$  имеет единственное положение равновесия  $(x_s, y_s)$ , где  $y_s = \psi(\xi_0)$ .

Пусть  $\frac{d\xi(y_s)}{dy_s} = 0$  при некотором  $y_s = \tilde{y}_s$ . Тогда если  $\frac{d^2\xi(\tilde{y}_s)}{dy_s^2} \neq 0$ , то при  $y_s = \tilde{y}_s$  функция  $\xi(y_s)$  имеет точку экстремума, и при изменении  $\xi_0$  вблизи  $\tilde{\xi}_0 = \xi(\tilde{y}_s)$  изменяется число корней  $y_s$  уравнения  $\xi_0 - \xi(y_s) = 0$ , и в системе (9) происходит бифуркация стационарных состояний. Таким образом, точка  $M = (\tilde{y}_s, \xi(\tilde{y}_s))$  на кривой

$$\Psi = \{(y_s, \xi_0) : \xi_0 = \xi(y_s), y_s \in [0, 1]\}$$

является *точкой поворота*.

На рис. 1 кривая  $\Psi$ , обозначенная через  $AKBCD$ , имеет две точки поворота  $C$  и  $B$ . Здесь коэффициенты уравнений (9) задаются соотношениями (2), (3), (5) и (6) и  $k_1 = 4000$ . Из рис. 1 видно, что на кривой  $\Psi$  имеется *S*-образный гистерезис, т. е. при  $\xi < \xi_B$  в системе (9) существует единственное стационарное состояние со значением  $y_s$ , близким

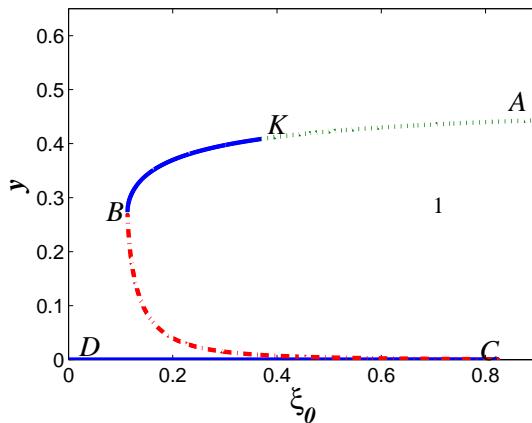


Рис. 1. Зависимость  $y$ -координаты стационарных состояний системы (9) от параметра  $\xi_0$ :  $CD$  и  $KB \setminus \{K\}$  — устойчивые стационарные состояния,  $BC \setminus (\{B\} \cup \{C\})$  — седла,  $AK$  — неустойчивые фокусы и узлы. Значения параметров соответствуют (6) и  $k_1 = 4 \cdot 10^3$ .

к 0; при  $\xi > \xi_C$  стационарное состояние тоже определяется однозначно, а при  $\xi_B < \xi < \xi_C$  существуют три стационарных состояния.

Одним из параметров, которым можно управлять в ходе эксперимента, является  $P_{CO}$  — парциальное давление  $CO(g)$  в газовой фазе над поверхностью катализатора. От этой величины линейно зависит коэффициент  $k_1 = k_1^0 P_{CO}$  ( $k_1^0 = \text{const}$ ). С целью исследования зависимости  $y_s$  от двух параметров  $k_1$  и  $\xi_0$ , рассмотрим множество

$$\Sigma = \{(\xi_0, k_1, y_s) : \xi_0 = \tilde{\xi}(y_s, k_1), k_1 > 0, y_s \in [0, 1]\},$$

где для каждого  $k_1 > 0$  функция  $\tilde{\xi}(y_s, k_1) = \xi(y_s)$ . Тем самым кривая  $\Psi$  является сечением поверхности  $\Sigma$  плоскостью  $k_1 = \text{const}$ . Исследование свойств поверхности  $\Sigma$  будем проводить с помощью методов теории катастроф [4]. Из рассуждений, проведенных выше, следует, что если при некотором значении  $k_1$  кривая  $\Psi$  имеет точку поворота, то существует интервал значений  $k_1$  такой, что при каждом значении  $k_1$  из этого интервала соответствующая кривая  $\Psi$  содержит точку поворота. В этом случае  $\Sigma$  как двумерная поверхность  $y$ -компоненты

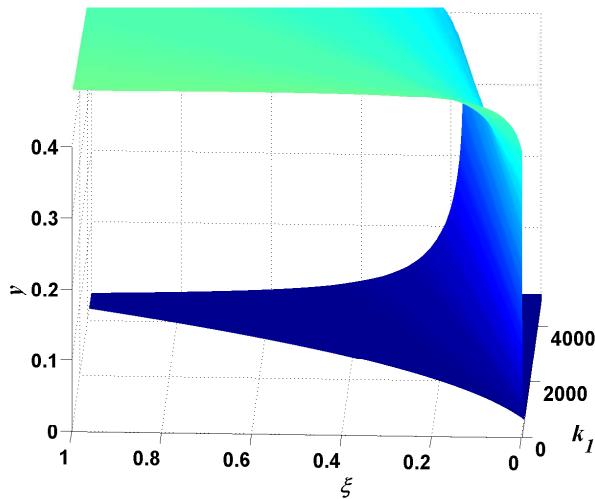


Рис. 2. Поверхность  $\Sigma_{st} = \{(\xi, k_1, y) : y = y_s \in [0, 1], \xi = \xi(y_s)\}$ , где  $\xi(y_s)$  определено в (16).

стационарных состояний над плоскостью параметров  $k_1$  и  $\xi_0$  является многолистной.

В дальнейшем будем предполагать, что значения параметров системы (9) соответствуют (6). Тогда поверхность  $\Sigma$ , показанная на рис. 2, имеет сборку Уитни. Проекция  $\Pi$  поверхности  $\Sigma$  на плоскость параметров  $(k_1, \xi_0)$  не взаимно однозначна. Существует множество значений  $k_1$  и  $\xi_0$ , являющееся объединением двух кривых, которым соответствуют два прообраза отображения  $\Pi$  (рис. 3, кривые 1), являющиеся образами складок на поверхности  $\Sigma$ . Точка пересечения кривых 1 соответствует сборке на поверхности  $\Sigma$ . Тем самым если при возмущении параметров точка  $(k_1, \xi_0)$  пересекает кривую 1, то в системе происходит бифуркация, связанная с изменением числа стационарных состояний.

Таким образом, если значения  $(k_1, \xi_0)$  рассматриваются из области  $\Omega_3^{ss}$ , ограниченной кривыми 1, то система (9) имеет три стационарных состояния. Для значений  $(\xi_0, k_1) \notin \Omega_{3ss} \cup \partial\Omega_{3ss}$  система (9) имеет одно стационарное состояние.

### 5. Бифуркация стационарного состояния седло-узел

Предположим, что значения параметров (6), определяющих зависимости  $k_j(y)$ ,  $j = -1, 2, 3$ , фиксированы. Определим множество точек  $(k_1^{sn}, \xi_0^{sn})$  на плоскости  $(k_1, \xi_0)$ , для которых система (9) имеет стационарное состояние  $(x_{sn}, y_{sn})$ , являющееся седло-узлом, т. е. выполнены равенства

$$\begin{aligned} P(x_{sn}, y_{sn}, \xi_0^{sn}) &= 0, \quad Q(x_{sn}, y_{sn}) = 0, \\ P_x(x_{sn}, y_{sn}, \xi_0^{sn})Q_y(x_{sn}, y_{sn}) - P_y(x_{sn}, y_{sn}, \xi_0^{sn})Q_x(x_{sn}, y_{sn}) &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

и, кроме того, седловая величина отлична от нуля:

$$P_x(x_{sn}, y_{sn}, \xi_0^{sn}) + \xi_0^{sn}Q_y(x_{sn}, y_{sn}, \xi_0) \neq 0.$$

Тогда при малом возмущении параметров  $(k_1, \xi_0)$  в системе (9) происходит локальная бифуркация в точке  $(x_{sn}, y_{sn})$ , связанная с изменением числа стационарных состояний.

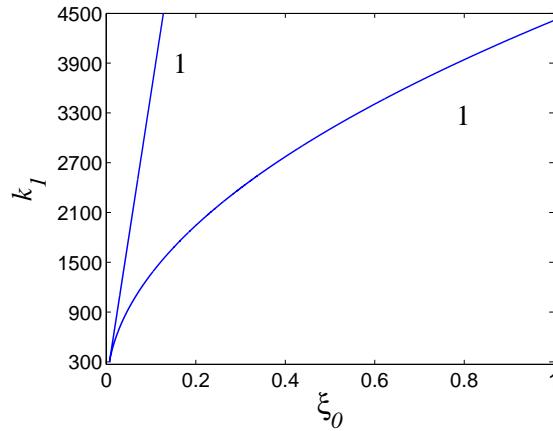


Рис. 3. Ветви бифуркационной кривой, выделяющие на плоскости параметров область существования трех стационарных состояний системы (9).

Учитывая, что  $x_{sn} = x_Q(y_{sn})$  (13), получим из системы (17) зависимости  $k_1^{sn} = k_1^{sn}(y_{sn})$  и  $\xi_0^{sn} = \xi_0^{sn}(y_{sn})$ :

$$\xi_0^{sn} = \frac{k_{-1}(y_{sn})f_2(y_{sn}) - g_2(y_{sn})f_1(y_{sn})}{g_1(y_{sn})f_1(y_{sn}) - k_3(y_{sn})y_{sn}f_2(y_{sn})}, \quad (18)$$

$$k_1^{sn} = \frac{k_{-1}(y_{sn}) + k_3(y_{sn})y_{sn}\xi_0^{sn}}{1 - f(y_{sn})}f(y_{sn}), \quad (19)$$

где  $f(y)$  определена в (14),

$$f_1(y) = 2k_2(y)(1 - y)[1 - f(y)] + k_3(y)y,$$

$$f_2(y) = (1 - y) \left[ 2k_2(y)[1 - f(y)] - \frac{dk_2(y)}{dy}(1 - y)[1 - f(y)]^2 + \right. \\ \left. + \left( k_3(y) + \frac{dk_3(y)}{dy}y \right) f(y) \right],$$

$$g_1(y) = k_3(y)yf(y) + (1 - y)[1 - f(y)]f(y) \left[ k_3(y) + \frac{dk_3(y)}{dy}y \right],$$

$$g_2(y) = k_{-1}(y)f(y) + \frac{dk_{-1}(y)}{dy}(1 - y)[1 - f(y)]f(y).$$

Таким образом, для  $0 \leq y_{sn} \leq 1$  выражения (18) и (19) определяют множество значений  $\xi_0 = \xi_0^{sn}$  и  $k_1 = k_1^{sn}$ , при которых система (9) имеет негрубое стационарное состояние седло-узел.

Пусть коэффициенты системы (9) определяются соотношениями (2), (3), (5) и (6). Тогда множество значений  $\xi_0$  и  $k_1$ , при которых система имеет стационарное состояние седло-узел, показано на рис. 3. В этом случае если точка  $(\xi_0, k_1)$  лежит внутри (или вне) области, ограниченной кривыми 1, то соответствующая система (9) имеет три стационарных состояния (или одно).

Важный результат этой работы состоит в том, что найдены параметры модели, при которых в однопараметрическом семействе двумерных динамических систем наряду с гистерезисом стационарных состояний *ABCD* на одной из ветвей узлов и фокусов происходит потеря устойчивости стационарного состояния в точке *K* (см. рис. 1). В ситуации общего положения такая потеря устойчивости стационарного

состояния порождает однопараметрическое семейство периодических решений. Различные максимальные семейства периодических решений будет подробно изучаться при моделировании сложных автоколебаний, поскольку наличие таких максимальных семейств является одним из достаточных условий для существования сложной динамики (см. [7]) в полной модели (1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Slavinskaya E. M., Stonkus O. A., Gulyaev R. V., Ivanova A. S., Zaikovskii V. I., Kuznetsov P. A., Boronin A. I. Structural and chemical states of palladium in Pd/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> catalysts under self-sustained oscillations in reaction of CO oxidation // Appl. Catalysis A: General. 2011. V. 401. P. 83–97.
2. Lashina E. A., Slavinskaya E. M., Chumakova N. A., Stonkus O. A., Gulyaev R. V., Stadnichenko A. I., Chumakov G. A., Boronin A. I., Demidenko G. V. Self-oscillations in CO oxidation on PdO/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> catalyst // Chem. Eng. Sci. 2012. V. 83. P. 149–158.
3. Андронов А. А., Леонович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1966.
4. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
5. Баутин Н. Н., Леонович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.
6. Чумаков Г. А. Динамика нелинейной системы дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1180–1195.
7. Чумаков Г. А., Слинько М. Г. Кинетическая турбулентность (хаос) скорости реакции окисления водорода на металлических катализаторах // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 5. С. 1194–1197.

г. Новосибирск

15 октября 2013 г.

УДК 517.928.4:517.929.5

МНОГОПИКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
В ТРЕХМЕРНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
РЕАКЦИИ ОКИСЛЕНИЯ ОКСИДА  
УГЛЕРОДА НА НАНОЧАСТИЦАХ  
ПАЛЛАДИЯ\*)

Е. А. Лашина, Н. А. Чумакова, Г. А. Чумаков

Настоящее исследование является продолжением работы [1], в которой изучается двумерная модель гетерогенной каталитической реакции окисления CO и найдены параметры модели, при которых в однопараметрическом семействе двумерных динамических подсистем существует гистерезис стационарных состояний и на одной из ветвей узлов и фокусов происходит потеря устойчивости стационарного состояния.

Здесь мы предприняли попытку дальнейшего развития сценария возникновения многопиковых и хаотических автоколебаний, предложенного в [2], и рассмотрели в качестве примера трехмерную динамическую систему, моделирующую кинетические автоколебания в реакции окисления CO. Основной является идея блочного построения сложной динамики системы с двумя быстрыми и одной медленной переменными на основе анализа фазовых портретов однопараметрического семейства подсистем меньшей размерности. Целью нашей работы является получение достаточных условий существования сложных автоколебаний в динамической системе трех нелинейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений.

---

\*) Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН (Междисциплинарный проект 80).

### 1. Бифуркации периодических решений

Рассмотрим однопараметрическое семейство динамических систем с параметром  $\xi_0 \in I_\xi = (0, 1)$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= k_1(1 - x - y) - k_{-1}(y)x - k_3(y)xy\xi_0 \equiv P(x, y, \xi_0), \\ \dot{y} &= k_2(y)(1 - x - y)^2\xi_0 - k_3(y)xy\xi_0 \equiv \xi_0 Q(x, y),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $(x, y) \in G = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ ,  $x$  и  $y$  — безразмерные концентрации СО и кислорода, адсорбированных на поверхности катализатора (см. [1]). Будем предполагать, что

$$\begin{aligned}k_j(y) &= \Delta k_j \cdot s(y) + k_j^{\text{av}}, \quad j = -1, 2, 3, \\ s(y) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq y_c - \delta, \\ \sin(\pi(y_c - y)/(2\delta)), & y_c - \delta < y < y_c + \delta, \\ -1, & y_c + \delta \leq y \leq 1, \end{cases} \\ \Delta k_j &= (k_j^l - k_j^r)/2, \quad k_j^{\text{av}} = (k_j^r + k_j^l)/2,\end{aligned}\quad (2)$$

где постоянные  $\Delta k_j$  и  $k_j^{\text{av}}$  положительны, параметры  $\delta \in (0, 0.5)$  и  $y_c \in (\delta, 1 - \delta)$  определяют ширину и расположение интервала значений  $y$ , на котором  $s(y)$  монотонно убывает от  $+1$  до  $-1$ . В численных примерах будем использовать следующие значения параметров [3], если не оговорено другое:

$$\begin{aligned}k_{-1}^l &= 49.82, \quad k_{-1}^r = 0.19, \quad k_2^l = 10^5, \quad k_2^r = 2 \cdot 10^4, \\ k_3^l &= 1.18 \cdot 10^5, \quad k_3^r = 11.8, \quad y_c = 0.37, \quad \delta = 0.1.\end{aligned}\quad (3)$$

Заметим, что значения параметров  $k_1$  и  $\xi_0$  пока не заданы.

Исследуем, возможна ли в системе (1) при некотором  $k_1$  бифуркация Андронова — Хопфа при варьировании параметра  $\xi_0$  [4–9].

Для определения значений параметров  $k_1$  и  $\xi_0$  используем необходимые условия локальной бифуркации рождения периодического решения из неподвижной точки, при которых внутри области  $G$  существует стационарное состояние  $(x_h, y_h)$  такое, что матрица Якоби, вычисленная в этой точке, имеет собственные значения вида  $\pm i\omega$ ,  $\omega \neq 0$ :

$$P(x_h, y_h, \xi_0) = 0, \quad Q(x_h, y_h) = 0, \quad (4)$$

$$P'_x(x_h, y_h, \xi_0) + \xi_0 Q'_y(x_h, y_h) = 0, \quad (5)$$

$$(P'_x Q'_y - P'_y Q'_x)|_{x=x_h, y=y_h} > 0. \quad (6)$$

Уравнение главной изоклины  $P(x, y, \xi_0) = 0$  можно записать в виде

$$x = k_1(1 - y)/[k_1 + k_{-1}(y) + k_3(y)\xi_0],$$

а второй главной изоклины  $Q(x, y) = 0$  — как  $x = (1 - y)f(y)$ , где  $f(y)$  определяется формулой

$$f(y) = \frac{\sqrt{4(1-y) + A(y)} - \sqrt{A(y)}}{\sqrt{4(1-y) + A(y)} + \sqrt{A(y)}}, \quad A(y) = \frac{k_3(y)}{k_2(y)}y. \quad (7)$$

Тогда  $y_h$  является решением следующего уравнения:

$$\frac{k_1}{k_1 + k_{-1}(y_h) + k_3(y_h)y_h\xi_0} = f(y_h), \quad (8)$$

а координата  $x_h$  стационарной точки вычисляется как

$$x_h = (1 - y_h)f(y_h). \quad (9)$$

След матрицы Якоби, вычисленной в  $(x_h, y_h)$ , можно записать в виде

$$\begin{aligned} P'_x(x_h, y_h, \xi_0) + \xi_0 Q'_y(x_h, y_h) \\ = -k_1 - k_{-1}(y_h) - \xi_0 \left( k_3(y_h)y_h + g(y_h) + \frac{dk_3(y_h)}{dy}x_hy_h \right), \end{aligned}$$

где

$$g(y_h) = 2k_2(y_h)(1 - x_h - y_h) - \frac{dk_2(y_h)}{dy}(1 - x_h - y_h)^2 + k_3(y_h)x_h. \quad (10)$$

Отсюда видно, что для  $y_h$  вне интервала  $(y_c - \delta, y_c + \delta)$  след матрицы Якоби отрицателен. Следовательно, условие (5) эквивалентно равенству

$$k_1 + k_{-1}(y_h) + k_3(y_h)y_h\xi_0 + g(y_h)\xi_0 = -\frac{dk_3(y_h)}{dy}x_hy_h\xi_0, \quad (11)$$

причем  $y_h \in (y_c - \delta, y_c + \delta)$ .

Таким образом, из равенств (8) и (11) следует, что при выполнении условий (3), параметры  $k_1 = k_1^h$  и  $\xi_0 = \xi_0^h$ , при которых существует стационарное состояние  $(x_h, y_h)$  с чисто мнимыми корнями, удовлетворяют системе уравнений

$$\xi_0^h = \frac{k_{-1}(y_h)}{\left(g(y_h) + \frac{dk_3(y_h)}{dy}x_h y_h\right)(f(y_h) - 1) - k_3(y_h)y_h}, \quad (12)$$

$$k_1^h = -f(y_h) \left(g(y_h) + \frac{dk_3(y_h)}{dy}x_h y_h\right) \xi_0^h,$$

где  $y_h \in (y_c - \delta, y_c + \delta)$  и значения  $x_h$ ,  $f(y_h)$  и  $g(y_h)$  определены формулами (9), (7) и (10) соответственно. Кроме того, необходимо, чтобы выполнялось неравенство (6) и, более того,  $k_1^h > 0$  и  $0 < \xi_0^h < 1$ .

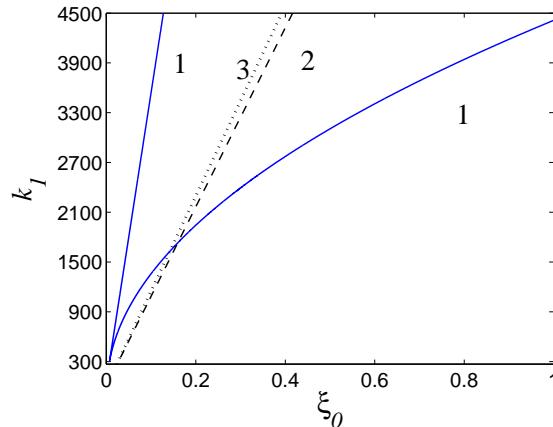


Рис. 1. Бифуркационные кривые, определяющие параметры  $(\xi_0, k_1)$ , при которых система (1) имеет негрубое стационарное состояние типа седлоузел (кривая 1), неустойчивый сложный фокус (кривая 2) или полуустойчивый предельный цикл (кривая 3).

Численно показано, что, используя формулы (12) и (6), значение  $k_1 = k_1^h$  можно выбрать так, что при некотором  $\xi_0 = \xi_0^h$  система (1) име-

ет негрубое стационарное состояние  $(x_h, y_h)$ , являющееся сложным фокусом [8]. Например, на рис. 1 показана кривая 2 на плоскости  $(\xi_0, k_1)$  такая, что для каждой пары значений  $k_1$  и  $\xi_0$  на этой кривой в системе существует неустойчивый сложный фокус. Устойчивость фокуса определяется с помощью первой ляпуновской величины  $l$  (см. [6, 9]). В рассматриваемом случае  $l > 0$ , и при малом изменении параметров в системе (1) происходит бифуркация Андронова — Хопфа и зарождается грубый неустойчивый предельный цикл (рис. 2).

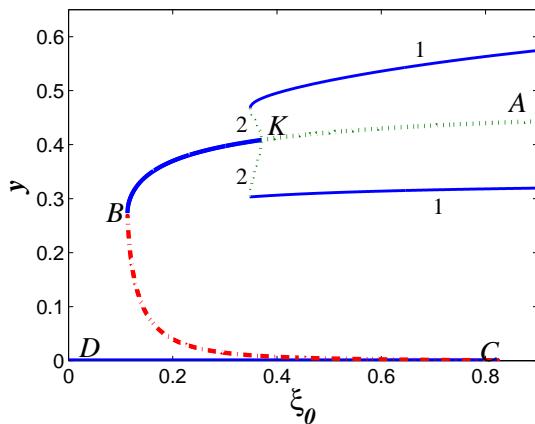


Рис. 2. Зависимость  $y$ -координаты стационарных состояний от параметра  $\xi$ :  $CD$  и  $KB \setminus \{K\}$  — устойчивые стационарные состояния,  $BC \setminus (\{B\} \cup \{C\})$  — седла,  $AK$  — неустойчивые фокусы и узлы. Кривые 1 (и 2) — максимальные и минимальные значения переменной  $y$  на устойчивых (и неустойчивых) периодических решениях системы (1) при  $k_1 = 4000$ .

## 2. Максимальные семейства периодических решений

На рис. 3 слева кривая  $AKBCD$  является максимальным семейством стационарных состояний однопараметрического семейства систем (1) с параметром  $\xi_0$ . Проекция этой кривой на плоскость  $(\xi_0, y)$  показана на рис. 2. Здесь точки  $B$  и  $C$  соответствуют негрубым ста-

ционарным состояниям системы, имеющим тип седло-узел. Точкой  $K$  обозначено негрубое стационарное состояние  $(x_h, y_h)$  при  $\xi_0 = 0.370108$ , где  $x_h = 0.301507$  и  $y_h = 0.408646$ . Кривые  $CD \setminus \{C\}$  и  $KB \setminus \{K\}$  состоят из устойчивых стационарных состояний, кривая  $AK$  — из неустойчивых стационарных состояний, имеющих тип узел или фокус. Стационарные состояния, лежащие на кривой  $BC \setminus \{B\}$ , являются седловыми. Для определения типа и устойчивости стационарного состояния рассмотрены собственные значения матрицы Якоби системы, линеаризованной в его окрестности.

При  $\xi_0 = 0.370108$  в системе (1) происходит бифуркация Андронова — Хопфа и зарождается неустойчивое периодическое решение периода  $T \approx 3.8 \cdot 10^{-4}$ .

Продолжая грубый предельный цикл по параметру  $\xi_0$  на максимально возможный интервал  $\xi_0^l < \xi_0 < \xi_0^r$ , получим максимальное семейство грубых предельных циклов однопараметрического семейства динамических систем (1). При  $\xi_0 = \xi_0^l$  и  $\xi_0 = \xi_0^r$  в системе (1) происходит бифуркация периодического решения, так что  $\xi_0^l = \xi_0^h$  или  $\xi_0^r = \xi_0^h$ . Построение максимальных семейств периодических решений будем проводить с помощью метода продолжения по параметру, основанного на определении неподвижной точки функции последования (см. [8, 10]).

Численный эксперимент показал, что (1) имеет максимальное семейство грубых неустойчивых предельных циклов  $\gamma^u(\xi_0)$  для  $\xi_0 \in (0.348538, 0.370108)$ . Кроме того, существует максимальное семейство грубых устойчивых предельных циклов  $\gamma^s(\xi_0)$  для  $\xi_0 \in (0.348538, 1)$  (см. рис. 3). При  $\xi_0 = 0.348538$  в системе (1) происходит бифуркация слияния устойчивого и неустойчивого предельного циклов. На рис. 2 показана зависимость амплитуды колебаний переменной  $y$  на циклах от параметра  $\xi_0$ .

Таким образом, при рассматриваемых значениях параметров изменение фазовых портретов системы (1) при увеличении  $\xi_0$  происходит следующим образом. При  $\xi_0 = 0.001$  существует единственное глобально устойчивое стационарное состояние — узел (рис. 4 слева). При  $\xi_0 = 0.2$  система (1) имеет три стационарных состояния, два из которых — устойчивые узел и фокус, и одно — седло. На рис. 5 слева

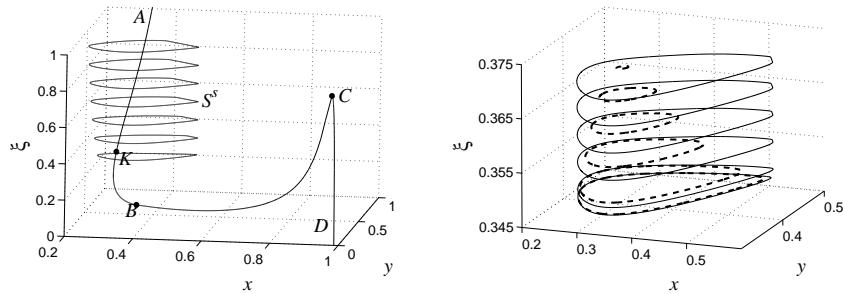


Рис. 3. Слева. Максимальные семейства  $ABCD$  стационарных состояний и  $S^s$  устойчивых предельных циклов. Справа. Семейства устойчивых (сплошная линия) и неустойчивых (пунктирная линия) предельных циклов однопараметрического семейства системы (1).

показан фазовый портрет при  $\xi_0 = 0.365$ . В этом случае существуют три стационарных состояния: устойчивые узел и фокус и неустойчивое седло. Устойчивый фокус окружает два предельных цикла: кривые 1 и 2 — это устойчивая и неустойчивая периодические траектории. Наконец, при  $\xi_0 = 0.94$  система (1) имеет одно стационарное состояние (неустойчивый фокус) и устойчивый предельный цикл.

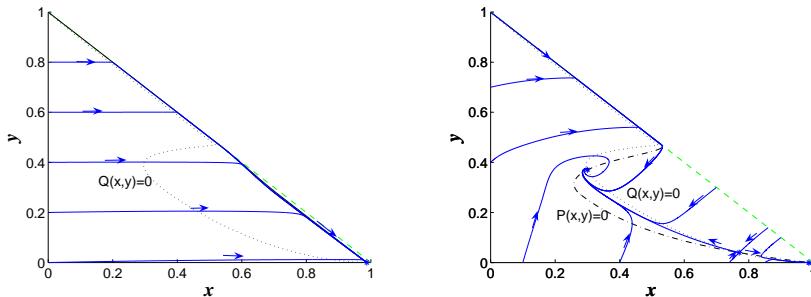


Рис. 4. Фазовые портреты системы (1) для  $k_1 = 4000$  и  $\xi_0 = 0.001$  (слева) и  $\xi_0 = 0.2$  (справа).

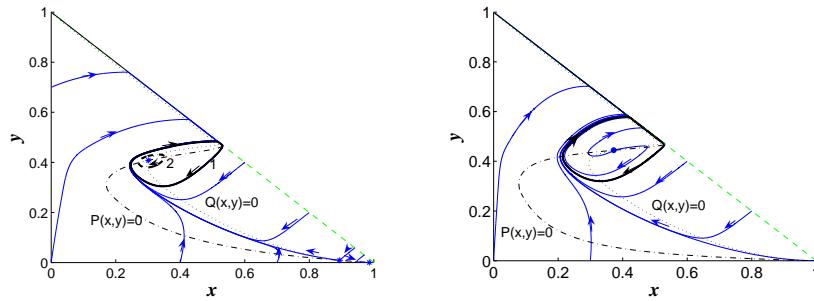


Рис. 5. Фазовые портреты системы (1) для  $k_1 = 4000$  и  $\xi_0 = 0.365$  (слева) и  $\xi_0 = 0.94$  (справа).

Таким образом, на плоскости  $(\xi_0, k_1)$  можно выделить область параметров  $\xi_0$  и  $k_1$ , при которых система имеет два грубых предельных цикла, устойчивый и неустойчивый. На параметрическом портрете (см. рис. 1) эта область ограничена кривыми 2 и 3.

### 3. Динамика трехмерной системы

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1(1 - x - y) - k_{-1}(y)x - k_3(y)xy\xi, \\ \dot{y} &= k_2(y)(1 - x - y)^2\xi - k_3(y)xy\xi, \\ \dot{v} &= k_4(1 - v) - k_{-4}v, \\ \dot{\xi} &= \varepsilon(v(1 - \xi) - \alpha y\xi), \end{aligned} \tag{13}$$

содержащую малый параметр  $\varepsilon > 0$ . Как показано в [1], для любых начальных данных  $(x(0), y(0), v(0), \xi(0)) = (x_0, y_0, v_0, \xi_0)$  существует момент времени  $t = \tau$  такой, что для всех  $t > \tau$  траекторию системы (1) можно приблизить решением трехмерной динамической системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1(1 - x - y) - k_{-1}(y)x - k_3(y)xy\xi, \\ \dot{y} &= k_2(y)(1 - x - y)^2\xi - k_3(y)xy\xi, \\ \dot{\xi} &= \varepsilon(v_{st}(1 - \xi) - \alpha y\xi), \end{aligned} \tag{14}$$

где  $v(t) \approx v_{st}$  и  $v_{st} = k_4/(k_4 + k_{-4})$ .

**Многопиковые автоколебания.** Предположим, что значения параметров системы (1) выбраны так, что соответствующее однопараметрическое семейство двумерных динамических систем относительно переменных  $x$  и  $y$  с параметром  $0 < \xi < 1$  имеет гистерезис  $ABCD$  стационарных состояний и семейства  $\{\gamma^s(\xi)\}$  и  $\{\gamma^u(\xi)\}$  устойчивых и неустойчивых периодических решений. Отметим, что в фазовом пространстве  $G \times I_\xi$  множество  $ABCD = AK \cup KB \cup BC \cup CD$  является гладкой кривой и существуют две поверхности  $S^s = \{\gamma^s(\xi)\}$  и  $S^u = \{\gamma^u(\xi)\}$ , образованные периодическими решениями.

Рассмотрим множество

$$\Gamma = \{(x, y, \xi) \in G \times I_\xi : v_{st}(1 - \xi) - \alpha y \xi = 0\}$$

точек фазового пространства  $G \times I_\xi$ , в которых  $\dot{\xi} = 0$ . Можно показать, что существуют такие значения параметра  $\alpha$ , что если  $(x, y, \xi) \in CD$ , то  $\dot{\xi} > 0$ , и если  $(x, y, \xi) \in AB$  или  $(x, y, \xi) \in S^s$ , то  $\dot{\xi} < 0$ . Предположим далее, что поверхность  $\Gamma$  пересекает кривую  $ABCD$  в одной точке  $O = (x_*, y_*, \xi_*)$ ,  $O \in BC$ . Тогда система (14) имеет единственное стационарное состояние  $(x_*, y_*, \xi_*)$ , неустойчивое при малых значениях  $\varepsilon$ . (При рассматриваемом наборе значений параметров имеем  $\varepsilon = 0.415$ .) Кроме того, предположим, что поверхность  $\Gamma$  не пересекает поверхности  $S^s = \{\gamma^s(\xi)\}$  и  $S^u = \{\gamma^u(\xi)\}$ .

Тогда система (14) имеет многопиковый колебательный режим. Действительно, пусть начальная точка  $(x_0, y_0, \xi_0)$  лежит в окрестности кривой  $KB$  (или  $CD$ ), состоящей из устойчивых стационарных состояний системы (1). Согласно классическим результатам А. Н. Тихонова [11] о решениях систем ОДУ с малым параметром при малых значениях  $\varepsilon > 0$  и начальных условиях  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  и  $\xi(0) = \xi_0$  решение  $(x, y, \xi) = (x(t), y(t), \xi(t))$  системы (14) на некотором интервале времени  $[0, T]$  лежит в окрестности кривой  $KB$  (или  $CD$ ). В силу выбора  $\alpha$  компонента  $\xi(t)$  решения уменьшается (или увеличивается) с увеличением времени, и при  $t = T$  точка  $(x(T), y(T), \xi(T))$  приходит в окрестность точки  $B$  (или  $C$ ). В теории релаксационных колебаний (см. [12]) точка  $B$  называется *точкой срыва*. Существует момент времени  $t = T_1$ ,  $T_1 > T$ , такой, что  $(x(T_1), y(T_1), \xi(T_1))$  попадает в окрестность кривой  $CD$  и  $|\xi(T_1) - \xi(T)| = O(\varepsilon)$ . Отметим, что  $C$  также является точкой

срыва, и если  $(x(T), y(T), \xi(T))$  лежит в окрестности этой точки, то существует момент времени  $t = T_2 > T$  такой, что  $(x(T_2), y(T_2), \xi(T_2))$  находится в окрестности поверхности  $S^s$  и  $|\xi(T_2) - \xi(T)| = O(\varepsilon)$ .

Предположим, что точка  $(x_0, y_0, \xi_0)$  лежит в окрестности поверхности  $S^s$ . Тогда при малых значениях  $\varepsilon$  и начальных условиях  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $\xi(0) = \xi_0$  решение  $(x, y, \xi) = (x(t), y(t), \xi(t))$  системы (14) на некотором интервале времени  $[0, T^s]$  проходит в окрестности поверхности  $S^s$ . При  $t = T^s$  точка  $(x(T^s), y(T^s), \xi(T^s))$  попадает в окрестность полуустойчивого предельного цикла. При дальнейшем увеличении  $t$  существует  $t = T_1^s > T^s$  такое, что, пройдя в окрестности дуги  $KB$ , точка  $(x(T_1^s), y(T_1^s), \xi(T_1^s))$  попадает в окрестность кривой  $CD$ .

Таким образом, при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$  система (14) генерирует многопиковье автоколебания  $\zeta(\varepsilon)$ , причем колебания соответствующего периодического решения являются релаксационными. Колебания компонент  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют *многопиковый* характер: чередуются колебания, имеющие большую амплитуду, и колебания с малой амплитудой.

Исходная система (13) является малым возмущением системы (14). Поскольку многопиковье колебания системы (14) и стационарное состояние  $v_s = k_4/(k_4 + k_{-4})$  уравнения  $\dot{v} = k_4(1 - v) - k_{-4}v$  являются устойчивыми к малым возмущениям, то система (13) при малых  $\varepsilon$  также имеет многопиковье автоколебания такие, что их проекция в пространство  $G \times I_\xi$  близка к многопиковым колебаниям  $\zeta(\varepsilon)$  системы (14), а компонента  $v(t)$  соответствующего колебательного режима лежит в окрестности точки  $v = v_s$ .

Например, при  $k_4 = 1500$ ,  $k_{-4} = 5000$  имеем многопиковье колебания в полной системе (1) из [1] и  $v_{st} = 0.107143$  (рис. 6).

Основной результат этой работы состоит в том, что с использованием принципа блочного построение сложной динамики (см. [2]) найдены параметры модели, при которых в трехмерной динамической системе с быстрыми и медленными переменными существует класс решений, позволяющий моделировать многопиковье автоколебания, полученные в химическом эксперименте [3, 13].

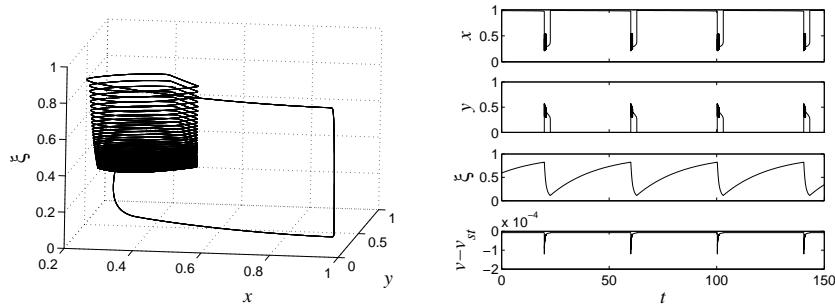


Рис. 6. Слева. Многопиковые автоколебания, предельный цикл. Справа. Зависимости компонент периодического решения системы (1) в [1] от времени. Значения параметров определены в (3),  $\alpha = 5.37$ ,  $\varepsilon = 0.415$ ,  $k_4 = 1500$ ,  $k_{-4} = 5000$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лашина Е. А., Чумакова Н. А., Чумаков Г. А. О двумерной кинетической модели реакции окисления оксида углерода на наночастицах палладия // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 2. С. 271–285.
2. Чумаков Г. А., Слинько М. Г. Кинетическая турбулентность (хаос) скорости реакции окисления водорода на металлических катализаторах // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 5. С. 1194–1197.
3. Lashina E. A., Slavinskaya E. M., Chumakova N. A., Stonkus O. A., Gulyaev R. V., Stadnichenko A. I., Chumakov G. A., Boronin A. I., Demidenko G. V. Self-oscillations in CO oxidation on PdO/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> catalyst // Chem. Eng. Sci. 2012. V. 83. Р. 149–158.
4. Андронов А. А., Леонтьевич Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.
5. Kuznetsov Yu. A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer-Verl., 2004.
6. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.
7. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуя Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.: Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ин-т. компьютерных исследований, 2009.
8. Андронов А. А., Леонтьевич Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
9. Баутин Н. Н., Леонтьевич Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.

10. Чумаков Г. А., Лашина Е. А., Чумакова Н. А. Максимальные семейства периодических решений кинетической модели гетерогенной каталитической реакции // Вестн. НГУ. Сер. Математика, Механика, Информатика. 2005. Т. 5, вып. 4. С. 3–20.
11. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 193–204.
12. Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические решения и бифуркационные процессы в сингулярно-возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
13. Slavinskaya E. M., Stonkus O. A., Gulyaev R. V., Ivanova A. S., Zaikovskii V. I., Kuznetsov P. A., Boronin A. I. Structural and chemical states of palladium in Pd/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> catalysts under self-sustained oscillations in reaction of CO oxidation // Appl. Catalysis A: General. 2011. V. 401. P. 83–97.

г. Новосибирск

15 октября 2013 г.

УДК 519.6:697.1

ОБ ОДНОМ МНОГОСЕТОЧНОМ МЕТОДЕ  
РАСЧЕТА ДВУМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО  
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НАРУЖНОЙ  
ОГРАЖДАЮЩЕЙ КОНСТРУКЦИИ

В. Ю. Шадрин, И. И. Сивцев

При проектировании наружных ограждающих конструкций проводится расчет стационарного температурного поля, так как теплопотери и термическое сопротивление конструкции необходимо вычислять на основании температурного поля.

Нами предложен двухсеточный метод решения третьей краевой задачи для расчета двумерного стационарного температурного поля наружных ограждающих конструкций.

При решении третьей краевой задачи для многомерного уравнения Лапласа известными прямыми и итерационными методами возникают проблемы с нехваткой памяти и увеличением времени расчета. Эффективным численным методом решения систем уравнений, аппроксимирующих дифференциальные и интегральные уравнения, является многосеточный метод. Начиная с [1], разработано много вариантов многосеточных методов.

Идея нашего итерационного метода заключается в том, что одна итерация метода состоит из одной или нескольких итераций на мелкой сетке исходной задачи простым итерационным методом Зейделя и решения задачи для поправки на грубой сетке прямым методом Гаусса [2]. Операторами рестрикции (сноса) и пролонгации (восполнения), связывающими пространства большой и маленькой размерностей, являются соответственно простое сужение (сетки вложены) и линейная интерполяция.

---

© 2013 Шадрин В. Ю., Сивцев И. И.

## 1. Математическая постановка задачи

Расчет температурного поля ограждающих конструкций приводит к необходимости решения третьей краевой задачи для уравнения Лапласа.

Будем рассматривать третью краевую задачу в прямоугольной области  $\bar{\Omega} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq p\}$ . Требуется найти в  $\bar{\Omega}$  решение  $U = U(x, y)$  задачи

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \alpha_{cp}(U - T_{cp}) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

где  $\Gamma$  — граница области  $\Omega$ ,  $U$  — искомая температура,  $^{\circ}\text{C}$ ,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C})$ ,  $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}$  — производная по внешней нормали,  $T_{cp}$  — температура среды (не зависит от времени),  $^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_{cp}$  — коэффициент теплообмена поверхности ограждения,  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C})$ .

При этом нужно иметь в виду, что ограждающие конструкции, как правило, неоднородны. Отсюда следует, что функция коэффициента теплопроводности является разрывной кусочно-постоянной функцией двух переменных.

Задачу (1)–(2) дискретизируем методом сеток на мелкой сетке с помощью разностной схемы со вторым порядком точности по обеим пространственным переменным. Полученную систему будем решать двумя методами:

- 1) методом Зейделя,
- 2) двухсеточным методом (комбинация метода Зейделя и метода Гаусса).

По полученным результатам сравним эти методы.

Опишем кратко идею многосеточного метода, предложенного в [3]. Предположим, требуется решить уравнение эллиптического типа

$$Lu = f, \quad (3)$$

где  $L$  — некоторый линейный эллиптический оператор,  $u$  — неизвестная функция,  $f$  — свободный член. Частным случаем такой задачи как

раз является задача расчета стационарного температурного поля наружной ограждающей конструкции, удовлетворяющего уравнению (1).

Пусть система линейных алгебраических уравнений, являющихся разностным аналогом уравнения (3) на квадратной сетке с мелким шагом  $h$ , имеет вид

$$L_h u_h = f_h. \quad (4)$$

Для решения системы (4) предлагается двухсеточный метод:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h^{\text{new}} &= \tilde{u}_h + \tilde{v}_h = \tilde{u}_h + P\tilde{v}_H = \tilde{u}_h + PL_H^{-1}(-d_H) \\ &= \tilde{u}_h - PL_H^{-1}Rd_h = \tilde{u}_h - PL_H^{-1}R(L_h\tilde{u}_h - f_h). \end{aligned} \quad (5)$$

В формуле (5) используются решения большой и маленькой систем:

$$L_h u_h = f_h, \quad u_h \in \Omega_h,$$

$$L_H u_H = f_H, \quad u_H \in \Omega_H, \quad H \gg h.$$

Операторы  $R$  и  $P$  связывают пространства различных размерностей и называются соответственно *рестрикцией* и *пролонгацией*.

При использовании многосеточного метода возникают следующие четыре проблемы.

1. Выбор метода получения приближенного решения  $\tilde{u}_h$ . Мы выбрали метод Зейделя.

2. Выбор оператора сужения  $R$ . Мы выбрали простое сужение, так как грубая сетка вложена в мелкую.

3. Выбор оператора продолжения  $P$ . Мы выбрали линейную интерполяцию.

4. Выбор метода «огрубленного» оператора  $L_H$  при известном  $L_h$ . Мы выбрали разностный аналог оператора Лапласа на грубой сетке. Грубая система решается прямым методом Гаусса.

## 2. Алгоритм двухсеточного метода

**ЭТАП 1.** Задаем начальное приближение  $U_h^{(0)}$  (например,  $U_h^{(0)} = 0$ ). Полагаем  $k = 0$ .

**ЭТАП 2.** Методом Зейделя проводим одну итерацию  $u_h^{(k)}$ .

**ЭТАП 3.** Вычисляем невязку  $d_h = L_h u_h^{(k)} - f_h$ .

ЭТАП 4. Вычисляем  $f_H = Rd_h$ , где  $R : U_h \rightarrow U_H$  — рестрикция невязки с мелкой сетки на грубую.

В нашем случае грубая сетка вложена в мелкую сетку, как показано на рис. 1. Оператор  $R$  работает простым сужением сетки.

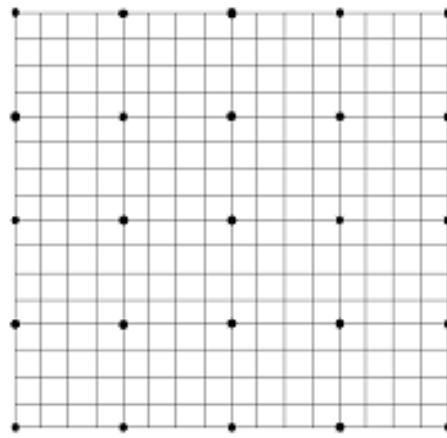


Рис. 1. Сеточная область

ЭТАП 5. Решаем грубую систему  $L_H v_H = f_H$  прямым методом Гаусса, поскольку размерность маленькая.

ЭТАП 6. Вычисляем поправки с помощью пролонгации

$$\tilde{v}_h = Pv_H, \quad P : U_H \rightarrow U_h.$$

В данном случае для оператора пролонгации используем линейную интерполяцию.

ЭТАП 7. Вычисляем следующую итерацию

$$u_h^{(k+1)} = u_h^{(k)} + \tilde{v}_h^{(k)}.$$

ЭТАП 8. Расчет проводим до тех пор, пока температурное поле не выйдет на стационар, т. е. когда норма разности (равномерная норма) между соседними итерациями не окажется меньше заданной погрешности  $\varepsilon$ :

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| = \max_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m} |u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}|, \quad \|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| < \varepsilon.$$

Таблица 1. Результаты численных экспериментов

Метод решения	$N$	$\varepsilon$	$\ u^{(k+1)} - u^{(k)}\ $	$\ u^{(k+1)} - u^*\ $	Количество итераций
Итерационный метод Зейделя	50	0,01	0,009993	6,045654	756
		0,001	0,000999	0,616282	2167
		0,0001	0,000100	0,061866	3590
		0,00001	0,000010	0,006486	5012
	40	0,01	0,009993	3,938044	648
		0,001	0,000998	0,393305	1558
		0,0001	0,000100	0,039634	2466
		0,00001	0,000010	0,004408	3374
Двухсеточный метод	50	0,01	0,009084	0,095964	35
		0,001	0,000940	0,012935	61
		0,0001	0,000096	0,001656	93
		0,00001	0,000010	0,000471	127
	40	0,01	0,009415	0,108851	37
		0,001	0,000967	0,014862	69
		0,0001	0,000097	0,001711	106
		0,00001	0,000010	0,000601	143

Если точность достигается, то конец счета, иначе  $k := k + 1$  и идем на этап 2.

### 3. Численные эксперименты

В качестве тестовой задачи для сравнения методов рассматривали расчет температурного поля прямоугольной однородной ограждающей конструкции. Тогда задача на самом деле является одномерной, что позволяет аналитически найти точное решение.

Ограждение состоит из сосны с коэффициентом теплопроводности  $\lambda = 0.14 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$  размером  $0.2\text{м} \times 0.2\text{м}$ . Наружная и внутренняя температуры считаются постоянными:  $T_H = -54^\circ\text{C}$  и  $T_B = 21^\circ\text{C}$ . Коэффициент теплообмена наружной поверхности ограждения равен

$\alpha_H = 23 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ , а коэффициент теплообмена внутренней поверхности ограждения —  $\alpha_B = 8.7 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ .

Полученные результаты приведены в табл. 1, где используются следующие обозначения:

- $N$  — число узлов сетки по каждой переменной,  
 $\varepsilon$  — заданная точность между соседними итерациями,  
 $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|$  — фактическая погрешность между соседними итерациями,  
 $\|u^{(k+1)} - u^*\|$  — разность между вычисленным приближенным решением и точным решением в равномерной норме.

Из табл. 1 видно, что двухсеточный метод решает задачу в значительной степени быстрее и точнее, чем итерационный метод Зейделя.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Федоренко Р. П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28, № 2. С. 121–182.
2. Самарский А. А. Введение в численные методы: учебное пособие для вузов. СПб: Лань, 2005.
3. Шевченко Д. В. Применение многосеточных методов для расчета давления в нефтяном пласте // Мат. моделирование. 2002. Т. 14, № 8. С. 113–118.

г. Якутск

5 июня 2013 г.

## АННОТАЦИИ

УДК 512.543.1

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

А. М. Абдрахманов, А. И. Кожанов. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Изучается разрешимость краевых задач для уравнения

$$(-1)^{p+1} D_t^{2p} u - Au = f(x, t)$$

( $A$  — эллиптический оператор, действующий по пространственным переменным,  $p \geq 1$  — целое) с условием интегрального вида на боковой поверхности. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Библиогр. 13.

Ключевые слова: неклассические дифференциальные уравнения высокого порядка, задачи с интегральными условиями, существование, единственность.

УДК 517.559+517.55

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА. В. И. Бидерман, В. Я. Прудников. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Рассматривается вопрос о представлении одного класса плюрисубгармонических функций, дается определение плюригармонического продолжения со сферы в шар. Библиогр. 4.

Ключевые слова: плюрисубгармонические функции, плюригармоническое продолжение со сферы в шар.

УДК 517.956.32

ДИССИПАТИВНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЭНЕРГИИ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. В. М. Гордиенко. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Рассматривается смешанная задача для многомерного волнового уравнения в четверти пространства. Граничное условие задано в виде линейной комбинации первых производных. Предполагается выполненным равномерное условие Лопатинского. В этом случае построены все возможные диссипативные интегралы энергии. Эти интегралы энергии параметризованы точками верхней полы телесного конуса второго порядка. Расположение конуса и его геометрические параметры охарактеризованы через коэффициенты граничного условия исходной задачи. Библиогр. 9.

Ключевые слова: волновое уравнение, смешанная задача, равномерное условие Лопатинского, диссипативный интеграл энергии.

УДК 517.98

РЕШЕТОЧНО-МЕТРИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МОНОТОННОГО ОПЕРАТОРА. А. Е. Гутман, А. В. Коптев. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Рассмотрено понятие монотонного линейного оператора, действующего из векторной решетки в нормированное пространство. Показано, что всякий такой оператор допускает представление в виде композиции решеточного гомоморфизма и линейной изометрии. Приведены приложения полученных результатов к исследованию непрерывных и измеримых расслоений банаховых решеток. Библиогр. 7.

Ключевые слова: векторная решетка, нормированная решетка, решеточный гомоморфизм, линейная изометрия, решеточно нормированное пространство, пространство Банаха — Канторовича, банахово расслоение, лифтинг.

УДК 517.957:517.548

О СЛАБОМ ПРЕДЕЛЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ НЕРАВЕНСТВУ С КВАЗИВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИЕЙ И НУЛЬ-ЛАГРАНЖИАНОМ.

А. А. Егоров. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Доказана теорема о слабом пределе последовательности отображений, удовлетворяющих дифференциальному неравенству, построенному с помощью квазивыпуклой функции и нуль-лагранжиана. Библиогр. 13.

Ключевые слова: слабый предел, квазивыпуклость, нуль-лагранжиан.

УДК 517.956

О ФРЕДГОЛЬМОВОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА.

И. Е. Егоров. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Рассматривается первая краевая задача для уравнения смешанного типа четного порядка в цилиндрической области. При определенных условиях на коэффициенты уравнения доказывается ее плотная разрешимость, единственность обобщенного решения и фредгольмова разрешимость первой краевой задачи в некотором весовом пространстве Соболева. Библиогр. 8.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, фредгольмова разрешимость, обобщенное решение, неравенство, оценка, оператор.

УДК 517.954

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БЕННИ — ЛЮКА. А. А. Замышляева. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

При исследовании математической модели Бенни — Люка весьма полезной оказалась теория уравнений соболевского типа, в настоящее время переживающая

эпоху своего расцвета. В данной статье теория относительно  $p$ -секториальных операторов распространена на случай уравнения соболевского типа высокого порядка. Построены пропагаторы однородного уравнения. Получены достаточные условия однозначной разрешимости абстрактной задачи Коши. На основе абстрактных результатов проведено аналитическое исследование линеаризованной математической модели Бенни — Люка. Библиогр. 8.

**Ключевые слова:** относительно  $p$ -секториальный оператор, уравнение соболевского типа высокого порядка, пропагаторы.

УДК 519.172.2

СТРОЕНИЕ ОКРЕСТНОСТЕЙ 5-ВЕРШИН В ПЛОСКИХ ТРИАНГУЛЯЦИЯХ С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 5. А. О. Иванова, Д. В. Никифоров. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

В 1940 г. Лебег дал описание окрестностей вершин степени 5 в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5, не приводя полного доказательства, а указав лишь его идею. Мы даем полное доказательство лебеговского описания, попутно выявляя несколько неточностей и улучшая один из параметров, не ухудшая при этом остальных. Ил. 7, библиогр. 9.

**Ключевые слова:** плоский граф, строение, триангуляция, окрестность.

УДК 517.956

ОБРАТНАЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ГИPERБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ. О. А. Колтуновский. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Исследована разрешимость нелинейной обратной задачи для гиперболического уравнения. Доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения. Библиогр. 5.

**Ключевые слова:** обратная коэффициентная задача, условие интегрального переопределения, нагруженное уравнение, метод неподвижной точки.

УДК 512.543.1

СПЛЕТЕНИЕ, ИМЕЮЩЕЕ КОНЕЧНУЮ ШИРИНУ. А. А. Коробов. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Доказано, что декартовы сплетения некоторых групп преобразований являются группами конечной ширины. Кроме того, доказано, что декартово сплетение некоторых групп преобразований не имеет изоморфного представления матрицами над телом. Библиогр. 11.

**Ключевые слова:** декартово сплетение групп преобразований, конечная ширина, свойство Бергмана, группа автоморфизмов конечномерного векторного пространства над телом.

УДК 515.12:517.987

СЕКВЕНЦИАЛЬНО ЗАМКНУТОЕ СЧЕТНОЕ ПЛОТНОЕ ПОДМНОЖЕСТВО В  $I^I$ . С. А. Малюгин. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Пусть  $I$  – единичный отрезок в  $\mathbb{R}$ . В. М. Пристли построил пример секвенциально замкнутого счетного плотного подмножества в топологическом пространстве  $I^I$  – всех функций из  $I$  в  $I$  с тихоновской топологией. Конструкция примера Пристли существенно использует аксиому выбора. В настоящей заметке предлагается другое, более элементарное решение этой задачи, в котором аксиома выбора не применяется (даже в более слабой форме, известной как аксиома счетного выбора). Библиогр. 6.

Ключевые слова: тихоновская топология, секвенциально замкнутое множество, плотное множество, функции Радемахера, аксиома выбора, аксиома счетного выбора.

УДК 512.543.1

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. Г. В. Намсараева. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Изучается разрешимость линейных обратных задач для псевдопараболических уравнений с одним и двумя неизвестными коэффициентами, зависящими от временной переменной  $t$ . Вспомогательные нелокальные задачи имеют условия переопределения граничного типа. Доказаны теоремы существования регулярных решений для данных задач. Библиогр. 15.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, обратная задача, априорная оценка, условия переопределения, существование.

УДК 517.956.4

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  $2n$ -ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ ПРИ  $n \geq 4$  С ПОЛНОЙ МАТРИЦЕЙ УСЛОВИЙ СКЛЕИВАНИЯ. С. В. Попов, А. Г. Синявский. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Рассматриваются параболические уравнения  $2n$ -го порядка с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склеивания, связанные с применением теории сингулярных интегральных уравнений. Устанавливается разрешимость краевых задач в пространствах Гельдера. Показано, что гельдеровские классы их решений в некоторых случаях условий склеивания зависят от нецелого показателя Гельдера при выполнении необходимых и достаточных условий на данные задачи. Библиогр. 12.

Ключевые слова: параболическое уравнение с меняющимся направлением времени, полная матрица условий склеивания, уравнение  $2n$ -го порядка, корректность, пространство Гельдера, сингулярное интегральное уравнение.

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. *Н. С. Попов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Исследуется разрешимость начально-краевой задачи для линейных псевдогиперболических уравнений третьего порядка с пространственно нелокальными краевыми условиями А. А. Самарского с переменными коэффициентами. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Библиогр. 8.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, пространство Соболева, начально-краевая задача, метод продолжения по параметрам, априорные оценки, регулярное решение.

УДК 517.956

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО И ЖЕСТКОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯМИ ОДНОГО КЛАССА НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА. *М. А. Сагадеева.* — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Рассматриваются задачи оптимального и жесткого управления решениями задачи Шоуолтера — Сидорова для операторно-дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной по времени. При этом один из операторов является оператор-функцией переменной  $t$ , т. е. зависит от времени. Введено понятие сильного решения для нестационарного уравнения. Доказано существование и единственность сильного решения задачи Шоуолтера-Сидорова для нестационарного уравнения, с помощью которого показано существование единственного оптимального управления решениями данной задачи, а также существование единственного жесткого управления решениями этой задачи. Библиогр. 17.

Ключевые слова: задача оптимального управления, задача жесткого управления, нестационарные уравнения, уравнения соболевского типа.

УДК 517.9

ТЕОРЕМА О РАСПЩЕПЛЕНИИ В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. *Г. А. Свиридов, Дж. К. Аль-Делфи.* — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Теорема о расщеплении двух банаховых пространств и действий пары операторов перенесена в квазибанаховые пространства. Абстрактные результаты иллюстрированы примерами из теории квазисоболевских пространств и квазиоператора Лапласа. Библиогр. 9.

Ключевые слова: теорема о расщеплении, квазибанаховы пространства, квазисоболевские пространства, квазиоператор Лапласа.

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА.

Л. А. Телешева. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Изучается вопрос о разрешимости обратной задачи определения правой части для параболического уравнения четвертого порядка, с граничным условием определения. Дополнительно показывается существование решения нелокальной задачи для уравнения параболического типа четвертого порядка, что можно рассматривать как самостоятельный результат. Библиогр. 5.

Ключевые слова: параболические уравнения высокого порядка, обратная задача, нелокальная задача, существование решения.

УДК 512.6:519.61

О  $n$ -ПЕРИОДИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. Ф. М. Федоров. — Мат. заметки ЯГУ, 2013,  
т. 20, вып. 2.

Исследованы, так называемые,  $n$ -периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. При этом использована основная теорема о гауссовых бесконечных системах. Библиогр. 5.

Ключевые слова: бесконечные гауссовые периодические системы, почти периодические системы.

УДК 517.518.85

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ С. Н. БЕРНШТЕЙНА. Хохолов В. Б.. — Мат.  
заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Рассматривается модификация С. Н. Бернштейна интерполяционной формулы Лагранжа. Получены новые матрицы интерполяции, для которых такая модификация приводит к равномерной сходимости процесса для любой непрерывной функции на всем промежутке интерполяции. Также показано, что в случае матрицы равноотстоящих узлов с помощью такой модификации не удается значительно улучшить известную оценку функции Лебега. Ил. 1, библиогр. 3.

Ключевые слова: интерполяция, сходимость, матрицы интерполяции, оператор Бернштейна, функция Лебега.

УДК 517.954

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ ШЕСТАКОВА —  
СВИРИДЮКА ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА С ИНЕРЦИОННОСТЬЮ  
И РЕЗОНАНСАМИ. Ю. В. Худяков. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Предлагается алгоритм численного решения задачи восстановления динамически искаженного сигнала с учетом инерционности и резонансов измерительного устройства. Основой для построения алгоритма является математическая модель измерительного устройства, рассматривается как задача оптимального управления

для системы леонтьевского типа с начальными условиями Шоултера — Сидорова (или модель Шестакова — Свиридюка), и численные методы решения такого рода задач. Обосновывается сходимость приближенных решений, получаемых при реализации алгоритма. Библиогр. 12.

Ключевые слова: оптимальное измерение, системы леонтьевского типа, численный метод, оптимальное управление.

УДК 517.925.41:519.833

СОЗДАНИЕ ОХРАНЯЕМОЙ ТЕРРИТОРИИ: МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИИ И ОЦЕНКА ЗАТРАТ. М. Д. Васильев, М. П. Григорьев, Ю. И. Трофимцев. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Исследована эколого-экономическая модель охраняемой популяции, содержащая систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений динамики популяции со случайными параметрами и иерархическую игру двух лиц. Найдены бифуркационные параметры системы, построены фазовые портреты ее траекторий, найдены оптимальные стратегии в иерархической игре, построены плотности распределения случайных величин функций выигрыша. Ил. 8, библиогр. 9.

Ключевые слова: система двух обыкновенных дифференциальных уравнений, случайные параметры, фазовые портреты траекторий, иерархическая игра, плотности распределения.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ. А. В. Григорьев. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Работа посвящена численному моделированию задачи фильтрации в трещиновато-пористой среде. Рассматриваются классические модели двойной пористости, которые более точно отражают процесс фильтрации с учетом наличия сети трещин. Выводится псевдопараболическая модель двойной пористости на основе базовой модели Баренблатта. Расчеты проводились на основе метода конечных элементов, приводятся результаты численного моделирования. Ил. 7, библиогр. 8.

Ключевые слова: математическое моделирование, модель двойной пористости, псевдопараболические уравнения, трещиновато-пористая среда, метод конечных элементов;

УДК 51-74

РАЗРАБОТКА МОДУЛЯ ПО СОЗДАНИЮ УПРОЩЕННОЙ СТРУКТУРНОЙ 3D МОДЕЛИ НЕФТЯНОГО ПЛАСТА. Ю. М. Григорьев, М. В. Харбанов. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Разработан модуль по построению упрощенной структурной 3D модели пласта для дальнейшего его использования в гидродинамическом моделировании. В качестве входных данных используются данные по скважинам, которые находятся

в интересуемой области. К данным по скважине относятся ее координата, абсолютная глубина кровли коллектора и эффективная мощность пласта в этой скважине. Выходными данными являются карта кровли коллектора и 3D сетка пласта в виде текстовых файлов, распознаваемых многими гидродинамическими симуляторами. В качестве методики интерполяции глубин и мощностей при построении карты кровли коллектора и 3D сетки пласта использовался метод обыкновенного кригинга. Ил. 6, библиогр. 6.

Ключевые слова: структурная 3D модель пласта, обыкновенный кригинг, абсолютная глубина, кровля коллектора, эффективная мощность.

УДК 519.63

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТИ  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. П. Е. Захаров. — Мат. заметки ЯГУ, 2013,  
т. 20, вып. 2.

Методы декомпозиции области используются для приближенного решения краевых задач для уравнений с частными производными на параллельных вычислительных системах. Для нестационарных задач наиболее подходят безытерационные схемы декомпозиции области. Рассматривается факторизованная регионально-аддитивная схема для решения начально-краевой задачи для параболического уравнения. Параллельное решение основывается на разделении области (декомпозиции области без налегания) и на трехэтапном алгоритме, который состоит из предсказания, решения и коррекции. Даётся теоретическая оценка погрешности реализованной факторизованной схемы, которая дополнена практическими экспериментами. Ил. 8, библиогр. 10.

Ключевые слова: параллельный алгоритм, методы декомпозиции области, факторизованная схема.

УДК 517.928.4:517.929.5

О ДВУМЕРНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ ОКИСЛЕНИЯ  
ОКСИДА УГЛЕРОДА НА НАНОЧАСТИЦАХ ПАЛЛАДИЯ. Е. А. Лашина,  
Н. А. Чумакова, Г. А. Чумаков. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Изучается двумерная кинетическая модель гетерогенной каталитической реакции окисления CO на наночастицах палладия и исследован ее параметрический портрет на плоскости двух параметров. Ил. 3, библиогр. 7.

Ключевые слова: динамическая система, стационарное состояние, множественность, бифуркация.

УДК 517.928.4:517.929.5

МНОГОПИКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ТРЕХМЕРНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ  
МОДЕЛИ РЕАКЦИИ ОКИСЛЕНИЯ ОКСИДА УГЛЕРОДА  
НА НАНОЧАСТИЦАХ ПАЛЛАДИЯ. Е. А. Лашина, Н. А. Чумакова,  
Г. А. Чумаков. — Мат. заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Обсуждается сценарий возникновения многопиковых автоколебаний в трехмерной динамической системе, моделирующей кинетические автоколебания в катализитической реакции окисления CO. Ил. 6, библиогр. 7.

Ключевые слова: динамическая система, многопиковые автоколебания, бифуркация.

УДК 519.6:697.1

ОБ ОДНОМ МНОГОСЕТОЧНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ДВУМЕРНОГО  
СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НАРУЖНОЙ  
ОГРАЖДАЮЩЕЙ КОНСТРУКЦИИ. В. Ю. Шадрин, И. И. Сивцев. — Мат.  
заметки ЯГУ, 2013, т. 20, вып. 2.

Предложен двухсеточный итерационный метод решения систем уравнений, аппроксимирующих третью краевую задачу для двумерного уравнения Лапласа. Приводятся результаты численных экспериментов, которые показывают эффективность предложенного метода. Ил. 1, табл. 1, библиогр. 3.

Ключевые слова: многосеточный метод, итерационный метод.

## ABSTRACTS

UDC 512.543.1

**On solvability of the initial-boundary value problems with integral boundary condition for some nonclassical differential equations.**

*A. M. Abdurakhmanov, A. I. Kozhanov* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

The authors study the solvability of the boundary value problems for the equation

$$(-1)^{p+1} D_t^{2p} u - Au = f(x, t)$$

( $A$  is an elliptic operator acting on the spatial variables, while  $p \geq 1$  is an integer) with integral type condition on the lateral area. The existence and uniqueness theorems are proved. Bibliogr. 13.

**KEYWORDS:** nonclassical differential equations of higher order, problem with integral conditions, existence, uniqueness

UDC 517.559+517.55

**On representation of one class of plurisubharmonic functions.**  
*V. I. Biderman, V. Ya. Prudnikov* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

In this article is considered the question on representation of one class of plurisubharmonic functions and defines pluriharmonic extension from sphere in the ball. Bibliogr. 4.

**KEYWORDS:** plurisubharmonic functions, pluriharmonic extension of functions from sphere in ball.

UDC 517.956.32

**Dissipative energy integrals in a mixed problem for the wave equation.**  
*V. M. Gordienko* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

Under consideration is a mixed problem for the multi-dimensional wave equation in a quarter of the real space. The boundary condition is given as a linear combination of the first derivatives, and the uniform Lopatinskii condition is assumed to be satisfied. In this case, we constructed all possible dissipative energy integrals and parameterized them by the points of the upper part of a bodily cone of the second order. We characterize the cone location and its geometric parameters by means of the coefficients of the boundary condition of the problem. Bibliogr. 9.

**KEYWORDS:** wave equation, mixed problem, uniform Lopatinskii condition, dissipative energy integral.

UDC 517.98

**Lattice-metric decomposition of a monotone operator.** A. E. Gutman, A. V. Koptev. — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

The notion is considered of a monotone linear operator acting from a Riesz space into a normed space. It is shown that every monotone operator can be represented as the composition of a Riesz homomorphism and a linear isometry. The results are applied to the study of continuous and measurable bundles of Banach lattices. Bibliogr. 7.

**KEYWORDS:** Riesz space, normed lattice, Riesz homomorphism, linear isometry, lattice-normed space, Banach–Kantorovich space, Banach bundle, lifting.

UDC 517.957:517.548

**On the weak limit of a sequence of mappings satisfied the differential inequality with a quasiconvex function and a null Lagrangian.** A. A. Egorov — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

We proved a theorem on the weak limit of a sequence of mappings satisfied the differential inequality constructed by a quasiconvex function and a null Lagrangian. Bibliogr. 13.

**KEYWORDS:** weak limit, quasiconvexity, null Lagrangian.

UDC 517.956

**About Fredholm solvability of the first boundary value problem for equations of mixed type of even order.** I. E. Egorov — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

In this paper, we consider the first boundary value problem for an equation of mixed type of even order in a cylindrical domain. Under certain conditions on the coefficients of the equation proved its dense solvability, uniqueness of the generalized solutions and Fredholm solvability of the first boundary value problem in a weighted Sobolev space. Bibliogr. 8.

**KEYWORDS:** equation of mixed type, Fredholm solvability of generalized solution, inequality, evaluation, the operator.

UDC 514.755

**An analytical investigation of linearized Benney–Luke model.** A. A. Zamyshlyayeva — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

The Sobolev type equations theory, experiencing an epoch of blossoming, is very useful for investigation of linearized Benney–Luke model. In this article the theory of relatively  $p$ -sectorial operators is developed to the case of higher order equations. The propagators of homogeneous equation are constructed. The sufficient conditions for the unique solvability of abstract Cauchy problem are given. On the basis of abstract results the analytical investigation of linearized Benney–Luke model is held. Bibliogr. 8.

**KEYWORDS:** relatively  $p$ -sectorial operator, higher order Sobolev type equation, propagators.

UDC 519.172.2

**The structure of vicinities of 5-vertices in plane triangulation with minimum degree 5.** A. O. Ivanova, D. V. Nikiforov — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

In 1940, Lebesgue described the vicinities of vertices of degree 5 in plane triangulations with minimum degree 5, presenting only an idea of the proof but not the details. We give a complete proof of Lebesgue's description, correct several inaccuracies happened in this description, and improve one of its parameters without worsening the others. Il. 7, bibliogr. 9.

KEYWORDS: plane graph, structure, triangulation, vicinity.

UDC 517.9

**An inverse coefficient problem for a multidimensional hyperbolic equation in the case of integral overdetermination.** O. A. Koltunovskii — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

We study solvability of a nonlinear inverse problem for a hyperbolic equation. Existence and uniqueness theorems of regular solution are proved. Bibliog. 5.

KEYWORDS: inverse coefficient problem, integral overdetermination condition, loaded equation, fixed point method.

UDC 512.543.1

**The wreath product with finite width.** A. A. Korobov. — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

In this article we prove that wreath products of some permutation groups have finite width. We prove in addition that the wreath product of some permutation groups cannot be embedded to a skew linear group. Bibliogr. 11.

KEYWORDS: the wreath product of permutation group, finite width, Bergman property, skew linear group.

UDC 515.12+517.987

**Sequentially closed countable dense subset of  $I^I$ .** S. A. Malyugin. — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

Let  $I$  be a unit segment in  $\mathbb{R}$ . W. M. Priestley constructs an example of sequentially closed countable dense subset in the topological space  $I^I$  of all functions from  $I$  to  $I$  endowed with Tykhonov topology. Construction of Priestley's example essentially uses the axiom of choice. In the present article we give another, more elementary solution of this problem, in which the axiom of choice was not applied (even in the weakened form, known as the axiom of countable choice). Bibliogr. 6.

KEYWORDS: Tykhonov topology, sequentially closed set, dense set, Rademacher functions, the axiom of choice, the axiom of countable choice.

UDC 517.946

**On the solvability of inverse problems for pseudo-parabolic equations.**  
G. V. Namsaraeva — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

We study solvability of linear inverse problems for pseudo-parabolic equations with one and two unknown coefficients depending on the time variable  $t$ . Auxiliary non-local problems have boundary conditions of overdetermination. For these problems, we prove existence theorems of regular solutions. Bibliogr. 15.

**KEYWORDS:** pseudo-parabolic equations, inverse problem, apriory estimate, conditions of overdetermination, existence.

UDC 517.956.4

**Solvability of the boundary value problem for the  $2n$ -parabolic equations with the changing direction of time when  $n \geq 4$  and full matrix bonding conditions.** S. V. Popov, A. G. Sinyavskii — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

Consider parabolic equations  $2n$ -th order changing the direction of time to complete the matrix of conditions bonding associated with the use of the theory of singular integral equations. The solvability of boundary value problems in Holder spaces. It is shown that the Holder classes of decisions in some cases depend on the conditions of adhesion of noninteger Holder exponent, if the necessary and sufficient conditions on the data. Bibliog. 12.

**KEYWORDS:** parabolic equations with changing time direction, the complete matrix of bonding conditions, the equations of the  $2n$ -th order, propriety, the Holder space, singular integral equations.

UDC 517.946.4

**On the solvability of nonlocal boundary value space problem for the equation of pseudohyperbolic equation.** N. S. Popov — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

The solvability of the initial boundary value problems for linear pseudohyperbolic third-order equations with spatially nonlocal boundary conditions A.A. Samarsky with variables coefficients. Proving theorems of existence and uniqueness of regular solutions. Bibliogr. 8.

**KEYWORDS:** the pseudohyperbolic equation, Sobolev space, regional problem, continuation method on parameters, aprioristic estimations, the regular decision.

UDC 517.956

**Problems of optimal and hard control over solution for one class of nonstationary linear Sobolev type equations.** M. A. Sagadeeva — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

Of concern is problems of the optimal and hard control of the solutions for the operator-differential equation, unsolved with respect to the derivative by time, with Showalter-Sidorov condition. In this case, one of the operators in the equation is a operator-function of the variable  $t$ , i.e. operator depends of time. The strong solution is defined in paper. The existence and uniqueness of strong solution for Showalter-Sidorov's problem for the nonstationary equation are proved. The existence of a unique optimal control and hard control for the solutions of this problem is proved using these results. Bibliogr. 17.

KEYWORDS: optimal control problem, hard control problem, nonstationary equations, Sobolev type equations.

UDC 517.9

**Splitting theorem in quasi-Banach spaces.** G. A. Sviridyuk, Dzh. K. Al'-Delfi — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

Splitting theorem of two Banach spaces and action pair of operators moved in the quasi-Banach spaces. Abstract results are illustrated by examples from theory of Quasi-Sobolev spaces and Laplas' Quasi-operator. Bibliogr. 9.

KEYWORDS: splitting theorem, quasi-Banach spaces, quasi-Sobolev spaces, Laplas' quasi-operator.

UDC 517.956

**On solvability of the linear inverse problem for a parabolic equation of higher order.** L. A. Teleshova — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

Under study is the solvability of the inverse problem of determining the right-hand side for a fourth order parabolic equation with overdetermination boundary condition. In addition, the existence of solution to a nonlocal problem is shown for a fourth order parabolic equation. The latter is of interest in its own right. Bibliogr. 5.

KEYWORDS: parabolic equations of higher order, inverse problem, nonlocal problem, existence.

UDC 512.6:519.61

**On the  $n$ -periodic infinite systems of linear algebraic equations.** F. M. Fedorov — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

It is investigated the so-called  $n$ -periodic infinite systems of linear algebraic equations. The author used the fundamental theorem of Gaussian Infinite Systems. Bibliogr. 5.

KEYWORDS: infinite, Gaussian, periodic systems, almost periodic system.

UDC 517.518.85

**About the operator of S. N. Bernstein.** V. B. Khokholov — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

This work is considered to S. N. Bernstein's modification of Lagrange interpolation formula. Here were acquired new matrices of interpolation modification of which brings to uniform convergence of the process for any continuous function on the whole interval of interpolation. This work also shows that it is impossible to greatly improve the known valuation of H. L. Lebesgue function in the case of the usage of such modification on the matrix of equidistant nodes. Il. 1, bibliog. 5.

KEYWORDS: interpolation, convergence, matrices of interpolation, the Bernstein operator, function of Lebesgue.

---

UDC 517.954

**The numerical algorithm to investigate Shestakov–Sviridyuk's model of measuring device with inertia and resonances.** Yu. V. Khudyakov — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

The paper proposes a numerical algorithm for solving the problem of recovering dynamically distorted signal with the the inertia and resonances of the measuring device. The basis for the construction of the algorithm is a mathematical model of the measuring device. The model considered as an optimal control for the Leontief type system with initial conditions Showalter - Sidorova (or model Shestakov - Sviridyuk) include numerical methods for solving such problems. The article explains the convergence of approximate solutions obtained in the implementation of the algorithm. Il. 7, tabl. 2, bibliogr. 8.

KEYWORDS: optimal measurement, Leontief type systems, numerical method, optimal control.

UDC 517.925.41:519.833

**Protected area creation: modelling of population dynamics and evaliation of cost.** M. D. Vasil'ev, M. P. Grigor'ev, Yu. I. Trofimtsev Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

Ecological-economic model of the protected population is investigated. This model contains a system of two differential equations of population dynamics and hierarchical two-person game. Phase portraits of the trajectories are constructed. Bifurcation parameters of the system of differential equations are defined. Optimal strategy's of players for the hierarchical game are constructed. Density distribution of random variables of the payoff functions are found. Il. 8, bibliogr. 9.

KEYWORDS: ODE system, dynamic of population, stability problem, bifurcation, random parameters, hierarchical game, density distribution.

UDC 519.63

**Numerical simulation of filtration model in cavity porous media.** A. V. Grigor'ev — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

This paper is dedicated to a numerical simulation of filtration model in cavity porous media. We consider classical double porosity models which more precisely reflect filtration process taking into the availability of cavities system. We derive pseudoparabolic model using basic Barenblatt model. Calculations were performed on the basis of finite element method. Bibliogr. 8.

KEYWORDS: numerical simulation, double porosity model, pseudoparabolic equation, cavity porous media, finite element method.

UDC 51-74

**The development of a program module for creating simplified structural 3D oil reservoirs model.** Yu. M. Grigor'ev, M. V. Kharbanov —

In this work a program module have been developed to modelling simplified structural 3D reservoir for it further implementation in reservoir simulation. Borehole data located at the area interested are used in the capacity of input data. Borehole data are the well's

coordinates, absolute vertical depth sub sea of reservoir's top and net productive section at the well. The output data are map of reservoir's top depth and 3D reservoir grid as text files recognizable by other reservoir simulators. Method of simple kriging is used to interpolate depth and net productive section for geological modelling of reservoir. Il. 6, bibliogr. 6.

**KEYWORD:** structural 3D reservoir, simple kriging, absolute vertical depth sub sea, reservoir's top, net productive section.

UDC 519.63

**The parallel algorithms of domain division for the parabolic problems.** *P. E. Zakharov* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

Domain decomposition methods used for the approximate solutions of boundary value problems for partial differential equations on parallel computing systems. For time-dependent problems are most suitable iteration-free domain decomposition schemes. We consider the factorized regionally-additive scheme for the solution of the initial-boundary value problem for a parabolic equation. The parallel solution is based on domain division (domain decomposition without overlap) and on 3-stage algorithm, which consists of prediction, solution and correction. We give a theoretical estimate of the error for implemented factorized scheme, which is supplemented by practical experiments. Il. 8, bibliogr. 10.

**KEYWORDS:** parallel algorithms, domain decomposition methods, factorized schemes.

UDC 517.928.4:517.929.5

**A two-variable kinetic model of the reaction of carbon monoxide oxidation on palladium nanoparticles.** *E. A. Lashina, N. A. Chumakova, G. A. Chumakov* — Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

Under study are a two-dimensional kinetic model of CO oxidation on PdO/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> catalyst and its parametric portrait in the plane of the two parameters. Il. 3, bibliogr. 7.

**KEYWORDS:** dynamical system, steady states, self-oscillations, multiplicity, bifurcation.

UDC 517.928.4:517.929.5

**Multipeak oscillations in a three-variable kinetic model of the reaction of carbon monoxide oxidation on palladium nanoparticles.** *E. A. Lashina, N. A. Chumakova, G. A. Chumakov* Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

Under study are some problems of multipeak oscillations in a dynamical system that models the kinetic self-oscillations in catalytic CO oxidation reaction. Il. 6, bibliogr. 7.

**KEYWORDS:** dynamical system, multipeak oscillations, bifurcation.

UDC 519.6:697.1

**On the multigrid method for the solution stationary temperature field of outer bounding structures.** *V. Yu. Shadrin, I. I. Sivtsev* Math. notes of YSU. 2013. Vol. 20. No. 2.

We consider the two-grid iterative method of solution of the system of equations approximating third boundary value problem for the Laplace equation. Numerical results demonstrate the efficiency of the proposed method. Bibliogr. 3.

**KEYWORDS:** multigrid method, iterative method.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

### Математика

#### **Абдрахманов Айдар Максутович**

Уфимский государственный авиационный технический университет  
ул. К. Маркса, 12, Уфа 450000  
[abdrai@mail.ru](mailto:abdrai@mail.ru)

#### **Кожанов Александр Иванович**

Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
[kozhanov@math.nsc.ru](mailto:kozhanov@math.nsc.ru)

#### **Бидерман Вениамин Исаакович**

Тихоокеанский гос. университет, ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск  
680035  
[caspuy08@rambler.ru](mailto:caspuy08@rambler.ru)

#### **Прудников Виталий Яковлевич**

Тихоокеанский гос. университет, ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск  
680035  
[prudnickov.vit@yandex.ru](mailto:prudnickov.vit@yandex.ru)

#### **Гордиенко Валерий Михайлович**

Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
[gordienk@math.nsc.ru](mailto:gordienk@math.nsc.ru)

#### **Гутман Александр Ефимович**

Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090

[gutman@math.nsc.ru](mailto:gutman@math.nsc.ru)

**Коптев Александр Викторович**

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
[koptev@math.nsc.ru](mailto:koptev@math.nsc.ru)

**Егоров Александр Анатольевич**

Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
[egorov@math.nsc.ru](mailto:egorov@math.nsc.ru)

**Егоров Иван Егорович**

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
НИИ математики  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)  
[IvanEgorov51@mail.ru](mailto:IvanEgorov51@mail.ru)

**Замышляева Алена Александровна**

Южно-Уральский государственный университет, кафедра уравнений  
математической физики  
пр. Ленина, 76, Челябинск 454080  
[alzama@mail.ru](mailto:alzama@mail.ru)

**Иванова Анна Олеговна**

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
НИИ математики  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)  
[shmgannna@mail.ru](mailto:shmgannna@mail.ru)

**Никифоров Дмитрий Владиславович**

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
Институт математики и информатики  
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)  
[zerorebelion@mail.ru](mailto:zerorebelion@mail.ru)

**Колтуновский Олег Александрович**

Южно-Сахалинский институт экономики, права и информатики,  
Коммунистический пр., 72, Южно-Сахалинск 693000

natural\_disc@sakhiepi.ru

**Коробов Алексей Александрович**

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
korobov@math.nsc.ru

**Малюгин Сергей Артемьевич**

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
mal@math.nsc.ru

**Намсараева Гэрэлма Владимировна**

Бурятский гос. университет  
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 670000  
gerel@inbox.ru

**Попов Сергей Вячеславович**

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
НИИ математики  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)  
madu@ysu.ru

**Синявский Александр Георгиевич**

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
кафедра математического анализа  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)  
sinyavsk\_88@mail.ru

**Попов Николай Сергеевич**

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
кафедра математического анализа  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)  
popovnserg@mail.ru

**Сагадеева Минзия Алмасовна**

Южно-Уральский гос. университет, кафедра информационно-измерительной техники  
пр. Ленина, 76, Челябинск 454080,  
sam79@74.ru

**Свиридюк Георгий Анатольевич**

Южно-Уральский гос. университет, кафедра уравнений математической физики  
пр. Ленина, 76., Челябинск 454080  
sviriduk@74.ru

**Джавад К. К. Аль-Делфи**

Южно-Уральский гос. университет, кафедра уравнений математической физики  
пр. Ленина, 76., Челябинск 454080  
rassian71@mail.ru

**Телешева Любовь Александровна**

Бурятский гос. университет  
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 670000  
love\_20\_09@mail.ru

**Федоров Фома Михайлович**

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
НИИ математики  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)  
foma46@mail.ru

**Хохолов Валерий Брониславович**

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,  
Институт математики и информатики. ул. Белинского, 58, Якутск  
677000, Республика Саха (Якутия).  
hvbmf@rambler.ru

**Худяков Юрий Владимирович**

Южно-Уральский государственный университет, кафедра уравнений  
математической физики  
пр. Ленина, 76, Челябинск 454080  
hudyakov74@gmail.com

**Математическое моделирование****Васильев Максим Дмитриевич**

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Институт математики и информатики, кафедра дифференциальных уравнений

ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)

1767700@mail.ru

**Григорьев Марк Петрович**

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Институт математики и информатики, кафедра дифференциальных уравнений

ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)

**Трофимцев Юрий Иванович**

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Институт математики и информатики, кафедра высшей математики

ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)

trofimtsev@mail.ru

**Григорьев Александр Виссарионович**

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Институт математики и информатики, Центр вычислительных технологий, отдел технической поддержки

ул. Кулаковского, 42, Якутск, 677000, Республика Саха (Якутия)

re5itsme@gmail.com

**Григорьев Юрий Михайлович**

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, Физико-технический институт

ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)

grigiumy@yandex.ru

**Харбанов Михаил Владимирович**

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, Физико-технический институт

ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)

mvkharbanov@gmail.com

**Захаров Петр Егорович**

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
Институт математики и информатики  
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)  
[zapetch@gmail.com](mailto:zapetch@gmail.com)

**Лашина Елена Александровна**

Институт катализа им. Г. К. Борескова пр. Академика Лаврентьева, 5,  
Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090

**Чумакова Наталия Алексеевна**

Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
[chumakov@math.nsc.ru](mailto:chumakov@math.nsc.ru)

**Чумаков Геннадий Александрович**

Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
[chumakov@math.nsc.ru](mailto:chumakov@math.nsc.ru)

**Шадрин Василий Юрьевич**

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
кафедра высшей математики  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)  
[vshadr@mail.ru](mailto:vshadr@mail.ru)

**Сивцов Иван Иванович**

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
кафедра высшей математики

ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)  
[vshadr@mail.ru](mailto:vshadr@mail.ru)

**ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!**

К публикации в «Математических заметках ЯГУ» принимаются оригинальные статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

В редакцию представляется рукопись в двух экземплярах объемом не более 1 авторского листа, оформленная согласно стандартным требованиям к авторским оригиналам. К рукописи должны быть приложены два экземпляра аннотации и список ключевых слов на двух языках (русский и английский), шифр УДК. Депонирование рукописи редакцией не осуществляется. Авторы обязаны указать место работы, должность и контактную информацию на двух языках. В случае возвращения статьи для переработки указываются две даты поступления — первоначальная дата и дата получения редакцией окончательного текста.

Основные требования к оформлению рукописи:

1. Текст статьи должен быть напечатан через 2 интервала на одной стороне листа белой писчей бумаги форматом 210 × 300 мм.

2. Рисунки и сложные диаграммы выполняются на отдельных листах с указанием на обороте фамилии автора, название статьи и номера рисунка; их место в тексте указывается на полях статьи.

3. Номер формулы ставится у правого края листа.

4. Рукописи желательно подготовить с использованием наборных систем типа ТЕХ.

5. В рукописях, подготовленных с помощью текстовых редакторов типа Word, должны быть размещены греческие, готические, латинские рукописные буквы, указано использование букв прямого начертания, а также проведена разметка индексов.

6. В авторских оригиналах, подготовленных с использованием наборных систем типа ТЕХ и выданных на лазерном принтере, разметка формул не проводится, однако на полях поясняются буквы готического алфавита.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Список литературы на двух языках печатается в конце текста на отдельном листе. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

Рукописи, оформленные не по стандартам или превышающие указанный выше объем, возвращаются.