СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

**Том 21, № 2 (82) Апрель—июнь, 2014**

*СОДЕРЖАНИЕ*

**Математика**

**Виноградова П. В., Королева Т. Э.** *О равномерной оценке скорости сходимости метода Галёркина для нелинейного уравнения третьего порядка* . . . . . . **3**

**Гадоев М. Г., Константинова Т. П.** *О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов* . . . . . . **8**

**Зикиров О. С., Холиков Д. К.** *Смешанная задача с интегральным условием для уравнений третьего порядка* . . . . . . **22**

**Исламова А. Ф.** *Критерий оптимальности для задачи смешанного управления одной вырожденной системой* . . . . . . **31**

**Марков В. Г.** *Разрешимость краевой задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка* . . . . . . **39**

**Намсараева Г. В.** *Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска* . . . . . . **47**

**Николаев О. Ю.** *Разрешимость линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка* . . . . . . **60**

**Попов Н. С.** *О разрешимости краевых задач для многомерных псевдогиперболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида* . . . . . . **69**

**Попов С. В.** *Гёльдеровские классы решений параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением времени с переменными условиями склеивания* . . . . . . **81**

**Попова Т. С.** *Задача о равновесии вязкоупругого тела с трещиной и тонким жестким включением* . . . . . . **94**

**Шергин С. Н., Пятков С. Г.** *О некоторых классах обратных задач для псевдопараболических уравнений* . . . . . . **106**

**Математическое моделирование**

**Пятков С. Г., Сафонов Е. И.** *Об определении функции источника в математических моделях конвекции-диффузии* .................. **117**

Адрес редакции:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000
Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;
http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/
e-mail: prokopevav85@gmail.com; madu@ysu.ru; ivanegorov51@mail.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.9+519.6*

# О РАВНОМЕРНОЙ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

**П. В. Виноградова, Т. Э. Королева**

**Аннотация.** Исследуется метод Галёркина для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка с монотонным оператором в гильбертовом пространстве. Получена равномерная оценка скорости сходимости приближенных решений к сильному решению, зависящая от собственных чисел главного оператора уравнения.

**Ключевые слова:** дифференциально-операторное уравнение, монотонный оператор, ортопроектор, скорость сходимости, метод Галёркина.

## 1. Введение

Многие краевые и начально-краевые задачи для уравнений с частными производными, возникающие в математической физике, механике, гидродинамике и других областях, могут быть сформулированы как краевые задачи для соответствующих дифференциально-операторных уравнений. Среди дифференциально-операторных уравнений наиболее детально изучены уравнения первого и второго порядков. В этой связи можно указать работы [1, 2], посвященные исследованию сильных решений задачи Коши для линейных и нелинейных дифференциально-операторных уравнений первого порядка. Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений первого порядка с различными нелокальными краевыми условиями исследовалась в [3]. Существование, единственность и непрерывная зависимость сильных решений задачи Коши для различных линейных уравнений второго порядка с переменными областями определения доказаны в [4, 5]. Разрешимость различных линейных дифференциально-операторных уравнений третьего порядка исследовалась в [6–9].

В [10] изучалась краевая задача для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка с главным самосопряженным оператором и подчиненным ему монотонным оператором. С помощью метода Галёркина с базисом специального вида доказаны существование и единственность сильного решения рассматриваемой задачи. Кроме того, для галёркинских приближений установлены интегральные оценки скорости сходимости. Данная работа является непосредственным продолжением [10]. Здесь для указанной задачи получена новая равномерная оценка скорости сходимости приближенных решений, построенных по методу Галёркина, которая не следует из результатов работы [10].

### 2. Постановка задачи и вспомогательные утверждения

Пусть $H_1$ — сепарабельное гильбертово пространство, плотно и компактно вложенное в сепарабельное гильбертово пространство $H$ с нормой $\|\cdot\|_H \equiv \|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$.

Рассмотрим задачу

$$u'''(t) + Au(t) - K[u(t)] = h(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u(T) = u'(0) = 0, \tag{2}$$

где $u(t)$ — искомая функция, $h(t)$ — заданная функция. Функции $u(t)$, $h(t)$ определены на конечном отрезке $[0,T]$.

Будем предполагать, что оператор $A$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $A$ — самосопряженный оператор в $H$ с областью определения $D(A) = H_1$;

2) существует постоянная $\beta > 0$ такая, что

$$(Av, v) \leq -\beta\|v\|^2$$

для любого $v \in H_1$.

Нелинейный оператор $K[\cdot]$ монотонен (см. [11]), т. е. для любых $v_1$ и $v_2$ из $H_1$ выполняется неравенство

$$(K[v_1] - K[v_2], v_1 - v_2) \geq 0.$$

Введем необходимые для дальнейших исследований пространства функций.

Через $L_2(0,T;H)$ обозначим гильбертово пространство всех сильно измеримых на $[0,T]$ функций, для которых конечна норма

$$\|v(t)\|_{0,2} = \left(\int\limits_0^T \|v(t)\|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Через $W_2^3(H,H_1)$ обозначим пространство функций $v(t)$ таких, что $\frac{d^j v}{dt^j} \in L_2(0,T;H)$ $(j = 0,1,2,3)$, $Av \in L_2(0,T;H)$. В $W_2^3(H,H_1)$ определим норму

$$\|v(t)\|_{2,3} = \left(\sum_{j=0}^{3}\int\limits_0^T \left\|\frac{d^j v(t)}{dt^j}\right\|^2 dt + \int\limits_0^T \|Av(t)\|^2\, dt\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Обозначим через $\widetilde{W}_2^3(H,H_1)$ подпространство функций $v(t)$ из $W_2^3(H,H_1)$, удовлетворяющих условию $v(0) = v(T) = v'(0) = 0$.

В пространстве $\widetilde{W}_2^3(H,H_1)$ введем норму, эквивалентную норме (3) [10]:

$$\|v(t)\|_{2,3} = \left(\int\limits_0^T \left\|\frac{d^3 v(t)}{dt^3}\right\|^2 dt + \int\limits_0^T \|Av(t)\|^2\, dt\right)^{1/2}. \tag{4}$$

*Сильным решением задачи* (1), (2) назовем функцию $u(t)$ из $\widetilde{W}_2^3(H,H_1)$, которая удовлетворяет почти при всех $t$ уравнению (1).

### 3. Метод Галёркина

В данном разделе получим равномерные оценки скорости сходимости приближенных решений, построенных с помощью метода Галёркина.

Из условия 1 следует, что оператор $A$ имеет обратный $A^{-1} : H \to H_1$.

Обозначим через $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ полную ортонормированную систему собственных элементов оператора $-A$, а через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — соответствующие собственные числа такие, что $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \ldots$, $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Пусть $P_n$ — ортопроектор в $H$ на линейную оболочку $H^n$ элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. В подпространстве $H^n$ рассмотрим задачу

$$u_n'''(t) + Au_n(t) - P_nK[u_n(t)] = P_nh(t), \tag{5}$$

$$u_n(0) = u_n(T) = u_n'(0) = 0. \tag{6}$$

Решения $u_n(t)$ задачи (5), (6) назовем *приближенными решениями задачи* (1), (2)*, построенными по методу Галёркина.*

В дальнейшем через $C$ будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от $n$ и $t$.

В [10] доказана

**Теорема 1.** *Пусть* $h(t) \in L_2(0,T;H)$, $K[0] = 0$, *выполнены условия* 1, 2 *и для любых* $z_1$, $z_2$ *из* $L_2(0,T;H_1)$ *верно неравенство*

$$\|K[z_1] - K[z_2]\|_{0,2} \le \varphi(\|(-A)^{\frac{1}{2}}z_1\|_{0,2}, \|(-A)^{\frac{1}{2}}z_2\|_{0,2})\|(-A)^{\alpha}(z_1 - z_2)\|_{0,2}, \quad 0 \le \alpha < 1, \tag{7}$$

*где* $\varphi(\xi,\eta)$ *— положительная непрерывная функция на* $\mathbb{R}^2_+$. *Тогда при каждом* $n$ *задача* (5), (6) *имеет единственное решение* $u_n(t) \in W_2^3(H, H_1)$, *последовательность* $\{u_n(t)\}$ *сходится в* $W_2^3(H, H_1)$, *причем предельный элемент является сильным решением задачи* (1), (2). *Сильное решение задачи* (1), (2) *единственно.*

Теперь установим равномерную оценку скорости сходимости приближенных решений задачи (1), (2), построенных по методу Галёркина.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда верна оценка*

$$\sup_{0 \le t \le T} \|u_n - u\| + \|u_n' - u'\|_{0,2} + \|(-A)^{1/2}(u_n - u)\|_{0,2} \le C\lambda_{n+1}^{-1/2}. \tag{8}$$

Доказательство. Положим $z_n(t) = u(t) - u_n(t)$, где $u(t)$ — решение задачи (1), (2), $u_n(t)$ — решение задачи (5), (6). Тогда

$$z_n''' + Az_n - (K[u] - K[u_n]) = (I - P_n)(h(t) + K[u_n]).$$

Умножив данное равенство скалярно на $(-z_n)$ и проинтегрировав от 0 до $\tau < T$, получим

$$-(z_n'', z_n)|_0^\tau + \int_0^\tau (z_n'', z_n')\,dt + \int_0^\tau \|(-A)^{1/2}z_n\|^2\,dt + \int_0^\tau (K[u] - K[u_n], z_n)\,dt$$

$$\le -\int_0^\tau (h(t) + K[u_n], (I - P_n)z_n)\,dt.$$

Отсюда, используя монотонность оператора $K$, находим

$$- (z_n''(\tau), z_n(\tau)) + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \frac{d}{dt}\|z_n'\|^2\,dt + \int\limits_0^\tau \|(-A)^{1/2}z_n\|^2\,dt \\ \le \int\limits_0^T \|h(t) + K[u_n]\|\|(I-P_n)z_n\|\,dt \le \|h(t)+K[u_n]\|_{0,2}\|(I-P_n)z_n\|_{0,2}.$$

Применив неравенство (7), имеем

$$- (z_n''(\tau), z_n(\tau)) + \int\limits_0^\tau \|(-A)^{1/2}z_n\|^2\,dt \\ \le (\|h\|_{0,2} + \varphi(\|(-A)^{1/2}u_n\|_{0,2}, 0)\|A^\alpha u_n\|_{0,2})\|(I-P_n)z_n\|_{0,2}.$$

Используя неравенство моментов для дробных степеней оператора (см. [12]), получим

$$- (z_n''(\tau), z_n(\tau)) + \int\limits_0^\tau \|(-A)^{1/2}z_n\|^2\,dt \\ \le \big(\|h\|_{0,2} + \varphi(\|(-A)^{1/2}u_n\|_{0,2}, 0)\|Au_n\|_{0,2}^\alpha\|u_n\|_{0,2}^{1-\alpha}\big)\|(I-P_n)z_n\|_{0,2}. \quad (9)$$

Далее, для любого $v$ из $H$ верно неравенство

$$\|(-A)^{-1/2}(I-P_n)v\| \le \lambda_{n+1}^{-1/2}\|v\|.$$

Поэтому

$$\|(-A)^{-1/2}(I-P_n)(-A)^{1/2}z_n\| \le \lambda_{n+1}^{-1/2}\|(-A)^{1/2}z_n\|.$$

Следовательно, из (9) имеем

$$- (z_n''(\tau), z_n(\tau)) + \int\limits_0^\tau \|(-A)^{1/2}z_n\|^2\,dt \\ \le \big(\|h\|_{0,2} + \varphi(\|(-A)^{1/2}u_n\|_{0,2}, 0)\|Au_n\|_{0,2}^\alpha\|u_n\|_{0,2}^{1-\alpha}\big)\lambda_{n+1}^{-1/2}\|(-A)^{1/2}z_n\|_{0,2}.$$

В работе [10] установлены оценки

$$\|u_n\|_{2,3} \le C, \quad \|(-A)^{1/2}(u_n - u)\|_{0,2} \le C\lambda_{n+1}^{-1/2}, \quad (10)$$

поэтому

$$-(z_n''(\tau), z_n(\tau)) \le C\lambda_{n+1}^{-1}. \quad (11)$$

Интегрируя (11) по $\tau$ от 0 до $T$, находим

$$\|z_n'(\tau)\|_{0,2} \le C\lambda_{n+1}^{-1/2}. \quad (12)$$

Проинтегрировав неравенство (11) по $\tau$ от $\zeta$ до $T$, имеем

$$-\int\limits_\zeta^T (z_n''(\tau), z_n(\tau))\,d\tau \le CT\lambda_{n+1}^{-1},$$

тем самым
$$(z_n'(\zeta), z_n(\zeta)) \leq CT\lambda_{n+1}^{-1}.$$
Интегрируя последнее неравенство по $\zeta$ от 0 до $\xi$, получаем
$$\int_0^{\xi} (z_n'(\zeta), z_n(\zeta))\, d\zeta \leq CT^2\lambda_{n+1}^{-1}.$$
Следовательно,
$$\|z_n(\xi)\|^2 \leq 2CT^2\lambda_{n+1}^{-1}. \tag{13}$$
Из (10), (12) и (13) получаем (8). Теорема доказана.

*ЛИТЕРАТУРА*


1. *Vinogradova P., Zarubin A.* Projection method for Cauchy problem for an operator-differential equation // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2009. V. 30, N 1–2. P. 148–167.
2. *Vinogradova P.* Convergence rate of Galerkin method for a certain class of nonlinear operator-differential equations // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2010. V. 31, N 3. P. 339–365.
3. *Антипин В. И., Попов С. В.* Исследование разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, № 2. С. 8–19.
4. *Ляхов Д. А., Ломовцев Ф. Е.* Метод слабых решений вспомогательной задачи Коши для исследования гладкости решений гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 2. С. 75–82.
5. *Ходос С. П.* Уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу с переменными областями определения разрывных операторов // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 1. С. 81–87.
6. *Василевский К. В.* Граничная задача для двучленного дифференциально-операторного уравнения третьего порядка с переменными областями определения неограниченных операторов // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 3. С. 110–114.
7. *Алиев А. Р.* О разрешимости начально-краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 3. С. 323–339.
8. *Мамедов А. М.* О краевой задаче для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 632–635.
9. *Kalantarov V., Tiryaki A.* On the stability results for third order differential-operator equations // Turk. J. Math. 1997. V. 21. P. 179–186.
10. *Виноградова П. В., Самусенко А. М.* Проекционный метод для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка с нелинейным монотонным оператором // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 64–70.
11. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972.
12. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967.


*Статья поступила 5 мая 2014 г.*

Виноградова Полина Витальевна, Королева Татьяна Эдуардовна
Дальневосточный гос. университет путей сообщения,
ул. Серышева, 47, Хабаровск 680021
vpolina17@hotmail.com, vm@festu.khv.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.957*

# О РАЗРЕШИМОСТИ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

**М. Г. Гадоев, Т. П. Константинова**

**Аннотация.** Исследуется однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле для эллиптического оператора высшего порядка в ограниченной области со степенным вырождением на границе, порожденного некоэрцитивной формой. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных с помощью некоэрцитивных форм, ранее рассматривались в [1–3]. В отличие от этих работ мы предполагаем выполнение более слабого условия эллиптичности (см. условие (5)).

**Ключевые слова:** вариационная задача Дирихле, эллиптический оператор, некоэрцитивная форма.

Пусть $\Omega$ — ограниченная область в $n$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$. Пусть число $r$ натуральное, $\alpha$ вещественное и $1 \le p < \infty$. Символом $V^r_{p,\alpha}(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных на $\Omega$, имеющих все обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные с конечной нормой

$$\left\| u; V^r_{p;\alpha}(\Omega)\right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p\, dx + \int\limits_{\Omega} \rho^{p(\alpha-r)}(x)|u(x)|^p\, dx \right\}^{1/p}.$$

Здесь и далее $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ — длина мультииндекса $k$,

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|}u(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_n^{k_n}}$$

— обобщенная в смысле С. Л. Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса $k$, $\rho(x)$ — регуляризованное расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области $\Omega$, т. е. бесконечно дифференцируемая положительная функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\rho(x) \le \operatorname{dist}\{x, \partial\Omega\} \le M\rho(x), \quad |\rho^{(k)}(x)| \le M_k \rho^{1-|k|}(x)$$

для любого $x \in \Omega$ и любого мультииндекса $k$, $M$, $M_k$ — положительные постоянные.

Символом $\left(V^r_{q;\alpha}(\Omega)\right)'$ обозначим пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $V^r_{p;\alpha}(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Основные свойства пространств $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ и $\big(V^r_{q;\alpha}(\Omega)\big)'$ изучены в работах С. М. Никольского, П. И. Лизоркина и Н. В. Мирошина [4], К. Х. Бойматова [5], С. А. Исхокова [6]. Из результатов этих работ, в частности, следует, что множество $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в $\Omega$ плотно в пространстве $V^r_{p;\alpha}(\Omega)$ при всех вещественных $\alpha$ и $p$, $1 \le p < \infty$.

Пусть $\lambda$ — вещественное число. Рассмотрим интегродифференциальную полуторалинейную форму

$$B_\lambda[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}\,dx + +\lambda \int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx, \tag{1}$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются непрерывными в замкнутой области $\overline{\Omega}$ комплекснозначными функциями, и связанную с ней вариационную задачу Дирихле.

**Задача** $D_\lambda$**.** *Для заданного функционала* $F \in \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ *требуется найти решение* $U(x)$ *уравнения*

$$B_\lambda[U,\,v] = \langle F, v\rangle, \quad v \in C_0^\infty(\Omega),$$

*принадлежащее пространству* $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Можно исследовать разрешимость задачи $D_\lambda$, применяя метод из работы [7], если предположить, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ удовлетворяют условиям

$$\Big|\arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l}\Big| < \varphi, \tag{2}$$

$$\mathrm{Re}\Big\{\gamma(x)\sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l}\Big\} \ge c\sum_{|k|=r}|\zeta_k|^2 \tag{3}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|=r}$. Здесь и далее функция $\arg z$ принимает значения на отрезке $(-\pi,\pi]$, $\varphi$ — некоторое положительное число, меньшее $\pi$, $\gamma(x)$ — некоторая непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция, которая не обращается в нуль.

В отличие от условий (2), (3) здесь предполагаем, что

$$\Big|\arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l\Big| < \varphi, \tag{4}$$

$$\mathrm{Re}\Big\{\gamma(x)\sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l\Big\} \ge c|\xi|^{2r} \tag{5}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где использованы обозначения

$$\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \xi^k = \xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\ldots\xi_n^{k_n}, \quad |\xi| = \big\{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2\big\}^{1/2}.$$

Следует отметить, что для получения вспомогательных интегральных неравенств в [7] используют условия (2), (3) при $\zeta_k = u^{(k)}(x)$ и затем интегрируют полученное неравенство по $x \in \Omega$. В нашем случае этого сделать нельзя, так как в условиях (4), (5) вместо комплексного числа $\zeta_k$ используется вещественное число $\xi^k$.

**Теорема.** *Пусть $\alpha < r$ и выполнены условия* (4), (5). *Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ существует единственное решение $U(x)$ задачи $D_\lambda$ и при этом справедлива оценка*

$$\big\|U; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\| \leq M\big\|F; \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'\big\|, \tag{6}$$

*где число $M$ не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ и от функционала $F$.*

Доказательство. Пусть $\nu$ — достаточно малое положительное число и $\varphi_j(x), \eta_j(x) \in C^\infty(\Omega)$, $j = \overline{1,N}$, такие, что

а) $\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x) + \cdots + \varphi_N^2(x) \equiv 1$, $x \in \overline{\Omega}$;

б) функция $\eta_j(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp}\varphi_j(x)$ и $0 \leq \eta_j \leq 1$ для всех $x \in \overline{\Omega}$;

в) $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ для всех $x, y \in \operatorname{supp}\eta_j$, $j = \overline{1,N}$.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B^{(0)}_{\lambda j}[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x) a^{(0)}_{klj}(x) u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}\,dx + \lambda\int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)} u(x)\overline{v(x)}\,dx, \tag{7}$$

где

$$a^{(0)}_{klj}(x) = (1-\eta_j(x))\gamma(x_j)a_{kl}(x_j) + \eta_j(x)\gamma(x)a_{kl}(x). \tag{8}$$

Так как коэффициенты $a_{kl}(x)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$, они ограничены. Отсюда следует ограниченность коэффициентов $a^{(0)}_{klj}(x)$. Применяя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$\big|B^{(0)}_{\lambda j}[u,v]\big| \leq (M_0 + |\lambda|)\big\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\| \cdot \big\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\| \tag{9}$$

для всех $u, v \in V^r_{2,\alpha,\varphi}(\Omega)$.

Из условия (5) следует, что

$$\operatorname{Re}\Big\{\gamma(x_j)\sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x_j)\xi^k\xi^l\Big\} \geq c|\xi|^{2r},$$

$$\operatorname{Re}\Big\{\gamma(x)\sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l\Big\} \geq c|\xi|^{2r}$$

для всех $j = \overline{1,N}$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. В силу этих неравенств из (8) получаем

$$\operatorname{Re}\Big\{\sum_{|k|=|l|=r} a^{(0)}_{klj}(x)\xi^k\xi^l\Big\} \geq c|\xi|^{2r}$$

для всех $j = \overline{1,N}$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Это неравенство позволяет применить теорему 3.1 из [8], в силу которой существует число $\lambda_j \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_j$

$$\operatorname{Re} B^{(0)}_{\lambda j}[u,u] \geq C_0\big\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\|^2 \tag{10}$$

для всех $j = \overline{1,N}$, $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathscr{B}^{(0)}_{\lambda j}[u,v] = \sum_{|k|,|l|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x)\hat{a}_{klj}(x) u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}\,dx + \lambda\int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)} u(x)\overline{v(x)}\,dx,$$

где $\hat{a}_{klj}(x) = [(1-\eta_j(x))a_{kl}(x_j) + \eta_j(x)a_{kl}(x)]\gamma(x_j)$. Так как

$$a^{(0)}_{klj}(x) - \hat{a}_{klj}(x) = \eta_j(x)(\gamma(x) - \gamma(x_j))a_{kl}(x)$$

и коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены, действуя как при доказательстве неравенства (9), с помощью неравенства Коши — Буняковского получим

$$\left|B^{(0)}_{\lambda j}[u,v] - \mathscr{B}^{(0)}_{\lambda j}[u,v]\right| \le M\Lambda \left\|u; L^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v; L^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|$$

для всех $u, v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Здесь $\Lambda = \sup|\eta_j(x)(\gamma_j(x) - \gamma(x_j))|$, где супремум берется по всем $x \in \Omega$ и всем $j = \overline{1,N}$.

Применяя это неравенство, из (10) находим

$$\begin{aligned} C_0\left\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|^2 &\le \operatorname{Re}\left(B^{(0)}_{\lambda j}[u,u] - \mathscr{B}^{(0)}_{\lambda j}[u,u]\right) + \operatorname{Re}\mathscr{B}^{(0)}_{\lambda j}[u,u] \\ &\le \operatorname{Re}\mathscr{B}^{(0)}_{\lambda j}[u,u] + M\Lambda\left\|u; L^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку $|\eta_j(x)(\gamma(x) - \gamma(x_j))| < \nu$, $j = \overline{1,N}$, и $\nu$ — достаточно малое положительное число, из (11) следует, что

$$c_0\left\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|^2 \le \operatorname{Re}\mathscr{B}^{(0)}_{\lambda j}[u,u] \tag{12}$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Введем полуторалинейную форму

$$\mathscr{B}_{\lambda j}[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_\Omega \rho^{2\alpha}(x)a_{klj}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}\,dx + \lambda\int_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx, \tag{13}$$

где $a_{klj}(x) = (1-\eta_j(x))a_{kl}(x_j) + \eta_j(x)a_{kl}(x)$.

Заметим, что $\mathscr{B}^{(0)}_{\lambda j}[u,v] = \gamma(x_j)\mathscr{B}_{\lambda_j j}[u,v]$, где $\lambda_j = \lambda\gamma^{-1}(x_j)$. Поэтому из неравенства (12) следует, что при достаточно больших $\lambda$

$$c_0\left\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|^2 \le \operatorname{Re}\{\gamma(x_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[u,u]\} \tag{14}$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Не нарушая общности, можно считать, что в условии (4) $\varphi > \pi/2$. В силу (4) неравенство (5) будет выполняться также и в том случае, если $\gamma(x)$ заменить на $\exp(i\theta(x))$, где $\theta(x) = \min\{\varphi - \pi/2, |\arg\gamma(x)|\}(\operatorname{sign}\gamma(x))$. Поэтому из (14) имеем

$$c_0\left\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|^2 \le \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[u,u]\} \tag{15}$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Здесь и далее $\theta_j = \theta(x_j)$, $j = \overline{1,N}$.

Поступая так же, как при доказательстве неравенства (9), находим

$$|\mathscr{B}_{\lambda j}[u,v]| \le (M_0 + |\lambda|)\left\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \tag{16}$$

для всех $u, v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

На основе неравенств (15), (16), применяя теорему Лакса — Мильграма (см. [4, теорема 2.0.1]), построим оператор

$$\mathscr{R}_j(\lambda) : \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \to V^r_{2;\alpha}(\Omega)$$

такой, что

$$\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[\mathscr{R}_j(\lambda)F, v] = \langle F, v\rangle \tag{17}$$

для всех $F \in \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ и всех $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$;

$$\big\|\mathscr{R}_j(\lambda)F; V^r_{2;\alpha,\varphi}(\Omega)\big\| \le M_1\big\|F; \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'\big\| \tag{18}$$

для всех $F \in \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$. Здесь число $M_1$ не зависит от $F$ и от $\lambda$, $\lambda \ge \lambda_0 = \max\limits_{j=\overline{1,N}} \lambda_j$ и числа $\lambda_j$ такие же, как в (10).

Символом $\Phi_j$ обозначим оператор умножения на функцию $\varphi_j(x)$ и введем оператор

$$\mathscr{R}(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j)\Phi_j\mathscr{R}_j(\lambda)\Phi_j, \tag{19}$$

который действует из $\big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ в $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Так как коэффициенты $a_{kl}(x)$ ($|k| = |l| = r$) ограничены, с помощью неравенства Коши — Буняковского доказывается, что

$$\bigg|\sum_{|k|,|l|=r}\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}\,dx\bigg| \le M_0\big\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\|\cdot\big\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\|$$

для всех $u, v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Отсюда

$$|B_\lambda[u,v]| \le (M_0+\lambda)\big\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\|\cdot\big\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\|$$

для всех $u, v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Следовательно, оператор $\mathbb{R}(\lambda)$, определенный равенством

$$\langle\mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle = B_\lambda[\mathscr{R}(\lambda)F, v], \quad v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega), \tag{20}$$

действует из $\big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ в $\big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$.

Согласно нашим построениям функции $\varphi^2_j(x)$, $j = \overline{1,N}$, образуют разбиение единицы области $\Omega$. Поэтому для всех $F \in L_2(\Omega)$ и $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ выполняются равенства

$$\langle F, v\rangle = (F, v) = \int\limits_{\Omega} F(x)\overline{v(x)}\,dx = \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\varphi^2_j(x)F(x)\overline{v(x)}\,dx = \sum_{j=1}^{N}(\varphi_jF, \varphi_j). \tag{21}$$

Здесь и далее символом $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$.

Поскольку $a_{klj}(x) = (1-\eta_j(x))a_{kl}(x_j) + \eta_j(x)a_{kl}(x)$ и функция $\eta_j(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp}\varphi_j$, функции $a_{klj}(x)$ и $a_{kl}(x)$ на множестве $\operatorname{supp}\varphi_j$ совпадают. Поэтому из (1), (19) и (20) следует, что

$$\langle\mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle = \sum_{j=1}^{N}\exp(i\theta_j)\bigg\{\sum_{|k|,|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)a_{klj}(x)D^k(\varphi_j\mathscr{R}_j(\lambda)\Phi_jF)(x)\overline{v^{(l)}(x)}\,dx$$
$$+\lambda\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-2r}(x)(\mathscr{R}_j(\lambda)\Phi_jF)(x)\overline{\varphi_j(x)v(x)}\,dx\bigg\}. \tag{22}$$

Здесь и далее символ $D^k$ обозначает дифференцирование мультииндекса $k$.

Пусть $F \in L_2(\Omega)$. В равенстве (17) заменим $F$ на $\varphi_jF$, а $v$ — на $\varphi_jv$:

$$\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[\mathscr{R}_j(\lambda)\Phi_jF, \varphi_jv] = (\varphi_jF, \varphi_jv),$$

откуда с учетом равенства (13) вытекает, что

$$(\varphi_j F, \varphi_j v) = \exp(i\theta_j)\Big\{ \sum_{|k|,|l|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) D^k(\mathscr{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x)\overline{D^l(\varphi_j(x)v(x))}\,dx + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x)(\mathscr{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x)\overline{\varphi_j(x)v(x)}\,dx\Big\}.$$

Суммируя это равенство по $j$ от 1 до $N$, в силу (21) имеем

$$\langle F, v\rangle = (F, v) = \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j)\Big\{ \sum_{|k|,|l|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) D^k(\mathscr{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x)\overline{D^l(\varphi_j(x)v(x))}\,dx + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x)(\mathscr{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x)\overline{\varphi_j(x)v(x)}\,dx\Big\}.$$

Отсюда и из (22) следует, что

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F, v\rangle = \mathbb{K}_\lambda[F, v] + \mathbb{L}_\lambda[F, v], \tag{23}$$

где

$$\mathbb{K}_\lambda[F, v] = \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j) \sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) \varphi_j^{(k')}(x) U_{j,\lambda}^{(k'')}(x)\overline{v^{(l)}(x)}\,dx, \tag{24}$$

$$\mathbb{L}_\lambda[F, v] = \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j) \sum\nolimits^{(2)} C_{l'}^{l''} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) U_{j,\lambda}^{(k)}(x)\overline{\varphi_j^{(l')}(x) v^{(l'')}(x)}\,dx, \tag{25}$$

$$U_{j,\lambda}(x) = (\mathscr{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x), \quad j = \overline{1, N}.$$

Здесь символ $\sum^{(1)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k, l, k', k''$ таким, что $k = k' + k''$, $k' \neq 0$, $|k| = |l| = r$, а символ $\sum^{(2)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k, l, l', l''$ таким, что $l = l' + l''$, $l' \neq 0$, $|k| = |l| = r$.

Дальнейшая часть доказательства основной теоремы состоит из оценки правой части равенства (23). Эту оценку сформулируем в виде двух вспомогательных утверждений.

**Утверждение 1.** *Существует положительная функция $\omega_1(\lambda)$, $\lambda > 0$, такая, что*

$$|\mathbb{K}_\lambda[F, v]| \le \omega_1(\lambda) \big\| F; \big(V_{2;\alpha}^r(\Omega)\big)' \big\| \cdot \big\| v; V_{2;\alpha}^r(\Omega) \big\| \tag{26}$$

*для всех $F \in L_2(\Omega)$, $v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$, и $\omega_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству утверждения 1, докажем лемму 1.

**Лемма 1.** *Пусть $B_{\lambda j}$ — самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\Omega)$, порожденный симметричной формой*

$$\widetilde{\mathscr{B}}_{\lambda j}[u, v] = \frac{1}{2}\{\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[u, v] + \exp(-i\theta_j)\overline{\mathscr{B}_{\lambda j}[v, u]}\}, \tag{27}$$

$$D(\widetilde{\mathscr{B}}_{\lambda j}) = V^r_{2;\alpha}(\Omega).$$

*Тогда при* $\lambda \geq \lambda_0$, *где* $\lambda_0 = \max\limits_{j=\overline{1,N}} \lambda_j$ *и* $\lambda_j$ *— такие же конечные положительные числа, как в* (10), *для любого мультииндекса* $k$ *такого, что* $|k| = r$, *и любого* $j = \overline{1,N}$ *оператор* $\rho^\alpha D^k B^{-1/2}_{\lambda j}$ *ограничен в* $L_2(\Omega)$, *а если мультииндекс* $\widetilde{k}$ *такой, что* $|\widetilde{k}| < r$, *то существует положительная функция* $q(\lambda)$ *такая, что* $q(\lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$ *и*

$$\|\rho^\alpha D^{\widetilde{k}} u; L_2(\Omega)\| \leq q(\lambda)\big\|B^{1/2}_{\lambda j} u; L_2(\Omega)\big\| \tag{28}$$

*для всех* $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Доказательство. По определению оператора $B_{\lambda j}$ для всех $u, v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ выполняется равенство

$$\big(B^{1/2}_{\lambda j} u, B^{1/2}_{\lambda j} v\big) = \widetilde{\mathscr{B}}_{\lambda j}[u,v]. \tag{29}$$

Следовательно,

$$\big\|B^{1/2}_{\lambda j} u; L_2(\Omega)\big\|^2 = \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[u,u]\} \tag{30}$$

и в силу неравенства (15)

$$\big\|B^{1/2}_{\lambda j} u; L_2(\Omega)\big\| \geq c_0\big\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\|, \quad \lambda \geq \lambda_0, \tag{31}$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Тем самым

$$\|\rho^\alpha D^k u; L_2(\Omega)\| \leq M_0\big\|B^{1/2}_{\lambda j} u; L_2(\Omega)\big\|, \quad |k| = r,\ j = \overline{1,N},\ u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega),$$

что влечет ограниченность оператора $\rho^\alpha D^k B^{-1/2}_{\lambda j}$.

Рассмотрим случай $|\widetilde{k}| < r$. Из леммы 2.2 в [8], в частности, следует, что для любого $\tau > 0$ и всех $u \in C^\infty_0(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|\rho^{\beta-r+m} D^{\widetilde{k}} u; L_2(\Omega)\| \leq \tau\big\|u; L^r_{2;\beta}(\Omega)\big\| + c_0\tau^{-\mu}\|\rho^{\beta-r} u; L_2(\Omega)\|,$$

где $m = |\widetilde{k}|$, $\mu = m/(r-m)$. Обозначая в этом неравенстве $\beta - r + m$ через $\alpha$, приходим к неравенству

$$\|\rho^\alpha D^{\widetilde{k}} u; L_2(\Omega)\| \leq \tau\big\|u; L^r_{2;\alpha+r-m}(\Omega)\big\| + c_0\tau^{-\mu}\|\rho^{\alpha-m} u; L_2(\Omega)\|.$$

Так как $r - m \geq 1$ и $\Omega$ — ограниченная область, то $\rho^{r-m}(x) \leq C_1$ для всех $x \in \Omega$. Поэтому из полученного неравенства в силу (31) для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ следует, что

$$\|\rho^\alpha D^{\widetilde{k}} u; L_2(\Omega)\| \leq \tau\big\|B^{1/2}_{\lambda j} u; L_2(\Omega)\big\| + c_0\tau^{-\mu}\|\rho^{\alpha-m} u; L_2(\Omega)\|,$$

где $m = |\widetilde{k}| < r$, $\mu = |\widetilde{k}|/(r - |\widetilde{k}|) > 0$ и $\tau$ — произвольное положительное число.

Отсюда в силу равенства (30) вытекает, что

$$\|\rho^\alpha D^{\widetilde{k}} u; L_2(\Omega)\|^2 \leq \tau^2 \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[u,u]\} + c_1\tau^{-2\mu}\|\rho^{\alpha-m} u; L_2(\Omega)\|^2.$$

Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&\tau^2 \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[u,u]\} + c_1\tau^{-2\mu}\|\rho^{\alpha-m}u; L_2(\Omega)\|^2 \\
&\qquad = \tau^2 \operatorname{Re}\Biggl\{ \exp(i\theta_j)\biggl( \sum_{|k|,|l|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}\,dx \\
&\qquad\quad + \lambda \int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x)|u(x)|^2\,dx\biggr)\Biggr\} + c_1\tau^{-2\mu}\int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-m)}(x)|u(x)|^2\,dx \\
&\qquad \le \tau^2 \operatorname{Re}\Biggl\{ \exp(i\theta_j)\biggl( \sum_{|k|,|l|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}\,dx \\
&\qquad\qquad\qquad + K_0(\lambda,\tau)\int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x)|u(x)|^2\,dx\biggr)\Biggr\},
\end{aligned}
$$

где $K_0(\lambda,\tau)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\lambda + c_1\tau^{-2\mu-2} \le K_0(\lambda,\tau)$. Поскольку $\mu+1 = r/(r-m)$, то $K_0(\lambda,\tau)\to 0$ при $\tau\to 0$ или $\lambda\to\infty$. Поэтому из полученных выше неравенств при $\lambda = 1/\tau$ следует, что

$$
\begin{aligned}
&\|\rho^\alpha D^{k''}u; L_2(\Omega)\|^2 \\
&\qquad \le \tau^2 \operatorname{Re}\Biggl\{ \exp(i\theta_j)\biggl( \sum_{|k|,|l|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}\,dx \\
&\qquad\qquad\qquad + p(\tau)\int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x)|u(x)|^2\,dx\biggr)\Biggr\},
\end{aligned} \tag{32}
$$

где непрерывная положительная функция $p(\tau)$ такова, что $p(\tau)\to\infty$ при $\tau\to 0$. Обратную к $p(\tau)$ функцию обозначим через $q$ и, положив $\tau = q(\lambda)$ в равенстве (32), получим

$$
\begin{aligned}
&\|\rho^\alpha D^{k''}u; L_2(\Omega)\|^2 \\
&\qquad \le q(\lambda)^2 \operatorname{Re}\Biggl\{ \exp(i\theta_j)\biggl( \sum_{|k|,|l|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}\,dx \\
&\qquad\qquad\qquad + \lambda\int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x)|u(x)|^2\,dx\biggr)\Biggr\},
\end{aligned}
$$

где непрерывная положительная функция $q(\lambda)$ такова, что $q(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$. Отсюда в силу равенства (30) следует (28).

Лемма 1 доказана.

Билинейная форма $\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[u,v]$ удовлетворяет неравенствам (см. (15), (16)):

$$
c_0\bigl\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\bigr\|^2 \le \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[u,u]\} \tag{33}
$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$,

$$
|\mathscr{B}_{\lambda j}[u,v]| \le (M_0 + |\lambda|)\bigl\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\bigr\| \cdot \bigl\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\bigr\| \tag{34}
$$

для всех $u, v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Числа $c_0, M_0 > 0$ в этих неравенствах не зависят от $u(x)$, $v(x)$.

Согласно (33), (34) билинейная форма $\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[u,v]$ замкнута и секториальна. Поэтому в силу теоремы 2.1 из [9, гл. 6] существует $m$-секториальный оператор $A_{\lambda j}$ такой, что

$$\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[u,v]=(A_{\lambda j}u,v), \quad u\in D(A_{\lambda j})\subset V^r_{2;\alpha}(\Omega),\ v\in V^r_{2;\alpha}(\Omega). \tag{35}$$

Пусть $f\in L_2(\Omega)$. Тогда $\mathscr{R}_j(\lambda)f\in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ и ввиду равенства (17)

$$\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[\mathscr{R}_j(\lambda)f,v]=\langle f,v\rangle$$

для всех $v\in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Отсюда и из (35) в силу теоремы 2.1 из [9, гл. 6] следует, что $A_{\lambda j}\mathscr{R}_j(\lambda)f=f$, $f\in L_2(\Omega)$, т. е.

$$\mathscr{R}_j(\lambda)f=A^{-1}_{\lambda j}f \tag{36}$$

для всех $f\in L_2(\Omega)$.

Пусть $B_{\lambda j}$ — самосопряженный оператор, введенный в лемме 1. Для всех $u,v\in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ выполняется равенство

$$\big(B^{1/2}_{\lambda j}u,B^{1/2}_{\lambda j}v\big)=\widetilde{\mathscr{B}}_{\lambda j}[u,v],$$

откуда при $u(x)=v(x)$ с учетом равенства (27) получим

$$\big\|B^{1/2}_{\lambda j}u;L_2(\Omega)\big\|^2=\operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j)\mathscr{B}_{\lambda j}[u,u]\}, \quad \lambda\ge\lambda_0>0.$$

Применяя (15), находим, что

$$\big\|B^{1/2}_{\lambda j}u;L_2(\Omega)\big\|\ge C\big\|u;V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\|, \quad \lambda\ge\lambda_0>0,$$

для всех $u\in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Отсюда следует обратимость оператора $B^{1/2}_{\lambda j}$ при $\lambda\ge\lambda_0>0$. Применяя теорему 3.2 из [9, гл. 6], получим представление

$$A^{-1}_{\lambda j}=B^{-1/2}_{\lambda j}X_j(\lambda)B^{-1/2}_{\lambda j}, \quad \lambda\ge\lambda_0>0, \tag{37}$$

где $X_j(\lambda):L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ — некоторый ограниченный оператор и его норма $\|X_j(\lambda)\|$ не превосходит числа $M_1>0$, не зависящего от $\lambda\in[\lambda_0,\infty)$.

Переходим к доказательству оценки (26). Равенство (24) перепишем в виде

$$\mathbb{K}_\lambda[F,v]=\sum_{j=1}^N\exp(i\theta_j)\sum\nolimits^{(1)}C^{k''}_{k'}\big(\rho^\alpha a_{klj}\varphi^{(k')}_jU^{(k'')}_{j,\lambda},\rho^\alpha v^{(l)}\big), \tag{38}$$

где $U_{j,\lambda}(x)=(\mathscr{R}_j(\lambda)\Phi_jF)(x)$, $j=\overline{1,N}$. Пусть $F\in L_2(\Omega)$. Используя равенства (35)–(38), имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_\lambda[F,v]&=\sum_{j=1}^N\sum\nolimits^{(1)}\exp(i\theta_j)C^{k''}_{k'}\big(\rho^\alpha a_{klj}\varphi^{(k')}_jD^{k''}A^{-1}_{\lambda j}\Phi_jF,\rho^\alpha v^{(l)}\big)\\&=\sum_{j=1}^N\sum\nolimits^{(1)}\exp(i\theta_j)C^{k''}_{k'}\big(\rho^\alpha a_{klj}\varphi^{(k')}_jD^{k''}B^{-1/2}_{\lambda j}X_j(\lambda)B^{-1/2}_{\lambda j}\Phi_jF,\rho^\alpha v^{(l)}\big).\end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$|\mathbb{K}_\lambda[F,v]|\ll\sum_{j=1}^N\sum\nolimits^{(1)}\|\mathbb{T}_{k''j}(\lambda)V_{j,\lambda};L_2(\Omega)\|\cdot\big\|\mathbb{S}_{j,l}B^{1/2}_{\lambda_0 j}v;L_2(\Omega)\big\|, \tag{39}$$

где

$$\mathbb{T}_{k''j}(\lambda) = \rho^\alpha D^{k''} B_{\lambda j}^{-1/2}, \quad V_{j,\lambda}(x) = X_j(\lambda) B_{\lambda j}^{-1/2}(\varphi_j F)(x),$$
$$\mathbb{S}_{j,l} = \rho^\alpha D^l B_{\lambda_0 j}^{-1/2}. \tag{40}$$

Докажем неравенство

$$\|V_{j,\lambda}; L_2(\Omega)\| \le M \big\|F; \big(V_{2;\alpha}^r(\Omega)\big)'\big\|, \tag{41}$$

которое справедливо при $\lambda \ge \lambda_0$. Пусть $\lambda \ge \lambda_0$. Тогда

$$\big\|B_{\lambda j}^{-1/2}(\varphi_j F); L_2(\Omega)\big\| \ll \big\|B_{\lambda_0 j}^{-1/2}(\varphi_j F); L_2(\Omega)\big\|. \tag{42}$$

Норму в пространстве $L_2(\Omega)$ можно задавать с помощью равенства

$$\|f; L_2(\Omega)\| = \sup |(f, v)|, \tag{43}$$

где супремум берется по всем $v \in L_2(\Omega)$ таким, что $\|v; L_2(\Omega)\| = 1$. Так как $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, в равенстве (43) можно считать, что супремум берется по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$ таким, что $\|v; L_2(\Omega)\| = 1$.

При $\lambda = \lambda_0$ из (29) имеем $\big(B_{\lambda_0 j}^{1/2} u, B_{\lambda_0 j}^{1/2} v\big) = \widetilde{\mathscr{B}}_{\lambda_0 j}[u, v]$.

С другой стороны,

$$\mathscr{B}_{\lambda_0 j}[u, u] \gg \big\|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\big\|^2,$$

$$|\mathscr{B}_{\lambda_0 j}[u, v]| \le (M_0 + \lambda_0)\big\|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\big\| \cdot \big\|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\big\|$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому согласно теореме Лакса — Мильграма уравнение

$$\mathscr{B}_{\lambda_0 j}[u, \hat v] = (w, \hat v), \quad \hat v \in C_0^\infty(\Omega),$$

имеет решение для любого $w \in L_2(\Omega)$. Следовательно, функцию $v \in C_0^\infty(\Omega)$ в (43) можно представить в виде $v = B_{\lambda_0 j}^{1/2} w$, т. е.

$$\|f; L_2(\Omega)\| = \sup \big|\big(f, B_{\lambda_0 j}^{1/2} w\big)\big|,$$

где супремум берется по всем $w \in C_0^\infty(\Omega)$ таким, что $\big\|B_{\lambda_0 j}^{1/2} w; L_2(\Omega)\big\| = 1$. С другой стороны, в классе $C_0^\infty(\Omega)$ нормы $\big\|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\big\|$ и $\big\|B_{\lambda_0 j}^{1/2} v; L_2(\Omega)\big\|$ эквивалентны. Поэтому

$$\begin{aligned}\big\|B_{\lambda_0 j}^{-1/2}(\varphi_j F); L_2(\Omega)\big\| &= \sup \big|\big(B_{\lambda_0 j}^{-1/2}(\varphi_j F), w\big)\big| \\ &= \sup \big|\big(B_{\lambda_0 j}^{-1/2}(\varphi_j F), B_{\lambda_0 j}^{1/2} v\big)\big| \ll \sup |(\varphi_j F, v)| \\ &\ll \big\|\varphi_j F; \big(V_{2;\alpha}^r(\Omega)\big)'\big\| \ll \big\|F; \big(V_{2;\alpha}^r(\Omega)\big)'\big\|, \end{aligned} \tag{44}$$

где первый супремум в этой цепочке берется по всем $w \in C_0^\infty(\Omega)$, $\|w; L_2(\Omega)\| = 1$, второй супремум — по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $\big\|B_{\lambda_0 j}^{1/2} w; L_2(\Omega)\big\| = 1$, а третий супремум — по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $\big\|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\big\| = 1$.

Из (42), (44) следует (41).

Согласно лемме 1 оператор $\mathbb{S}_{j,l} = \rho^\alpha D^l B_{\lambda_0 j}^{-1/2}$ (см. (40)) ограничен, и из (16), (29) следует, что

$$\big\|B_{\lambda_0 j}^{1/2} v; L_2(\Omega)\big\|^2 = |\widetilde{\mathscr{B}}_{\lambda_0 j}[v, v]| \ll \big\|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\big\|^2$$

для всех $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Поэтому

$$\big\|\mathbb{S}_{j,l} B^{1/2}_{\lambda_0 j} v; L_2(\Omega)\big\| \ll \big\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\|. \tag{45}$$

Согласно второй части утверждения леммы 1 существует положительная функция $\varepsilon_1(\lambda)$ такая, что

$$\big\|\rho^\alpha D^{k''} B^{-1/2}_{\lambda j}\big\| \le \varepsilon_1(\lambda)$$

и $\varepsilon_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|\mathbb{T}_{k'' j}(\lambda)\| = 0$ (см. (40)). Ввиду этого равенства из (39), (41), (45) получим оценку (26).

Утверждение 1 доказано.

**Утверждение 2.** *Существует положительная функция $\omega_2(\lambda)$, $\lambda > 0$, такая, что*

$$|\mathbb{L}_\lambda[F, v]| \le \omega_2(\lambda) \big\|F; \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'\big\| \cdot \big\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\| \tag{46}$$

*для всех $F \in L_2(\Omega)$, $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, и $\omega_2(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. Для удобства записи интегралы, составляющие форму $\mathbb{L}_\lambda[F, v]$, обозначим через $\mathbb{I}_\lambda[F, v]$.[1)]

Так как (см. (36), (37))

$$\mathscr{R}_j(\lambda) = A^{-1}_{\lambda j} = B^{-1/2}_{\lambda j} X_j(\lambda) B^{-1/2}_{\lambda j}, \quad \lambda \ge \lambda_0 > 0,$$

форму $\mathbb{I}_\lambda[F, v]$ можно записать в виде

$$\mathbb{I}_\lambda[F, v] = \big(\rho^\alpha a_{klj} D^k B^{-1/2}_{\lambda j} X_j(\lambda) B^{-1/2}_{\lambda j} \Phi_j F, \rho^\alpha \varphi^{(l')}_j D^{l''} v\big).$$

Далее введем обозначение

$$V_{j,\lambda}(x) = X_j(\lambda) B^{-1/2}_{\lambda j} \Phi_j F \tag{47}$$

и, используя равенство $D^{l''} v = D^{l''} B^{-1/2}_{\lambda_0 j} B^{1/2}_{\lambda_0 j} v$, получим

$$\mathbb{I}_\lambda[F, v] = \big(B^{-1/2}_{\lambda_0 j} D^{l''} \varphi^{(l')}_j \rho^\alpha a_{klj} \rho^\alpha D^k B^{-1/2}_{\lambda j} V_{j,\lambda}, B^{1/2}_{\lambda_0 j} v\big). \tag{48}$$

Положим

$$\mathbb{T}_{j,\lambda_0,l''} = a_{klj} \rho^\alpha \varphi^{(l')}_j D^{l''} B^{-1/2}_{\lambda_0 j}.$$

Тогда

$$\mathbb{T}^*{}_{j,\lambda_0,l''} = B^{-1/2}_{\lambda_0 j} D^{l''} \varphi^{(l')}_j \rho^\alpha a_{klj}$$

и равенство (48) примет вид

$$\mathbb{I}_\lambda[F, v] = \big(\mathbb{T}^*{}_{j,\lambda_0,l''} \rho^\alpha D^k B^{-1/2}_{\lambda j} V_{j,\lambda}, B^{1/2}_{\lambda_0 j} v\big).$$

Введем обозначение

$$\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k} = \rho^\alpha D^k B^{-1/2}_{\lambda_0 j}.$$

Тогда

$$\mathbb{I}_\lambda[F, v] = \big(\mathbb{T}^*{}_{j,\lambda_0,l''} \mathbb{P}_{j,\lambda_0,k} B^{1/2}_{\lambda_0 j} B^{-1/2}_{\lambda j} V_{j,\lambda}, B^{1/2}_{\lambda_0 j} v\big). \tag{49}$$

---

[1)] Зависимость $\mathbb{I}_\lambda[F, v]$ от $j, k, l, l', l''$ в данном контексте несущественна, поэтому в обозначении эти символы не используются.

Так как $B_{\lambda j}$ — самосопряженный оператор, ассоциированный с формой $\widetilde{\mathscr{B}}_{\lambda j}[u,v]$ (см. лемму 1), то

$$\begin{aligned}\big\|\big(B^{1/2}_{\lambda_0 j}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\big)u;L_2(\Omega)\big\|^2 &\le 2\big\{\big\|B^{1/2}_{\lambda_0 j}u;L_2(\Omega)\big\|^2+(\lambda-\lambda_0)\|u;L_2(\Omega)\|^2\big\}\\ &\le M_0\big\{\big(B^{1/2}_{\lambda_0 j}u,B^{1/2}_{\lambda_0 j}u\big)+\theta'_j(\lambda-\lambda_0)(\rho^{\alpha-r}u,\rho^{\alpha-r}u)\big\}\\ &= M_0[\widetilde{\mathscr{B}}_{\lambda_0 j}[u,u]+\theta'_j(\lambda-\lambda_0)(\rho^{2\alpha-2r}u,u)]=M_0\widetilde{\mathscr{B}}_{\lambda j}[u,u]\\ &= M_0\big(B^{1/2}_{\lambda j}u,B^{1/2}_{\lambda j}u\big)=M_0\big\|B^{1/2}_{\lambda j}u;L_2(\Omega)\big\|^2.\end{aligned}$$

Следовательно, существует число $M_1>0$ такое, что

$$\big\|\big(B^{1/2}_{\lambda_0 j}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\big)B^{-1/2}_{\lambda j}\big\|\le M_1 \tag{50}$$

при $\lambda\ge\lambda_0$. Здесь $\theta'_j=\operatorname{Re}\exp(i\theta_j)$.

Используя неравенство (50), из (49) получаем

$$|\mathbb{I}_\lambda[F,v]|\le M_2\big\|\mathbb{T}^*{}_{j,\lambda_0,l''}\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k}B^{1/2}_{\lambda_0 j}\big(B^{1/2}_{\lambda_0 j}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\big)^{-1}\big\|\\ \times\|V_{j,\lambda};L_2(\Omega)\|\cdot\big\|B^{1/2}_{\lambda_0 j}v;L_2(\Omega)\big\|. \tag{51}$$

Докажем, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\big\|\mathbb{T}^*{}_{j,\lambda_0,l''}\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k}B^{1/2}_{\lambda_0 j}\big(B^{1/2}_{\lambda_0 j}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\big)^{-1}\big\|=0. \tag{52}$$

Используя равенство

$$B^{1/2}_{\lambda_0 j}\big(B^{1/2}_{\lambda_0 j}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\big)^{-1}=\big(E+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}B^{-1/2}_{\lambda_0 j}\big)^{-1},$$

имеем

$$\mathbb{T}^*{}_{j,\lambda_0,l''}\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k}B^{1/2}_{\lambda_0 j}\big(B^{1/2}_{\lambda_0 j}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\big)^{-1}=\mathbb{T}\big(E+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}H\big)^{-1}, \tag{53}$$

где $\mathbb{T}=\mathbb{T}^*{}_{j,\lambda_0,l''}\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k}$, $H=B^{-1/2}_{\lambda_0 j}$. Так как $|l''|\le r-1$, оператор $\mathbb{T}_{j,\lambda_0,l''}$ вполне непрерывен. Поэтому из ограниченности оператора $\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k}$ вытекает вполне непрерывность оператора $\mathbb{T}$. Далее, применяя лемму 7.1 из [10, гл. 5], из (53) получаем (52).

Из (51) в силу (52) следует, что

$$|\mathbb{I}_\lambda[F,v]|\le\delta_*(\lambda)\|V_{j,\lambda};L_2(\Omega)\|\cdot\big\|B^{1/2}_{\lambda_0 j}v;L_2(\Omega)\big\|, \tag{54}$$

где $\delta_*(\lambda)\to0$ при $\lambda\to0$.

Заметим, что (см. (47), (34))

$$\|V_{j,\lambda};L_2(\Omega)\|\le\|X_j(\lambda)\|\big\|B^{-1/2}_{\lambda j}F;L_2(\Omega)\big\|\ll\big\|F;\big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'\big\|,$$

$$\big\|B^{1/2}_{\lambda_0 j}v;L_2(\Omega)\big\|\ll\big\|v;V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\|.$$

В силу этих неравенств из (54) вытекает (46).

Утверждение 2 доказано.

Применяя неравенства (26), (46), установленные в утверждениях 1 и 2 соответственно, из (23) получим

$$|\langle\mathbb{R}(\lambda)F,v\rangle-\langle F,v\rangle|\le(\omega_1(\lambda)+\omega_2(\lambda))\big\|F;\big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'\big\|\cdot\big\|v;V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\|$$

для всех $F \in L_2(\Omega)$, $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Так как $\omega_1(\lambda) \to 0$, $\omega_2(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, существует число $\lambda_0 \geq 1$ такое, что

$$|\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F, v\rangle| \leq \frac{1}{2}\big\|F; \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'\big\| \cdot \big\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big\| \tag{55}$$

для любого $\lambda \geq \lambda_0$ и всех $F \in L_2(\Omega)$, $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Так как $L_2(\Omega)$ плотно в $\big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$, оценка (55) верна для всех $F \in \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$.

Ввиду (55) при $\lambda > \lambda_0$ оператор $\mathbb{R}(\lambda)$ имеет вид $\mathbb{R}(\lambda) = E + \mathbb{G}(\lambda)$, где норма оператора $\mathbb{G}(\lambda) : \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)' \to \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ не превосходит $1/2$. Поэтому оператор $\mathbb{R}(\lambda) : \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)' \to \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ непрерывно обратим и $\mathbb{R}^{-1}(\lambda) = (E + \mathbb{G}(\lambda))^{-1}$.

Оператор $\mathscr{R}_j(\lambda)$, определенный равенством (17), действует из $\big(\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ в $\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Поэтому из (19) следует, что оператор $\mathscr{R}(\lambda)$ также действует из $\big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ в $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Стало быть, для любого функционала $F \in \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ функция $U(x)$, определенная равенством

$$U = \mathscr{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F, \quad \lambda \geq \lambda_0, \tag{56}$$

принадлежит пространству $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Далее будем считать, что $\lambda \geq \lambda_0$ и $\lambda_0$ — достаточно большое число. Тогда из (20) следует, что $B_\lambda[\mathscr{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F, v] = \langle F, v\rangle$ для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому при $\lambda \geq \lambda_0$ функция $U(x)$, определенная равенством (56), удовлетворяет равенству $B_\lambda[U, v] = \langle F, v\rangle$, $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Тем самым функция (56) является решением задачи $D_\lambda$. Так как при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $\mathbb{R}^{-1}(\lambda)$ ограничен, из (18) и (19) следует, что функция (56) удовлетворяет оценке (6).

Для доказательства единственности решения задачи $D_\lambda$ рассмотрим сопряженную задачу: *для заданного функционала* $F \in \big(V^r_{2,\alpha}(\Omega)\big)'$ *найти решение* $U_1 \in V^r_{2,\alpha}(\Omega)$ *уравнения*

$$\overline{B_\lambda[v, U_1]} = \langle F, v\rangle, \quad v \in V^r_{2,\alpha,\varphi}(\Omega). \tag{57}$$

Так как коэффициенты билинейной формы $\overline{B_\lambda[v, U_1]}$ удовлетворяют условиям теоремы, поступая, как выше, можно построить операторы $\mathscr{R}_*(\lambda)$, $\mathbb{R}_*(\lambda)$ такие, что функция $U_1 = \mathscr{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$, $\lambda \in [\lambda_0^*, \infty)$, принадлежит пространству $V^r_{2;\alpha}(\Omega))$ и удовлетворяет уравнению (57).

Пусть функция $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$B_\lambda[u, v] = 0, \quad v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega), \tag{58}$$

где $\lambda \geq \lambda_0' = \max\{\lambda_0^*, \lambda_0\}$. Пусть $F$ — произвольный элемент пространства $\big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$. Так как $U_1 = \mathscr{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ принадлежит пространству $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, в (58) полагая $v = U_1$, получаем $B_\lambda[u, U_1] = 0$, т. е. $\overline{B_\lambda[u, U_1]} = 0$.

С другой стороны, функция $U_1 = \mathscr{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ удовлетворяет (57). Поэтому $\langle F, u\rangle = 0$ для всех $F \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Учитывая вложение $V^r_{2;\alpha}(\Omega) \to \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ и полагая $F = u$, имеем $\langle u, u\rangle = 0$, т. е. $u = 0$.

Теорема доказана полностью.

В заключение авторы выражают свою искреннюю признательность профессору С. А. Исхокову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Исхоков С. А.* О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // Докл. АН. 1995. Т. 342, № 1. С. 20–22.

**2.** *Бойматов К. Х., Исхоков С. А.* О разрешимости и спектральных свойствах вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1997. Т. 214. С. 107–134.

**3.** *Бойматов К. Х., Седдики К.* Граничные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ассоциированных с некоэрцитивными формами // Докл. АН. 1997. Т. 352, № 3. С. 295–297.

**4.** *Никольский С. М., Лизоркин П. И., Мирошин Н. В.* Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Изв. вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4–30.

**5.** *Бойматов К. Х.* О плотности финитных функций в весовых пространствах // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 6. С. 1296–1299.

**6.** *Исхоков С. А.* О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 536–542.

**7.** *Бойматов К. Х.* О базисности по Абелю системы корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 46–57.

**8.** *Исхоков С. А.* Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 201–216.

**9.** *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

**10.** *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.

*Статья поступила 24 апреля 2014 г.*

Гадоев Махмадрахим Гафурович, Константинова Туйаара Петровна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
политехнический институт (филиал) в г. Мирном
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678170, Республика Саха (Якутия)
gadoev@rambler.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.956.32*

# СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

**О. С. Зикиров, Д. К. Холиков**

**Аннотация.** Исследуется нелокальная задача с интегральным условием для одного класса уравнений в частных производных третьего порядка с волновым оператором в главной части. Методом Римана доказано существование регулярного решения исследуемой задачи при определенных условиях гладкости на заданные функции.

**Ключевые слова:** псевдопараболическое уравнение, метод Римана, нелокальная задача, интегральное условие, регулярное решение.

**1. Постановка задачи.** В области $D = \{(x, y) : \ 0 < x < l, \ 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$Mu \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy} + Lu = g(x, y), \tag{1}$$

где $\alpha, \beta$ — заданные постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а $L$ — линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u,$$

которое относится к одному из канонических видов, указанных в [1].

Заметим, что гиперболические уравнения третьего и более высоких порядков с доминированными младшими членами, которые часто называют псевдопараболическими, встречаются при изучении вопросов фильтрации жидкости в пористых средах, влагопереноса в почвогрунтах, распространения волн в диспергирующих средах, а также при моделировании различных процессов и явлений (см., например, [2–4]).

Уравнение (1) представляет собой объединение в виде одной формулы двух вариантов обобщенного псевдопараболического уравнения Аллера, частные случаи которого исследовались, например, в [5, с. 254–256; 6, с. 132–138], а также в [7, 8] и др.

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Действительно, если $\alpha < 0$, $\beta > 0$ или $\alpha > 0$, $\beta < 0$, то при помощи замены независимого переменного $x = 1 - \xi$ или $y = 1 - \eta$ рассматриваемые случаи редуцируются к случаю $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

В работе изучается следующая задача: *найти в области $D$ решение $u(x, y)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

*интегральным условиям*

$$\int\limits_0^l u(x,y)\,dx = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^l xu(x,y)\,dx = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{4}$$

*где* $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ — *заданные функции, и условиям согласования*

$$\int\limits_0^l \psi_1(x)\,dx = \varphi_1(0), \quad \int\limits_0^l x\psi_1(x)\,dx = \varphi_2(0),$$

$$\int\limits_0^l \psi_2(x)\,dx = \varphi_1'(0), \quad \int\limits_0^l x\psi_2(x)\,dx = \varphi_2'(0).$$

Смешанные задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных рассмотрены в [9–11], но при этом, в основном, рассматриваются уравнения второго порядка, как в одномерных [9], так и многомерных [10] областях. Следует отметить, что задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных высокого порядка исследованы в [11] и др. работах.

Введем некоторые необходимые обозначения и определения.

Через $C^{k,l}(D)$ обозначим класс функций $u(x,y)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x,y)/\partial x^m\partial y^n$ для всех $m = \overline{0,k}$, $n = \overline{0,l}$, $C^{k,0}(D) = C^k(D)$ и $C^0(D) = C(D)$.

Под классом $C^{(k,\nu)}(D)$ понимаются определенные в области $D$ функции, у которых все частные производные порядка $k$ существуют и удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\nu$, $0 < \nu < 1$.

Определение 1. *Регулярным в области $D$ решением* уравнения (1) называется действительная функция $u(x,y)$ из класса $C^{2,1}(D) \cap C^{1,2}(D) \cap C^{1,1}(\overline{D})$, удовлетворяющая ему в обычном смысле.

Сопряженным по Лагранжу оператором для дифференциального оператора $Mu$ будет

$$M^*v \equiv -\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v_{xy} + L^*v,$$

где $\alpha$, $\beta$ — заданные постоянные, а $L^*$ — линейный оператор второго порядка

$$L^*v \equiv (av)_{xx} + (2bv)_{xy} + (cv)_{yy} - (dv)_y - (ev)_y + fv.$$

Определение 2. *Функцией Римана* для уравнения (1) называется решение $v(x,y) = v(x,y;\xi,\eta)$ следующей задачи:

$$M^*v = 0, \tag{5}$$

$$v(\xi,y;\xi,\eta) = \omega_1(\xi,y;\xi,\eta), \quad v_x(\xi,y;\xi,\eta) = \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_\eta^y a(\xi,t)\,dt\right), \tag{6}$$

$$v(x,\eta;\xi,\eta)=\omega_2(x,\eta;\xi,\eta),\quad v_y(x,\eta;\xi,\eta)=\exp\left(-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\xi}^{x}c(t,\eta)\,dt\right),\tag{7}$$

где $\omega_1(\xi,y;\xi,\eta)$ и $\omega_2(x,\eta;\xi,\eta)$ — решения следующих задач Коши:

$$\beta\omega_{1yy}(\xi,y;\xi,\eta)-b(\xi,y)\omega_{1y}(\xi,y;\xi,\eta)+d(\xi,y)\omega_1(\xi,y;\xi,\eta)=0,$$
$$\omega_1(\xi,y;\xi,\eta)|_{y=\eta}=0,\quad \beta\omega_{1y}(\xi,y;\xi,\eta)\big|_{y=\eta}=1,\tag{8}$$
$$\alpha\omega_{2xx}(x,\eta;\xi,\eta)-b(x,\eta)\omega_{2x}(x,\eta;\xi,\eta)+e(x,\eta)\omega_2(x,\eta;\xi,\eta)=0,$$
$$\omega_2(x,\eta;\xi,\eta)|_{x=\xi}=0,\quad \alpha\omega_{2x}(x,\eta;\xi,\eta)|_{x=\xi}=1,\tag{9}$$

а $(\xi,\eta)$ — произвольная точка области $D$. Очевидно, что задачи (8) и (9) однозначно разрешимы.

Будем требовать выполнения следующих условий.

**Условие 1.** *Коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям*

$$a(x,y)\in C^{1,0}(\overline{D})\cap C^{2,0}(D),\quad b(x,y)\in C^{1,0}(\overline{D})\cap C^{0,1}(\overline{D})\cap C^{1,1}(D),$$
$$c(x,y)\in C^{0,1}(\overline{D})\cap C^{0,2}(D),\quad d(x,y)\in C^{0,0}(\overline{D})\cap C^{1,0}(D),$$
$$e(x,y)\in C^{0,0}(\overline{D})\cap C^{0,1}(D),\quad f(x,y)\in C^{0,0}(D),$$

*кроме того, $d(x,y)<0$, $e(x,y)<0$ для любых $(x,y)\in D$.*

**Условие 2.** *Заданные функции $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$, $i=1,2$, и $g(x,y)$ удовлетворяют условиям*

$$\psi_i(x)\in C^2[0,l],\quad \varphi_i(y)\in C^2[0,h],\quad i=1,2,\quad g(x,y)\in C^{(1,\lambda)}(\overline{D}),$$

*кроме того, $g(x,0)=g(0,y)=0$.*

Имеет место следующая теорема разрешимости нелокальной задачи (1)–(4).

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2*. Тогда нелокальная задача* (1)–(4) *разрешима и притом единственным образом.*

**2.** Доказательство теоремы 1 основано на исследовании разрешимости вспомогательной характеристической задачи Гурса для уравнения (1): *найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в области $D$ решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются начальные условия* (2) *и граничные условия*

$$u(0,y)=\mu_1(y),\quad u_x(0,y)=\mu_2(y),\quad 0\le y\le h,\tag{10}$$

*где $\mu_1(y)$ и $\mu_2(y)$ — пока неизвестные функции, при этом будем предполагать, что*

$$\psi_1(0)=\mu_1(0),\quad \psi_2(0)=\mu_1'(0),\quad \psi_1'(0)=\mu_2(0),\quad \psi_2'(0)=\mu_2'(0).$$

Разрешимость устанавливается с помощью метода Римана.

В [12] доказано, что если $\psi_i(x)\in C^2[0,l]$, $\mu_i(y)\in C^2[0,h]$, $i=1,2$, то решение характеристической задачи Гурса (1), (2), (5) существует, единственно и имеет место интегральное представление

$$u(x,y)=\alpha v_x(0,y;x,y)\mu_1(y)+\beta v_y(x,0;x,y)\psi_1(x)-\int\limits_0^x[\beta v(x,0;\xi,y)\psi_2'(\xi)$$
$$+c(\xi,0)v(\xi,0;x,y)\psi_2(\xi)+A(\xi;x,y)\psi_1'(\xi)+B(\xi;x,y)\psi_1(\xi)]\,d\xi$$
$$-\int\limits_0^y[\alpha v(0,\eta;x,y)\mu_2'(\eta)+a(0,\eta)v(0,\eta;x,y)\mu_2(\eta)+A_1(\eta;x,y)\mu_1'(\eta)$$
$$+B_1(\eta;x,y)\mu_1(\eta)]\,d\eta+\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(\xi,\eta;x,y)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \qquad (11)$$

здесь $(\xi,\eta)$ — произвольная точка области $D$,

$$A(\xi,x,y)=-\alpha v_x(\xi,0;x,y)+b(\xi,0)v(\xi,0;x,y),$$

$$B(\xi;x,y)=-\beta v_{xy}(\xi,0;x,y)-b(\xi,0)v_x(\xi,0;x,y)$$
$$-c(\xi,0)v_y(\xi,0;x,y)-[b_x(\xi,0)+c(\xi,0)-e(\xi,0)]v(\xi,0;x,y),$$
$$A_1(\eta;x,y)=-\beta v_y(0,\eta;x,y)+b(0,\eta)v(0,\eta;x,y),$$

$$B_1(\eta;x,y)=-\alpha v_{xy}(0,\eta;x,y)-a(0,\eta)v_x(0,\eta;x,y)$$
$$-b(0,\eta)v_y(0,\eta;x,y)-[a_x(0,\eta)+b_y(0,\eta)-d(0,\eta)]v(0,\eta;x,y).$$

Таким образом, решение задачи Гурса для уравнения (1) представимо в явном виде (11), если известна функция Римана $v(x,y;\xi,\eta)$.

**3.** В [12] методом редукции к нагруженным интегральным уравнениям Вольтерра доказана следующая теорема существования и единственности функции Римана $v(x,y;\xi,\eta)$, определяемой по формулам (5)–(9).

**Теорема 2.** *Если выполнено условие* 1, *то функция Римана* $v(x,y)=v(x,y;\xi,\eta)$ *для оператора* $M$ *существует и единственна.*

Доказательство. Проинтегрируем уравнение (5) по $x$ в пределах от $\xi$ до $x$, по $y$ от $\eta$ до $y$. Пользуясь условиями (6) и (7), а также (8) и (9), получим

$$-\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v(x,y)+b(x,y)v(x,y)+\int\limits_\xi^x\int\limits_\eta^y L^*v(t,\tau)\,d\tau dt=\alpha+\beta, \qquad (12)$$

где
$$L^*v\equiv(av)_{xx}+(2bv)_{xy}+(cv)_{yy}-(dv)_x-(ev)y+fv.$$

Некоторые слагаемые в левой части (12) преобразуем интегрированием по частям и с помощью равенств

$$\alpha v_{xy}+a(x,y)v_x=0,\quad \beta v_{xy}+c(x,y)v_y=0,$$

которые вытекают из (6) и (7), после чего имеем

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v(x,y)=\frac{1}{2}K_0v(x,y)+\gamma(x,y), \qquad (13)$$

здесь

$$K_0v(x,y)=2b(x,y)v(x,y)+\int\limits_{\xi}^{x}[c_y(t,y)-e(t,y)]v(t,y)\,dt$$

$$+\int\limits_{\eta}^{x}[a_x(x,\tau)-d(x,\tau)]v(x,\tau)\,d\tau+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}f(t,\tau)v(t,\tau)\,d\tau dt,$$

$$\gamma(x,y)=-(\alpha+\beta)+\alpha\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{y}a(\xi,t)\,dt\right)+\beta\exp\left(-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\xi}^{x}c(t,\eta)\,dt\right).$$

Опираясь на представление общего решения уравнения (13), приходим к интегральному уравнению для определения функции $v(x,y)$

$$v(x,y)=\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\int\limits_{\beta x-\alpha y}^{\alpha x+\beta y}K_0v(\bar{x}(s),\bar{y}(s))\,ds+\gamma_1(x,y), \tag{14}$$

где

$$\bar{x}(s)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}(\beta^2x-\alpha\beta y+\alpha s),\quad \bar{y}(s)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}(-\alpha\beta x+\alpha^2y+\beta s),$$

$\gamma_1(x,y)$ — известная функция.

Таким образом, задача (6)–(9) для уравнения (5) эквивалентна интегральному уравнению (14).

Интегральный оператор

$$Kv=\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\int\limits_{\beta x-\alpha y}^{\alpha x+\beta y}K_0v(\bar{x}(s),\bar{y}(s))\,ds+\gamma(x,y)$$

действует из $C(\overline{D})$ в $C(\overline{D})$.

Очевидно, что для $v(x,y)=v_1(x,y)-v_2(x,y)$ имеет место оценка

$$|Kv|\leq\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}M\cdot(\alpha x+\beta y)[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\|v\|,$$

где

$$\|v\|=\max_{(x,y)\in D}|v(x,y)|,\quad M=\max\{c_5,c_6,c_7,c_8\},$$

$$c_5=\max_{(x,y)\in D}|c_y(x,y)-e(x,y)|,\quad c_6=\max_{(x,y)\in D}|a_x(x,y)-d(x,y)|,$$

$$c_7=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|,\quad c_8=\max_{(x,y)\in D}|2b(x,y)|.$$

Тогда

$$|K^2v|\leq\frac{1}{2^2(\alpha^2+\beta^2)^2}\frac{M^2}{2!}(\alpha x+\beta y)^2[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^2\|v\|,$$

для $n$-й степени оператора $K$ имеем

$$|K^nv|\leq\frac{1}{2^n(\alpha^2+\beta^2)^n}\frac{M^n}{n!}(\alpha x+\beta y)^n[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^n\|v\|.$$

Видим, что можно подобрать $n$ такое, что

$$\frac{1}{2^n(\alpha^2+\beta^2)^n}\frac{M^n}{n!}(\alpha l+\beta h)^n[l^n+h^n]<1.$$

Для этого $n$ отображение $K^n$ сжимающее.

Из обобщенной теоремы о неподвижной точке следует, что интегральное уравнение (14) имеет единственное решение. Таким образом, теорема 2 доказана.

Покажем, что функция, определенная по формуле (11), удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3) и (5). Для этого достаточно установить существование решения уравнения (1) при однородных краевых условиях

$$\mu_i(y)=0, \quad \psi_i(x)=0, \quad i=1,\ 2.$$

В самом деле, вместо $u(x,y)$ введем новую неизвестную функцию

$$\begin{aligned} z(x,y)=u(x,y)-\{\mu_1(y)+x[\mu_2(y)-\psi_1'(0)]& \\ +\psi_1(x)+y[\psi_2(x)-\psi_2(0)]-\psi_2'(0)xy-\psi_1(0)\},& \end{aligned}$$

которая удовлетворяет уравнению (1) с другой правой частью и однородными условиями

$$z(0,y)=z_x(0,y)=z(x,0)=z_y(x,0)=0. \tag{15}$$

Пользуясь свойством функции Римана, непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что функция, определенная равенством (11), удовлетворяет уравнению (1) и однородным условиям (15).

**4. Сведение задачи (1)–(4) к интегральным уравнениям.** Представление (11) после некоторых преобразований запишем в виде

$$\begin{aligned} u(x,y)=[\alpha v_x(0,y;x,y)-A_1(y;x,y)]\mu_1(y)-\alpha v(0,y;x,y)\mu_2(y)& \\ +\int_0^y[A_{1y}(\eta;x,y)-B_1(\eta;x,y)]\mu_1(\eta)\,d\eta& \\ +\int_0^y[\alpha v_y(0,\eta;x,y)-a(0,\eta)v(0,\eta;x,y)]\mu_2(\eta)\,d\eta+F(x,y),& \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} F(x,y)=[\beta v_y(x,0;x,y)-A(x;x,y)]\psi_1(x)-\beta v_x(x,0;x,y)\psi_2(x)& \\ +\beta v(0,0;x,y)\psi_2(0)+\alpha v(0,0;x,y)\psi_1'(0)+[A_1(0;x,y)+A(0;x,y)]\psi_1(0)& \\ +\int_0^x[A_x(\xi;x,y)-B(\xi;x,y)]\psi_1(\xi)\,d\xi+\int_0^x[\beta v_x(\xi,0;x,y)-c(\xi,0)v(\xi,0;x,y)]\psi_2(\xi)\,d\xi& \\ +\int_0^x\int_0^y v(\xi,\eta;x,y)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.& \end{aligned}$$

Функции $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$ неизвестны. Выясним, можно ли найти их так, чтобы решение задачи Гурса удовлетворяло интегральным условиям (3) и (4). Для этого сначала проинтегрируем (16) по $x$ от 0 до $l$. Тогда с учетом условия (3) получим

$$\mu_1(y)\int_0^l [\alpha v_x(0,y;x,y)-A_1(y;x,y)]\,dx-\mu_2(y)\int_0^l \alpha v(0,y;x,y)\,dx$$
$$+\int_0^y [K_1(\eta,y)\mu_1(\eta)+K_2(\eta,y)\mu_2(\eta)]\,d\eta+\int_0^l F(x,y)\,dx=\varphi_1(y), \quad (17)$$

где

$$K_1(\eta,y)=\int_0^l [A_{1y}(\eta;x,y)-B_1(\eta;x,y)]\,dx,$$

$$K_2(\eta,y)=\int_0^l [\alpha v_y(0,\eta;x,y)-a(0,\eta)v(0,\eta;x,y)]\,dx.$$

Теперь умножим (16) на $x$ и проинтегрируем результат по $x$ от 0 до $l$. Тогда в силу условия (4) из (16) получим

$$\mu_1(y)\int_0^l x[\alpha v_x(0,y;x,y)-A_1(y;x,y)]\,dx-\mu_2(y)\int_0^l x\alpha v(0,y;x,y)\,dx$$
$$+\int_0^y [K_3(\eta,y)\mu_1(\eta)+K_4(\eta,y)\mu_2(\eta)]\,d\eta+\int_0^l xF(x,y)\,dx=\varphi_2(y), \quad (18)$$

где

$$K_3(y,\eta)=\int_0^l x[A_{1y}(\eta;x,y)-B_1(\eta;x,y)]\,dx,$$

$$K_4(y,\eta)=\int_0^l x[\alpha v_y(0,\eta;x,y)-a(0,\eta)v(0,\eta;x,y)]\,dx.$$

Таким образом, разрешимость нелокальной задачи (1)–(4) сведена к разрешимости системы интегральных уравнений (17), (18).

Введя обозначения

$$k(y)=\begin{pmatrix} k_1(y) & k_2(y)\\ k_3(y) & k_4(y)\end{pmatrix}, \quad \mathscr{K}(y,\eta)=\begin{pmatrix} K_1(y,\eta) & K_2(y,\eta)\\ K_3(y,\eta) & K_4(y,\eta)\end{pmatrix},$$

систему интегральных уравнений (17), (18) перепишем в операторном виде

$$k(y)\begin{pmatrix}\mu_1(y)\\ \mu_2(y)\end{pmatrix}=\int_0^y \mathscr{K}(y,\eta)\begin{pmatrix}\mu_1(\eta)\\ \mu_2(\eta)\end{pmatrix}d\eta+\begin{pmatrix}\gamma_1(y)\\ \gamma_2(y)\end{pmatrix}, \quad 0\le y\le h, \quad (19)$$

где

$$\det|k(y)| = k_1(y)k_4(y) - k_3(y)k_2(y) = \alpha v(0,y;l,y)\int\limits_0^l x\alpha v(0,y;x,y)\,dx$$

$$-\int\limits_0^l x\alpha v(0,y;x,y)\,dx\int\limits_0^l [\alpha v(0,y;x,y) + A_1(y;x,y)]\,dx$$

$$-\alpha l v(0,y;l,y)\int\limits_0^l \alpha v(0,y;x,y)\,dx$$

$$+\int\limits_0^l \alpha v(0,y;x,y)\,dx\int\limits_0^l x[\alpha v(0,y;x,y) + A_1(y;x,y)]\,dx.$$

Покажем, что $\det|k(y)| \neq 0$. Уравнение (19) — система интегральных уравнений третьего рода. Следуя рассуждениям из [8], можно выделить класс задач, для которых $\det|k(y)|$ нигде в $[0,h]$ не обращается в нуль. Действительно, функция $v(0,y;l,y)$ на $[0,h]$ нигде не обращается в нуль, если нуль не является собственным значением задачи

$$\alpha v_{xx}(x,y;l,y) - b(x,y)v_x(x,y;l,y) + e(x,y)v(x,y;l,y) = 0,$$

$$v(0,y;l,y) = 0, \quad \alpha v(l,y;l,y) = 0. \tag{20}$$

Так, например, $e(x,y) \leq 0$. В самом деле, если $v(0,y;l,y) = 0$ при каком-либо $y \in [0,h]$, то задача (20) имеет только тривиальное решение $v(x,y;l,y) \equiv 0$, значит, $v_x(x,y;l,y) = 0$, что противоречит условию $\alpha v_x(l,y;l,y) = 1$.

Уравнение (19) является системой интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [5, 8], которая безусловно разрешима. Таким образом, находя из интегральных уравнений $\mu_1(y)$ и $\mu_2(y)$, задачу (1)–(4) сводим к характеристической задаче Гурса для уравнения (1), однозначная разрешимость которой установлена в работе [12]. Отсюда следует существование и единственность решения нелокальной задачи (1)–(4).

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Джураев Т. Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1734–1745.
2. *Баренблатт Г. Н., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864.
3. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.
4. *Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Логос, 2009.
5. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
6. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казан. мат. о-во, 2001.
7. *Джохадзе О. М.* Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 4. С. 517–528.

**8.** *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.

**9.** *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892.

**10.** *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальными граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.

**11.** *Bouziani A.* Initial-boundary value problem with a nonlocal condition for a vicscosity equation // Int. J. Math. Math. Sci. 2002. V. 30, N 6. P. 327–338.

**12.** *Зикиров О. С.* Локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений третьего порядка // Современная математика и ее прил. 2011. Т. 68. С. 101–120.

*Статья поступила 27 июня 2014 г.*

Зикиров Обиджан Салижанович
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
кафедра дифференциальных уравнений,
ул. Университетская, 4, 100174. Ташкент, Узбекистан
zikirov@yandex.ru

Холиков Дилшод Камолович
Ташкентский архитектурно–строительный институт,
кафедра математики и естественных наук,
ул. Навои, 13, 100000. Ташкент, Узбекистан
xoliqov23@mail.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.97*

# КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ СМЕШАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ОДНОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ СИСТЕМОЙ

**А. Ф. Исламова**

**Аннотация.** Получены необходимые и достаточные условия оптимальности для линеаризованной системы фазового поля, которая относится к системам, не разрешимым относительно производной по времени. Рассматривается задача со смешанным (стартовым и распределенным) управлением и функционалом качества, не учитывающим затраты на управление.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, распределенная система, вырожденные уравнения, критерий оптимальности.

## Введение

Необходимые условия оптимальности в теории оптимальных процессов для распределенных систем выводятся с помощью различных вариантов принципа Лагранжа. Однако исследование задач оптимального управления для систем, не разрешимых относительно производной по времени, приводит к значительным трудностям. Особенность линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля [1], рассматриваемой в данной работе, заключается в том, что оператор, стоящий при производной по времени, имеет нетривиальное ядро. Квазистационарная система уравнений фазового поля возникает при моделировании фазовых переходов первого рода в мезоскопической теории и, в частности, описывает взаимодействие твердой и жидкой фаз для расплывчатой, кашеобразной области.

Основные усилия автора направлены на вывод системы оптимальности для задачи минимизации функционала, не учитывающего затраты на управление системой, т. е. вывод набора соотношений, вместе с ограничениями исходной задачи описывающих необходимые условия. На первом шаге доказывается разрешимость задачи управления для системы фазового поля, на втором — с помощью функции Лагранжа получена сопряженная задача и ее разрешимость и, наконец, формулируется критерий оптимальности. Технически исследование опирается на результаты В. Е. Федорова [2] при доказательстве разрешимости начальной задачи и результаты А. В. Фурсикова [3] при выводе системы оптимальности.

Кроме описанных уже особенностей системы, отличие рассматриваемой задачи заключается в использовании комбинированного управления. С практической точки зрения в некоторых ситуациях важно одновременное управление

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–31125–мол_а).

системой как посредством выбора начальных данных, так и на протяжении всего времени ее функционирования. Совокупность стартового и распределенного управлений названа в работе смешанным управлением. Ранее в совместных работах автора с М. В. Плехановой уже были рассмотрены вопросы разрешимости задач смешанного управления с различными функционалами качества для вырожденных систем [4–10], здесь же впервые приводятся необходимые и достаточные условия.

## § 1. Задача смешанного управления

В этом параграфе приведем необходимые в дальнейшем результаты. Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ — гильбертовы пространства, $L \in \mathscr{L}(\mathscr{X};\mathscr{Y})$ (линейный непрерывный оператор из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathscr{Cl}(\mathscr{X};\mathscr{Y})$ (линейный замкнутый плотно определенный в $\mathscr{X}$ оператор, действующий в пространство $\mathscr{Y}$). При исследовании будем использовать методы теории вырожденных полугрупп операторов [2, 11]. Обозначим

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y};\mathscr{X})\},$$

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} (\mu_k L - M)^{-1} L, \quad L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L(\mu_k L - M)^{-1},$$

$$\mathscr{X}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M), \quad \mathscr{Y}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M),$$

$$\mathscr{X}^1 = \overline{\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)}, \quad \mathscr{Y}^1 = \overline{\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)}$$

(черта над множеством означает замыкание в норме пространства $\mathscr{X}$ или $\mathscr{Y}$ соответственно),

$$L_k = L|_{\mathscr{X}^k}, \quad M_k = M|_{\mathrm{dom} M_k}, \quad \mathrm{dom} M_k = \mathrm{dom} M \cap \mathscr{X}^k, \quad k = 0, 1.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор $M$ называется *сильно $(L,p)$-секториальным*, если
(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ \exists \theta \in (\pi/2, \pi)$

$$S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta,\ \mu \neq a\} \subset \rho^L(M);$$

(ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+\ \forall \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\theta}(M)$

$$\max\left\{\left\|R^L_{(\mu,p)}(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}, \left\|L^L_{(\mu,p)}(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Y})}\right\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|};$$

(iii) для всех $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\theta}(M)$

$$\left\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(Y;X)} \leq \frac{K}{|\lambda - a| \prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|}.$$

**Теорема 1.1** [2]. *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален. Тогда*
(i) *имеют место равенства $\mathscr{X} = \mathscr{X}^0 \oplus \mathscr{X}^1$, $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}^0 \oplus \mathscr{Y}^1$;*
(ii) *$L_k \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^k;\mathscr{Y}^k)$, $M_k \in \mathscr{Cl}(\mathscr{X}^k;\mathscr{Y}^k)$, $k = 0, 1$;*
(iii) *существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^0;\mathscr{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1;\mathscr{X}^1)$;*
(iv) *оператор $G = M_0^{-1} L_0 \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^0)$ нильпотентен степени не больше $p \in \mathbb{N}_0$;*

(v) *существует разрешающая полугруппа* $\{X^t \in \mathscr{L}(\mathscr{X}) : t \geq 0\}$ *уравнения* $L\dot{x}(t) = Mx(t)$, *аналитическая в секторе* $\Sigma = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \pi/2,\ \tau \neq 0\}$;

(vi) *инфинитезимальным генератором аналитической полугруппы* $\{X_1^t \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^1) : t \geq 0\}$ *является оператор* $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathscr{C}l(\mathscr{X}^1)$.

Здесь $X_1^t$ — сужение оператора $X^t$ на $\mathscr{X}^1$. Проектор вдоль $\mathscr{X}^0$ на $\mathscr{X}^1$ обозначим через $P$, а вдоль $\mathscr{Y}^0$ на $\mathscr{Y}^1$ — через $Q$. Кроме того, будем использовать обозначение $H^k(0,T;\mathscr{X})$, $k \in \mathbb{N}$, для пространства Соболева $W_2^k(0,T;\mathscr{X})$ функций $u : [0,T] \to \mathscr{X}$ с нормой

$$\|u\|_{H^k(0,T;\mathscr{X})} = \left( \sum_{r=0}^{k} \int_0^T \|u^{(r)}(t)\|_{\mathscr{X}}^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через $H^0(0,T;\mathscr{X}) = L_2(0,T;\mathscr{X})$ будем обозначать пространство Лебега.

Пусть $T > 0$. Рассмотрим задачу управления с начальным условием Шоултера

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + u(t), \tag{1.1}$$

$$Px(0) = Pv, \tag{1.2}$$

$$(u,v) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{1.3}$$

$$J(x) = \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|_{L_2(0,T;\mathscr{X})}^2 \to \inf, \tag{1.4}$$

где непустое выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ пространства управлений $\mathfrak{U}$ представляет собой *множество допустимых управлений*, пара $(u,v) \in \mathfrak{U}$ задает смешанное управление, $\tilde{x} \in L_2(0,T;\mathscr{X})$ — заданная функция. В силу замкнутости оператора $S$ пространство $\mathscr{D}_S = \mathrm{dom} S = \mathrm{dom} M_1$ гильбертово со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{D}_S} = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{X}} + \langle S\cdot, S\cdot\rangle_{\mathscr{X}}$. В качестве пространства управлений для данной задачи выберем $\mathfrak{U} = H^{p+1}(0,T;\mathscr{Y}) \times \mathscr{D}_S$.

*Сильным решением* задачи (1.1), (1.2) назовем функцию $x \in H^1(0,T;\mathscr{X})$, удовлетворяющую условию (1.2) и почти всюду на интервале $(0,T)$ — уравнению (1.1).

Специфика рассматриваемого вырожденного уравнения требует повышенной гладкости функции управления $u$ (см. [12]). Чтобы учесть данное условие, решения уравнения (1.1) будем искать в гильбертовом пространстве

$$\mathscr{Z} = \{z \in H^1(0,T;\mathscr{X}) : L\dot{z} - Mz \in H^{p+1}(0,T;\mathscr{Y})\},$$

наделенном нормой

$$\|z\|_{\mathscr{Z}}^2 = \|z\|_{H^1(0,T;\mathscr{X})}^2 + \|L\dot{z} - Mz\|_{H^{p+1}(0,T;\mathscr{Y})}^2.$$

Его полнота доказана в [12].

Минимизировать функционал стоимости будем на множестве допустимых троек $\mathfrak{W}$, т. е. на наборе функций $(x,u,v) \in \mathscr{Z} \times \mathfrak{U}$, удовлетворяющих условиям (1.1)–(1.3). *Решением задачи управления* (1.1)–(1.4) назовем тройку $(\hat{x},\hat{u},\hat{v}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующую функционал стоимости: $J(\hat{x}) = \inf\limits_{(x,u,v)\in\mathfrak{W}} J(x)$.

**Теорема 1.2** [10]. *Пусть оператор* $M$ *сильно* $(L,p)$*-секториален,* $\mathfrak{U}_\partial$ *— непустое замкнутое выпуклое множество, ограниченное в пространстве* $\mathfrak{U}$. *Тогда существует решение* $(\hat{x},\hat{u},\hat{v}) \in \mathscr{Z} \times \mathfrak{U}$ *задачи* (1.1)–(1.4).

На парах $\mathbf{u} = (u,v)$ определим оператор $\mathscr{A}$, действующий по правилу $\mathscr{A}\mathbf{u} = x$ — решение задачи (1.1), (1.2). Учитывая вид решения [13, 14] в случае сильной $(L,p)$-секториальности оператора $M$, заметим, что оператор $\mathscr{A}$ будет определяться формулой

$$\mathscr{A}\mathbf{u}(t) = X^t v + \int\limits_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Qu(s)\,ds - \sum_{k=0}^{p} G^k M_0^{-1}(I-Q)u^{(k)}(t), \quad t \in (0,T). \tag{1.5}$$

**Лемма 1.1.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален. Тогда* $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(H^{p+1}(0,T;\mathscr{Y}) \times \mathscr{D}_S; L_2(0,T;\mathscr{X}))$.

Доказательство. Линейность оператора очевидна. Из оценки на решение [15]

$$\|x\|^2_{H^1(0,T;\mathscr{X})} \leq C\big(\|Pv\|^2_{\mathscr{X}} + \|SPv\|^2_{\mathscr{X}} + \|u\|^2_{H^{p+1}(0,T;\mathscr{Y})}\big)$$

следует, что $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(H^{p+1}(0,T;\mathscr{Y}) \times \mathscr{D}_S; H^1(0,T;\mathscr{X}))$, поэтому тем более $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(H^{p+1}(0,T;\mathscr{Y}) \times \mathscr{D}_S; L_2(0,T;\mathscr{X}))$. $\square$

При $\tilde{x} \in L_2(0,T;\mathscr{X})$ рассмотрим функционал

$$J(x(\mathbf{u})) = F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\|\mathscr{A}\mathbf{u} - \widetilde{x}\|^2_{L_2(0,T;\mathscr{X})}. \tag{1.6}$$

**Лемма 1.2.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален, оператор* $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(H^{p+1}(0,T;\mathscr{Y}) \times \mathscr{D}_S; L_2(0,T;\mathscr{X}))$ *определен выражением* (1.5) *и $\mathscr{A}^*$ — сопряженный к $\mathscr{A}$ оператор. Тогда производная Фреше функционала* (1.6) *имеет вид* $F'(\mathbf{u}) = \mathscr{A}^*(\mathscr{A}\mathbf{u} - \tilde{x})$.

Доказательство. Для произвольного $\mathbf{h} \in H^{p+1}(0,T;\mathscr{Y}) \times \mathscr{D}_S$ рассмотрим приращение

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{u}) &= \langle \mathscr{A}\mathbf{u} - \tilde{x}, \mathscr{A}\mathbf{h}\rangle_{L_2(0,T;\mathscr{X})} + \frac{1}{2}\langle \mathscr{A}\mathbf{h}, \mathscr{A}\mathbf{h}\rangle_{L_2(0,T;\mathscr{X})} \\ &= \langle \mathscr{A}^*(\mathscr{A}\mathbf{u} - \tilde{x}), \mathbf{h}\rangle + \frac{1}{2}\|\mathscr{A}\mathbf{h}\|^2_{L_2(0,T;\mathscr{X})}. \end{aligned}$$

В силу непрерывности $\mathscr{A}$ имеем $\|\mathscr{A}\mathbf{h}\|^2_{L_2(0,T;\mathscr{X})} = o(\|\mathbf{h}\|_{H^{p+1}(0,T;\mathscr{Y})\times\mathscr{D}_S})$, поэтому $J'(\mathbf{u}) = \mathscr{A}^*(\mathscr{A}\mathbf{u} - \tilde{x})$. $\square$

## § 2. Разрешимость задачи управления для системы уравнений фазового поля

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Искомыми функциями являются $z(x,t)$, $\theta(x,t)$:

$$z(x,0) = v(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} z(x,t) = \frac{\partial}{\partial n}\theta(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.2}$$

$$z_t(x,t) = \Delta z(x,t) - \Delta\theta(x,t) + u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{2.3}$$

$$\Delta\theta(x,t) + (1-\alpha)\theta(x,t) + z(x,t) + w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{2.4}$$

$$(u,w,v) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{2.5}$$

$$J(z,\theta) = \frac{1}{2}\|z - \tilde{z}\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \frac{1}{2}\|\theta - \tilde{\theta}\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \to \inf, \tag{2.6}$$

где $\tilde{z}$, $\tilde{\theta} \in H^1(0,T;L_2(\Omega))$ заданы, непустое выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ пространства $\mathfrak{U} = H^1(0,T;(L_2(\Omega))^2) \times H^2_\partial(\Omega)$ — множество допустимых управлений, тройка $(u, w, v) \in \mathfrak{U}$ задает управление, $H^2_\partial(\Omega) = \{w \in H^2(\Omega) : \partial w(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$.

Решение задачи управления принадлежит пространству

$$\mathscr{Z} = \{(z,\theta) \in H^1(0,T;(L_2(\Omega))^2) : \\ z_t - \Delta z \in H^1(0,T;L_2(\Omega)),\ \Delta\theta \in H^1(0,T;L_2(\Omega))\}.$$

Обозначим $Aw = \Delta w$, $\mathrm{dom}A = H^2_\partial(\Omega) \subset L_2(\Omega)$.

**Теорема 2.1.** *Пусть* $1-\alpha \notin \sigma(A)$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{z}, \hat{\theta}, \hat{u}, \widehat{w}, \hat{v}) \in \mathscr{Z} \times \mathfrak{U}$ *задачи* (2.1)–(2.6).

Доказательство. Проведем редукцию задачи (2.1)–(2.6) к абстрактной задаче управления с обобщенным условием Шоуолтера (1.1)–(1.4). Выберем пространства $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = (L_2(\Omega))^2$ и операторы

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ I & (\alpha-1)I + \Delta \end{pmatrix}.$$

Тем самым определены операторы $L \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, $M \in \mathscr{C}l(\mathscr{X})$, причем, $\ker L = \{0\} \times L_2(\Omega)$ и $\mathrm{dom}M = \left(H^2_\partial(\Omega)\right)^2$.

Поскольку в [16] показано, что при условии $1-\alpha \notin \sigma(A)$ оператор $M$ сильно $(L,0)$-секториален, ссылка на теорему 1.2 завершает доказательство. $\square$

## § 3. Критерий оптимальности для системы уравнений фазового поля

Для составления сопряженной задачи рассмотрим функцию Лагранжа для задачи (2.1)–(2.6)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(z,\theta,u,w,v) &= \frac{1}{2}\|z(x,t) - \widetilde{z}(x,t)\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \\ &+ \frac{1}{2}\|\theta(x,t) - \widetilde{\theta}(x,t)\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \int\limits_\Omega \psi^3(x)(z(x,0) - v(x))\,dx \\ &+ \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \psi^1(x,t)(z_t(x,t) - \Delta z(x,t) + \Delta\theta(x,t) - u(x,t))\,dxdt \\ &- \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \psi^2(x,t)(\Delta\theta(x,t) + (1-\alpha)\theta(x,t) + z(x,t) + w(x,t))\,dxdt \\ &+ \int\limits_\Omega \psi^3(x)(z(x,0) - v(x))\,dx,\end{aligned}$$

где $\psi^1(x,t), \psi^2(x,t), \psi^3(x)$ — множители Лагранжа, ограничения на которые опишем ниже.

Возьмем вариации по переменным $z$, $\theta$, $u$, $w$ и $v$, т. е. рассмотрим функции $z(x,t) + \delta z(x,t)$, $\theta(x,t) + \delta\theta(x,t)$, $u(x,t) + \delta u(x,t)$, $w(x,t) + \delta w(x,t)$ при $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, $v(x) + \delta v(x)$ при $x \in \Omega$, причем $\delta z$, $\delta\theta$, $\delta u$, $\delta w \in H^1(0,T;L_2(\Omega))$, $\delta v \in H^2(\Omega)$, и потребуем выполнения граничных условий для функций $\delta z$, $\delta\theta$.

Тогда линейная часть приращения функции Лагранжа выглядит следующим образом:

$$\delta\mathfrak{L} = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega (z(x,t)-\widetilde{z}(x,t))\delta z(x,t)\,dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_\Omega (\theta(x,t)-\widetilde{\theta}(x,t))\delta\theta(x,t)\,dxdt$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (\delta z_t(x,t)-\Delta\delta z(x,t)+\Delta\delta\theta(x,t)-\delta u(x,t))\psi^1(x,t)\,dxdt$$
$$-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (\Delta\delta\theta(x,t)+(1-\alpha)\delta\theta(x,t)+\delta z(x,t)+\delta w(x,t))\psi^2(x,t)\,dxdt$$
$$+\int\limits_\Omega (\delta z(x,0)-\delta v(x))\psi^3(x)\,dx.$$

Применяя интегрирование по частям, получим сопряженную краевую задачу из условия стационарности $\delta\mathfrak{L}=0$ в оптимальной точке, приравнивая к нулю коэффициенты при вариациях:

$$\psi^1(x,T)=0, \quad x\in\Omega, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\psi^1(x,t)=\frac{\partial}{\partial n}\psi^2(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{3.2}$$

$$\psi^1_t(x,t)=-\Delta\psi^1(x,t)-\psi^2(x,t)+z(x,t)-\widetilde{z}(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{3.3}$$

$$\Delta\psi^1(x,t)-\Delta\psi^2(x,t)-(1-\alpha)\psi^2(x,t)+\theta(x,t)-\widetilde{\theta}(x,t)=0, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{3.4}$$

$$\psi^1(x,0)=\psi^3(x), \quad x\in\Omega. \tag{3.5}$$

Искомыми здесь являются функции $\psi^1$, $\psi^2$, $\psi^3$.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $1-\alpha\notin\sigma(A)$, $z-\widetilde{z}$, $\theta-\widetilde{\theta}\in H^1(0,T;L_2(\Omega))$. *Тогда задача* (3.1)–(3.5) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Редукцию задачи (3.1)–(3.4) проведем к задаче Шоуолтера (1.1), (1.2). Выберем пространства $\mathscr{X}=\mathscr{Y}=(L_2(\Omega))^2$ и операторы

$$L=\begin{pmatrix} I & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}, \quad M=\begin{pmatrix} -\Delta & -1\\ \Delta & (\alpha-1)I-\Delta\end{pmatrix}.$$

Сильная $(L,0)$-секториальность при замене переменных $s=T-t$ доказывается так же, как и для задачи (2.1)–(2.6). В силу результатов из [14] разрешимость задачи (3.1)–(3.4) относительно функций $\psi^1$, $\psi^2$ следует из условий $z-\widetilde{z}$, $\theta-\widetilde{\theta}\in H^1(0,T;L_2(\Omega))$. Функция $\psi^3$ определяется из равенства (3.5). $\square$

**Теорема 3.2.** *Пусть* $1-\alpha\notin\sigma(A)$, $\mathfrak{U}_\partial$ *— непустое выпуклое замкнутое ограниченное множество пространства* $H^1(0,T;(L_2(\Omega))^2)\times H^2_\partial(\Omega)$, $(\psi^1,\psi^2,\psi^3)\in H^1(0,T;(L_2(\Omega))^2)\times L_2(\Omega)$ *— решение задачи* (3.1)–(3.5). *Набор* $(\hat{z},\hat{\theta},\widehat{w},\hat{u},\hat{v})\in$

$\mathscr{Z} \times H^1(0,T;(L_2(\Omega))^2) \times H^2_\partial(\Omega)$ *является решением задачи* (2.1)–(2.6) *в том и только том случае, когда выполнено неравенство*

$$\int_0^T \int_\Omega \psi^1(x,t)(u(x,t) - \hat{u}(x,t))\,dxdt + \int_0^T \int_\Omega \psi^2(x,t)(w(x,t) - \widehat{w}(x,t))\,dxdt + \int_\Omega \psi^3(x)(v(x) - \hat{v}(x))\,dx \geq 0, \quad (u,w,v) \in \mathfrak{U}_\partial,$$

*которое в случае* $(\hat{u}, \widehat{w}, \hat{v}) \in \operatorname{int}\mathfrak{U}_\partial$ *превращается в равенство.*

Доказательство. Достаточно найти действие оператора $\mathscr{A}^*$, сопряженного к оператору $\mathscr{A}$ . Учитывая, что $(\psi^1, \psi^2, \psi^3)$ — решение задачи (3.1)–(3.5), при $c = (\tilde{z} - z, \tilde{\theta} - \theta)$ имеем

$$\langle \mathscr{A}\mathbf{u}, c\rangle_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} = \int_0^T \int_\Omega z(x,t)\big(-\psi^1_t(x,t) - \Delta\psi^1(x,t) + \psi^2(x,t)\big)\,dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \theta(x,t)(\Delta\psi^1(x,t) - \Delta\psi^2(x,t) - (1-\alpha)\psi^2(x,t))\,dxdt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega (-\Delta\theta(x,t)\psi^1(x,t) - z(x,t)\psi^2(x,t) + u(x,t)\psi^1(x,t))\,dxdt + \int_\Omega v(x)\psi^3(x)\,dx$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega (\Delta\theta(x,t)\psi^1(x,t) + z(x,t)\psi^2(x,t) + w(x,t)\psi^2(x,t))\,dxdt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega (u(x,t)\psi^1(x,t) + w(x,t)\psi^2(x,t))\,dxdt + \int_\Omega v(x)\psi^3(x)\,dx.$$

Таким образом, $\mathscr{A}^*c = (\psi^1(x,t), \psi^2(x,t), \psi^3(x))$, и утверждение теоремы теперь следует из теоремы 1.4 [3, гл. 2]. $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Плотников П. И., Старовойтов В. Н.* Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 3. С. 461–471.
2. *Федоров В. Е.* О гладкости решений линейных уравнений соболевского типа // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 12. С. 1646–1649.
3. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
4. *Исламова А. Ф., Плеханова М. В.* Задачи с жестким смешанным управлением для линейных уравнений соболевского типа // Тр. междунар. науч. конф. Дифференц. уравнения и смежные проблемы. Стерлитамак: СГПА, 2008. С. 111–115.
5. *Плеханова М. В., Исламова А. Ф.* Исследование линеаризованной системы уравнений Буссинеска методами теории вырожденных полугрупп // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 11, № 20. С. 62–70.
6. *Плеханова М. В., Исламова А. Ф.* Задача со смешанным управлением для одного класса линейных уравнений соболевского типа // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 12, № 23. С. 49–58.

**7.** *Исламова А. Ф.* Задачи с жестким смешанным управлением для линейных уравнений соболевского типа // Тр. Воронеж. зимней мат. школы С. Г. Крейна. Воронеж: ВГУ, 2010. С. 69–74.

**8.** *Плеханова М. В., Исламова А. Ф.* О разрешимости задач смешанного оптимального управления линейными распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени // Изв. вузов. Математика. 2011. № 7. С. 37–47.

**9.** *Исламова А. Ф.* Минимизация функционалов со слабой нормой на решениях вырожденного линейного уравнения // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Мат. моделирование и программирование. 2011. Т. 8, № 17. С. 37–46.

**10.** *Плеханова М. В., Исламова А. Ф.* Задачи с жестким смешанным управлением для линеаризованного уравнения Буссинеска // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, №4. С. 565–576.

**11.** *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht: VSP, 2003.

**12.** *Плеханова М. В., Федоров В. Е.* Критерий оптимальности в задаче управления для линейного уравнения соболевского типа // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 87–93.

**13.** *Свиридюк Г. А., Федоров В. Е.* О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 604–616.

**14.** *Федоров В. Е.* Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 8. С. 131–160.

**15.** *Плеханова М. В., Федоров В. Е.* О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени // Изв. РАН. Сер. мат. 2011. Т. 75, № 2. С. 177–194.

**16.** *Федоров В. Е., Уразаева А. В.* Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений // Тр. Воронеж. зимней мат. школы С. Г. Крейна. Воронеж: ВГУ, 2004. С. 161–172.

*Статья поступила 29 апреля 2014 г.*

Исламова Анна Фаридовна
Челябинский гос. университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001
isaf@csu.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.956.4*

# РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

**В. Г. Марков**

**Аннотация.** Рассматриваются краевые задачи для дифференциальных уравнений высокого порядка вида

$$u^{(2m+1)} + \sum_{i=0}^{m} u^{(i)} a_i(t) + Lu = f, \quad (x,t) \in Q = (a,b) \times (0,T),$$

оператор $L$ имеет вид

$$Lu \equiv \frac{1}{g(x)}(L_0 u + \lambda_0 u + Mu),$$

где $L_0$ — дифференциальный оператор по переменной $x$, $M$ — его возмущение, а $g$ — вещественная функция, которая может обращаться в 0 и менять знак. Сформулированы и доказаны теоремы об обобщенной разрешимости данной задачи.

**Ключевые слова:** спектральная задача, индефинитная метрика, метод продолжения по параметру.

## Введение

В работе рассматриваются краевые задачи для дифференциальных уравнений высокого порядка вида

$$u^{(2m+1)} + \sum_{i=0}^{m} u^{(i)} a_i(t) + Lu = f, \quad (x,t) \in Q = (a,b) \times (0,T), \tag{1}$$

где $u^{(i)} = \frac{\partial^i}{\partial t^i}$, оператор $L$ имеет вид

$$Lu \equiv \frac{1}{g(x)}(L_0 u + \lambda_0 u + Mu),$$

$L_0$ — дифференциальный оператор по переменной $x$ вида

$$L_0 u = \sum_{i=0}^{2s} \alpha_i(x) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u$$

и $M$ — его возмущение вида

$$Mu = \sum_{i=0}^{2s-1} b_i(x,t) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u.$$

Дополним уравнение (1) краевыми условиями

$$U_j(u) \equiv \sum_{k=0}^{2s-1} \alpha_{jk} \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(a,T) + \sum_{k=0}^{2s-1} \beta_{jk} \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(b,T) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2s, \tag{2}$$

$$u^{(i)}(x,0) = u^{(i)}(x,T), \tag{3}$$

где $\alpha_{jk}, \beta_{jk}$ — некоторые комплексные постоянные.

Функция $g(x)$ может обращаться в нуль и менять знак на отрезке $(a,b)$. В частности, при $m = 0$ получаются параболические уравнения с меняющимся направлением времени, которые достаточно хорошо изучены.

В настоящей работе рассматриваются вопросы разрешимости краевой задачи (1)–(3).

Отметим, что подобные уравнения возникают во многих областях физики, механики и некоторых других приложениях. Уравнения высокого порядка рассматривались в работах [1–4].

В § 1 приводятся некоторые обозначения и вспомогательные утверждения. В § 2 даны доказательства основных результатов.

## § 1. Обозначения и вспомогательные утверждения

Обозначения функциональных пространств, которые будем использовать, стандартны: $W_p^s(G)$ — пространство Соболева (см. [5]) и пространства Гёльдера $C^s(\overline{G})$ (см. [6]). Резольвентное множество и спектр оператора $L$ обозначим через $\rho(L)$ и $\sigma(L)$, а пространство, построенное при помощи метода вещественной интерполяции из банаховых пространств $X$ и $Y$, — символом $(X,Y)_{\theta,p}$.

Предполагаем, что область определения $D(L_0)$ оператора $L_0$ состоит из функций $u(x) \in W_2^{2s}(a,b)$, удовлетворяющих условиям (2), и имеет место неравенство

$$\operatorname{Re}(L_0 u, u) \ge \delta_0 \|u\|^2_{W_2^s(a,b)}, \quad u \in D(L_0), \ \delta_0 > 0, \tag{4}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(a,b)$. Обозначим через $H_1$ замыкание $D(L_0)$ по норме $\|u\|_{H_1} = \|u\|_{W_2^s(a,b)}$. Естественно также предположить, что существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$|(L_0 u, v)| \le c\|u\|_{H_1}\|v\|_{H_1}, \quad u, v \in D(L_0). \tag{5}$$

Отсюда вытекает оценка

$$\|L_0 u\|_{H_1'} \le c\|u\|_{H_1}, \tag{6}$$

где $H_1'$ — негативное пространство, построенное по паре $H_1, L_2(a,b)$. Введем оператор

$$\widetilde{L}_0 u = \frac{1}{g(x)}(L_0 + \lambda_0)u.$$

Считаем, что $g(x) \in L_1(a,b)$ и $\mu(\{x \in (a,b) : g(x) = 0\}) = 0$, где $\mu$ — мера Лебега. Положим $F_1 = L_2(0,T;H_1)$. По определению пространство $L_{2,g}(a,b)$ состоит из измеримых на $(a,b)$ функций таких, что

$$\|u\|^2_{L_{2,g}(a,b)} = \int_a^b |g(x)\|u|^2 dx < \infty.$$

Определим вспомогательное пространство $F_0 = L_2(0,T;L_{2,g}(a,b))$. Пространство $F_0$ становится пространством Крейна, если определить на нем индефинитную метрику и скалярное произведение:

$$[u,v]_0 = \int\limits_Q g(x)u(x,t)\overline{v(x,t)}\,dxdt, \quad (u,v)_0 = \int\limits_Q |g(x)|u(x,t)\overline{v(x,t)}\,dxdt.$$

Имеем

$$\mathrm{Re}[\widetilde{L}_0 u,u]_0 = \mathrm{Re}\int\limits_Q (L_0+\lambda_0)u\bar{u}\,dQ \geq \delta_0\|u\|^2_{F_1} + \mathrm{Re}\,\lambda_0\|u\|^2_{L_2(Q)}, \quad u\in D(L_0). \quad (7)$$

В силу оценок (6), (7) и неравенства (4) оператор $L_0+\lambda_0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_0 \geq 0$, допускает расширение до изоморфизма $F_1$ и $F_1' = L_2(0,T;H_1')$. Это утверждение является следствием теоремы Лакса — Мильграма.

Построим пространство $H_{-1}$ как пополнение $L_{2,g}(a,b)$ по норме

$$\|u\|_{H_{-1}} = \sup_{v\neq 0}\frac{|[u,v]|}{\|v\|_{H_1}} = \|g(x)u\|_{H_1'},$$

где

$$[u,v] = \int\limits_a^b g(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx.$$

Положим $F_{-1} = L_2(0,T;H_{-1})$. Отметим, что $F_1$ плотно вложено в $F_0$ в силу условия на функцию $g(x)$. Рассмотрим оператор $\widetilde{L}_0$ как оператор из $F_{-1}$ в $F_{-1}$ с областью определения $F_1$. Поскольку $L_0+\lambda_0$ при $\mathrm{Re}\,\lambda_0 \geq 0$ является изоморфизмом из $L_2(0,T;H_1)$ в $L_2(0,T;H_1')$, $\widetilde{L}_0$ — изоморфизм из $F_1$ в $F_{-1}$. Справедливо следующее утверждение (см. [3, гл. 1, лемма 4.1].

**Лемма 1.** *Имеет место включение $i\mathbb{R}\subset\rho(\widetilde{L}_0)$. Справедлива оценка для резольвенты*

$$\|(\widetilde{L}_0+i\lambda)^{-1}f\|_{F_{-1}} \leq \frac{c}{1+|\lambda|}\|f\|_{F_{-1}}.$$

Рассмотрим оператор $A = i\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t^{2m+1}}$. Пусть $H$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$. Положим

$$D(A) = \big\{u\in W_2^{2m+1}(0,T,H) : u^{(i)}(0) = u^{(i)}(T),\ i=0,1,\dots,2m\big\}.$$

**Лемма 2.** *Оператор $A : L_2(0,T;H)\to L_2(0,T;H)$ самосопряжен.*

Рассмотрим задачу

$$Au+\lambda u = f, \quad u^{(i)}(0) = u^{(i)}(T), \quad i=0,1,\dots,2m.$$

Решение краевой задачи представим в виде $u=\sum c_i(t)\varphi_i$, где $\varphi_i$ — ортогональный базис в $H$, а $c_i(t)$ обладают следующими свойствами:

$$Ac_i+\lambda c_i = f_i, \quad f_i = (f,\varphi_i), \quad \mathrm{Re}\,i\lambda\neq 0.$$

Покажем, что каждое уравнение имеет решение. Достаточно доказать единственность решения [7]. Единственность решения вытекает из оценки

$$|\,\mathrm{Re}\,i\lambda|\|c_i\|_{L_2(0,T)} \leq c\|f\|_{L_2(0,T)},$$

которая устанавливается, если проинтегрировать по частям интеграл в выражении

$$\operatorname{Re}\int_0^T (iAu + i\lambda u, u)_H\, dt = \operatorname{Re}\int_0^T (if, u)\, dt.$$

Таким образом, $i\mathbb{R}\setminus\{0\} \subset \rho(A)$ и из определения легко найти, что $A$ симметричен и, значит, самосопряжен (см. [8, гл. 8, § 3]).

## § 2. Основные результаты

Сформулируем теорему об обобщенной разрешимости задачи (1)–(3). Имеем $L_{2,g}(a,b) \subset H_{-1}$, и это вложение плотно. Найдется самосопряженный в $H_{-1}$ оператор $A_0$ такой, что $D(A_0) = L_{2,g}(a,b)$, $\|A_0u\|_{H_{-1}} = \|u\|_{L_{2,g}(a,b)}$, $A_0$ — изоморфизм из $L_{2,g}(a,b)$ в $H_{-1}$ (см. [8, с. 315, 316]). Тогда $\|v\|_{H_{-1}} = \|A_0^{-1}v\|_{L_{2,g}(a,b)}$. Уравнение (1) можно переписать в виде

$$u^{(2m+1)} + \widetilde{L}_0u + M_0u = f, \tag{8}$$

где

$$M_0u = \sum_{i=0}^{2m} u^{(i)}a_i(t) + \frac{1}{g(x)}\sum_{j=0}^{2s-1} b_j(x,t)\frac{\partial^j}{\partial x^j}u.$$

В следующей теореме рассмотрим случай, когда $M_0u = 0$, т. е. уравнение вида

$$u^{(2m+1)} + \widetilde{L}_0 = f. \tag{9}$$

**Теорема 1.** *Пусть $f \in L_2(0,T;F_{-1})$, $\operatorname{Re}\lambda_0 \geq 0$ и $M_0u = 0$ для всех $u$. Тогда существует единственное решение $u \in F_1$, $u^{(i)} \in (F_1, F_{-1})_{1-\theta_i,2}$ ($\theta_i = i/(2m+1)$, $i = 1,2,\dots,2m$), $u^{(2m+1)} \in F_{-1}$ задачи (9), (2), (3), удовлетворяющее оценке*

$$\|u\|_{F_1} + \sum_{i=1}^{2m}\|u^{(i)}\|_{(F_1,F_{-1})_{1-\theta_i,2}} + \|u^{(2m+1)}\|_{F_{-1}} \leq c\|f\|_{F_{-1}}, \tag{10}$$

*где $c$ — некоторая постоянная, не зависящая от $f$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $A = i\partial_t^{2m+1}$ как оператор из $F_{-1}$ в $F_{-1}$ с областью определения $D(A) = \{u : u^{(i)} \in F_{-1},\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(T),\ i = 0,1,\dots,2m\}$. Перепишем уравнение (1) в виде

$$Au + i\widetilde{L}_0u = if. \tag{11}$$

Как вытекает из леммы 1, $\mathbb{R} \subset \rho(iL)$ и справедлива оценка резольвенты

$$\|(i\widetilde{L}_0 + \lambda)^{-1}f\|_{F_{-1}} \leq \frac{c\|f\|_{F_{-1}}}{(1+|\lambda|)}, \quad \operatorname{Re}\lambda = 0. \tag{12}$$

Применяя теоремы 3.1 и 3.2 из [9], можем записать решение уравнения (11) в виде

$$u = \int_{\mathbb{R}} (i\widetilde{L}_0 + \lambda)^{-1} dE_\lambda^A f,$$

где $E_\lambda^A$ — спектральное разложение оператора $A$, причем $u$ обладает свойствами $u \in D(A) \cap D(i\widetilde{L}_0)$, таким образом, $u^{(i)} \in F_{-1}$, $i = 0,1,\dots,2m+1$, $u \in F_1$.

Чтобы обосновать последнее утверждение теоремы, применяем теорему о промежуточных производных [10, гл. 1, теорема 2.3].

Рассмотрим вопрос о разрешимости задачи (1)–(3). Предполагаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $c(\varepsilon)$ такая, что справедливо неравенство

$$1)\quad \left\| \sum_{j=0}^{2s-1} b_j(x,t) \frac{\partial^j}{\partial x^j} u \right\|_{F_1'} \le \varepsilon \|u\|_{F_1} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_2(Q)}, \quad u \in D(L_0). \tag{13}$$

Простейшие условия, гарантирующие выполнение условия 1, суть условия

$$b_j \equiv 0 \quad \text{при } j \ge s,$$

$$b_j(x,t) \in L_\infty((0,T)\times(a,b)) \quad \text{при } j \le m-1.$$

$$2)\quad a_j(t) \in L_{p_0}(0,T), \quad j = 0,1,\ldots,m,\ p_0 > 2, \quad g(x) \in L_2(a,b).$$

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и условия* 1, 2. *Фиксируем* $\varepsilon \in (0,\pi/2)$. *Тогда найдется* $\lambda_1 \ge 0$ *такое, что при всех* $\lambda_0$, $\operatorname{Re}\lambda_0 \ge \lambda_1$, $|\arg\lambda_0| \le \pi/2 - \varepsilon$, *задача* (1)–(3) *имеет единственное решение со свойствами, указанными в теореме* 1.

Доказательство. Рассмотрим уравнение, зависящее от параметра $\tau \in [0,1]$:

$$L_{1\tau}u = g(x)u^{(2m+1)} + L_0 u + \lambda_0 u + \tau M u = fg. \tag{14}$$

При $\tau = 0$ уравнение (14) имеет единственное решение, удовлетворяющее краевым условиям (2), (3). Получим априорные оценки, равномерные по параметру $\tau$. В силу условия 1 существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\left\| \frac{1}{g(x)} \sum_{s=0}^{2s-1} b_j(x,t) u^{(j)} \right\|_{F_{-1}} \le \varepsilon\|u\|_{F_1} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_2(Q)}. \tag{15}$$

Имеем

$$\left\| \sum_{i=0}^{2m} a_i u^{(i)} \right\|_{F_{-1}} = \left\| \sum_{i=0}^{2m} a_i A_0^{-1} u^{(i)} \right\|_{F_0}. \tag{16}$$

Норму в $F_0$ можно записать в виде нормы в $L_{2,g}(a,b;L_2(0,T))$. Оценим $\|a_i v^{(i)}\|_{L_{2,g}(a,b;L_2(0,T))}$, $v^{(i)} = A_0^{-1}u^{(i)}$. Имеем

$$\|a_i v^{(i)}\|_{L_2(0,T)} \le \|a_i\|^2_{L_p(0,T)} \|v^{(i)}\|^2_{L_{p/(p-2)}(0,T)},$$

где $p \in (2,4)$. В силу теорем вложения норма $\|v^{(i)}\|_{L_{p/(p-2)}(0,T)}$ оценивается через $\|v^{(i)}\|_{W_2^s(0,T)}$, $s = \frac{4-p}{2p}$, $p \in (2,4)$. Используя интерполяционное неравенство, получим

$$\begin{aligned} \|v^{(i)}\|_{W_2^s(0,T)} &\le c_2 \|v\|^{2\theta}_{W_2^{2m+1}(0,T)} \|v\|^{2(1-\theta)}_{L_2(0,T)} \\ &\le \frac{\varepsilon}{m+1}\|v\|^2_{W_2^{2m+1}(0,T)} + c_3 \varepsilon^{-\frac{\theta}{1-\theta}} \|v\|_{L_2(0,T)} \\ &\le \frac{\varepsilon}{m+1}\|v^{(2m+1)}\|^2_{L_2(0,T)} + c_4 \varepsilon^{-\frac{\theta}{1-\theta}} \|v\|_{L_2(0,T)}, \end{aligned}$$

где $\theta = \frac{i+s}{2m+1}$ и $\varepsilon \in (0,1)$. Имеем $\frac{\theta}{1-\theta} = \frac{i+s}{2m+1-i-s}$. Отметим, что

$$\max_{0\le i\le m} \frac{i+s}{2m+1-i-s} = \frac{m+s}{m+1-s} < 1,$$

поскольку $s = \frac{4-p}{2p} < \frac{1}{2}$ при $p \in (2,4)$. Тогда

$$\left\| \sum_{i=0}^{m} a_i v^{(i)} \right\|^2_{L_{2,g}(a,b;L_2(0,T))} \leq \varepsilon \|v^{(2m+1)}\|^2_{L_{2,g}(a,b;L_2(0,T))} + c_5 \varepsilon^{-\frac{m+s}{m+1-s}} \|v\|_{L_{2,g}(a,b;L_2(0,T))},$$

где постоянная $c_5$ не зависит от $\varepsilon$. Таким образом, окончательно неравенство примет вид

$$\left\| \sum_{i=0}^{m} a_i u^{(i)} \right\|^2_{F_{-1}} \leq \varepsilon \|u^{(2m+1)}\|^2_{F_{-1}} + c_5 \varepsilon^{-\frac{m+s}{m+1-s}} \|u\|^2_{F_{-1}}. \tag{17}$$

Умножим уравнение (14) скалярно в $L_2(Q)$ на $u$. Проинтегрировав по частям, получим уравнение

$$\operatorname{Re}(L_0 u, u) + \operatorname{Re}\lambda_0 (u,u) + \operatorname{Re}(M_0 u, ug) = \operatorname{Re}(gf, u),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$. Отсюда

$$\delta \|u\|^2_{F_1} + \operatorname{Re}\lambda_0 \|u\|^2_{L_2(Q)} \leq \|f\|^2_{F_{-1}} c(\varepsilon_1) + \varepsilon_1 \|u\|^2_{F_1} + \varepsilon_2 \|u\|^2_{F_1} + c(\varepsilon_2) \|M_0 u\|^2_{F_{-1}}.$$

Взяв $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\delta}{4}$, получим

$$\frac{\delta}{2} \|u\|^2_{F_1} + \operatorname{Re}\lambda_0 \|u\|^2_{L_2(Q)} \leq \|f\|^2_{F_{-1}} c_1 + c_2 \|M_0 u\|^2_{F_{-1}}. \tag{18}$$

Из уравнения (14) вытекает оценка

$$\|u^{(2m+1)}\|^2_{F_{-1}} \leq c_3 \big( \|u\|^2_{F_1} + |\lambda_0|^2 \|u\|^2_{L_2(Q)} + \|M_0 u\|^2_{F_{-1}} + \|f\|^2_{F_{-1}} \big),$$

где $c_3$ — некоторая постоянная, не зависящая от $u$ и $\lambda_0$. Делим это неравенство на $\gamma|\lambda_0|$ и складываем его с (18). Получим

$$\|u^{(2m+1)}\|^2_{F_{-1}} \frac{1}{|\lambda_0|\gamma} + \left( \frac{\delta}{2} - \frac{c_3}{|\lambda_0|\gamma} \right) \|u\|^2_{F_1} + |\lambda_0| \left( \sin\varepsilon - \frac{c_3}{\gamma} \right) \|u\|^2_{L_2(Q)} \leq \left( c_1 + \frac{c_3}{|\lambda_0|\gamma} \right) \|f\|^2_{F_{-1}} + \left( c_2 + \frac{c_3}{|\lambda_0|\gamma} \right) \|M_0 u\|^2_{F_{-1}}.$$

Выберем $\gamma = \frac{2c_3}{\sin\varepsilon}$ и $\lambda_1 > 0$ такое, что при $|\lambda_0| \geq \lambda_1$ выполняется неравенство $\frac{c_3}{|\lambda_0|\gamma} \leq \frac{\delta}{4}$. Тогда

$$\|u^{(2m+1)}\|^2_{F_{-1}} \frac{1}{|\lambda_0|\gamma} + \frac{\delta}{4} \|u\|^2_{F_1} + |\lambda_0| \frac{\sin\varepsilon}{2} \|u\|^2_{L_2(Q)} \leq c_5 \|f\|^2_{F_{-1}} + c_6 \|M_0 u\|^2_{F_{-1}}, \tag{19}$$

где без ограничения общности можем считать, что постоянные $c_5$ и $c_6$ не зависят от $|\lambda_0|$ такого, что $\lambda_0 \geq \lambda_1$. Из неравенств (15), (17) и (19) получим

$$\|u^{(2m+1)}\|^2_{F_{-1}} \frac{1}{|\lambda_0|\gamma} + \frac{\delta}{4} \|u\|^2_{F_1} + |\lambda_0| \frac{\sin\varepsilon}{2} \|u\|^2_{L_2(Q)} \leq c_5 \|f\|^2_{F_{-1}} + \varepsilon_1 \|u\|^2_{F_1} + c(\varepsilon_1) \|u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon_2 \|u^{(2m+1)}\|^2_{F_{-1}} + c(\varepsilon_2) \|u\|^2_{F_{-1}},$$

где $c(\varepsilon_2) = c_7\varepsilon_2^{-\frac{m+s}{m+1-s}}$ и постоянная $c_7$ от $\varepsilon_2$ не зависит. Выберем $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{8}$ и $\lambda_2 \geq \lambda_1$ такое, что $c(\varepsilon_1) \leq \frac{\sin\varepsilon|\lambda_0|}{4}$ при $|\lambda_0| \geq \lambda_2$. Тогда

$$\|u^{(2m+1)}\|^2_{F_{-1}}\frac{1}{2|\lambda_0|} + \|u\|^2_{F_1} + |\lambda_0|\|u\|^2_{L_2(Q)} \\ \leq c_8\|f\|^2_{F_{-1}} + c_9\varepsilon_2\|u^{(2m+1)}\|^2_{F_{-1}} + c_{10}c(\varepsilon_2)\|u\|^2_{F_{-1}}.$$

Выберем $\varepsilon_2 = \frac{1}{4|\lambda_0|c_9}$. Предыдущее неравенство перепишется в виде

$$\|u^{(2m+1)}\|^2_{F_{-1}}\frac{1}{4|\lambda_0|} + \|u\|^2_{F_1} + |\lambda_0|\|u\|^2_{L_2(Q)} \leq c_8\|f\|^2_{F_{-1}} + c_{10}c(\varepsilon_2)\|u\|^2_{F_{-1}}. \quad (20)$$

Оценим $\|u\|_{F_{-1}} = \|u\|_{L_2(0,T;H_{-1})}$. Имеем

$$\|u\|_{H_{-1}} = \sup_{v\neq 0}\frac{|[u,v]|}{\|v\|_{H_1}} \leq \sup_{v\neq 0}\frac{\|v\|_{C[a,b]}\|u\|_{L_2(a,b)}\|g\|_{L_2(a,b)}}{\|v\|_{H_1}} \leq c_{11}\|u\|_{L_2(a,b)}.$$

Таким образом,

$$\|u\|_{F_{-1}} \leq c_{11}\|u\|_{L_2(Q)}.$$

Используя это неравенство в (20), получим

$$\|u^{(2m+1)}\|^2_{F_{-1}}\frac{1}{2|\lambda_0|} + \|u\|^2_{F_1} + |\lambda_0|\|u\|^2_{L_2(Q)} \leq c_8\|f\|^2_{F_{-1}} + c_{12}|\lambda_0|^{\frac{m+s}{2m+1-s}}\|u\|^2_{L_2(Q)}.$$

Поскольку $\frac{m+s}{2m+1-s} < 1$, найдется $\lambda_3 \geq \lambda_2$ такое, что

$$|\lambda_0| - c_{12}|\lambda_0|^{\frac{m+s}{2m+1-s}} \geq \frac{|\lambda_0|}{2} \quad \text{при } |\lambda_0| \geq \lambda_3.$$

Тогда последнее неравенство для функции $u$ перепишется в виде

$$\|u^{(2m+1)}\|^2_{F_{-1}}\frac{1}{|\lambda_0|} + \|u\|^2_{F_1} + |\lambda_0|\|u\|^2_{L_2(Q)} \leq c_{13}\|f\|^2_{F_{-1}}.$$

Постоянная $c_{13}$ не зависит от параметра $\tau \in [0,1]$. Применяя стандартную схему метода продолжения по параметру (см. [11, гл. 2, § 7]), получим утверждение теоремы.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Кислов Н. В.* Краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1427–1436.
2. *Егоров И. В., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
3. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические операторно-дифференциальные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
4. *Pyatkov S. G.* Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002.
5. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutcher Verl. Wiss., 1977.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
7. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
8. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
9. *Дубинский Ю. А.* О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка // Мат. сб. 1973. Т. 90, № 1. С. 3–22.

**10.** *Лионс Ж.-Л., Мадженес* Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

**11.** *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.


*Статья поступила 6 мая 2014 г.*

Марков Виктор Гаврильевич
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
bntr@rambler.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.946*

# ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АНАЛОГОВ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

**Г. В. Намсараева**

**Аннотация.** Изучается разрешимость линейных обратных задач для уравнения Буссинеска с неизвестным коэффициентом, зависящими от временной переменной $t$. Для доказательства разрешимости задач используются два различных подхода. Доказаны теоремы существования регулярных решений для данных задач.

**Ключевые слова:** уравнение Буссинеска, обратная задача, априорная оценка, условия переопределения, существование.

Работа посвящена исследованию разрешимости линейных обратных задач для некоторых неклассических дифференциальных уравнений, моделирующих, в частности, уравнение Буссинеска — Лява, возникающее при описании продольных волн в стержнях, в теории длинных волн, в физике плазмы [1].

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи, в которых наряду с нахождением решения требуется отыскать входные данные, например коэффициенты уравнения или функции, определяющие начальные или граничные условия. Обратным задачам посвящены работы [2–6] и др.

Пусть $\Omega$ — интервал $(0,1)$ оси $Ox$, $Q$ — прямоугольник $\{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in (0,T),\ 0 < T < \infty\}$. Пусть $f(x,t)$, $a(x,t)$, $c(x,t)$, $h(x,t)$, $K(x,t)$, $N(x,t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

**Обратная задача I.** *Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением*

$$u_{tt} + a(x,t)u_{xx} - u_{xxtt} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{1}$$

*при выполнении для функции $u(x,t)$ условий*

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{4}$$

**Обратная задача II.** *Найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением (1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условия (3), а также условий*

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{5}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{6}$$

**Обратная задача III.** *Найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением* (1), *при выполнении для функции $u(x,t)$ условий* (2) *и* (3), *а также условия*

$$\int\limits_0^1 K(x,t)u(x,t)\,dx = 0, \quad 0 < t < T. \tag{7}$$

Обратные задачи I–III относятся к классу обратных задач временного типа. Подобные задачи для уравнения (1) ранее не изучались, отметим лишь, что в [7, 8] изучалась нелинейная обратная задача для уравнения Буссинеска — Лява в некотором специальном случае.

При исследовании разрешимости обратных задач используем два подхода. Суть первого подхода заключается в сведении обратной задачи к прямой, но нелокальной задаче, в которой нет неизвестного коэффициента. Подобные методы исследования применялись Ю. Я. Беловым, А. И. Кожановым, С. Г. Пятковым, Р. Р. Сафиулловой и оказались достаточно эффективными для доказательства разрешимости исследуемых задач [9, 10].

Второй подход основан на переходе от рассматриваемой обратной задачи к новой, уже прямой задаче для уравнения более высокого порядка. При этом исключается неизвестный коэффициент в правой части. Эти методы неоднократно применялись ранее в ситуациях, отличных от изучаемых [11].

Выполним некоторые формальные построения. Для этого в уравнении (1) положим $x = 0$. Пусть выполняется условие $h(0,t) \neq 0$. Тогда из равенства

$$u_{tt}(0,t) - u_{xxtt}(0,t) + a(0,t)u_{xx}(0,t) + c(0,t)u(0,t) = f(0,t) + q(t)h(0,t)$$

можно найти $q(t)$:

$$q(t) = \frac{-u_{xxtt}(0,t) + a(0,t)u_{xx}(0,t) - f(0,t)}{h(0,t)}.$$

Введем обозначения:

$$c_1(x,t) = \frac{-h(x,t)}{h(0,t)}, \quad c_2(x,t) = \frac{a(0,t)h(x,t)}{h(0,t)}, \quad f_1(x,t) = f(x,t) - \frac{f(0,t)h(x,t)}{h(0,t)},$$

используя которые, придем к уравнению

$$u_{tt} - u_{xxtt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = c_1(x,t)u_{xxtt}(0,t) + c_2(x,t)u_{xx}(0,t) + f_1(x,t). \tag{8}$$

Положим в (8) $x = 1$:

$$\begin{aligned} u_{tt}(1,t) - u_{xxtt}(1,t) + a(1,t)u_{xx}(1,t) + c(1,t)u(1,t) \\ = c_1(1,t)u_{xxtt}(0,t) + c_2(1,t)u_{xx}(0,t) + f_1(1,t). \end{aligned} \tag{9}$$

Продифференцируем уравнение (8) по $x$ и положим $x = 0$. Получим

$$\begin{aligned} u_{xtt}(0,t) - u_{xxxtt}(0,t) + a_x(0,t)u_{xx}(0,t) + a(0,t)u_{xxx}(0,t) + c_x(0,t)u(0,t) \\ + c(0,t)u_x(0,t) = c_{1x}(0,t)u_{xxtt}(0,t) + c_{2x}(0,t)u_{xx}(0,t) + f_{1x}(0,t). \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть $v = u_{xx}$. Тогда краевое условие (9) примет вид

$$-v_{tt}(1,t) = -a(1,t)v(1,t) + c_1(1,t)v_{tt}(0,t) + c_2(1,t)v(0,t) + f_1(1,t), \tag{11}$$

а условие (10) преобразуется следующим образом:

$$- v_{xtt}(0,t) = -a_x(0,t)v(0,t) - a(0,t)v_x(0,t) + c_{1x}(0,t)v_{tt}(0,t) + c_{2x}(0,t)v(0,t) + f_{1x}(0,t). \quad (12)$$

Дважды продифференцировав уравнение (8) по $x$, получим

$$v_{tt} - v_{xxtt} + a_{xx}v + 2a_xv_x + av_{xx} + c_{xx}u + 2c_xu_x + cv = c_{1xx}(x,t)v_{tt}(0,t) + c_{2xx}(x,t)v(0,t) + f_{1xx}(x,t). \quad (13)$$

В результате вышеизложенных построений приходим к редуцированной нелокальной задаче для функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$. Из доказательства разрешимости этой задачи следует разрешимость исходной обратной задачи I. Однако полученная нелокальная задача для уравнения вида (1) ранее не изучалась. Поэтому исследуем ее разрешимость в новых терминах. Введем обозначения:

$$b_1(x,t) = a_{xx}(x,t) + c(x,t), \quad b_2(x,t) = 2a_x(x,t), \quad b_3(x,t) = a(x,t),$$
$$b_4(x,t) = c_{xx}(x,t), \quad b_5(x,t) = 2c_x(x,t),$$
$$F_1(x,t) = c_{1xx}(x,t)v_{tt}(0,t) + c_{2xx}(x,t)v(0,t) + f_{1xx}(x,t),$$
$$\alpha_1(t) = -a(1,t), \quad \alpha_2(t) = c_2(1,t), \quad \alpha_3(t) = c_1(1,t), \quad \varphi_1(t) = f_1(1,t),$$
$$\beta_1(t) = c_{2x}(0,t) - a_x(0,t), \quad \beta_2(t) = -a(0,t), \quad \beta_3(t) = c_{1x}(0,t), \quad \psi_1(t) = f_{1x}(0,t).$$

**Нелокальная задача I.** *Найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям*

$$v_{tt} - v_{xxtt} + b_1(x,t)v + b_2(x,t)v_x + b_3(x,t)v_{xx} + b_4(x,t)u + b_5(x,t)u_x = F_1(x,t), \quad (14)$$

$$v = u_{xx}, \quad (15)$$

*а также условиям*

$$-v_{tt}(1,t) = \alpha_1(t)v(1,t) + \alpha_2(t)v(0,t) + \alpha_3(t)v_{tt}(0,t) + \varphi_1(t), \quad 0 < t < T, \quad (16)$$

$$-v_{xtt}(0,t) = \beta_1(t)v(0,t) + \beta_2(t)v_x(0,t) + \beta_3(t)v_{tt}(0,t) + \psi_1(t), \quad 0 < t < T, \quad (17)$$

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (18)$$

$$u(1,t) = 0, \quad u_x(0,t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (19)$$

Определим для дальнейшего исследования пространство

$$V = \left\{ v(x,t) : \int\limits_Q \left(v^2 + v_{tt}^2 + v_{xx}^2 + v_{xxtt}^2\right) dxdt < \infty \right\}.$$

Норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_V = \left( \int\limits_Q \left(v^2 + v_{tt}^2 + v_{xx}^2 + v_{xxtt}^2\right) dxdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $b_i(x,t)$, $i = \overline{1,5}$, $F_1(x,t)$ — заданные функции, определенные при $(x,t) \in \overline{Q}$, $\alpha_j(t)$, $\beta_j(t)$, $j = \overline{1,3}$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ — заданные функции, определенные при $t \in [0,T]$.

Положим $\bar{\alpha}_3 = \max\limits_{0 \le t \le T} |\alpha_3(t)|$, $\bar{\beta}_3 = \max\limits_{0 \le t \le T} |\beta_3(t)|$. Пусть положительные числа $M_1$, $M_2$, $M_3$ определяются функциями $b_j(x,t)$, $j = \overline{1,5}$, $\alpha_i(x,t)$, $i = \overline{1,3}$, $\beta_k(x,t)$, $k = \overline{1,3}$.

**Теорема 1.** *Пусть выполняются условия*

$$b_i(x,t)\in C(\overline{Q}),\ i=\overline{1,5},\quad F_1(x,t)\in L_2(Q), \tag{20}$$

$$\varphi_1(t)\in L_2([0,T]),\quad \psi_1(t)\in L_2([0,T]), \tag{21}$$

$$\bar\alpha_3<\frac{1}{4},\quad \bar\beta_3=0. \tag{22}$$

*Тогда нелокальная задача* (14)–(19) *имеет решение* $u(x,t)$, $v(x,t)$ *такое, что* $u(x,t),v(x,t)\in V$.

Доказательство. Установим наличие подходящих априорных оценок решений настоящей задачи. Для получения «хороших» априорных оценок умножим уравнение (11), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $v_{\tau\tau}-v_{xx\tau\tau}$ и результат проинтегрируем от 0 до $t$ по временной переменной $\tau$ и от 0 до 1 — по пространственной $x$. Проинтегрировав по частям, в силу граничных условий получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^1 v_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+2\int_0^t\int_0^1 v_{x\tau\tau}^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 v_{xx\tau\tau}^2\,dxd\tau\\
&\quad-2\int_0^t[\alpha_1(\tau)v(1,\tau)+\alpha_2(\tau)v(0,\tau)+\alpha_3(\tau)v_{\tau\tau}(0,\tau)+\varphi_1(\tau)]v_{x\tau\tau}(1,\tau)\,d\tau\\
&\quad+2\int_0^t v_{\tau\tau}(0,\tau)[\beta_1(\tau)v(0,\tau)+\beta_2(\tau)v_x(0,\tau)+\beta_3(\tau)v_{\tau\tau}(0,\tau)+\psi_1(\tau)]\,d\tau\\
&+\int_0^t\int_0^1 b_1(x,\tau)vv_{\tau\tau}\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 b_2(x,\tau)v_xv_{\tau\tau}\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 b_3(x,\tau)v_{xx}v_{\tau\tau}\,dxd\tau\\
&+\int_0^t\int_0^1 b_4(x,\tau)uv_{\tau\tau}\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 b_5(x,\tau)u_xv_{\tau\tau}\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 b_1(x,\tau)vv_{xx\tau\tau}\,dxd\tau\\
&+\int_0^t\int_0^1 b_2(x,\tau)v_xv_{xx\tau\tau}\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 b_3(x,\tau)v_{xx}v_{xx\tau\tau}\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 b_4(x,\tau)uv_{xx\tau\tau}\,dxd\tau\\
&\quad+\int_0^t\int_0^1 b_5(x,\tau)u_xv_{xx\tau\tau}\,dxd\tau=\int_0^t\int_0^1 F_1(x,\tau)[v_{\tau\tau}-v_{xx\tau\tau}]\,dxd\tau.
\end{aligned}$$

При оценке интеграла $2\int\limits_0^t\alpha_3(\tau)v_{\tau\tau}(0,t)v_{x\tau\tau}(1,\tau)\,d\tau$ имеем

$$\begin{aligned}
&2\int_0^t\alpha_3(\tau)v_{\tau\tau}(0,t)v_{x\tau\tau}(1,\tau)\,d\tau\le 2\bar\alpha_3\int_0^t|v_{\tau\tau}(0,t)v_{x\tau\tau}(1,\tau)|\,d\tau\\
&\quad\le\bar\alpha_3\int_0^t v_{\tau\tau}^2(0,t)\,d\tau+\bar\alpha_3\int_0^t v_{x\tau\tau}^2(1,\tau)\,d\tau\le\bar\alpha_3\int_0^t\int_0^1 v_{x\tau\tau}^2\,dxd\tau
\end{aligned}$$

$$+\,2\bar{\alpha}_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\bar{\alpha}_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau\tau}^2\,dxd\tau+2\bar{\alpha}_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2\,dxd\tau,$$

откуда возникают условия $\bar{\alpha}_3<\frac{1}{4}$ или $\max\limits_{0\le t\le T}|\alpha_3(t)|<\frac{1}{4}$.

При оценке интеграла

$$-\,2\int\limits_0^t\beta_3(t)v_{\tau\tau}^2(0,\tau)\,d\tau\le 2\bar{\beta}_3\int\limits_0^t v_{\tau\tau}^2(0,\tau)\,d\tau$$
$$\le 2\bar{\beta}_3\delta_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2\,dxd\tau+2\bar{\beta}_3\left(1+\frac{1}{\delta_3}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2\,dxd\tau$$

возникнет условие $\beta_3(t)=0$.

Остальные слагаемые оцениваются с помощью неравенства Юнга, неравенства

$$\omega^2(x)\le\delta\int\limits_0^1{\omega'}^2(x)\,dx+\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\int\limits_0^1\omega^2(x)\,dx, \tag{$*$}$$

справедливого при всех $x\in[0,1]$ (здесь $\delta$ — произвольное положительное число), а также неравенств

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w^2(x,\tau)\,dxd\tau\le T^2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau, \tag{$**$}$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u^2(x,\tau)\,dxd\tau\le T\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v^2(x,\tau)\,dxd\tau, \tag{$\dagger$}$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w^2(x,\tau)\,dxd\tau\le T\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 w_\xi^2(x,\xi)\,dxd\xi d\tau, \tag{$\ddagger$}$$

справедливых при всех $(x,t)\in\overline{Q}$.

После всех преобразований и упрощений приходим к неравенству

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau\tau}^2\,dxd\tau$$
$$\le\delta_0\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau\tau}^2\,dxd\tau\right)$$
$$+\,C_1\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 v_{\xi\xi}^2\,dxd\xi d\tau+C_2\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 v_{x\xi\xi}^2\,dxd\xi d\tau+C_3\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 v_{xx\xi\xi}^2\,dxd\xi d\tau+C_0,$$

в котором $\delta_0$ — произвольное положительное число, числа $C_i$, $i=\overline{0,3}$, определяются функциями $b_j(x,t)$, $j=\overline{1,5}$, $\alpha_i(x,t)$, $i=\overline{1,3}$, $\beta_k(x,t)$, $k=\overline{1,3}$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, а также числом $\delta_0$. Подбирая и фиксируя малое $\delta_0$, получим

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(v_{\tau\tau}^2+v_{x\tau\tau}^2+v_{xx\tau\tau}^2\right)dxd\tau\le\overline{C}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1\left(v_{\xi\xi}^2+v_{x\xi\xi}^2+v_{xx\xi\xi}^2\right)dxd\xi d\tau+C_0. \tag{23}$$

Далее, по лемме Гронуолла имеет место оценка

$$\int_0^t \int_0^1 \left(v_{\tau\tau}^2 + v_{x\tau\tau}^2 + v_{xx\tau\tau}^2\right) dx d\tau \le C_0 \exp(T\overline{C}),$$

откуда следует очевидное неравенство

$$\|v\|_V^2 + \|u\|_V^2 \le C. \tag{24}$$

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим задачу: *найти функции* $u(x,t)$ *и* $v(x,t)$, *удовлетворяющие в прямоугольнике* $Q$ *уравнению*

$$v_{tt} - v_{xxtt} + b_1(x,t)v + b_2(x,t)v_x + b_3(x,t)v_{xx} = F_1(x,t) - \lambda[b_4(x,t)u + b_5(x,t)u_x], \tag{$14_\lambda$}$$

*а также условиям* (18), (19) *и*

$$-v_{tt}(1,t) = \lambda[\alpha_1(t)v(1,t) + \alpha_2(t)v(0,t) + \alpha_3(t)v_{tt}(0,t)] + \varphi_1(t), \quad 0 < t < T, \tag{$16_\lambda$}$$

$$-v_{xtt}(0,t) = \lambda[\beta_1(t)v(0,t) + \beta_2(t)v_x(0,t) + \beta_3(t)v_{tt}(0,t)] + \psi_1(t), \quad 0 < t < T. \tag{$17_\lambda$}$$

Обозначим через $\Lambda$ множество тех чисел $\lambda$, для которых краевая задача $(14_\lambda)$, $(16_\lambda)$, $(17_\lambda)$, (15), (18) и (19) разрешима в пространстве $V$ для произвольной функции $F_1(x,t) \in L_2(Q)$ и функций $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ из пространства $W_2^1([0,T])$. Если будет доказано, что множество $\Lambda$ непусто, открыто и замкнуто (в топологии отрезка [0,1]), то оно будет совпадать со всем отрезком [0,1].

Непустота $\Lambda$ очевидна, так как число 0 принадлежит ему [12]. Открытость и замкнутость следуют из априорных оценок, полученных выше. Отсюда по теореме о методе продолжения по параметру [13] краевая задача $(14_\lambda)$, $(16\lambda)$, $(17_\lambda)$, (15), (18), (19) разрешима для $\lambda \in [0,1]$.

Вернемся к нелокальной задаче, полученной редукцией исходной обратной задачи.

Пусть положительные числа $C_1'$, $C_2'$, $C_3'$ определяются функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$, $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $f_1(x,t)$.

Сформулируем задачу: *найти функции* $v(x,t)$ *и* $u(x,t)$, *которые удовлетворяют уравнениям* (13) *и* (15), *а также условиям* (11), (12), (18) *и* (19).

**Теорема 1$'$.** *Пусть выполняются условия*

$$a(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \quad c(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \quad h(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \tag{25}$$

$$f_1(x,t) \in L_2(Q), \quad f_{1x}(x,t) \in L_2(Q), \quad f_{1xx}(x,t) \in L_2([0,T]), \tag{26}$$

$$h(0,t) \ne 0, \quad \max_{0\le t\le T}\left|\frac{h(1,t)}{h(0,t)}\right| < \frac{1}{4}, \quad t \in [0,T]. \tag{27}$$

*Тогда нелокальная задача* (13), (15), (11), (12), (18) *и* (19) *имеет решение* $v(x,t)$ *и* $u(x,t)$ *такое, что* $v(x,t), u(x,t) \in V$.

Доказательство. Повторяя доказательство теоремы 1, т. е. умножая уравнение (12), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $v_\tau - v_{xx\tau}$, и результат интегрируя от 0 до $t$ по временной переменной и от 0 до 1 — по пространственной переменной и воспользовавшись краевыми условиями (10) и (11), условиями теоремы, неравенством Юнга, неравенством $(*)$, представлением $(**)$, а также леммой Гронуолла, придем к оценке вида (24). Из этой оценки и теоремы о методе продолжения по параметру следует разрешимость задачи (13), (15), (11), (12), (18) и (19). Теорема доказана.

Перейдем к изучению разрешимости исходной обратной задачи I.

**Теорема 2.** *Пусть выполняются все условия теоремы* $1'$. *Тогда обратная* задача I *имеет решение* $u(x,t)$ *и* $q(t)$ *такое, что* $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_2([0,T])$.

Доказательство. Пусть функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ — решение нелокальной задачи, редуцированной из обратной задачи (12), (14), (10), (11), (17) и (18). Положим

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= u_{tt} - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u \\
&\quad - b_1(x,t)u_{xxxt}(0,t) - b_2(x,t)u_{xxx}(0,t) - b_3(x,t)u_{xx}(0,t) - f_1(x,t).
\end{aligned}
$$

Имеют место равенства

$$w_{xx}(x,t) = 0,\ (x,t) \in Q, \quad w_x(0,t) = w(1,t) = 0,\ 0 < t < T,$$

из которых следует, что $w(x,t) \equiv 0$ в $Q$. Положим

$$q(t) = \frac{-u_{xxxt}(0,t) + a(0,t)u_{xxx}(0,t) + a_x(0,t)u_{xx}(0,t) - f_x(0,t)}{h_x(0,t)}.$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в прямоугольнике $Q$ уравнением (1). Осталось показать, что выполняется условие $u(0,t) = 0$. Положим в (1) $x = 0$. Получим $u_{tt}(0,t) + c(0,t)u(0,t) = 0$. Из этого равенства и условия $u(0,0) = 0$ следует $u(0,t) = 0$. Принадлежность $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам очевидна. Теорема доказана.

Перейдем к исследованию разрешимости обратной задачи II. Для упрощения выкладок, формулировки и доказательства теоремы введем обозначения:

$$a_1(x,t) = a_x(x,t) - \frac{a(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}, \quad a_2(x,t) = a(x,t), \quad a_3(x,t) = \frac{h_x(x,t)}{h(x,t)},$$

$$a_4(x,t) = -\frac{h_x(x,t)}{h(x,t)}, \quad a_5(x,t) = c_x(x,t) - \frac{c(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}, \quad a_6(x,t) = c(x,t),$$

$$f_1(x,t) = \frac{f_x(x,t)h(x,t) - f(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}.$$

Пусть $\bar a_4 = \max\limits_{Q} |a_4(x,t)|$.

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия*

$$a_i(x,t) \in C(\overline{Q}),\ i = \overline{1,6}, \quad f_1(x,t) \in L_2(Q), \tag{28}$$

$$h(x,t) \neq 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{29}$$

$$a_{3x}(x,t) \le 0. \tag{30}$$

$$\bar a_4 < 1. \tag{31}$$

*Тогда обратная задача* II *имеет решение* $u(x,t)$, $q(t)$ *такое, что* $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_2([0,T])$.

Доказательство. Выполним некоторые формальные построения. Пусть $h(x,t) \neq 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$. Разделим уравнение (1) на $h(x,t)$:

$$\frac{1}{h(x,t)}[u_{tt} + a(x,t)u_{xx} - u_{xxtt} + c(x,t)u] = \frac{f(x,t)}{h(x,t} + q(t). \tag{32}$$

Продифференцируем (32) по $x$:

$$\frac{u_{xtt}+a_x(x,t)u_{xx}+a(x,t)u_{xxx}-u_{xxxtt}+c_x(x,t)u+c(x,t)u_x}{h(x,t)}$$
$$-\frac{[(u_{tt}+a(x,t)u_{xx}-u_{xxtt}+c(x,t)u]h_x(x,t)}{h^2(x,t)}=\frac{f_x(x,t)h(x,t)-f(x,t)h_x(x,t)}{h^2(x,t)}.$$

Рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу: *найти функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнениями*

$$v(x,t)=u_x(x,t), \tag{33}$$

$$v_{tt}-v_{xxtt}+a_1(x,t)v_x+a_2(x,t)v_{xx}+a_3(x,t)v_{xtt}$$
$$+a_4(x,t)u_{tt}+a_5(x,t)u+a_6(x,t)u_x=f_1(x,t), \tag{34}$$

*при выполнении для $u(x,t)$ и $v(x,t)$ условий*:

$$u(0,t)=0,\quad 0<t<T, \tag{35}$$

$$v(x,0)=0,\quad v_t(x,0)=0,\quad x\in\Omega, \tag{36}$$

$$v(0,t)=0,\quad v(1,t)=0,\quad 0<t<T. \tag{37}$$

Разрешимость данной краевой задачи покажем с помощью метода продолжения по параметру. Пусть $\lambda\in[0,1]$. Рассмотрим задачу: *найти функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$, удовлетворяющие в прямоугольнике $Q$ уравнению* (33) *и уравнению*

$$v_{tt}-v_{xxtt}+a_2(x,t)v_{xx}$$
$$+\lambda[a_1(x,t)v_x+a_3(x,t)v_{xtt}+a_4(x,t)u_{tt}+a_5(x,t)u+a_6(x,t)u_x]=f_1(x,t). \tag{$34_\lambda$}$$

Для получения «хороших» априорных оценок умножим уравнение ($34_\lambda$), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $v_\tau-v_{xx\tau}+v_{\tau\tau}$ и результат проинтегрируем от 0 до $t$ по временной переменной и от 0 до 1 — по пространственной переменной.

Применяя интегрирование по частям и начальные и краевые условия, получим

$$\frac12\int_0^1 v_t^2(x,t)\,dx+\int_0^1 v_{xt}^2(x,t)\,dx+\frac12\int_0^1 v_{xxt}^2(x,t)\,dx+\int_0^t\int_0^1 v_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 v_{x\tau\tau}^2\,dxd\tau$$
$$=-\int_0^t\int_0^1 a_1(x,\tau)v_xv_\tau\,dxd\tau-\int_0^t\int_0^1 a_2(x,\tau)v_{xx}v_\tau\,dxd\tau-\int_0^t\int_0^1 a_3(x,\tau)v_{x\tau\tau}v_\tau\,dxd\tau$$
$$-\int_0^t\int_0^1 a_4(x,\tau)u_{\tau\tau}v_\tau\,dxd\tau-\int_0^t\int_0^1 a_5(x,\tau)uv_\tau\,dxd\tau-\int_0^t\int_0^1 a_6(x,\tau)u_xv_\tau\,dxd\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^1 a_1(x,\tau)v_xv_{xx\tau}\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 a_2(x,\tau)v_{xx}v_{xx\tau}\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 a_3(x,\tau)v_{x\tau\tau}v_{xx\tau}\,dxd\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^1 a_4(x,\tau)u_{\tau\tau}v_{xx\tau}\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 a_5(x,\tau)uv_{xx\tau}\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 a_6(x,\tau)u_xv_{xx\tau}\,dxd\tau$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_1(x,\tau)v_x v_{\tau\tau}\,dxd\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_2(x,\tau)v_{xx}v_{\tau\tau}\,dxd\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_3(x,\tau)v_{x\tau\tau}v_{\tau\tau}\,dxd\tau$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_4(x,\tau)u_{\tau\tau}v_{\tau\tau}\,dxd\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_5(x,\tau)uv_{\tau\tau}\,dxd\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_6(x,\tau)u_x v_{\tau\tau}\,dxd\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f_1(x,\tau)[v_\tau-v_{xx\tau}+v_{\tau\tau}]\,dxd\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_4(x,\tau)u_{\tau\tau}v_{\tau\tau}\,dxd\tau.$$

Рассмотрим, например, оценку одного из интегралов в правой части:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_3(x,\tau)v_{x\tau\tau}v_{\tau\tau}\,dxd\tau=\int\limits_0^t a_3(1,\tau)v_{\tau\tau}^2(1,\tau)\,d\tau$$
$$-\int\limits_0^t a_3(0,\tau)v_{\tau\tau}^2(0,\tau)\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1[a_{3x}(x,\tau)v_{\tau\tau}+a_3(x,\tau)v_{x\tau\tau}]v_{\tau\tau}\,dxd\tau.$$

Учитывая условия (37), получим

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_3(x,\tau)v_{x\tau\tau}v_{\tau\tau}\,dxd\tau=-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_{3x}(x,\tau)v_{\tau\tau}^2\,dxd\tau.$$

Отсюда возникает необходимость выполнения условия (30).

В силу условия (31) последнее слагаемое в правой части оценивается так:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_4(x,\tau)u_{\tau\tau}v_{\tau\tau}\,dxd\tau\le\bar a_4\int\limits_0^t\int\limits_0^1|u_{\tau\tau}v_{\tau\tau}|\,dxd\tau$$
$$\le\frac{\bar a_4}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\frac{\bar a_4}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2\,dxd\tau.$$

К остальным интегралам в правой части данного равенства применим неравенство Юнга, неравенство $(*)$, а также представление $(**)$. После всех преобразований и упрощений получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_t^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^1 v_{xt}^2(x,t)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_{xxt}^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(v_{x\tau\tau}^2+v_{\tau\tau}^2\right)dxd\tau$$
$$\le A\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(v_t^2+v_{x\tau}^2+v_{xx\tau}^2\right)dxd\tau+\delta_0'\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(v_{x\tau\tau}^2+v_{\tau\tau}^2\right)dxd\tau,$$

где $\delta_0'$ — произвольное положительное число, число $A$ определяется функциями $a_j(x,t)$, $j=\overline{1,6}$, $f_1(t)$, а также числами $T$ и $\delta_0'$. Подбирая и фиксируя число $\delta_0'$ малым и применяя далее лемму Гронуолла, получаем, что имеет место априорная оценка

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_t^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^1 v_{xt}^2(x,t)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_{xxt}^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(v_{x\tau\tau}^2+v_{\tau\tau}^2\right)dxd\tau\le M \tag{38}$$

с постоянной M, определяющейся функциями $a_j(x,t)$, $j=\overline{1,6}$, $f_1(t)$, а также числами $T$ и $\delta_1$.

Из (38) следует очевидная оценка

$$\|v\|_V^2+\|u\|_V^2\le C, \tag{39}$$

которая показывает, что задача (33), $(34_\lambda)$, (35)–(37) разрешима при $\lambda\in(0,1)$, так как она разрешима при $\lambda=0$ [12]. Очевидно, что разрешима и обратная задача II. При этом функция $q(t)$ определяется с помощью формулы

$$q(t)=\frac{1}{h(0,t)}[u_{tt}(0,t)+a(0,t)u_{xx}(0,t)-u_{xxtt}(0,t)+c(0,t)u(0,t)]-\frac{f(0,t)}{h(0,t)}.$$

Теорема доказана.

Перейдем к изучению разрешимости обратной задачи III. Положим

$$m_1=1-\frac{\delta_1^2}{2}-\frac{\delta_3^2}{2},$$

$$m_2=2-\frac{K_1}{2\delta_1^2}\left(1+\frac{1}{\delta_2}\right)-\frac{K_2}{2\delta_3^2}\left(1+\frac{1}{\delta_4}\right)-\frac{K_3}{2\delta_5^2}\left(1+\frac{1}{\delta_6}\right)-\frac{K_4}{2\delta_7^2}\left(1+\frac{1}{\delta_8}\right),$$

$$m_3=1-\frac{K_1\delta_2}{2\delta_1^2}-\frac{K_2\delta_4}{2\delta_3^2}-\frac{\delta_5^2}{2}-\frac{K_3\delta_6}{2\delta_5^2}-\frac{\delta_7^2}{2}-\frac{K_4\delta_8}{2\delta_7^2}.$$

Здесь $\delta_i$, $i=\overline{1,8}$, — некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже, а числа $K_j$, $j=\overline{1,4}$, зависят от значений функций $h(x,t)$ и $K(x,t)$.

**Теорема 4.** *Пусть выполняются условия*

$$a(x,t)\in C(\overline{Q}),\quad c(x,t)\in C(\overline{Q}),\quad h(x,t)\in C(\overline{Q}), \tag{40}$$

$$f(x,t)\in L_2(Q), \tag{41}$$

$$\int\limits_0^1 K(x,t)h(x,t)\,dx\ne 0 \tag{42}$$

*и существуют положительные числа* $\delta_i$, $i=\overline{1,8}$, *такие, что*

$$m_1>0,\quad m_2>0,\quad m_3>0. \tag{43}$$

*Тогда обратная задача* III *имеет решение* $u(x,t)$, $q(t)$ *такое, что* $u(x,t)\in V$, $q(t)\in L_2([0,T])$.

Доказательство. Проведем некоторые формальные построения, касающиеся обратной задачи III.

Умножим уравнении (1) на $K(x,t)$ и проинтегрируем от 0 до 1 по пространственной переменной. Получим равенство

$$\int\limits_0^1 K(x,t)u_{tt}(x,t)\,dx+\int\limits_0^1 K(x,t)a(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx-\int\limits_0^1 K(x,t)u_{xxtt}(x,t)\,dx$$
$$+\int\limits_0^1 K(x,t)c(x,t)u(x,t)\,dx=\int\limits_0^1 K(x,t)f(x,t)dx+q(t)\int\limits_0^1 K(x,t)h(x,t)\,dx. \tag{44}$$

Обозначим

$$h_1(t) = \int\limits_0^1 K(x,t)h(x,t)\,dx.$$

Пусть $h_1(t) \neq 0$ для $t \in [0,T]$. Используя равенства

$$\int\limits_0^1 K(x,t)u_{tt}(x,t)\,dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int\limits_0^1 K(x,t)u(x,t)\,dx\right] - 2\int\limits_0^1 K_t(x,t)u_t(x,t)\,dx$$

$$- \int\limits_0^1 K_{tt}(x,t)u(x,t)\,dx = -2\int\limits_0^1 K_t(x,t)u_t(x,t)\,dx - \int\limits_0^1 K_{tt}(x,t)u(x,t)\,dx,$$

$$\int\limits_0^1 K(x,t)a(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx = -\int\limits_0^1 (K(x,t)a(x,t))_x u_x(x,t)\,dx$$

$$+ K(1,t)a(1,t)u_x(1,t)\,dx - K(0,t)a(0,t)u_x(0,t)\,dx,$$

$$-\int\limits_0^1 K(x,t)u_{xxtt}(x,t)\,dx = -\int\limits_0^1 K_x(x,t)u_{xxt}(x,t)\,dx$$

$$+ K(1,t)u_{xtt}(1,t)\,dx - K(0,t)u_{xtt}(0,t)\,dx,$$

вычислим $q(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{h_1(t)}\Bigg[-2\int\limits_0^1 K_t(x,t)u_t(x,t)\,dx - \int\limits_0^1 K_{tt}(x,t)u(x,t)\,dx$$

$$-\int\limits_0^1 (K(x,t)a(x,t))_x u_x(x,t)\,dx + K(1,t)a(1,t)u_x(1,t)\,dx - K(0,t)a(0,t)u_x(0,t)\,dx$$

$$-\int\limits_0^1 K_x(x,t)u_{xxt}(x,t)\,dx + K(1,t)u_{xtt}(1,t)\,dx - K(0,t)u_{xtt}(0,t)\,dx$$

$$+\int\limits_0^1 K(x,t)c(x,t)u(x,t)\,dx - \int\limits_0^1 K(x,t)f(x,t)\,dx\Bigg].$$

Пусть $\lambda$ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в прямоугольнике $Q$ уравнению*

$$u_{tt} + a(x,t)u_{xx} - u_{xxtt} + c(x,t)u$$

$$= f(x,t) + \lambda\frac{h(x,t)}{h_1(t)}\Bigg[-2\int\limits_0^1 K_t(x,t)u_t(x,t)\,dx - \int\limits_0^1 K_{tt}(x,t)u(x,t)\,dx$$

$$-\int\limits_0^1 (K(x,t)a(x,t))_x u_x(x,t)\,dx + K(1,t)a(1,t)u_x(1,t)\,dx - K(0,t)a(0,t)u_x(0,t)\,dx$$

$$-\int\limits_0^1 K_x(x,t)u_{xxt}(x,t)\,dx + K(1,t)u_{xtt}(1,t)\,dx - K(0,t)u_{xtt}(0,t)\,dx$$

$$+\int\limits_0^1 K(x,t)c(x,t)u(x,t)\,dx - \int\limits_0^1 K(x,t)f(x,t)\,dx\Bigg], \qquad (44_\lambda)$$

*а также условиям* (2), (3).

Для получения «хороших» априорных оценок умножим уравнение $(44_\lambda)$, записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $u_{\tau\tau} - u_{xx\tau\tau}$ и результат проинтегрируем от 0 до $t$ по временной переменной и от 0 до 1 — по пространственной переменной. Применяя интегрирование по частям и условия (43), (2) и (3), имеем

$$m_1\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2\,dxd\tau + m_2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2\,dxd\tau + m_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau\tau}^2\,dxd\tau$$

$$\le \delta_9\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau\tau}^2\,dxd\tau\right)$$

$$+C_1\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 v_{\xi\xi}^2\,dxd\xi d\tau + C_2\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 v_{x\xi\xi}^2\,dxd\xi d\tau + C_3\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 v_{xx\xi\xi}^2\,dxd\xi d\tau + C_0,$$

где $\delta_9$ — произвольное положительное число, числа $C_i$, $i=\overline{1,3}$, определяются функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $h(x,t)$, $K(x,t)$. Поскольку числа $m_1$, $m_2$, $m_3$ положительны, фиксируя $\delta_j$, $j=\overline{1,9}$, настолько малыми, что $m_1-\delta_9>0$, $m_2-\delta_9>0$, $m_3-\delta_9>0$, получим

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \left(v_{\tau\tau}^2 + v_{x\tau\tau}^2 + v_{xx\tau\tau}^2\right)dxd\tau \le \overline{C}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 \left(v_{\xi\xi}^2 + v_{x\xi\xi}^2 + v_{xx\xi\xi}^2\right)dxd\xi d\tau + C_0'. \quad (45)$$

Далее по лемме Гронуолла имеет место оценка

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \left(v_{\tau\tau}^2 + v_{x\tau\tau}^2 + v_{xx\tau\tau}^2\right)dxd\tau + \le C_0'\exp(T\overline{C}),$$

откуда следует

$$\|u\|_V^2 \le C. \qquad (46)$$

Непустота $\Lambda$ очевидна: при выполнении условий (40), (41) вспомогательная задача имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $V$. Открытость и замкнутость следуют из априорных оценок, полученных выше [12].

Тем самым по теореме о продолжении по параметру вспомогательная задача разрешима для $\lambda\in[0,1]$ [13].

Перейдем к доказательству разрешимости обратной задачи. Покажем, что решение вспомогательной задачи есть решение обратной задачи.

Положим

$$w(t) = \int\limits_0^1 K(x,t)u(x,t)\,dx.$$

Умножим уравнение (1) на $K(x,t)$ и проинтегрируем от 0 до 1 по переменной $x$. Получим $w''(t) = 0$. Проинтегрируем выражение от 0 до $t$ по переменной $\tau$:

$$\int_0^t w''(\tau)\, d\tau = 0.$$

Учитывая, что $w'(0) = 0$, имеем $w'(t) = 0$. Тогда

$$\int_0^t w'(\tau) d\tau = 0.$$

Поскольку $w(0) = 0$, получим $w(t) = 0$, т. е.

$$\int_0^1 K(x,t)u(x,t)\, dx = 0,$$

что и требовалось.

Теорема доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, неразрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
2. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York; Basel: Marcell Dekker Inc., 2000.
3. *Anikonov Yu. E.* Inverse and ill-posed problems. Utrecht: VSP, 1997.
4. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: VNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).
5. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
6. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
7. *Мегралиев Я. Т.* Обратная краевая задача для уравнения Буссинеска — Лява с дополнительным интегральным условием // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 75–83.
8. *Мегралиев Я. Т., Ализаде Ф. Х.* Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска с интегральным условием // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 4. С. 167–179.
9. *Pyatkov S. G.* Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht: VSP, 2002.
10. *Кожанов А. И.* О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов в уравнениях составного типа // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, № 2. С. 81-99.
11. *Кожанов А. И.* О разрешимости коэффициентных обратных задач для некоторых уравнений соболевского типа // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Математика. Физика. 2010. Т. 18, № 5. С. 88–98.
12. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
13. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.


*Статья поступила 10 сентября 2014 г.*

Намсараева Гэрэлма Владимировна
Восточно-Сибирский гос. университет технологий и управления,
ул. Ключевская, 40В, строение 1, Улан-Удэ 670013
gerel@inbox.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.946*

# РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

**О. Ю. Николаев**

**Аннотация.** Данная работа посвящена исследованию линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка. Для изучаемой задачи доказываются теоремы существования и единственности решения.

**Ключевые слова:** уравнение параболического типа высокого порядка, обратная задача, существование, единственность.

Исследуется задача нахождения наряду с решением $u(x,t)$ линейного параболического уравнения высокого порядка

$$u_t + u_{xxxx} + a(x,t)u = f(x,t) + \sum_{k=1}^{m} q_k(x)h_k(x,t)$$

коэффициентов $q_k(x)$. При выполнении естественных граничных условий, некоторых условий переопределения, условий принадлежности входных данных определенным функциональным пространствам доказываются теоремы существования и единственности регулярного решения. Ранее подобные задачи изучались при специальных (менее общих, чем в настоящей работе) условиях в [1–3].

**1. Постановка задачи.** Пусть $Q_T$ — прямоугольник $\{(x,t) \mid x \in (0,1),\ t \in (0,T)\}$, $\Omega = \{x \mid x \in (0,1)\}$. Функции $a(x,t)$, $f(x,t)$, $h_k(x,t)$, $k = 1,\dots,m$, заданы при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $t_1,\dots,t_m$ — фиксированные точки полуинтервала $(0,T]$ такие, что выполняются неравенства $t_1 < t_2 < \dots < t_m \le T$.

**Обратная задача.** *Найти функции $u(x,t)$, $q_k(x)$, $k = 1,\dots,m$, связанные в прямоугольнике $Q_T$ уравнением*

$$u_t + u_{xxxx} + a(x,t)u = f(x,t) + \sum_{k=1}^{m} q_k(x)h_k(x,t) \tag{1}$$

*при выполнении для функции $u(x,t)$ условий*

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t_k) = 0, \quad k = 1,\dots,m,\ x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{4}$$

В рассматриваемых задачах условия (2), (4) суть условия первой начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения, а (3) — условия переопределения, необходимые для нахождения неизвестных функций $q_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$.

**2. Разрешимость обратной задачи.** Пусть $w_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$, — заданные при $x \in \overline{\Omega}$ функции. Рассмотрим линейную алгебраическую относительно функций $q_k(x)$ систему

$$\sum_{k=1}^{m} q_k(x) h_k(x, t_j) = w_j(x) - f(x, t_j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{$*$}$$

Предполагая, что определитель $d_0(x)$ этой системы не обращается в нуль на множестве $\overline{\Omega}$, найдем функции $q_k(x)$:

$$q_k(x) = A_{0k}(x) + \sum_{i=1}^{m} A_{ik}(x) w_i(x), \quad k = 1, \ldots, m,$$

где $A_{0k}(x)$, $A_{ik}(x)$ вычисляются через $f(x,t)$, $h_1(x,t), \ldots, h_m(x,t)$. Положим

$$g(x) = f(x, 0) + \sum_{k=1}^{m} A_{0k}(x) h_k(x, 0),$$

$$r_k(x) = \sum_{i=1}^{m} A_{ki}(x) h_k(x, 0), \quad k = 1, \ldots, m,$$

$$G(x,t) = f_t(x,t) + \sum_{k=1}^{m} A_{0k}(x) h_{kt}(x,t),$$

$$R_k(x,t) = \sum_{i=1}^{m} A_{ki}(x) h_{it}(x,t), \quad k = 1, \ldots, m,$$

$$\overline{R}_k = \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |R_k(x,t)|, \quad k = 1, \ldots, m,$$

$$\bar{r}_k = \sup_{x\in[0,1]} |r_k(x)|, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Пусть $a_0$ и $k$ — фиксированные положительные числа, роль которых проясним ниже.

**Теорема 1.** *Пусть выполняются условия*

$$a(x,t), a_t(x,t), a_{tt}(x,t) \in C(\overline{Q_T}), \quad h_k(x,t) \in C^2(\overline{Q_T}), \quad k = 1, \ldots, m,$$

$$a(x,t) \geq a_0 > 0, \quad a_t(x,t) \geq 0, \quad a_{tt}(x,t) \leq 0, \quad (x,t) \in \overline{Q_T}, \tag{5}$$

$$1 - m \sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^2 \geq k > 0. \tag{6}$$

*Тогда для функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q_T)$, обратная задача имеет решение $u(x,t) \in W_2^{4,1}(Q_T)$, $q_k(x) \in L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Рассмотрим следующую краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в области $Q_T$ решением уравнения*

$$u_{tt} + u_{xxxxt} + a u_t + a_t u = G(x,t) + \sum_{k=1}^{m} R_k(x,t) u_t(x, t_k) \tag{7}$$

*и такую, что для нее выполняется условие*

$$u_t(x,0) = g(x) + \sum_{k=1}^{m} r_k(x) u_t(x,t_k), \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

*а также условия* (2) *и* (4).

Разрешимость данной краевой задачи докажем, используя метод продолжения по параметру. Обозначим $v(x,t) = u_t(x,t)$. Пусть $\lambda$ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим следующую задачу: *найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в области $Q_T$ решением уравнения*

$$v_t + v_{xxxx} + av = G(x,t) + \lambda \left[ \sum_{k=1}^{m} R_k(x) v(x,t_k) - a_t u \right] \tag{9}$$

*и удовлетворяющую условиям*

$$v(x,0) = g(x) + \lambda \sum_{k=1}^{m} r_k(x) v(x,t_k), \tag{10}$$

$$v(0,t) = v(1,t) = v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0. \tag{11}$$

При $\lambda = 0$ данная задача является начально-краевой задачей для линейного параболического уравнения высокого порядка, разрешимость ее в пространстве $W_2^{4,1}(Q_T)$ при выполнении некоторых условий согласования и гладкости известна (см. [4]). Для того чтобы получить разрешимость задачи при всех $\lambda$ (в том числе и при $\lambda = 1$), достаточно установить наличие равномерной по $\lambda$ априорной оценки решений этой задачи в пространстве $W_2^{4,1}(Q_T)$.

Для получения первой априорной оценки умножим уравнение (9) на функцию $v(x,t)$ и проинтегрируем обе части уравнения по области $Q_T = \{(x,\tau) \mid x \in (0,1),\ \tau \in (0,t),\ t \in (0,T)\}$. Интегрируя по частям с учетом условий (11), получим

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} v^2(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} v^2(x,0)\,dx + \int_{Q_t} v_{xx}^2(x,\tau)\,dxd\tau + \int_{Q_t} a(x,\tau)v^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$= \int_{Q_t} G(x,\tau)v(x,\tau)\,dxd\tau + \lambda \int_{Q_t} \left[ \sum_{k=1}^{m} R_k(x,\tau)v(x,t_k) - a_t(x,\tau)u(x,\tau) \right] v(x,\tau)\,dxd\tau.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{Q_t} a_t uv\,dxd\tau = \frac{1}{2}\int_{Q_t} [(a_t u^2)_t - a_{tt}u^2]\,dxd\tau = \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_t(x,t)u^2(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int_{Q_t} a_{tt}u^2\,dxd\tau$$

и в силу условий (5) это положительная величина.

С помощью неравенства Юнга можно получить следующие неравенства:

$$\left| \int_{Q_t} G(x,\tau)v(x,\tau)\,dxd\tau \right| \le \frac{1}{2\delta_1^2}\int_{Q_t} G^2(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{\delta_1^2}{2}\int_{Q_t} v(x,\tau)\,dxd\tau,$$

$$\left|\lambda \int\limits_{Q_t} \sum_{k=1}^{m} R_k(x,\tau) v(x,t_k) v(x,\tau)\, dxd\tau\right|$$
$$\leq \frac{\delta_2^2}{2} \int\limits_{Q_t} v^2(x,\tau)\, dxd\tau + \frac{1}{2\delta_2^2} \int\limits_{Q_t} m \sum_{k=1}^{m} R_k(x,\tau) v^2(x,t_k)\, dxd\tau$$
$$\leq \frac{\delta_2^2}{2} \int\limits_{Q_t} v^2(x,\tau)\, dxd\tau + \frac{mT}{2\delta_2^2} \sum_{k=1}^{m} \overline{R}_k^2 \int\limits_{\Omega} v^2(x,t_k)\, dx.$$

Используя условие (10) и неравенство Юнга, получим

$$v^2(x,0) = \left[g(x) + \lambda \sum_{k=1}^{m} r_k(x) v(x,t_k)\right]^2$$
$$\leq \left(1 + \frac{1}{\delta_3^2}\right) g^2(x) + m\big(1+\delta_3^2\big) \sum_{k=1}^{m} r_k^2(x) v^2(x,t_k).$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega} v^2(x,0)\, dx \leq \left(1 + \frac{1}{\delta_3^2}\right) \int\limits_{\Omega} g^2(x)\, dx + m\big(1+\delta_3^2\big) \sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^2 \int\limits_{\Omega} v^2(x,t_k)\, dx.$$

В силу условий (5) можно подобрать $\delta_1, \delta_2$ так, что

$$a(x,t) - \frac{\delta_1^2}{2} - \frac{\delta_2^2}{2} \geq 0.$$

При произвольном $t \in [0,T]$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} v^2(x,t)\, dx \leq A + \left[\frac{m}{2}\big(1+\delta_3^2\big) \sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^2 + \frac{mT}{2\delta_2^2} \sum_{k=1}^{m} \overline{R}_k^2\right] \int\limits_{\Omega} v^2(x,t_k)\, dx,$$

где

$$A = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\delta_3^2}\right) \int\limits_{\Omega} g^2(x)\, dx + \frac{1}{2\delta_1^2} \int\limits_{Q_t} G^2(x,\tau)\, dxd\tau.$$

Обозначим

$$B = \sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega} v^2(x,t)\, dx.$$

Тогда

$$\left(1 - m\sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^2 - m\delta_3^2 \sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^2 - \frac{mT}{\delta_2^2} \sum_{k=1}^{m} \overline{R}_k^2\right) B \;\leq\; 2A$$

и в силу условия (6) можно подобрать $\delta_3^2$ и $T \sum\limits_{k=1}^{m} \overline{R}_k^2$ так, что

$$1 - m\sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^2 - m\delta_3^2 \sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^2 - \frac{mT}{\delta_2^2} \sum_{k=1}^{m} \overline{R}_k^2 \;\geq\; k_1 > 0.$$

В результате приходим к следующему неравенству:

$$\frac{k_1}{2}\int\limits_{\Omega} v^2(x,t)\,dx + \int\limits_{Q} v_{xx}^2(x,\tau)\,dxd\tau \le 2A.$$

Обозначив $k_2 = \min\{k_1/2, 1\}$, получим первую априорную оценку

$$\int\limits_{\Omega} v^2(x,t)\,dx + \int\limits_{Q} v_{xx}^2(x,\tau)\,dxd\tau \le \frac{2}{k_2}A. \tag{12}$$

Для второй априорной оценки умножим уравнение (9) на функцию $v_t(x,t)$ и проинтегрируем обе части уравнения по области $Q_t = \{(x,\tau) \mid x \in (0,1),\ \tau \in (0,t),\ t \in (0,T)\}$. Интегрируя по частям с учетом условий (11), получим

$$\int\limits_{Q_t} v_t^2(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} v_{xx}^2(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} v_{xx}^2(x,0)\,dx + \int\limits_{Q_t} avv_t\,dxd\tau$$
$$= \int\limits_{Q_t} G(x,\tau)\,dxd\tau + \lambda\int\limits_{Q_t}\left[\sum_{k=1}^{m} R_k(x,t)v(x,t_k) - a_t u\right] v_t\,dxd\tau.$$

Слагаемое

$$\int\limits_{Q_t} avv_t\,dxd\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} av^2(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_t} a_t v^2\,dxd\tau$$

ограничено в силу первой оценки (12).

С помощью неравенства Юнга придем к следующим неравенствам:

$$\left|\int\limits_{Q_t}\sum_{k=1}^{m} R_k(x,\tau)v(x,t_k)v_t\,dxd\tau\right|$$
$$\le \frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_{Q_t} v_t^2\,dxd\tau + \frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_{Q_t}\left[\sum_{k=1}^{m} R_k(x,\tau)v(x,t_k)\right]^2 dxd\tau,$$

$$\left|\int\limits_{Q_t} a_t u v_t\,dxd\tau\right| \le \frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_{Q_t} v_t^2\,dxd\tau + \frac{1}{2\delta_2^2}\int\limits_{Q_t} a_t^2 u^2\,dxd\tau,$$

где вторые слагаемые в правых частях ограничены в силу первой оценки (12),

$$\left|\int\limits_{Q_t} G(x,\tau)v_t\,dxd\tau\right| \le \frac{\delta_5^2}{2}\int\limits_{Q_t} v_t^2\,dxd\tau + \frac{1}{2\delta_5^2}\int\limits_{Q_t} G^2(x,\tau)\,dxd\tau.$$

Используя условие (10), получим

$$v_{xx}(x,0) = g_{xx}(x) + \lambda\sum_{k=1}^{m}[r_{kxx}(x)v(x,t_k) + 2r_{kx}(x)v_x(x,t_k) + r_k(x)v_{xx}(x,t_k)].$$

Применим неравенство Юнга и придем к неравенству

$$v_{xx}^2(x,0) \le \left(1 + \frac{1}{\delta_3^2}\right)g_{xx}^2(x) + \left(1+\delta_3^2\right)m\sum_{k=1}^{m}[r_{kxx}(x)v(x,t_k)$$

$$+ 2r_{kx}(x)v_x(x,t_k) + r_k(x)v_{xx}(x,t_k)]^2 \leq \left(1+\frac{1}{\delta_3^2}\right)g_{xx}^2(x)g_{xx}^2(x)$$
$$+ m\big(1+\delta_3^2\big)\left(1+\frac{1}{\delta_4^2}\right)\sum_{k=1}^{m} r_{kxx}^2(x)v^2(x,t_k)$$
$$+ m\big(1+\delta_3^2\big)\big(1+\delta_4^2\big)\sum_{k=1}^{m}[2r_{kx}v_x(x,t_k)+r_k(x)v_{xx}]^2.$$

Учитывая (12), (6) и существенную ограниченность функций $r_k(x)$, $r_{kx}(x)$, $r_{kxx}(x)$, выводим оценку

$$k_3\int\limits_{\Omega} v_{xx}^2(x,t)\,dx \leq A_1, \quad \text{где } k \geq k_3 > 0,\ A_1 = \mathrm{const},\ t\in[0,T].$$

В результате имеем вторую априорную оценку

$$\int\limits_{Q} v_t(x,\tau)\,dxd\tau + \int\limits_{\Omega} v_{xx}^2(x,t)\,dx \leq A_2, \quad \text{где } A_2 = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Третья априорная оценка получается после умножения уравнения (9) на функцию $v_{xxxx}(x,t)$ и интегрирования по области $Q_T$ и имеет следующий вид:

$$\int\limits_{Q} v_{xxxx}^2(x,\tau)\,dxd\tau + \int\limits_{\Omega} v_{xx}^2(x,t)\,dx \leq A_3, \tag{14}$$

где постоянная $A_3$ определяется функциями $f(x,t)$, $h_k(x,t)$, $k=1,\dots,m$.

Наличие оценок (12)–(14) означает существование равномерной по $\lambda$ априорной оценки решений задачи (9)–(11). Следовательно, задача (9)–(11) имеет при $\lambda = 1$ решение $v(x,t) \in W_2^{4,1}(Q_T)$. Тогда существует решение $u(x,t) \in W_2^{4,2}(Q_T)$ задачи (7), (8), (2), (4).

Положим

$$q_k(x) = A_{0k}(x) + \sum_{i=1}^{m} A_{ik}(x)u_t(x,t_i), \quad k=1,\dots,m. \tag{15}$$

Проинтегрируем уравнение (7) по переменной $t$ в пределах от 0 до $t_k$, $k = 1,\dots,m$. После выкладок с учетом (2), (8) и $(*)$ придем к равенствам

$$u_{xxxx}(x,t_k) + a(x,t_k)u(x,t_k) = 0, \quad k=1,\dots,m.$$

Из первого неравенства в условии (5) следует, что

$$u(x,t_k) = 0, \quad k=1,\dots,m,$$

т. е. для найденного решения выполняются условия (3).

Далее выполним интегрирование уравнения (7) по временной переменной от 0 до текущей точки, используя представление (15). В результате имеем

$$u_t + u_{xxxx} + a(x,t)u = f(x,t) + \sum_{k=1}^{m} q_k(x)h_k(x,t).$$

Следовательно, найденное решение $u(x,t)$ краевой задачи и функции $q_k(x)$, $k=1,\dots,m$, определенные по формулам (15), связаны в области $Q_T$ уравнением (1). Учитывая выполнение для функции $u(x,t)$ условий (2)–(4), а также полученную по ходу доказательства принадлежность функций $u(x,t)$ и $q_k(x)$, $k=1,\dots,m$, пространствам $W_2^{4,1}(Q_T)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно, окончательно получим, что функции $u(x,t)$, $q_k(x)$, $k=1,\dots,m$, представляют собой требуемое решение обратной задачи (1)–(4).

Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** *Пусть* $\{u(x,t), q_1(x), \dots, q_m(x)\}$ *и* $\{v(x,t), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\}$ *— решения обратной задачи* (1)–(4), $u(x,t)$, $v(x,t) \in W_2^{4,1}(Q_T)$, $q_1(x), \dots, q_m(x)$, $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x) \in L_2(\Omega)$. *Пусть выполняются условия* (5), (6) *теоремы* 1. *Тогда* $u(x,t) = v(x,t)$ *и* $q_k(x) = \varphi_k(x)$, $k = 1, \dots, m$.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$, $q_1(x), \dots, q_m(x)$ и $v(x,t)$, $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ — решения обратной задачи (1)–(4). Тогда для них выполняются равенства

$$u_t + u_{xxxx} + a(x,t)u = f(x,t) + \sum_{k=1}^{m} q_k(x) h_k(x,t),$$

$$v_t + v_{xxxx} + a(x,t)v = f(x,t) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) h_k(x,t),$$

где

$$q_k(x) = A_{0k}(x) + \sum_{i=1}^{m} A_{ik}(x) u_t(x,t_i),$$

$$\varphi_k(x) = A_{0k}(x) + \sum_{i=1}^{m} A_{ik}(x) v_t(x,t_i),$$

для функций $u(x,t), v(x,t)$ выполняются условия (2)–(4), а также условия

$$u_t(x,0) = g(x) + \sum_{k=1}^{m} r_k(x) u_t(x,t_k), \quad x \in \Omega,$$

$$v_t(x,0) = g(x) + \sum_{k=1}^{m} r_k(x) v_t(x,t_k), \quad x \in \Omega.$$

Рассмотрим функцию

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x,t).$$

Она удовлетворяет уравнению

$$w_t + w_{xxxx} + a(x,t)w = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} A_{ki}(x) h_i(x,t) w_t(x,t_k),$$

условиям (2)–(4) и условию

$$w_t(x,0) = \sum_{k=1}^{m} r_k(x) w_t(x,t_k).$$

Продифференцируем уравнение для $w(x,t)$ по $t$ и обозначим $\psi(x,t) = w_t(x,t)$. Функция $\psi(x,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\psi_t + \psi_{xxxx} + a\psi = \sum_{k=1}^{m} R_k(x,t) \psi(x,t_k) - a_t w \tag{16}$$

и условию

$$\psi(x,0) = \sum_{k=1}^{m} r_k(x) \psi(x,t_k). \tag{17}$$

Умножим уравнение (16) на функцию $\psi(x,t)$ и проинтегрируем обе части уравнения по области $Q_T = \{(x,\tau) \mid x \in (0,1),\ \tau \in (0,t),\ t \in (0,T)\}$. Интегрируя по частям, получим равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \psi^2(x,t)\,dx + \int\limits_{Q_t} \psi_{xx}^2\,dxd\tau + \int\limits_{Q_t} a\psi^2\,dxd\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \psi^2(x,0)\,dx + \int\limits_{Q_t} \sum_{k=1}^{m} R_k(x,\tau)\psi(x,t_k)\psi(x,\tau)\,dxd\tau - \int\limits_{Q_t} a_t w\psi\,dxd\tau.$$

Как замечено выше,

$$\int\limits_{Q_t} a_t w\psi\,dxd\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_t} \left[(a_t w^2)_t - a_{tt}w^2\right] dxd\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} a_t(x,t)w^2(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_t} a_{tt}w^2\,dxd\tau$$

и в силу условий (5) это положительная величина.

Используя неравенство Юнга и условие (17), можно оценить

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \psi^2(x,t)\,dx + \int\limits_{Q_t} \psi_{xx}^2\,dxd\tau + \int\limits_{Q_t} a\psi^2\,dxd\tau$$
$$\le \frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_{Q_t} \psi^2\,dxd\tau + \frac{1}{2\delta_1^2} mT \sum_{k=1}^{m} \overline{R}_k^2 \int\limits_{\Omega} \psi^2(x,t_k)\,dx + \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^2 \int\limits_{\Omega} \psi^2(x,t_k)\,dx.$$

В силу условия (5) $\delta_1$ можно подобрать так, что $a(x,t) - \frac{\delta_1^2}{2} \ge 0$.

Обозначим

$$B = \sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega} \psi^2(x,t_k)\,dx.$$

Тогда

$$\left(1 - m\sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^2 - \frac{1}{2\delta_1^2} mT \sum_{k=1}^{m} \overline{R}_k^2\right) B \le 0.$$

Условие (6) при достаточно малом значении $T\sum\limits_{k=1}^{m} \overline{R}_k^2$ гарантирует выполнение неравенства

$$1 - m\sum_{k=1}^{m} \bar{r}_k^2 - \frac{1}{2\delta_1^2} mT \sum_{k=1}^{m} \overline{R}_k^2 \ge 0,$$

что влечет за собой равенство

$$\int\limits_{\Omega} \psi^2(x,t)\,dx = 0, \quad t \in [0,T].$$

Тогда $w_t(x,t) = \psi(x,t) = 0$ и с учетом условия $w(x,0) = 0$ можно утверждать, что $w(x,t) \equiv 0$, т. е. $u(x,t) \equiv v(x,t)$ и $q_k(x) \equiv \varphi_k(x)$, $k = 1,\dots,m$.

Теорема 2 доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Кириллова Г. А.* Обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка: автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Рубцовск, 2004.

**2.** *Кожанов А. И., Кириллова Г. А.* О некоторых обратных задачах для параболического уравнения четвертого порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, № 1. С. 35–48.

**3.** *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.

**4.** *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

*Статья поступила 10 сентября 2014 г.*

Николаев Олег Юрьевич
Бурятский гос. университет,
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 670000
nikolaev.oleg1@yandex.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.946*

# О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА

**Н. С. Попов**

**Аннотация.** Исследуется разрешимость начально-краевой задачи для линейных псевдогиперболических уравнений третьего порядка с заданием на боковой границе условия, связывающего значения решения или конормальной производной решения со значениями некоторого интегрального оператора от решения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

**Ключевые слова:** псевдогиперболическое уравнение, пространство Соболева, начально-краевая задача, метод продолжения по параметру, априорные оценки, регулярное решение.

## Введение

Нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе в одномерном по пространственным переменным случае рассматриваются в [1–3]. В многомерном случае исследования подобных задач ранее относились к гиперболическим уравнениям (см. [4]), псевдопараболическим уравнениям [5], но многомерные псевдогиперболические задачи с интегральным условием на боковой границе ранее не изучались.

## 1. Постановка задачи

Пусть $\Omega$ — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей $\Gamma$, $Q$ — цилиндр $\Omega \times (0,T)$ $(0 < T < +\infty)$, $S = \Gamma \times (0,T)$ — его боковая граница, $b^{ij}(x,t)$, $b(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные в цилиндре $\overline{Q}$ функции, $u_0(x), u_1(x)$ — заданные на множестве $\overline{\Omega}$ функции, $K(x,y,t)$ — функция, заданная при $x, y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

**Краевая задача I.** *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения*

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial t}(u_t - \Delta u) - Bu = f(x,t), \quad Bu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b(x,t)u, \tag{1}$$

*такую, что для нее выполняются условия*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_{(x,t)\in S} = \int_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)\,dy\Big|_{(x,t)\in S}. \tag{3}$$

**Краевая задача II.** *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются начальные условия (2) и условие*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu(x)}\bigg|_{(x,t)\in S} = \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)\,dy\bigg|_{(x,t)\in S}, \tag{4}$$

*где $\nu(x) = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ — вектор внутренней нормали к $\Gamma$ в текущей точке.*

Предполагаем выполнение условия эллиптичности на оператор $B$:

$$b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\bigl(\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2\bigr), \quad \alpha>0,\ \xi_i\in\mathbb{R}^n. \tag{5}$$

## 2. Разрешимость краевой задачи I

Определим оператор $M$ по формуле

$$(Mu)(x,t) = u(x,t) - \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)\,dy.$$

Оператор $M$ однозначно и непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при всех $t\in[0,T]$, и существуют положительные постоянные $m_1$, $m_2$ такие, что выполняются неравенства

$$m_1\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\,dx \leq \int\limits_{\Omega}[Mu(x,t)]^2\,dx \leq m_2\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\,dx \tag{6}$$

при любом $t\in[0,T]$ и $u(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$.

Определим пространство

$$V = \bigl\{v(x,t) : v(x,t)\in L_\infty\bigl(0,T;W_2^2(\Omega)\bigr),\\ v_t(x,t)\in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))\cap L_\infty\bigl(0,T;W_2^1(\Omega)\bigr),\ v_{tt}(x,t)\in L_2(Q)\bigr\},$$

норму в $V$ определим естественным образом:

$$\|v\|_V = \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)}.$$

Введем обозначения:

$$LMu(x,t) - MLu(x,t) = \Phi(x,t,u), \quad w = Mu,$$

и будем рассматривать уравнение относительно $w$

$$Lw = g(x,t) + \Phi(x,t,M^{-1}w), \quad g(x,t) = Mf,$$

которое, как показано ниже, эквивалентно исходному уравнению (1).

Имеем

$$\Phi(x,t,u) = LMu(x,t) - MLu(x,t)\\ = \int\limits_{\Omega}[-K_{tt}(x,y,t) + \Delta_x K_t(x,y,t) + B_x K(x,y,t) - K(x,y,t)b(y,t)]u(y,t)\,dy\\ + \int\limits_{\Omega}[\Delta_x K(x,y,t) - 2K_t(x,y,t)]u_t(y,t)\,dy - \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)\Delta_y u_t(y,t)\,dy\\ - \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)(b^{ij}(y)u_{y_j})_{y_i}\,dy,$$

где

$$B_x u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b(x,t)u,$$

$$B_y u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(b^{ij}(y)u_{y_j}) + b(y,t)u.$$

Введем обозначение

$$Q_0 = \max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K^2(x,y,t)\,dxdy. \tag{7}$$

**Теорема 1.** *Пусть выполняются условия* (5), (6) *и, кроме того,*

$$\begin{gathered} b(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad b^{ij}(x) \in C_0^1(\overline{\Omega}) \quad (i,j = 1,\ldots,n), \\ -b(x,t) \geq b_0 > 0 \quad \textit{при } (x,t) \in \overline{Q}, \\ K(x,y,t) \in C^3(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[0,T]), \\ 1 - \frac{Q_0}{\delta_0^2 m_1} > 0 \quad \textit{при } \delta_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ f(x,t) \in L_2(Q), \quad u_0(x) \in W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \end{gathered} \tag{8}$$

*Тогда краевая задача* I *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* $V$, *и это решение единственно.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию* $w(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* $Q$ *решением уравнения*

$$Lw = g(x,t) + \Phi_1(x,t,w), \quad u = M^{-1}w,\ g(x,t) = Mf, \tag{9}$$

*и удовлетворяющую условиям*

$$w(x,t)|_S = 0, \quad w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \quad x\in\Omega, \tag{10}$$

*где*

$$u(x,0) - \int\limits_{\Omega} K(x,y,0)u(y,0)\,dy = u_0(x) - \int\limits_{\Omega} K(x,y,0)u_0(y)\,dy = w_0(x),$$

$$\begin{aligned} u_t(x,0) - \int\limits_{\Omega} &[K(x,y,t)u(y,t)]_t|_{t=0}\,dy \\ &= u_1(x) - \int\limits_{\Omega}[K_t(x,y,0)u_0(y) + K(x,y,0)u_1(y)]\,dy = w_1(x), \end{aligned}$$

$$\Phi_1(x,t,w) = \Phi(x,t,M^{-1}w).$$

Докажем, что при выполнении условий теоремы краевая задача (9), (10) разрешима в классе $W = \{v(x,t) : v(x,t)\in V,\ w(x,t) = Mv(x,t)\in V\}$ для любой функции $g(x,t)$ такой, что $g(x,t)\in L_2(Q)$.

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Именно, для чисел $\lambda$ из отрезка $[0,1]$ определим семейство операторов $\{L_\lambda\}$: $L_\lambda w = Lw - \lambda\Phi_1(x,t,w)$.

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения*

$$L_\lambda w = g(x,t) \tag{$7_\lambda$}$$

*при выполнении условий* (10). Обозначим через $\Lambda$ множество чисел $\lambda \in [0,1]$, для которых краевая задача ($7_\lambda$), (10) разрешима в классе $W$ для произвольной функции $g(x,t)$ такой, что $g(x,t) \in L_2(Q)$. Покажем, что множество $\Lambda$ совпадает со всем отрезком $[0,1]$, что означает разрешимость краевой задачи (9), (10) в требуемом классе.

Прежде всего убедимся, что множество $\Lambda$ непусто. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения* ($7_\lambda$) *при* $\lambda = 0$:

$$Lw = g(x,t)$$

*при выполнении условий* (10).

Как следует из результатов работ [6–8], при выполнении условий теоремы эта задача имеет решение, принадлежащее пространству $W$.

Пусть $w(x,t)$ — решение краевой задачи ($7_\lambda$), (10) из пространства $W$. Если имеет место априорная оценка в том же пространстве $W$, то задача разрешима при $\lambda \in [0,1]$ (см. [9]).

Для получения априорной оценки умножим уравнение ($7_\lambda$), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $w_\tau - \Delta w_\tau$ и результат проинтегрируем по области $\Omega$ и по переменной $\tau$ в пределах от 0 до $t$. Таким образом, преобразуем равенство

$$\int_0^t \int_\Omega Lw(w_\tau - \Delta w_\tau)\,dx\,d\tau = \int_0^t \int_\Omega (g + \lambda\Phi_1)(w_\tau - \Delta w_\tau)\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям и считая, что по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до $n$, с учетом краевых условий (10) придем к равенству

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega w_\tau^2(x,t)\,dx + \int_0^t \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n (w_{x_i\tau})^2 + (\Delta w_\tau)^2\right] dx\,d\tau \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega b^{ij}(x) w_{x_i}(x,t) w_{x_j}(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega b(x,t) w^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega b_\tau w^2\,dxd\tau \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega w_{x_i\tau}^2(x,t)\,dx + \int_0^t \int_\Omega b^{ij} w_{x_i x_j} \Delta w_\tau\,dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega b^{ij}_{x_i} w_{x_j} \Delta w_\tau\,dxd\tau \\
&- \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega b_{x_i} w w_{x_i\tau}\,dxd\tau - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega b(x,t) w_{x_i}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega b_\tau w_{x_i}^2\,dxd\tau \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_\Omega w_1^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega b^{ij}(x) w_{0x_i}(x) w_{0x_j}(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega b(x,0) w_0^2(x)\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left[w_{1x_i}^2(x) - b(x,0) w_{0x_i}^2(x)\right] dx + \int_0^t \int_\Omega (g + \lambda\Phi_1)(w_\tau - \Delta w_\tau)\,dxd\tau. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Рассмотрим оценку интеграла $\int\limits_0^t \int\limits_\Omega b^{ij} w_{x_i x_j} \Delta w_\tau \, dx d\tau$. Используя (5), (8), получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega b^{ij} w_{x_i x_j} \Delta w_\tau \, dx d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int\limits_\Omega b^{ij}(x) w_{x_j x_k}(x,t) w_{x_i x_k}(x,t) \, dx \geq \frac{\alpha}{2} \sum_{i,k=1}^n \int\limits_\Omega w^2_{x_i x_k}(x,t) \, dx. \quad (12)$$

С помощью (5) аналогично имеем

$$\frac{1}{2} \int\limits_\Omega b^{ij}(x) w_{x_i}(x,t) w_{x_j}(x,t) \, dx \geq \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega w^2_{x_i}(x,t) \, dx.$$

Рассмотрим оценку интеграла $\int\limits_0^t \int\limits_\Omega u^2_\tau(y,\tau) \, dy d\tau$ через функцию $w$. Из равенства $w = Mu$ следует, что

$$u_\tau(y,\tau) - \int\limits_\Omega K(y,z,\tau) u_\tau(z,\tau) \, dz = w_\tau(y,\tau) + \int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau) u(z,\tau) \, dz.$$

Используя (6) и неравенство Юнга, получим

$$\int\limits_\Omega u^2_\tau(y,\tau) \, dy \leq \frac{1}{m_1} \int\limits_\Omega \left[ w_\tau(y,\tau) + \int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau) u(z,\tau) \, dz \right]^2 dy$$

$$\leq \frac{1}{m_1} \Bigg[ \int\limits_\Omega w^2_\tau(y,\tau) \, dy + 2 \int\limits_\Omega |w_\tau(y,\tau)| \cdot \left| \int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau) u(z,\tau) \, dz \right| dy$$

$$+ \int\limits_\Omega \left( \int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau) u(z,\tau) \, dz \right)^2 dy \Bigg] \leq \frac{1}{m_1} \Bigg[ \int\limits_\Omega w^2_\tau(y,\tau) \, dy + \int\limits_\Omega w^2_\tau(y,\tau) \, dy$$

$$+ \int\limits_\Omega \left( \int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau) u(z,\tau) \, dz \right)^2 dy + \int\limits_\Omega \left( \int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau) u(z,\tau) \, dz \right)^2 dy \Bigg]$$

$$\leq \frac{2}{m_1} \int\limits_\Omega w^2_\tau(y,\tau) \, dy + C_1 \int\limits_\Omega u^2(y,\tau) \, dy$$

$$\leq \frac{2}{m_1} \int\limits_\Omega w^2_\tau(y,\tau) \, dy + \frac{C_1}{m_1} \int\limits_\Omega w^2(y,\tau) \, dy. \quad (13)$$

Иначе оценку можно получить, как в [5], с малым параметром $\delta_1$, который подберем позже:

$$\int\limits_\Omega u_\tau^2(y,\tau)\,dy \le \frac{1}{m_1}\Big[\int\limits_\Omega w_\tau^2(y,\tau)\,dy + \delta_1^2\int\limits_\Omega w_\tau^2(y,\tau)\,dy$$
$$+\frac{1}{\delta_1^2}\int\limits_\Omega\bigg(\int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau)u(z,\tau)\,dz\bigg)^2dy + \int\limits_\Omega\bigg(\int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau)u(z,\tau)dz\bigg)^2dy\Big]$$
$$\le \frac{1+\delta_1^2}{m_1}\int\limits_\Omega w_\tau^2(y,\tau)\,dy + C(\delta_1)\int\limits_\Omega u^2(y,\tau)\,dy$$
$$\le \frac{1+\delta_1^2}{m_1}\int\limits_\Omega w_\tau^2(y,\tau)\,dy + \frac{C(\delta_1)}{m_1}\int\limits_\Omega w^2(y,\tau)\,dy. \quad (14)$$

Для того чтобы оценить в (11) интеграл

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \Phi_1(w_\tau - \Delta w_\tau)\,dxd\tau, \quad (15)$$

рассмотрим оценку интеграла от $\Phi(x,t,u)$ вида

$$\bigg|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\bigg(\int\limits_\Omega[\Delta_x K(x,y,\tau) - 2K_\tau(x,y,\tau)]u_\tau(y,\tau)\,dy\bigg)(w_\tau-\Delta w_\tau)\,dxd\tau\bigg|$$
$$\le\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega([\Delta_x K - 2K_\tau]^2(x,y,\tau)\,dy)^{\frac12}\bigg(\int\limits_\Omega u_\tau^2(y,\tau)\,dy\bigg)^{\frac12}|w_\tau-\Delta w_\tau|\,dxd\tau$$
$$\le\frac{\delta_0^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(w_\tau-\Delta w_\tau)^2\,dxd\tau$$
$$+\frac{1}{2\delta_0^2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\bigg(\int\limits_\Omega[\Delta_x K-2K_\tau]^2(x,y,\tau)\,dy\bigg)\bigg(\int\limits_\Omega u_\tau^2(y,\tau)\,dy\bigg)dxd\tau$$
$$\le\frac{\delta_0^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(w_\tau-\Delta w_\tau)^2\,dxd\tau + \frac{C_2}{2\delta_0^2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(y,\tau)\,dyd\tau. \quad (16)$$

Продолжая неравенство (16) с учетом (13) и неравенства Юнга, получим

$$\bigg|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\bigg(\int\limits_\Omega[\Delta_x K(x,y,\tau) - 2K_\tau(x,y,\tau]u_\tau(y,\tau)\,dy\bigg)(w_\tau-\Delta w_\tau)\,dxd\tau\bigg|$$
$$\le\frac{\delta_0^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(w_\tau-\Delta w_\tau)^2\,dxd\tau + \frac{C_2}{\delta_0^2 m_1}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau$$
$$+\frac{C_1C_2}{2\delta_0^2 m_1}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w^2(x,\tau)\,dxd\tau. \quad (17)$$

Для того чтобы оценить в (15) интеграл вида

$$\int_0^t \int_\Omega \Big( \int_\Omega K(x,y,\tau)\Delta_y u_\tau(y,\tau)\,dy \Big)(w_\tau - \Delta_x w_\tau)\,dxd\tau,$$

поступаем, как в [5]. Применяя оценку (14), имеем

$$\left| \int_0^t \int_\Omega \Big( \int_\Omega K(x,y,\tau)\Delta_y u_\tau(y,\tau)\,dy \Big)(w_\tau - \Delta w_\tau)\,dxd\tau \right| \\ \le \frac{\delta_0^2}{2} \int_0^t \int_\Omega (w_\tau - \Delta w_\tau)^2\,dxd\tau + \frac{Q_0\big(1+\delta_1^2\big)}{2\delta_0^2 m_1} \int_0^t \int_\Omega (\Delta_y u_\tau)^2(y,\tau)\,dyd\tau, \tag{18}$$

где $Q_0$ задано формулой (7).

Зафиксируем $\delta_0 \in \big(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\big)$ и потребуем выполнения неравенства (8):

$$p \equiv 1 - \frac{Q_0}{\delta_0^2 m_1} > 0, \tag{19}$$

которое очевидно выполняется при малых $|K(x,y,t)|$. Подбирая малое $\delta_1 > 0$, применяя неравенство Юнга и используя лемму Гронуолла в равенстве (11), из неравенства

$$p - \frac{Q_0\delta_1}{\delta_0^2 m_1} > 0 \tag{20}$$

получим априорную оценку

$$\int_0^T \int_\Omega \Big[ \sum_{i=1}^n (w_{x_i\tau})^2 + (\Delta w_t)^2 + (w_{tt})^2 \Big]\,dxdt \\ + \int_\Omega \Big[ w_t^2(x,t) + \sum_{i,k=1}^n w_{x_ix_k}^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2(x,t) + w^2(x,t) \Big]\,dx \\ \le K_0 \int_0^T \int_\Omega g^2(x,t)\,dxdt \tag{21}$$

с положительной постоянной $K_0$, определяемой лишь функциями $b^{ij}(x)$, $b(x,t)$, числами $T$, $\alpha$, а также областью $\Omega$.

Очевидно, что аналогичная оценка имеет место и для функции $u(x,t)$:

$$\|u\|_V \le K_0\|w\|_V \le K_1\|g\|_{L_2(Q)}, \tag{22}$$

где $K_0$, $K_1$ — положительные постоянные, $K_1$ определяется теми же величинами, которыми определяется $K_0$.

Из оценок (21), (22) следует открытость и замкнутость множества $\Lambda$ (см. [1, 4]). Следовательно, краевая задача (9), (10) разрешима в классе $W$.

Как в [5], можно показать, что с помощью решения вспомогательной краевой задачи (9), (10) можно найти решение исходной краевой задачи (1)–(3). В частности, уравнение (1) эквивалентно уравнению (9), так как (9) имеет вид $LMu = Mf + \Phi$, откуда $LMu = Mf + LMu - MLu$, т. е. $M(Lu - f) = 0$.

Единственность решений очевидна: она вытекает, например, из неравенства (22). Теорема доказана.

## 3. Разрешимость краевой задачи II

Рассмотрим краевую задачу II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются начальные условия* (2) *и условие* (4).

Доказательство разрешимости краевой задачи II проведем без перехода к нагруженному уравнению [7] вида (9) с краевыми условиями (10).

Введем обозначение

$$Q_1 = \max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Omega} K^2(x,y,t)\, dS_x dy. \tag{23}$$

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия*

$$b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \beta \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \alpha,\beta > 0,\ \xi_i \in \mathbb{R}^n, \tag{24}$$

*кроме того,*

$$\begin{gathered} b(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad b^{ij}(x) \in C_0^1(\overline{\Omega}) \quad (i,j = 1,\dots,n), \\ -b(x,t) \ge b_0 > 0 \quad \textit{при } (x,t) \in \overline{Q}, \\ K(x,y,t) \in C^3(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[0,T]), \\ 1 - 4Q_1 > 0, \quad 2 - \delta_2 - \delta_2\beta > 0 \quad \textit{при } \delta_2 \in \left(0, \frac{2}{1+\beta}\right), \\ u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad f(x,t) \in L_2(Q). \end{gathered} \tag{25}$$

*Тогда краевая задача* II *имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $V$, и это решение единственно.*

Доказательство. Для получения априорной оценки умножим уравнение (1), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $u_\tau + \frac{1}{2}u_{\tau\tau} - \Delta u_\tau$ и результат проинтегрируем по области $\Omega$ и по переменной $\tau$ в пределах от 0 до $t$. Таким образом, преобразуем равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega Lu \cdot \left(u_\tau + \frac{1}{2}u_{\tau\tau} - \Delta u_\tau\right) dx d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f(x,\tau)\cdot \left(u_\tau + \frac{1}{2}u_{\tau\tau} - \Delta u_\tau\right) dx d\tau.$$

Интегрируя по частям, с учетом краевых условий (2) придем к равенству вида (11), в котором $\Phi_1 \equiv 0$, т. е. к равенству вида

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_\tau^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[\sum_{i=1}^n (u_{x_i\tau})^2 + (\Delta u_\tau)^2 + \frac{1}{2}(u_{\tau\tau})^2\right] dx d\tau$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma u_{x_i\tau} u_\tau \nu_i \, dS_x d\tau - \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma b^{ij} u_{x_j} u_\tau \nu_i \, dS_x d\tau$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b^{ij}(x) u_{x_i}(x,t) u_{x_j}(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b(x,t) u^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_\Omega b_\tau u^2 \, dx d\tau$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Gamma} u_{x_i\tau}u_{\tau\tau}\nu_i\,dS_xd\tau+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Gamma} buu_{x_i\tau}\nu_i\,dS_xd\tau \\
+\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u^2_{x_i\tau}(x,t)\,dx+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega} b^{ij}u_{x_ix_j}\Delta u_\tau\,dxd\tau+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega} b^{ij}_{x_i}u_{x_j}\Delta u_\tau\,dxd\tau \\
-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega} b_{x_i}uu_{x_i\tau}\,dxd\tau-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} b(x,t)u^2_{x_i}(x,t)\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega} b_\tau u^2_{x_i}\,dxd\tau \\
-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Gamma} b^{ij}u_{x_j}u_{\tau\tau}\nu_i\,dS_xd\tau-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega} b^{ij}u_{x_j\tau}u_{x_i\tau}\,dxd\tau \\
+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b^{ij}(x)u_{x_j}(x,t)u_{x_it}(x,t)\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega}\left[b_\tau uu_\tau+bu^2_\tau\right]dxd\tau \\
\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b(x,t)u(x,t)u_t(x,t)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_1^2(x)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b^{ij}(x)u_{0x_i}(x)u_{0x_j}(x)\,dx \\
-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b(x,0)u_0^2(x)\,dx+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{3}{4}u^2_{1x_i}(x)-\frac{1}{2}b(x,0)u^2_{0x_i}(x)\right]dx \\
-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b(x,0)u_0(x)u_1(x)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b^{ij}(x)u_{0x_j}(x)u_{1x_i}(x)\,dx \\
+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega} f\cdot(u_\tau-\Delta u_\tau)\,dxd\tau. \qquad (26)
\end{gathered}
$$

Получение априорных оценок вполне аналогично получению априорных оценок при доказательстве теоремы 1, достаточно лишь показать оценки следующих граничных интегралов:

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Gamma} u_{x_i\tau}u_\tau\nu_i\,dS_xd\tau,\quad \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Gamma} b^{ij}u_{x_j}u_\tau\nu_i\,dS_xd\tau,\quad \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Gamma} u_{x_i\tau}u_{\tau\tau}\nu_i\,dS_xd\tau, \\
\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Gamma} buu_{x_i\tau}\nu_i\,dS_xd\tau,\quad \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Gamma} b^{ij}u_{x_j}u_{\tau\tau}\nu_i\,dS_xd\tau. \qquad (27)
\end{gathered}
$$

Докажем оценки для третьего и пятого интегралов в (27). Преобразуем третий интеграл:

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Gamma} u_{x_i\tau}u_{\tau\tau}\nu_i\,dS_xd\tau=-\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial u_{\tau\tau}}{\partial\nu}u_\tau\,dS_xd\tau \\
+\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial u_t}{\partial\nu}u_t\,dS_x-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial\nu}u_1\,dS_x. \qquad (28)
\end{gathered}
$$

Используя краевые условия (4) в первом интеграле правой части (28), имеем

$$\int_0^t\int_\Gamma \frac{\partial u_{\tau\tau}}{\partial\nu}u_\tau\,dS_x d\tau = \int_0^t\int_\Gamma\Big[\int_\Omega (K(x,y,\tau)u_{\tau\tau}(y,\tau) + 2K_\tau(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau) + K_{\tau\tau}(x,y,\tau)u(y,\tau))\,dy\Big]u_\tau\,dS_x d\tau, \quad (29)$$

откуда, используя неравенства Юнга, получим

$$\left|\int_0^t\int_\Gamma \frac{\partial u_{\tau\tau}}{\partial\nu}u_\tau\,dS_x d\tau\right| \le \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Gamma u_\tau^2\,dS_x d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Gamma\Big[\int_\Omega K(x,y,\tau)u_{\tau\tau}(y,\tau)\,dy + 2\int_\Omega K_\tau(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)\,dy + \int_\Omega K_{\tau\tau}(x,y,\tau)u(y,\tau)\,dy\Big]^2 dS_x d\tau. \quad (30)$$

Первое слагаемое в (30) оценим с помощью интегрального неравенства

$$\int_\Gamma u_\tau^2(x,\tau)\,dS_x \le \delta_2\sum_{i=1}^n\int_\Omega u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dx + C(\delta_2)\int_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dx. \quad (31)$$

Имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Gamma u_\tau^2\,dS_x d\tau \le \frac{\delta_2}{2}\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega u_{x_i\tau}^2\,dxd\tau + \frac{C(\delta_2)}{2}\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2\,dxd\tau. \quad (32)$$

Для оценки второго слагаемого в (30) воспользуемся неравенствами Юнга, Гёльдера, а также неравенством $(a+2b+c)^2 \le 3(a^2+4b^2+c^2)$:

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Gamma\Big[\int_\Omega K(x,y,\tau)u_{\tau\tau}(y,\tau)\,dy + 2\int_\Omega K_\tau(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)\,dy + \int_\Omega K_{\tau\tau}(x,y,\tau)u(y,\tau)\,dy\Big]^2 dS_x d\tau$$
$$\le \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Gamma\Big[\Big(\int_\Omega u_{\tau\tau}^2(y,\tau)\,dy\Big)^{\frac12}\Big(\int_\Omega K^2(x,y,\tau)\,dy\Big)^{\frac12} + 2\Big(\int_\Omega u_\tau^2(y,\tau)\,dy\Big)^{\frac12}\Big(\int_\Omega K_\tau^2(x,y,\tau)\,dy\Big)^{\frac12} + \Big(\int_\Omega u^2(y,\tau)\,dy\Big)^{\frac12}\Big(\int_\Omega K_{\tau\tau}^2(x,y,\tau)\,dy\Big)^{\frac12}\Big]^2 dS_x d\tau$$
$$\le \frac{3}{2}\int_0^t\int_\Gamma\Big[\int_\Omega u_{\tau\tau}^2(y,\tau)\,dy\cdot\int_\Omega K^2(x,y,\tau)\,dy + 4\int_0^t\int_\Gamma\int_\Omega u_\tau^2(y,\tau)\,dy\cdot\int_\Omega K_\tau^2(x,y,\tau)\,dy$$

$$+\int\limits_{\Omega} u^2(y,\tau)\,dy\cdot\int\limits_{\Omega} K_{\tau\tau}^2(x,y,\tau)\,dy\Big]\,dS_x d\tau$$

$$\leq 4Q_1\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_{\tau\tau}^2(y,\tau)\,dyd\tau + C_1\left[\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_\tau^2(y,\tau)\,dyd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u^2\,dyd\tau\right], \quad (33)$$

где $C_1$ — наибольшее значение $K_t^2(x,y,t)$, $K_{tt}^2(x,y,t)$ по области $\Gamma\times\Omega\times(0,T)$.

Второе слагаемое в правой части равенства (28) оценивается аналогично:

$$\left|\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial u_t}{\partial\nu}u_t\,dS_x\right| \leq \delta_2\sum_{i=1}^n\int\limits_{\Omega} u_{x_i t}^2\,dx + C(\delta_2)\int\limits_{\Omega} u_t^2\,dx$$

$$+C_1\Big[\int\limits_{\Omega} u_t^2(y,\tau)\,dy + \int\limits_{\Omega} u^2\,dy\Big]. \quad (34)$$

Рассмотрим пятый интеграл в (27). Имеем

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Gamma} b^{ij}u_{x_j}u_{\tau\tau}\nu_i\,dS_x d\tau = -\int\limits_0^t\int\limits_{\Gamma} b^{ij}u_{x_j\tau}u_\tau\nu_i\,dS_x d\tau$$

$$+\int\limits_{\Gamma} b^{ij}u_{x_j}u_t\nu_i\,dS_x - \int\limits_{\Gamma} b^{ij}u_{0j}u_1\nu_i\,dS_x. \quad (35)$$

Для первого интеграла в правой части равенства (35) аналогично оценке интеграла (28) получим

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_{\Gamma} b^{ij}u_{x_j\tau}u_\tau\nu_i\,dS_x d\tau\right| \leq \beta\int\limits_0^t\int\limits_{\Gamma}\left|\frac{\partial u_\tau}{\partial\nu}u_\tau\right|dS_x d\tau$$

$$=\beta\int\limits_0^t\int\limits_{\Gamma}\left|\int\limits_{\Omega}(K(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)+K_\tau(x,y,\tau)u(y,\tau))\,dy\right|\cdot|u_\tau|\,dS_x d\tau$$

$$\leq\frac{\beta}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Gamma} u_\tau^2\,dS_x d\tau + \frac{\beta}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Gamma}\Big[\int\limits_{\Omega} K(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)\,dy$$

$$+\int\limits_{\Omega} K_\tau(x,y,\tau)u(y,\tau)\,dy\Big]^2 dS_x d\tau \leq \frac{\delta_2\beta}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_{x_i\tau}^2\,dxd\tau$$

$$+\frac{C(\delta_2)\beta}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_\tau^2\,dxd\tau + C_2\left[\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_\tau^2(y,\tau)\,dyd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u^2\,dyd\tau\right], \quad (36)$$

где $C_2$ — наибольшее значение $K^2(x,y,t)$, $K_t^2(x,y,t)$ по области $\Gamma\times\Omega\times(0,T)$.

Как и выше, при выполнении условий (24)

$$1-\frac{\delta_2}{2}-\frac{\delta_2\beta}{2}>0$$

основная априорная оценка будет определяться положительной постоянной $K_3$ в правой части, определяемой лишь функциями $b(x,t)$, числами $T$, $\alpha$, $\beta$, $b_0$, а также областью $\Omega$. Имеем

$$\|u\|_V \leq K_3\|f\|_{L_2(Q)}. \quad (37)$$

Единственность решений краевой задачи II в пространстве $V$ очевидна из априорной оценки (37). Теорема полностью доказана.

Замечание. В теоремах 1 и 2 от условий $-b(x,t) \geq b_0 > 0$ можно отказаться, но тогда, как и выше, при получении априорных оценок возникнут условия малости на функцию $b(x,t)$ и их производные.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Докл. АН. 2009. Т. 427, № 6. С. 747–749.
2. *Кожанов А. И.* О разрешимости краевых задач с нелокальным условием Бицадзе — Самарского для линейных гиперболических уравнений // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 6. С. 738–740.
3. *Lazetic N.* On classical solutions of mixed boundary problems for one-dimensional parabolic equation of second order // Publ. l'Inst. Math., Nouv. Ser. 2000. V. 67. P. 53–75.
4. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
5. *Попов Н. С.* О разрешимости краевых задач для многомерных псевдопараболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, № 1. С. 82–95.
6. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
7. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
8. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально–операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
9. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.


*Статья поступила 18 июня 2014 г.*

Попов Николай Сергеевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
popovnserg@mail.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.956.4*

# ГЁЛЬДЕРОВСКИЕ КЛАССЫ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ С ПЕРЕМЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ

**С. В. Попов**

**Аннотация.** Устанавливается разрешимость краевых задач для параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением времени с условиями склеивания, содержащими переменные коэффициенты по $t \in [0, T]$. Устанавливается разрешимость краевых задач в пространствах Гёльдера. Показано, что гёльдеровские классы их решений зависят как от знаков коэффициентов условий склеивания (включая концы интервала $[0, T]$), так и от нецелого показателя пространства Гёльдера.

**Ключевые слова:** разрешимость, краевая задача, параболическое уравнение с меняющимся направлением времени, условия склеивания, система сингулярных уравнений, пространство Гёльдера.

## Введение

В работе рассматриваются краевые задачи для параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением времени в пространствах Гёльдера, содержащими переменные коэффициенты в условиях склеивания. Случай постоянных коэффициентов в условиях склеивания рассматривался в [1], а случай переменных коэффициентов в условиях склеивания, но для уравнений второго порядка — в [2].

Цель настоящей работы — показать, что гёльдеровские классы решений параболических уравнений переменного направления времени с общими условиями склеивания также существенно зависят от нецелого показателя Гёльдера и индекса соответствующей задачи Римана. Изучение поставленной краевой задачи связано с применением теории сингулярных интегральных уравнений [3–7].

## 1. Постановка задачи

В области $Q^+ = \mathbb{R}^+ \times (0, T)$ рассмотрим систему уравнений

$$u_t^1 = Lu^1, \quad -u_t^2 = Lu^2 \quad \left(L \equiv -\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right). \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014–2016 гг. (проект № 3047).

В пространстве Гёльдера [8, 9] $H^{p,p/4}_{x\ t}$, $p = 4l+\gamma$, $0<\gamma<1$, ищется решение системы уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u^1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x,T) = \varphi_2(x), \quad x>0, \tag{2}$$

и условиям склеивания

$$\frac{\partial^k u^1}{\partial x^k}(0,t) = \sigma_k(t)\frac{\partial^k u^2}{\partial x^k}(0,t) \quad (k=0,1,2,3), \tag{3}$$

где $l \geq 1$ — целое число, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\sigma_k(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$.

## 2. Исследование разрешимости краевой задачи

Будем предполагать, что $\varphi_i(x) \in H^p(\mathbb{R})$ $(i=1,2)$. Тогда функции

$$\omega_1(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} U_0(x,t;\xi,0)\varphi_1(\xi)\,d\xi, \quad \omega_2(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} U_0(\xi,T;x,t)\varphi_2(\xi)\,d\xi$$

являются решениями уравнения (1), удовлетворяющими условиям (2) в $\mathbb{R}$. Будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (1):

$$\begin{aligned} u^1(x,t) &= \int\limits_0^t U_0(x,t;0,\tau)\alpha_0(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t U_1(x,t;0,\tau)\alpha_1(\tau)\,d\tau + \omega_1(x,t), \\ u^2(x,t) &= \int\limits_t^T U_0(0,\tau;x,t)\beta_0(\tau)\,d\tau + \int\limits_t^T U_2(0,\tau;x,t)\beta_1(\tau)\,d\tau + \omega_2(x,t), \end{aligned} \tag{4}$$

где $U_i$ $(i=0,1,2)$ — фундаментальное и элементарные решения Б. Пини [10, 11].

В силу общих результатов [8, 9] плотности $\alpha_k$, $\beta_k$ $(k=0,1)$ должны принадлежать пространству $H^q(0,T)$ $(q = \frac{p-3}{4})$, причем

$$\alpha_k^{(s)}(0) = \beta_k^{(s)}(T) = 0 \quad (s=0,\ldots,l-1). \tag{5}$$

Из условий склеивания (3) получим систему интегральных уравнений с операторами Абеля относительно $\alpha_k(t)$, $\beta_k(t)$:

$$\begin{cases} \frac14\Gamma\left(\frac14\right)\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)+\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac14}}\,d\tau + \omega_1(0,t) = \frac{\sigma_0(t)}{4}\Gamma\left(\frac14\right)\int\limits_t^T \frac{\beta_0(\tau)+\beta_1(\tau)}{(\tau-t)^{\frac14}}\,d\tau + \sigma_0(t)\omega_2(0,t), \\ -\frac12\Gamma\left(\frac12\right)\int\limits_0^t \frac{\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac12}}\,d\tau - \frac{\sigma_1(t)}{2}\Gamma\left(\frac12\right)\int\limits_t^T \frac{\beta_1(\tau)}{(\tau-t)^{\frac12}}\,d\tau + \omega_{1x}(0,t) + \sigma_1(t)\omega_{2x}(0,t) = 0, \\ -\frac14\Gamma\left(\frac34\right)\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)-\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac34}}\,d\tau + \omega_{1xx}(0,t) \\ \qquad = -\frac{\sigma_2(t)}{4}\Gamma\left(\frac34\right)\int\limits_t^T \frac{\beta_0(\tau)-\beta_1(\tau)}{(\tau-t)^{\frac34}}\,d\tau + \sigma_2(t)\omega_{2xx}(0,t), \\ \frac{\pi}{2}(\alpha_0(t) + \sigma_3(t)\beta_0(t)) + \omega_{1xxx} + \sigma_3(t)\omega_{2xxx} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Для удобства записи будем считать, что $T = 1$ и $\sigma_0$, $\sigma_1$, $\sigma_2$ — заданные постоянные. Тогда из уравнений (6) при помощи формул обращения оператора Абеля [5] получим эквивалентную систему сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}(\alpha_0(t)+\alpha_1(t))+\sigma_0(\beta_0(t)+\beta_1(t)) \\ \qquad -\frac{\sigma_0}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{3/4}\frac{\beta_0(\tau)+\beta_1(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Phi_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/4}}\,d\tau, \\ \alpha_1(t)+\frac{\sigma_1}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/2}\frac{\beta_1(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Phi_1(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau, \\ \sqrt{2}(\alpha_0(t)-\alpha_1(t))-\sigma_2(\beta_0(t)-\beta_1(t)) \\ \qquad -\frac{\sigma_2}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/4}\frac{\alpha_0(\tau)-\alpha_1(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = -\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Phi_2(\tau)}{(t-\tau)^{1/4}}\,d\tau, \\ \alpha_0(t)+\sigma_3(t)\beta_0(t) = \frac{1}{2}\Phi_3(t), \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\Phi_j(t) = \frac{4}{\pi\Gamma\left(\frac{1+j}{4}\right)}\left((-1)^j\sigma_j\frac{\partial^j\omega_2}{\partial x^j}(0,t)-\frac{\partial^j\omega_1}{\partial x^j}(0,t)\right) \quad (j=0,1,2,3).$$

Введем обозначения

$$F_0^i(t) = \int\limits_0^t \frac{\Phi_0^{(i+1)}(\tau)-\Phi_0^{(i+1)}(0)}{(t-\tau)^{\frac{3}{4}}}\,d\tau, \quad F_j^i(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Phi_j^{(i)}(\tau)-\Phi_j^{(i)}(0)}{(t-\tau)^{1-\frac{1+j}{4}}}\,d\tau,$$

$$F_3^i(t) = \Phi_3^{(i)}(t)-\Phi_3^{(i)}(0), \quad G_1^i(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_t^1 \frac{\Phi_1^{(i)}(1)-\Phi_1^{(i)}(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau$$

$$(i=0,\dots,l-1,\ j=1,2).$$

Так как [5] $\Phi_k^{l-1} \in H^{q_k}(0,1)$, $q_k = 1+\frac{\gamma-k}{4}$, функции $F_k^{l-1}(t)$ $(k=0,1,2,3)$ принадлежат пространству $H^{(1+\gamma)/4}(0,1)$, причем $F_k^{l-1}(t) = O(t^{(1+\gamma)/4})$ для малых $t$.

Докажем существование решений $\alpha_i$, $\beta_i$ системы уравнений (7) из пространства $H^q$ $(q=(p-3)/4,\ p=4l+\gamma,\ 0<\gamma<1)$, удовлетворяющих условиям (5).

Предположим, что функции $\alpha_i$, $\beta_i$ принадлежат искомому пространству. Тогда из второго и четвертого уравнений системы (7) следует, что для того чтобы $\alpha_i(0)=0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$-\frac{\sigma_1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\beta_1(\tau)}{\tau^{\frac{1}{2}}}\,d\tau = \frac{1}{2}\Phi_1(0), \quad \sigma_3(0)\beta_0(0) = \frac{1}{2}\Phi_3(0). \tag{8}$$

Из первого и третьего уравнений системы (7) следует выполнение условий

$$\frac{\sigma_0}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\beta_0(\tau)+\beta_1(\tau)}{\tau^{\frac{1}{4}}}\,d\tau = -\Phi_0(0), \quad \frac{\sigma_2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\beta_0(\tau)-\beta_1(\tau)}{\tau^{\frac{3}{4}}}\,d\tau = -\Phi_2(0). \tag{9}$$

При выполнении условий (8), (9) систему уравнений (7) можно переписать так:

$$\begin{cases} \sqrt{2}(\alpha_0(t)+\alpha_1(t))+\sigma_0(\beta_0(t)+\beta_1(t)) \\ \qquad -\frac{\sigma_0}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4}\frac{\beta_0(\tau)+\beta_1(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = 4\Phi_0'(0)t^{1/4}+F_0^0(t), \\ \alpha_1(t)+\frac{\sigma_1}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2}\frac{\beta_1(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = F_1^0(t), \\ \sqrt{2}(\alpha_0(t)-\alpha_1(t))-\sigma_2(\beta_0(t)-\beta_1(t)) \\ \qquad -\frac{\sigma_2}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4}\frac{\beta_0(\tau)-\beta_1(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = F_2^0(t), \\ \alpha_0(t)+\sigma_3(t)\beta_0(t)-\sigma_3(0)\beta_0(0)=F_3^0(t). \end{cases} \tag{10}$$

Положим

$$\beta_1(0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{F_1^0(\tau)}{(1-\tau)^{1/2}\tau}\,d\tau-\frac{1}{\sigma_1}G_1^0(0).$$

Это условие эквивалентно условию $\beta_1(1)=0$.

Введем в системе (10) новые искомые функции $\bar{\beta}_i(t)=\beta_i(t)-\beta_i(0)(1-t)$ $(i=0,1)$. Тогда (10) представим в виде

$$\begin{cases} \sqrt{2}(\alpha_0(t)+\alpha_1(t))+\sigma_0(\bar\beta_0(t)+\bar\beta_1(t))-\frac{\sigma_0}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4}\frac{\bar\beta_0(\tau)+\bar\beta_1(\tau)}{\tau-t}\,d\tau \\ \qquad = 4\Phi_0'(0)t^{1/4}+F_0^0(t)-\frac{16\sigma_0}{3\pi}(\beta_0(0)+\beta_1(0))F\big(-\frac{3}{4},1,\frac{5}{4};t\big)t^{1/4}, \\ \alpha_1(t)+\frac{\sigma_1}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2}\frac{\bar\beta_1(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = F_1^0(t)+\frac{4\sigma_1}{\pi}\beta_1(0)F\big(-\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};t\big)t^{1/2}, \\ \sqrt{2}(\alpha_0(t)-\alpha_1(t))-\sigma_2(\bar\beta_0(t)-\bar\beta_1(t))-\frac{\sigma_2}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4}\frac{\bar\beta_0(\tau)-\bar\beta_1(\tau)}{\tau-t}\,d\tau \\ \qquad = F_2^0(t)-\frac{16\sigma_2}{3\pi}(\beta_0(0)-\beta_1(0))F\big(-\frac{1}{4},1,\frac{7}{4};t\big)t^{3/4}, \\ \alpha_0(t)+\sigma_3(t)\bar\beta_0(t)=\sigma_3(t)\beta_0(0)t-\beta_0(0)[\sigma_3(t)-\sigma_3(0)]+F_3^0(t). \end{cases} \tag{11}$$

Если $l>1$, то продифференцируем полученную систему уравнений (11). Имея в виду формулу [12]

$$\frac{d}{dt}[F(a,b,c;t)t^{c-1}]=(c-1)t^{c-2}F(a,b,c-1;t), \tag{12}$$

получим

$$\begin{cases} \sqrt{2}(\alpha_0'(t)+\alpha_1'(t))+\sigma_0(\bar\beta_0'(t)+\bar\beta_1'(t)) \\ \qquad -\frac{t^{-3/4}\sigma_0}{4\pi}\int\limits_0^1 \frac{\bar\beta_0(\tau)+\bar\beta_1(\tau)}{\tau^{1/4}(\tau-t)}\,d\tau-\frac{t^{1/4}\sigma_0}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 \frac{\bar\beta_0(\tau)+\bar\beta_1(\tau)}{\tau^{1/4}(\tau-t)}\,d\tau \\ =\Phi_0'(0)t^{-3/4}+4\Phi_0''(0)t^{1/4}+F_0^1(t)-\frac{4\sigma_0}{3\pi}(\beta_0(0)+\beta_1(0)) \\ \qquad \times F\big(-\frac{3}{4},1,\frac{1}{4};t\big)t^{-3/4}, \\ \alpha_1'(t)+\frac{t^{-1/2}\sigma_1}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{\bar\beta_1(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)}\,d\tau+\frac{t^{1/2}\sigma_1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 \frac{\bar\beta_1(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)}\,d\tau \\ \qquad =\frac{1}{2}\Phi_1'(0)t^{-1/2}+F_1^1(t)+\frac{2\sigma_1}{\pi}\beta_1(0)F\big(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2};t\big)t^{-1/2}, \\ \sqrt{2}(\alpha_0'(t)-\alpha_1'(t))-\sigma_2(\bar\beta_0'(t)-\bar\beta_1'(t)) \\ \qquad -\frac{t^{-1/4}\sigma_2}{4\pi}\int\limits_0^1 \frac{\bar\beta_0(\tau)-\bar\beta_1(\tau)}{\tau^{3/4}(\tau-t)}\,d\tau=-\frac{t^{3/4}\sigma_2}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 \frac{\bar\beta_0(\tau)+\bar\beta_1(\tau)}{\tau^{3/4}(\tau-t)}\,d\tau \\ \qquad\quad =-\Phi_2'(0)t^{-1/4}+F_2^1(t)-\frac{4\sigma_2}{\pi}(\beta_0(0)-\beta_1(0)) \\ \qquad\quad \times F\big(-\frac{1}{4},1,\frac{3}{4};t\big)t^{-1/4}, \\ \alpha_0'(t)+\sigma_3(t)\bar\beta_0'(t)=\sigma_3'(t)[-\bar\beta_0(t)+\beta_0(0)t-\beta_0(0)]+\sigma_3(t)\beta_0(0) \\ \qquad +\frac{1}{2}\Phi_3'(0)+F_3^1(t). \end{cases} \tag{13}$$

Из второго и четвертого уравнений системы (13) следует, что для того чтобы $\alpha_i'(0)=0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \sigma_1\int\limits_0^1 \frac{\bar\beta_1(\tau)}{\tau^{3/2}}\,d\tau=4\beta_1(0)+\pi\Phi_1'(0), \\ \sigma_3(0)\beta_0'(0)+\sigma_3'(0)\beta_0(0)=(\sigma_3(t)\beta_0(t))'|_{t=0}=\frac{1}{2}\Phi_3'(0). \end{cases} \tag{14}$$

Из остальных уравнений системы (13) следует выполнение условий

$$\begin{cases} \sigma_0\int\limits_0^1 \frac{\bar\beta_0(\tau)+\bar\beta_1(\tau)}{\tau^{5/4}}\,d\tau=\frac{16\sigma_0}{3}(\beta_0(0)+\beta_1(0))-4\pi\Phi_0'(0), \\ \sigma_2\int\limits_0^1 \frac{\bar\beta_0(\tau)-\bar\beta_1(\tau)}{\tau^{7/4}}\,d\tau=\frac{16\sigma_2}{3}(\beta_0(0)-\beta_1(0))+\frac{4}{3}\pi\Phi_2'(0). \end{cases} \tag{15}$$

Систему уравнений (13) при выполнении условий (14), (15) и $\beta_i(1)=0$ $(i=0,1,2)$ можно переписать в виде

$$\begin{cases} \sqrt{2}(\alpha_0'(t)+\alpha_1'(t))+\sigma_0(\beta_0'(t)+\beta_1'(t))-\frac{\sigma_0}{\pi}\int\limits_0^1 \big(\frac{t}{\tau}\big)^{1/4}\frac{\beta_0'(\tau)+\beta_1'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau \\ \qquad =4\Phi_0''(0)t^{1/4}+F_0^1(t), \\ \alpha_1'(t)+\frac{\sigma_1}{\pi}\int\limits_0^1 \big(\frac{t}{\tau}\big)^{1/2}\frac{\beta_1'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=F_1^1(t), \\ \sqrt{2}(\alpha_0'(t)-\alpha_1'(t))-\sigma_2(\beta_0'(t)-\beta_1'(t)) \\ \qquad -\frac{\sigma_2}{\pi}\int\limits_0^1 \big(\frac{t}{\tau}\big)^{3/4}\frac{\beta_0(\tau)-\beta_1(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=F_2^1(t), \\ \alpha_0'(t)+(\sigma_3(t)\beta_0(t))'-(\sigma_3(t)\beta_0(t))'|_{t=0}=F_3^1(t). \end{cases} \tag{16}$$

Уравнения (16) имеют точно такой же вид, как уравнения (10). Легко убедиться, что при выполнении условий

$$\begin{cases} \sigma_1 \int\limits_0^1 \frac{\beta_0^{(s)}(\tau)-\beta_1^{(s)}(0)}{\tau^{3/2}}\,d\tau = 2\sigma_1\beta_1^{(s)}(0) + \pi\Phi_1^{(s+1)}(0), \\ (\sigma_3(t)\beta_0(t))^{(s+1)}|_{t=0} = \frac{1}{2}\Phi_3^{(s+1)}(0), \quad \beta_i^{(s)}(1) = 0, \\ \sigma_0 \int\limits_0^1 \frac{\beta_0^{(s)}(\tau)+\beta_1^{(s)}(\tau)-\beta_0^{(s)}(0)-\beta_1^{(s)}(0)}{\tau^{5/4}}\,d\tau \\ \qquad = 4\sigma_0(\beta_0^{(s)}(0)+\beta_1^{(s)}(0)) - 4\pi\Phi_0^{(s+1)}(0), \\ \sigma_2 \int\limits_0^1 \frac{\beta_0^{(s)}(\tau)-\beta_1^{(s)}(\tau)-\beta_0^{(s)}(0)+\beta_1^{(s)}(0)}{\tau^{7/4}}\,d\tau \\ \qquad = \frac{4}{3}\sigma_2(\beta_0^{(s)}(0)-\beta_1^{(s)}(0)) + \frac{4}{3}\pi\Phi_2^{(s+1)}(0), \\ s = 1,\dots,l-2, \end{cases} \tag{17}$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}(\alpha_0^{(l-1)}(t)+\alpha_1^{(l-1)}(t)) + \sigma_0(\beta_0^{(l-1)}(t)+\beta_1^{(l-1)}(t)) \\ \qquad -\frac{\sigma_0}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4} \frac{\beta_0^{(l-1)}(\tau)+\beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = 4\Phi_0^{(l)}(0)t^{1/4} + F_0^{l-1}(t), \\ \alpha_1^{(l-1)}(t) + \frac{\sigma_1}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = F_1^{l-1}(t), \\ \sqrt{2}(\alpha_0^{(l-1)}(t)-\alpha_1^{(l-1)}(t)) - \sigma_2(\beta_0^{(l-1)}(t)-\beta_1^{(l-1)}(t)) \\ \qquad -\frac{\sigma_2}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\beta_0^{(l-1)}(\tau)-\beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = F_2^{l-1}(t), \\ \alpha_0^{(l-1)}(t) + (\sigma_3(t)\beta_0(t))^{(l-1)} - (\sigma_3(t)\beta_0(t))^{(l-1)}|_{t=0} = F_3^{l-1}(t), \end{cases} \tag{18}$$

где

$$\beta_1^{(s)}(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{F_1^s(\tau)}{(1-\tau)^{1/2}\tau}\,d\tau - \frac{1}{\sigma_1}G_1^s(0), \quad s = 1,\dots,l-1. \tag{19}$$

Заметим, что, как и выше, условия (19) эквивалентны тому, что $\beta_1^{(s)}(1) = 0$ при $s = 1,\dots,l-1$.

В системе (18) введем новую искомую функцию $\tilde\beta_i^{(l-1)}(t) = \beta_i^{(l-1)}(t) - \beta_i^{(l-1)}(0)(1-t)$. Получим уравнения вида (11). Так как $\alpha_i^{(l-1)}, \beta_i^{(l-1)} \in H^{(1+\gamma)/4}$, из первого уравнения полученной системы уравнений следует, что необходимо выполнение условия

$$\sigma_0 \int\limits_0^1 \frac{\tilde\beta_0^{(l-1)}(\tau)+\tilde\beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau^{5/4}}\,d\tau = \frac{16\sigma_0}{3}\big(\beta_0^{(l-1)}(0)+\beta_1^{(l-1)}(0)\big) - 4\pi\Phi_0^{(l)}(0). \tag{20}$$

Тогда при выполнении (20) придем к системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}(\alpha_0^{(l-1)}(t)+\alpha_1^{(l-1)}(t))+\sigma_0(\tilde\beta_0^{(l-1)}(t)+\tilde\beta_1^{(l-1)}(t)) \\ \qquad -\frac{\sigma_0}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{5/4}\frac{\tilde\beta_0^{(l-1)}(\tau)+\tilde\beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\overline{F}_0^{l-1}(t), \\ \alpha_1^{(l-1)}(t)+\frac{\sigma_1}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2}\frac{\tilde\beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\overline{F}_1^{l-1}(t), \\ \sqrt{2}\big(\alpha_0^{(l-1)}(t)-\alpha_1^{(l-1)}(t)\big)-\sigma_2\big(\tilde\beta_0^{(l-1)}(t)-\tilde\beta_1^{(l-1)}(t)\big) \\ \qquad -\frac{\sigma_2}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4}\frac{\tilde\beta_0^{(l-1)}(\tau)-\tilde\beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\overline{F}_2^{l-1}(t), \\ \alpha_0^{(l-1)}(t)+\sigma_3(t)\tilde\beta_0^{(l-1)}(t)=\overline{F}_3^{l-1}(t), \end{cases} \tag{21}$$

где функции

$$\overline{F}_0^{l-1}(t)=F_0^{l-1}(t)-\frac{16\sigma_0}{3\pi}\big(\beta_0^{(l-1)}(0)+\beta_1^{(l-1)}(0)\big)[F(-3/4,1,5/4;t)-1]t^{1/4},$$

$$\overline{F}_1^{l-1}(t)=F_1^{l-1}(t)+\frac{4\sigma_1}{\pi}\beta_1^{(l-1)}(0)F(-1/2,1,3/2;t)t^{1/2},$$

$$\overline{F}_2^{l-1}(t)=F_2^{l-1}(t)-\frac{16\sigma_2}{3\pi}\big(\beta_0^{(l-1)}(0)-\beta_1^{(l-1)}(0)\big)F(-1/4,1,7/4;t)t^{3/4},$$

$$\overline{F}_3^{l-1}(t)=F_3^{l-1}(t)-P(t)+P(0)+\sigma_3(t)\beta_0^{(l-1)}(0)\frac{t}{T}+ \\ +\beta_0^{(l-1)}(0)(\sigma_3(0)-\sigma_3(t))+F_3^{l-1}(t),$$

$$P(t)=\sum_{k=1}^{l-1}C_{l-1}^k\sigma_3^{(k)}(t)\beta_0^{(l-1-k)}(t)$$

принадлежат пространству $H^{(1+\gamma)/4}$, причем $\overline{F}_j^{l-1}(t)=O(t^{\frac{1+\gamma}{4}})$ $(j=0,1,2,3)$ для малых $t$.

Перейдем к доказательству существования функций $\alpha_i^{(l-1)}(t)$, $\beta_i^{(l-1)}(t)$ из пространства $H^{q-(l-1)}(0,1)$ в полученной системе уравнений (21).

Исключая $\alpha_i^{(l-1)}(t)$ в (21), получим систему сингулярных уравнений

$$K\vec\beta\equiv A\vec\beta(t)-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{B(t,\tau)\vec\beta(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\vec Q(t), \tag{22}$$

где

$$\vec\beta(t)=\big(\tilde\beta_0^{(l-1)}(t),\tilde\beta_1^{(l-1)}(t)\big),\quad A=\begin{pmatrix}\sigma_0-\sigma_2-2\sqrt{2}\sigma_3(t) & \sigma_0+\sigma_2\\ \sigma_0+\sigma_2 & \sigma_0-\sigma_2\end{pmatrix},$$

$$B(t,\tau)=\begin{pmatrix}\sigma_0\left(\frac{t}{\tau}\right)^{5/4}+\sigma_2\left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} & \sigma_0\left(\frac{t}{\tau}\right)^{5/4}-\sigma_2\left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4}\\ \sigma_0\left(\frac{t}{\tau}\right)^{5/4}-\sigma_2\left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} & \sigma_0\left(\frac{t}{\tau}\right)^{5/4}+\sigma_2\left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4}+2\sqrt{2}\sigma_1\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2}\end{pmatrix},$$

$$\vec Q(t)=\big(\overline{F}_0^{l-1}+\overline{F}_2^{l-1}-2\sqrt{2}\overline{F}_3^{l-1},\overline{F}_0^{l-1}-\overline{F}_2^{l-1}-2\sqrt{2}\overline{F}_1^{l-1}\big).$$

Систему сингулярных уравнений (22) можно переписать так:

$$K\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{B}{\pi}\int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^1 M(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)\,d\tau = \vec{Q}(t), \tag{23}$$

где

$$B \equiv B(t,t) = \begin{pmatrix} \sigma_0 + \sigma_2 & \sigma_0 - \sigma_2 \\ \sigma_0 - \sigma_2 & \sigma_0 + \sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1 \end{pmatrix}, \quad M(t,\tau) = \frac{B - B(t,\tau)}{\tau - t}.$$

Для того чтобы выделить характеристическую часть оператора $K$, перепишем систему сингулярных уравнений (23) в виде

$$CK\vec{\beta} = C\vec{Q}(t), \tag{24}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_0 + \sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1 & \sigma_2 - \sigma_0 \\ \sigma_2 - \sigma_0 & \sigma_0 + \sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$CA = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sigma_0\sigma_1 - \sigma_0\sigma_3(t) - \sigma_2\sigma_3(t) - \sigma_1\sigma_2 - 2\sqrt{2}\sigma_1\sigma_3(t) & \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 \\ \sigma_0\sigma_3(t) - \sigma_2\sigma_3(t) + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$CB = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$c \equiv \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 \neq 0.$$

Пользуясь формулой перестановки Пуанкаре — Бертрана [3, 4, 7], выделим характеристическую часть $K^0$ оператора $CK$ системы уравнений (24):

$$K^0\vec{\beta} \equiv a(t)\vec{\beta}(t) - \frac{b(t)}{\pi}\int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \tag{25}$$

где

$$a(t) = \sigma_0\sigma_1 + \sigma_0\sigma_3(t) + \sigma_1\sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3(t),$$
$$b(t) = \sigma_0\sigma_3(t) + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_0\sigma_1.$$

Полученную систему сингулярных уравнений

$$K^0\vec{\beta} = \vec{G}, \quad \vec{G} = (g_1(t), g_2(t)), \tag{26}$$

будем решать в классе функций, ограниченных на концах отрезка $(0,1)$. Для этого введем кусочно-голоморфную функцию

$$\vec{\Psi}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - z}\,d\tau.$$

Отметим, что

$$g_1(t) = \frac{1}{c}[c_{21}\bar{q}_1 - c_{11}\bar{q}_2] - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{c_{21}(\tau) - c_{21}(t)}{\tau - t}\beta_0(\tau)\,d\tau$$
$$+ \frac{c}{\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{\beta_1(\tau_1)}{(\tau_1 - \tau)(\tau - t)}\,d\tau d\tau_1 + \frac{c_{21}}{\pi}\int_0^1 \frac{\bar{q}_2(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

$$g_2(t) = \bar{q}_2(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{\beta_0(\tau_1)}{(\tau_1-\tau)(\tau-t)}\,d\tau d\tau_1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\bar{q}_1(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,$$

где

$$(\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t)) = \vec{Q} - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 M(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)\,d\tau,$$

$c_{ij}$ — коэффициенты матрицы $CA$.

Тогда система (26) примет вид

$$\begin{cases} \vec{\Psi}^+(t) = \frac{a(t)+b(t)i}{a(t)-b(t)i}\vec{\Psi}^-(t) + \frac{\vec{G}(t)}{a(t)-b(t)i}, & 0<t<1, \\ \vec{\Psi}^+(t) = \vec{\Psi}^-(t), & t<0,\ t>1. \end{cases} \tag{27}$$

Решения уравнений (26) эквивалентны решению задачи Римана (27) при дополнительном условии $\vec{\Psi}(\infty) = 0$.

Отметим, что

$$G(t) = \frac{a(t)+ib(t)}{a(t)-ib(t)}$$

и

$$\ln G(t) = \begin{cases} 2i\arg(|a(t)| + i|b(t)|) = 2\pi i\theta, & a(t)b(t)>0, \\ 2i\arg(|a(t)| - i|b(t)|) = -2\pi i\theta, & a(t)b(t)<0, \end{cases}$$

где

$$\theta(t) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left|\frac{a(t)}{b(t)}\right| = \frac{1}{2} - \bar{\theta}(t).$$

Введем обозначение $\delta(t) = a(t)b(t)$.

Всего могут представиться 4 различных случая: 1) $\delta(0)$, $\delta(1)$ обе положительны; 2) $\delta(0)$, $\delta(1)$ обе отрицательны; 3) $\delta(0)$ положительна, $\delta(1)$ отрицательна; 4) $\delta(0)$ отрицательна, $\delta(1)$ положительна.

В случаях 1 и 2 считаем, что функция $\delta(t)$ не меняет знака при $t \in (0,1)$, а в случаях 3 и 4 $\delta(t)$ меняет знак лишь в одной точке $t_0 \in (0,1)$.

Введем обозначения $\theta_1 = \theta(0)$, $\theta_2 = \theta(1)$. Тогда в указанном выше классе каноническая функция в случае 1 равна

$$\chi(z) = z\exp\left(\int\limits_0^1 \frac{\theta(\tau)}{\tau-z}\,d\tau\right) = z^{1-\theta_1}(z-1)^{\theta_2}\omega_2(z), \quad \varkappa = -1,$$

в случае 2 —

$$\chi(z) = (z-1)\exp\left(-\int\limits_0^1 \frac{\theta(\tau)}{\tau-z}\,d\tau\right) = z^{\theta_1}(z-1)^{1-\theta_2}\omega_1(z), \quad \varkappa = -1,$$

в случае 3 —

$$\chi(z) = z(z-1)\exp\left(\int\limits_0^{t_0} \frac{\theta(\tau)}{\tau-z}\,d\tau - \int\limits_{t_0}^1 \frac{\theta(\tau)}{\tau-z}\,d\tau\right)$$
$$= z^{1-\theta_1}(z-1)^{1-\theta_2}(z-t_0)\omega_4(z), \quad \varkappa = -2,$$

в случае 4 —

$$\chi(z) = (z - t_0) \exp\left( -\int\limits_0^{t_0} \frac{\theta(\tau)}{\tau - z}\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{1} \frac{\theta(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \right) = z^{\theta_1} \cdot (z-1)^{\theta_2} \omega_3(z), \quad \varkappa = -1.$$

Согласно общей теории [3, 4] решение (26) имеет вид

$$\vec{\Psi}(z) = \chi(z)\vec{\Phi}(z), \tag{28}$$

где

$$\vec{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^1 \frac{\vec{G}(\tau)\, d\tau}{(a - ib)\chi^+(\tau)(\tau - z)}.$$

При этом в случаях 1, 2 и 4 ($\varkappa = -1$) решение существует при выполнении дополнительного условия

$$\int\limits_0^1 \frac{\vec{G}(\tau)}{\chi(\tau)}\, d\tau = 0, \tag{29}$$

а в случае 3 ($\varkappa = -2$) — при выполнении дополнительных условий

$$\int\limits_0^1 \frac{\vec{G}(\tau)}{\chi(\tau)} \tau^k\, d\tau = 0 \quad (k = 1, 2). \tag{30}$$

Тогда решение сингулярного интегрального уравнения (26) имеет вид

$$\begin{gathered} \vec{\beta}(t) = \vec{\Psi}^+(t) - \vec{\Psi}^-(t) = \frac{a(t)\vec{G}(t)}{a^2(t) + b^2(t)} - \frac{b(t)Z(t)}{\pi(a^2(t) + b^2(t))} \int\limits_0^1 \frac{\vec{G}(\tau)\, d\tau}{Z(\tau)(\tau - t)}, \\ Z(t) = (a(t) - ib(t))\chi^+(t) = (a(t) + ib(t))\chi^-(t). \end{gathered} \tag{31}$$

Подставляя в (31) значения $\vec{G}(t)$, приходим к системе уравнений Фредгольма

$$\vec{\beta} + K^* k\vec{\beta} = \vec{Q}^*, \tag{32}$$

где

$$K^* k\vec{\beta} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 N(t, \tau)\vec{\beta}(\tau)\, d\tau.$$

Любые ограниченные и интегрируемые решения систем уравнений Фредгольма (32), очевидно, принадлежат пространству Гёльдера во всех точках контура $(0, 1)$, отличных от концов. В самом деле, функции $\vec{Q}^*(t)$ будут, очевидно, удовлетворять условию Гёльдера во всех точках контура $(0, 1)$, отличных от концов. Функция $N(t, \tau)$ имеет интегрируемые особенности при $t = \tau$ во всех точках контура $(0, 1)$, отличных от концов. В силу соответствующих теорем поведения интегралов типа Коши на концах контура интегрирования [3–5], легко вывести, что $N(t, \tau)$, $\vec{Q}^*(t)$ на концах 0, 1 будут вести себя как $t^{\tilde{\theta}_1}(1 - t)^{\tilde{\theta}_2}$, где

$$\tilde{\theta}_1 = \min\{\theta_1, 1 - \theta_1\}, \quad \tilde{\theta}_2 = \min\{\theta_2, 1 - \theta_2\}.$$

В силу леммы о принадлежности классу Гёльдера интеграла типа Коши на концах контура интегрирования (см. [4, 5]) при выполнении неравенства

$$\frac{1+\gamma}{4} < \min\{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2\} = \min\left\{\frac{1}{2} - \bar{\theta}_1, \frac{1}{2} - \bar{\theta}_2\right\}, \quad \bar{\theta}_k < \frac{1}{4},$$

получим, что решения уравнений Фредгольма (32) принадлежат пространству $H^{\frac{1+\gamma}{4}}(0,1)$ и обращаются в нуль на концах $0, 1$ порядка $\frac{1+\gamma}{4}$. Кроме того, во втором и первом случаях решения уравнений Фредгольма (32) удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2} - \bar{\theta}_k$ при $1 - 4\bar{\theta}_k < \gamma < 1$ и условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2} - \bar{\theta}_k - \varepsilon$ при $\gamma = 1 - 4\bar{\theta}_k$ $(k = 1, 2)$ соответственно.

В случае 4 решения (32) удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2} - \min\{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2\}$ при $1 - 4\min\{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2\} < \gamma < 1$ и условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2} - \min\{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2\} - \varepsilon$ при $\gamma = 1 - 4\min\{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2\}$.

Таким образом, при выполнении условий (8), (9), (14), (15), (17), (20) система уравнений (32) эквивалентна исходной системе уравнений (6). При этом отметим выполнение условий

$$(\sigma_3(t)\beta_0(t))^{(s)}|_{t=0} = \frac{1}{2}\Phi_3^{(s)}(0), \quad \beta_1^{(s)}(1) = 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, l-1), \quad \vec{\beta}^{(l-1)}(1) = 0.$$

Разрешимость системы уравнений Фредгольма (32) следует из единственности решения основной задачи (1)–(3) ($\sigma_k$ выбраны так, чтобы задача имела единственное решение) и однозначности представления решения через потенциалы. Значения функций $\vec{\beta}^{(s)}(t)$ определяются по формуле Тейлора

$$\vec{\beta}^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\vec{\beta}^{(k)}(0)}{(k-s)!} t^{k-s} + \frac{1}{(l-2-s)!} \int_0^t (t-\tau)^{l-2-s} \vec{\beta}^{(l-1)}(\tau)\, d\tau \quad (s = 0, \ldots, l-2). \tag{33}$$

Тогда для выполнения условий $\beta_0^{(s)}(1) = 0$ при $s = 0, \ldots, l-2$ необходимо и достаточно, чтобы

$$0 = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\beta_0^{(k)}(0)}{(k-s)!} + \frac{1}{(l-2-s)!} \int_0^1 (1-\tau)^{l-2-s} \beta_0^{(l-1)}(\tau)\, d\tau \quad (s = 0, \ldots, l-2). \tag{34}$$

Подставляя значения функций $\vec{\beta}^{(s)}(t)$ в условия (8), (9), (14), (15), (17), (20), (29), (30), получим условия разрешимости задачи (1)–(3) в пространстве $H_{x\ t}^{p,p/4}(Q^+)$. Эти условия обозначим так:

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \quad (s = 1, \ldots, 4l). \tag{35}$$

Итак, доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 4l + \gamma)$, $\sigma_3(t) \in C^{\,l-1}([0, T])$ *и* $\delta(t)$ *имеет постоянный знак при* $t \in [0, T]$ *или* $\delta(0) < 0$, $\delta(T) > 0$ *и* $\delta(t)$ *меняет знак в одной точке. Тогда при выполнении* $4l$ *условий* (35) *существует единственное удовлетворяющее условиям* (2), (3) *решение уравнения* (1) *из пространства*

1) $H_{x\ t}^{p,p/4}$, *если* $0 < \gamma < 1 - 4\bar{\theta}_k$;

2) $H_{x\ t}^{q,q/4}$, $q = 4l + 1 - 4\bar{\theta}_k$, *если* $1 - 4\bar{\theta}_k < \gamma < 1$;

3) $H_{x\ \ t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/4}$, *если* $\gamma = 1 - 4\bar{\theta}_k$, *где* $\varepsilon$ *— сколь угодно малая положительная постоянная.*

*Здесь*

$$\bar\theta_1 = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left|\frac{a(0)}{b(0)}\right| < \frac{1}{4}, \quad \bar\theta_2 = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left|\frac{a(T)}{b(T)}\right| < \frac{1}{4},$$

$$a(t) = \sigma_0\sigma_1 + \sigma_0\sigma_3(t) + \sigma_1\sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3(t),$$

$$b(t) = \sigma_0\sigma_3(t) + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_0\sigma_1, \quad \delta(t) = a(t)b(t).$$

**Теорема 2.** *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 4l + \gamma)$, $\sigma_3(t) \in C^{\,l-1}([0,T])$ и $\delta(0) > 0$, $\delta(T) < 0$ и $\delta(t)$ меняет знак в одной точке. Тогда при выполнении $4l+2$ условий вида* (35) *существует единственное удовлетворяющее условиям* (2), (3) *решение уравнения* (1) *из пространства $H_{x\ t}^{p,p/4}(Q^+)$.*

Замечание 1. Если выполнены условия теоремы при $\bar\theta_k \geq \frac{1}{4}$, то, как показано в [13, 2], единственное решение задачи (1)–(3) существует в пространстве $H_{x\ t}^{p,p/4}$ при выполнении $6l + 2$ условий вида (35).

Замечание 2. Полученные решения краевых задач (1)–(3) в теоремах 1 и 2 зависят от индекса $\varkappa$ краевой задачи Римана (27) при условии, что функция $\sigma_3(t)$ меняет знак в произвольном количестве точек при $t \in [0, T]$.

Пример 1. Для системы уравнений (1) с начальными условиями (2) рассмотрим условия склеивания (3) при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = -1$. В этом случае система сингулярных уравнений (26) имеет вид

$$-2(\sqrt{2}-1)\vec\beta(t) + \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\pi}\int_0^1 \frac{\vec\beta(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \vec G, \tag{36}$$

$\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}$, и единственное решение исходной задачи существует при выполнении $6l + 2$ условий вида (35).

Пример 2. Для системы уравнений (1) с начальными условиями (2) рассмотрим условия склеивания (3) при $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}$, $\sigma_3 = 2$. В этом случае система сингулярных уравнений (26) имеет вид

$$2(4\sqrt{2}+1)\vec\beta(t) - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)}{\pi}\int_0^1 \frac{\vec\beta(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \vec G, \tag{37}$$

$\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+4}{16\sqrt{2}+4} \approx 0,064 < 0,25$, мы находимся в условиях доказанной теоремы и единственное решение исходной задачи существует при выполнении $4l$ условий (35).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Попов С. В.* О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.
2. *Попов С. В., Ткаченко Л. Ю.* Исследование контактных параболических краевых задач в гёльдеровских пространствах // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 1. С. 27–35.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
5. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
6. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.

**7.** *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1968.
**8.** *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
**9.** *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных уравнений общего вида // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
**10.** *Pini B.* Sul problema fondamentale di valori al contorno per una classe di equazioni paraboliche lineari // Ann. Mat. Pura Appl. 1957. V. 43. P. 261–297.
**11.** *Pini B.* Su una equazione paraboliche non lineare del quarto ordine // Rend. Sem. Fac. Sci., Univ. Cagliari. 1957. V. 27, N 3–4. P. 136–168.
**12.** *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высш. школа, 1985.
**13.** *Попов С. В.* Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени высокого порядка / Ред. Сиб. мат. журн. Новосибирск, 1988. 56 с. Деп. в ВИНИТИ 07.12.88, № 8646–Б88.

*Статья поступила 23 июня 2014 г.*

Попов Сергей Вячеславович
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
madu@ysu.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.9*

# ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ И ТОНКИМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

**Т. С. Попова**

**Аннотация.** Рассматривается задача о равновесии двумерного вязкоупругого тела, имеющего трещину и тонкое жесткое включение. Дифференциальная постановка задачи содержит краевые условия типа неравенств, а также интегральное условие, описывающее равновесие жесткого включения. Приводится эквивалентная вариационная постановка, с помощью которой доказана однозначная разрешимость исходной задачи. Получены дополнительные свойства гладкости решений, а именно существование производной по временной переменной.

**Ключевые слова:** вязкоупругость, трещина, тонкое включение, материалы с памятью, вариационное неравенство, краевые условия типа неравенств, условия непроникания.

Пусть вязкоупругое двумерное тело занимает в естественном недеформированном состоянии область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\Gamma$ и вектор $u = (u_1, u_2)$ задает перемещения точек этого тела.

Введем соотношения для компонент тензоров малых деформаций и напряжений по формулам:

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad u = u(x,t),\ x \in \Omega,\ t \in (0,T),$$

$$\sigma_{ij}(t,x) = a_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u(t,x)) + \int\limits_0^t b_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u(\tau,x))\,d\tau, \quad i,j = 1,2. \tag{1}$$

Здесь и далее предполагается, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Коэффициенты $a_{ijkl}(x), b_{ijkl}(x) \in L^\infty(\Omega)$, $i,j,k,l = 1,2$, — компоненты тензоров $A$ и $B$, обладающих свойствами симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij},$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0|\xi|^2, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Аналогичные соотношения выполнены для компонент тензора $B$.

Введенные уравнения соответствуют закону, характеризующему вязкоупругое состояние тела:

$$\dot\sigma = A\dot\varepsilon + B\varepsilon,$$

где $\dot v$ обозначает дифференцирование по временной переменной.

Отметим, что в отличие от упругого случая в рассматриваемой задаче величины компонент тензоров напряжений не могут быть вычислены локально по $t$, а зависят от полной истории нагружения.

Квазистационарные краевые задачи, в уравнениях которых использованы соотношения, аналогичные (1), исследованы в работах [1–4].

Рассматриваемое вязкоупругое тело имеет трещину, форма которой задается кривой $\gamma \subset \Omega$. Кривая $\gamma$ гладкая, незамкнутая, без самопересечений. Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ единичный вектор нормали к $\gamma$. Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \gamma$ и $Q_\gamma = \Omega_\gamma \times (0, T)$.

Пусть кривую $\gamma$ можно продолжить до пересечения с $\Gamma$ так, что область $\Omega_\gamma$ разбита на две подобласти $\Omega^+$ и $\Omega^-$ с липшицевыми границами и при этом $\mathrm{mes}(\Gamma \cap \partial\Omega^\pm) \neq 0$. Трещина имеет два берега $\gamma^+$ и $\gamma^-$, определяемых в соответствии с направлением нормали $\nu$ так, что $\nu^-$ — нормаль к $\gamma^-$ — совпадает с $\nu$, тогда $\nu^+ = -\nu$. Будем считать, что области $\Omega^\pm$ обозначены так, что $\gamma^+ \subset \partial\Omega^+$ и $\gamma^- \subset \partial\Omega^-$.

Понятие «жесткое включение» в рамках данной модели описывается следующим образом. Введем так называемое пространство жестких инфинитезимальных перемещений $R(\gamma)$ вида [5]:

$$R(\gamma) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Dx + G,\ x \in \gamma\},$$

где

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}, \quad G = (g^1, g^2), \quad d, g^1, g^2 = \mathrm{const}.$$

Введем пространство

$$R_\gamma = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(t, x) = D(t)x + G(t) \text{ на } \gamma \times (0, T)\},$$

где

$$D(t) = \begin{pmatrix} 0 & d(t) \\ -d(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad G(t) = (g^1(t), g^2(t)), \quad d, g^1, g^2 \in L^2(0, T).$$

Функция $u(x, t)$ — одно из неизвестных в задаче и в текущий момент времени может принимать различные значения на берегах трещины. Используя обозначения $u^+$ и $u^-$ для значений функции $u$ на $\gamma^+$ и $\gamma^-$ соответственно, введем следующее обозначение для скачка функции на $\gamma$ [1]:

$$[u] = u^+ - u^-.$$

Будем говорить, что *вязкоупругое тело содержит тонкое жесткое включение на одной из сторон трещины*, если функции $u$ на $\gamma^- \times (0, T)$ совпадают с некоторым элементом пространства $R_\gamma$:

$$u = \rho^0 \quad \text{на } \gamma^- \times (0, T), \quad \rho^0 \in R_\gamma.$$

При этом на перемещения точек обоих берегов накладываются условия непроникания вида

$$[u]\nu \geq 0 \quad \text{на } \gamma \times (0, T).$$

Данное условие исключает проникание точек противоположных берегов трещины друг в друга. Задачи с условиями непроникания носят нелинейный характер, общие подходы к исследованию этих проблем можно найти в [2, 5]. Для случаев упругих тел с отслоившимся тонким жестким включением рассмотрены задачи равновесия, исследованы качественные свойства решений, а также задачи оптимального управления формой трещины [5–11].

Дифференциальную постановку задачи будем рассматривать в следующем виде.

*В цилиндре* $Q_\gamma$ *найти функцию* $u$, $u = \rho^0$ *на* $\gamma^- \times (0,T)$, $\rho^0 \in R_\gamma$, *и функции* $\sigma_{ij}$, $i,j = 1,2$, *для которых выполняются условия*:

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}(t,x)}{\partial x_j} = f_i(t,x), \;\; i = 1,2, \quad \text{в } Q_\gamma, \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}(t,x) = a_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u(t,x)) + \int\limits_0^t b_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u(\tau,x))\,d\tau, \quad i,j = 1,2, \tag{3}$$

$$u(t,x) = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0,T), \tag{4}$$

$$[u(t,x)]\nu(x) \geq 0, \quad u^-(t,x) = \rho_0(t,x), \; \sigma_\nu^+(t,x) \leq 0, \; \sigma_s^+(t,x) = 0 \text{ на } \gamma \times (0,T), \tag{5}$$

$$\sigma_\nu^+(t,x)[u(t,x)]\nu(x) = 0 \quad \text{на } \gamma \times (0,T), \tag{6}$$

$$\int\limits_\gamma [\sigma_{ij}(t,x)\nu_j(x)]\bar{\rho}_i(x)\,dS = 0, \quad \bar{\rho} \in R(\gamma) \;\; \text{для п. в. } t \in (0,T). \tag{7}$$

Здесь $\sigma_{ij}(t,x)\nu_j(x) = \sigma_\nu(t,x)\nu_i(x) + \sigma_{s\,i}(t,x)$, $\sigma_\nu(t,x) = \sigma_{ij}(t,x)\nu_j(x)\nu_i(x)$. Уравнения (2) — уравнения равновесия при заданных внешних нагрузках $f = (f_1, f_2)$, соотношения (3) — уравнения, описывающие вязкоупругое состояние. Краевое условие (4) задает закрепление тела на границе. Условие (7) — уравнение равновесия тонкого жесткого включения в каждый момент времени.

Рассмотрим функциональное пространство

$$H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma, \; v = \rho \text{ на } \gamma^-, \; \rho \in R(\gamma)\},$$

$$H_\gamma = \big\{v = (v_1,v_2) \in L^2\big(0,T; H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)\big) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma \times (0,T), \\ v = \rho \text{ на } \gamma^- \times (0,T), \; \rho \in R_\gamma\big\}.$$

Обозначим через $V^*$ пространство, сопряженное к $H_\gamma$. Введем также линейный оператор $\Lambda : H_\gamma \to V^*$, имеющий вид

$$(\Lambda u, \bar{u}) = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\gamma} a_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u(t,x))\varepsilon_{ij}(\bar{u}(t,x))\,dxdt \\ + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\gamma} \int\limits_0^t b_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u(\tau,x))\varepsilon_{ij}(\bar{u}(t,x))\,d\tau dxdt, \quad \bar{u} \in H_\gamma.$$

Рассмотрим выпуклое замкнутое множество в $H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)$

$$K_\gamma = \big\{v \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) \mid [v]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma\big\}$$

и введем множество допустимых перемещений в следующем виде:

$$\mathbf{K}_\gamma = \{v \in H_\gamma \mid v(t) \in K_\gamma \;\; \text{для п. в. } t \in (0,T)\}.$$

**Теорема.** *Пусть* $f(t,x) \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$. *Тогда задача* (2)–(7) *имеет единственное решение* $u(t,x) \in H_\gamma$, $\sigma_{ij}(t,x) \in L^2(Q_\gamma)$ *такое, что* $u_t(t,x)$ *принадлежит* $L^2\big(0,T;H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)\big)$.

Для доказательства теоремы сначала докажем лемму о существовании единственного решения вариационного неравенства для оператора $\Lambda$. Далее покажем, что указанное вариационное неравенство является эквивалентной формулировкой задачи (2)–(7). Тем самым будет доказана однозначная разрешимость поставленной краевой задачи. Отметим, что в работах [2, 5, 12–17] можно найти описание вариационных методов и их применение в теории упругости и вязкоупругости.

**Лемма 1.** *Существует единственное решение* $u(t,x)$ *вариационного неравенства*

$$(\Lambda u, v-u) \geq \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\gamma} f(v-u)\, d\Omega_\gamma dt, \quad u \in \mathbf{K}_\gamma,\ v \in \mathbf{K}_\gamma. \tag{8}$$

Доказательство. Здесь и далее для краткости не будем указывать зависимость функций от пространственной переменной $x$, т. е. введем следующие обозначения для рассматриваемого оператора:

$$(\Lambda u, \bar{u}) = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t))\varepsilon(\bar{u}(t))\, dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\gamma} \int\limits_0^t B\varepsilon(u(\tau))\varepsilon(\bar{u}(t))\, d\tau dxdt, \quad \bar{u} \in H_\gamma.$$

Прежде всего заметим, что в силу неравенства Корна [18] справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \varepsilon(v)\varepsilon(v)\, dx \geq c_1 \|v\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)}, \quad v \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma), \tag{9}$$

с постоянной $c_1$, не зависящей от $v$. Отсюда

$$(\Lambda u, u) = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t))\varepsilon(u(t))\, dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\gamma} \int\limits_0^t B\varepsilon(u(\tau))\varepsilon(u(t))\, d\tau dxdt$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t))\varepsilon(u(t))\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} B\varepsilon\left(\int\limits_0^T u(t)\, dt\right)\varepsilon\left(\int\limits_0^T u(t)\, dt\right) dx \geq c_2 \|u\|^2_{H_\gamma}. \tag{10}$$

Следовательно,

$$\frac{(\Lambda u, u)}{\|u\|_{H_\gamma}} \to +\infty, \quad \|u\|_{H_\gamma} \to +\infty,$$

т. е. $\Lambda$ — коэрцитивный оператор. Учитывая его монотонность и непрерывность, можно сделать вывод, что $\Lambda$ псевдомонотонен. Отсюда следует [17, гл. 2, п. 8.2, теорема 8.2], что решение задачи (8) существует. В силу строгой монотонности оператора решение единственно. Лемма доказана.

Далее выведем дополнительное свойство решений задачи (8), а именно, существование производной $u_t(t,x)$ в $Q_\gamma$.

**Лемма 2.** *Пусть* $f \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$. *Тогда существует производная* $u_t \in L^2\big(0,T;H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)\big)$ *решения задачи* (8).

Доказательство. Запишем уравнение (8) в виде

$$\int_0^T\int_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t))\varepsilon(v(t)-u(t))\,dxdt + \int_0^T\int_{\Omega_\gamma}\int_0^t B\varepsilon(u(\tau))\varepsilon(v(t)-u(t))\,d\tau dxdt$$
$$\geq \int_0^T\int_{\Omega_\gamma} f(t)(v(t)-u(t))\,dxdt, \quad v\in \mathbf{K}_\gamma. \quad (11)$$

Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим функцию

$$v(\theta) = \begin{cases} \bar v, & \theta \in (t-\alpha, t+\alpha),\\ u(t), & \theta \notin (t-\alpha,t+\alpha),\end{cases}$$

где $\bar v \in K_\gamma$ — некоторый фиксированный элемент. Подставим $v(\theta)$ в (11), разделим полученное равенство на $2\alpha$ и получим

$$\frac{1}{2\alpha}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\int_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t))\varepsilon(\bar v-u(t))\,dxdt + \frac{1}{2\alpha}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\int_{\Omega_\gamma}\int_0^t B\varepsilon(u(\tau))\varepsilon(\bar v-u(t))\,d\tau dxdt$$
$$\geq \frac{1}{2\alpha}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\int_{\Omega_\gamma} f(t)(\bar v-u(t))\,dxdt.$$

Отсюда при $\alpha \to 0$ имеем

$$\int_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t))\varepsilon(\bar v-u(t))\,dx + \int_{\Omega_\gamma}\int_0^t B\varepsilon(u(\tau))\varepsilon(\bar v-u(t))\,d\tau dx$$
$$\geq \int_{\Omega_\gamma} f(t)(\bar v-u(t))\,dx \quad \text{для п. в. } t\in(0,T). \quad (12)$$

Пусть $\bar v = u(t+h)$. Тогда

$$\int_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t))\varepsilon(u(t+h)-u(t))\,dx + \int_{\Omega_\gamma}\int_0^t B\varepsilon(u(\tau))\varepsilon(u(t+h)-u(t))\,d\tau dx$$
$$\geq \int_{\Omega_\gamma} f(t)(u(t+h)-u(t))\,dx. \quad (13)$$

Теперь запишем (12) в точке $t+h$, а в качестве $\bar v$ возьмем $u(t)$. В результате получим

$$\int_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t+h))\varepsilon(u(t)-u(t+h))\,dx + \int_{\Omega_\gamma}\int_0^{t+h} B\varepsilon(u(\tau))\varepsilon(u(t)-u(t+h))\,d\tau dx$$
$$\geq \int_{\Omega_\gamma} f(t+h)(u(t)-u(t+h))\,dx. \quad (14)$$

Введем обозначения:

$$d_h v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h}, \quad d_h^\tau v(t) = \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} v(\tau)\, d\tau, \quad h > 0.$$

Сложив (13) и (14), в новых обозначениях можем записать

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(d_h u(t))\varepsilon(d_h u(t))\, dx + \int\limits_{\Omega_\gamma} B\varepsilon\big(d_h^\tau u(t)\big)\varepsilon(d_h u(t))\, dx \le \int\limits_{\Omega_\gamma} d_h f(t) d_h u(t)\, dx,$$

откуда

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(d_h u(t))\varepsilon(d_h u(t))\, dx \le \int\limits_{\Omega_\gamma} d_h f(t) d_h u(t)\, dx - \int\limits_{\Omega_\gamma} B\varepsilon\big(d_h^\tau u(t)\big)\varepsilon(d_h u(t))\, dx. \quad (15)$$

Отметим, что

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(d_h u(t))\varepsilon(d_h u(t))\, dx \ge c_3 \|d_h u(t)\|^2_{H^1_\gamma(\Omega_\gamma)}. \quad (16)$$

Значит, из (15) следует, что

$$c_3 \|d_h u(t)\|^2_{H^1_\gamma(\Omega_\gamma)} \le \frac{1}{\lambda} \|d_h f(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \|d_h u(t)\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)} + \frac{1}{\lambda} \big\|d_h^\tau u(t)\big\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)} + \lambda \|d_h u(t)\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)}.$$

При достаточно малых $\lambda > 0$ существует постоянная $c_4 > 0$ такая, что

$$\|d_h u(t)\|^2_{H^1_\gamma(\Omega_\gamma)} \le c_4 \big(\|d_h f(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \big\|d_h^\tau u(t)\big\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)}\big).$$

Проинтегрируем последнее неравенство по $t$ от 0 до $T - h$:

$$\int\limits_0^{T-h} \|d_h u(t)\|^2_{H^1_\gamma(\Omega_\gamma)}\, dt \le c_4 \left( \int\limits_0^{T-h} \|d_h f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \int\limits_0^{T-h} \big\|d_h^\tau u(t)\big\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)}\, dt \right). \quad (17)$$

Заметим, что для любых гладких функций $v(t, x)$ выполняется

$$\int\limits_0^{T-h} \big\|d_h^\tau v(t)\big\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)}\, dt \le \int\limits_0^{T} \|v(t)\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)}\, dt. \quad (18)$$

Действительно,

$$\int\limits_0^{T-h} \big\|d_h^\tau v(t)\big\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)}\, dt = \int\limits_0^{T-h} \left\| \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} v(\tau)\, d\tau \right\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)} dt$$

$$= \int\limits_0^{T-h} \frac{1}{h^2} \int\limits_{\Omega_\gamma} \left( \int\limits_t^{t+h} v(\tau)\, d\tau \right)^2 dxdt = \int\limits_0^{T-h} \frac{1}{h^2} \int\limits_{\Omega_\gamma} \left( \int\limits_t^{t+h} v(\tau) \cdot 1 d\tau \right)^2 dxdt$$

$$\leq \frac{1}{h^2}\int\limits_0^{T-h}\int\limits_{\Omega_\gamma}\left(\int\limits_t^{t+h} v^2(\tau)\,d\tau\right)\left(\int\limits_t^{t+h} 1^2\,d\tau\right)dxdt$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_0^{T-h}\int\limits_{\Omega_\gamma}\int\limits_t^{t+h} v^2(\tau)\,d\tau dxdt = \frac{1}{h}\int\limits_0^{T-h}\left(\int\limits_0^{t+h}\|v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)}\,d\tau - \int\limits_0^{t}\|v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)}\,d\tau\right)dt$$

$$= \int\limits_0^{T-h} d_h\left(\int\limits_0^{t}\|v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)}\,d\tau\right)dt. \quad (19)$$

Докажем, что

$$\int\limits_0^{T-h} d_h\left(\int\limits_0^t g(\tau)\,d\tau\right)dt \leq \int\limits_0^T g(t)\,dt$$

для любых гладких функций $g(t) \geq 0$, тем самым получим справедливость (18). Для доказательства выведем следующее неравенство:

$$\int\limits_0^{T-h}\frac{1}{h}\left(\int\limits_t^{t+h} g(\tau)\,d\tau\right)dt = \int\limits_0^{T-h}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{h} g(\xi+t)\,d\xi\right)dt$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_0^{T-h}\left(\int\limits_0^{h} g(\xi+t)\,d\xi\right)dt = \frac{1}{h}\left(\int\limits_0^{T-h} g(\theta+t)\,dt\right)\cdot h = \int\limits_0^{T-h} g(\theta+t)\,dt$$

$$\leq \max_{\xi\in[0,h]}\int\limits_0^{T-h} g(\xi+t)\,dt = \max_{\xi\in[0,h]}\int\limits_\xi^{\xi+T-h} g(\tau)\,d\tau \leq \int\limits_0^T g(t)\,dt.$$

Используя полученное неравенство в (19), делаем вывод, что имеет место (18). Тогда из (17) с учетом (18) получим

$$\int\limits_0^{T-h}\|d_h u(t)\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)}\,dt \leq c_4\left(\int\limits_0^{T-h}\|d_h f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int\limits_0^{T}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)}\,dt\right). \quad (20)$$

Далее преобразуем первое слагаемое в правой части (20):

$$\int\limits_0^{T-h}\|d_h f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt = \int\limits_0^{T-h}\left\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt$$

$$= \int\limits_0^{T-h}\left\|\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} f_\tau(\tau)\,d\tau\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt = \int\limits_0^{T-h}\left\|d_h^\tau f_t(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt. \quad (21)$$

Поскольку $f_t(t) \in L^2(Q)$, то (18) можно записать для $v = f_t$:

$$\int\limits_0^{T-h}\left\|d_h^\tau f_t(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt \leq \int\limits_0^{T}\|f_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

Тогда из (21) получим оценку

$$\int_0^{T-h} \|d_h f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \le \int_0^T \|f_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

Следовательно, в силу (20) имеем

$$\int_0^{T-h} \|d_h u(t)\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)}\,dt \le c_4\left(\int_0^T \|f_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)}\,dt\right).$$

Возьмем некоторое достаточно малое $h_0$, но такое, что $h_0 \ge h$. Тогда

$$\int_0^{T-h_0} \|d_h u(t)\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)}\,dt \le c_4\left(\int_0^T \|f_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)}\,dt\right).$$

Перейдем к пределу при $h \to 0$:

$$\int_0^{T-h_0} \|u_t(t)\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)}\,dt \le c_4\left(\int_0^T \|f_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T \|u(t)\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)}\,dt\right).$$

Из произвольности $h_0 \ge 0$ следует оценка

$$\|u_t(t)\|^2_{L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega_\gamma))} \le c_4\big(\|f_t(t)\|^2_{L^2(Q)} + \|u(t)\|^2_{L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega_\gamma))}\big). \tag{22}$$

Таким образом, производная $u_t(t,x)$ существует, более того, взяв в (11) $v = 0$, получим

$$(Au(t), u(t)) \le \int_0^T \int_{\Omega_\gamma} f(t)u(t)\,dxdt.$$

С учетом (9) имеем

$$\|u(t)\|^2_{H_\gamma} \le \frac{1}{\lambda}\|f(t)\|^2_{L^2(Q)} + \lambda\|u(t)\|^2_{L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega_\gamma))},$$

или при малых $\lambda > 0$

$$\|u(t)\|^2_{H_\gamma} \le c_5\|f(t)\|^2_{L^2(Q)}.$$

Тогда из (22) вытекает оценка

$$\|u_t(t)\|^2_{H_\gamma} \le c_6\big(\|f_t(t)\|^2_{L^2(Q)} + \|f(t)\|^2_{L^2(Q)}\big),$$

откуда следует утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Для завершения доказательства теоремы покажем, что при условии достаточной гладкости решений задача (2)–(7) эквивалентна задаче (8).

Пусть задача (8) имеет гладкое решение. Сначала выведем из вариационного неравенства (8) уравнения и краевые условия (2)–(7). Из доказательства леммы 2 (см. (12)) следует, что можно рассматривать задачу (8) при фиксированном $t \in (0, T)$:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} A\varepsilon(u(t))\varepsilon(\bar{v} - u(t))\, dx + \int\limits_{\Omega_\gamma} \int\limits_0^t B\varepsilon(u(\tau))\varepsilon(\bar{v} - u(t))\, d\tau\, dx$$
$$\geq \int\limits_{\Omega_\gamma} f(t)(\bar{v} - u(t))\, dx, \quad \bar{v} \in K_\gamma,\ t \in (0, T). \tag{23}$$

Последнее неравенство можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(\bar{v} - u(t))\, dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i(t)(\bar{v}_i - u_i(t))\, dx. \tag{24}$$

Здесь, как и ранее, $\sigma_{ij}(t)$ находится по формулам (1), т. е. содержит интегрирование от 0 до $t$.

Подставим $\bar{v} = u(t) + v$, $v \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$, в (24) и проинтегрируем по частям. Тогда получим, что при данном $t \in (0, T)$ в $\Omega_\gamma$ выполнены уравнения (2) в смысле распределений.

Выведем два последних условия из (5). Пусть $x_0$ — произвольная точка на кривой $\gamma$. Обозначим через $D(x_0)$ некоторую окрестность этой точки и $D^+(x_0) = \Omega^+ \cap D(x_0)$.

Возьмем гладкую функцию $\psi$ такую, что $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{D}^+$, $\psi_\nu \geq 0$ на $\gamma^+$. Тогда, подставляя в (24) пробный элемент вида $\bar{v} = u + \psi$ и интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_{\gamma^+} \sigma_{ij}(t)\nu_j\psi_i\, dS \leq 0.$$

Используем для вектор-функций $\{\sigma_{ij}(t)\nu_j\}$ и $\psi$ представления вида

$$\sigma_{ij}(t)\nu_j = \sigma_\nu(t)\nu + \sigma_s(t), \quad \psi = \psi_\nu\nu + \psi_s.$$

Отсюда в силу произвольности $\psi$ заключаем, что $\sigma_s(t) = 0$ на $\gamma^+$. Тогда можем записать

$$\int\limits_{\gamma^+} \sigma_\nu(t) \cdot \psi_\nu\, dS \leq 0,$$

откуда при условиях на функцию $\psi$ следует, что $\sigma_\nu(t) \leq 0$ на $\gamma^+$.

Выведем условие (7). Для этого возьмем функцию $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$, $\tilde{u} = 0$ на $\Gamma$, $\tilde{u} = \rho$ на $\gamma^\pm$, $\rho \in R(\gamma)$, и подставим в качестве пробного элемента в (24) функцию $\bar{v} = u \pm \tilde{u}$. Получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(\tilde{u})\, dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i(t)\tilde{u}_i\, dx,$$

откуда с учетом выведенных соотношений и условий на функцию $\tilde{u}$ можно записать

$$\int\limits_{\gamma^+} [\sigma_{ij}(t)\nu_j]\rho_i\, dS = 0,$$

где $\tilde{u} = \rho$ на $\gamma$, $\rho \in R(\gamma)$. Ввиду произвольности функции $\tilde{u}$ последнее соотношение совпадает с (7).

Докажем справедливость условия (6). Сначала предположим, что в некоторой точке $x_0 \in \gamma$ выполнено строгое неравенство $[u(t)]\nu > 0$, которое означает отсутствие контакта между берегами трещины в момент времени $t$. Тогда это неравенство выполнено и в некоторой окрестности $D$ точки $x_0$. Обозначим $D^+ = D \cap \Omega^+$.

Выберем $\bar{v} = u(t) \pm \lambda\psi$, где $\psi$ — произвольная гладкая функция такая, что $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{D}^+$, $\lambda > 0$. Тогда при достаточно малых $\lambda$ элемент $\bar{v}$ принадлежит множеству $K_\gamma$. Подставим его в (24) и получим

$$\int\limits_{D^+} \sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(\psi)\,dx = \int\limits_{D^+} f(t)\psi\,dx.$$

Применяя интегрирование по частям и полученные ранее соотношения, можем вывести

$$\int\limits_{\gamma\cap\partial D^+} \sigma_\nu(t)\psi_\nu\,dS = 0.$$

Отсюда следует, что $\sigma_\nu^+(t) = 0$ в окрестности точки $x_0$.

Пусть $\sigma_\nu^+(t, x_0) < 0$. В этом случае, подставляя в (24) пробные элементы вида $\bar{v} = 0$ и $\bar{v} = 2u(t)$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(u(t))\,dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i(t)u_i(t)\,dx.$$

После интегрирования по частям получим

$$\int\limits_{\gamma^-} \sigma_{ij}(t)\nu_j\rho_i^0(t)\,dS - \int\limits_{\gamma^+} \sigma_{ij}(t)\nu_j u_i(t)\,dS = 0,$$

$$\int\limits_{\gamma^-} \sigma_{ij}(t)\nu_j\rho_i^0(t)\,dS - \int\limits_{\gamma^+} \sigma_{ij}(t)\nu_j u_i(t)\,dS - \int\limits_{\gamma^+} \sigma_{ij}(t)\nu_j\rho_i^0(t)\,dS + \int\limits_{\gamma^+} \sigma_{ij}(t)\nu_j\rho_i^0(t)\,dS = 0,$$

откуда

$$-\int\limits_{\gamma} [\sigma_{ij}(t)\nu_j]\rho_i^0(t)\,dS - \int\limits_{\gamma^+} \sigma_{ij}(t)\nu_j\big(u_i(t) - \rho_i^0(t)\big)\,dS = 0.$$

Учитывая (7), запишем

$$\int\limits_{\gamma^+} \sigma_{ij}(t)\nu_j\big(u_i(t) - \rho_i^0(t)\big)\,dS = 0,$$

т. е. справедливо

$$\int\limits_{\gamma} \sigma_\nu^+(t)\nu[u(t)]\,dS = 0$$

Поскольку подынтегральное выражение имеет постоянный знак на $\gamma$, в точках $\gamma$ выполняется

$$\sigma_\nu^+(t)\nu[u(t)] = 0.$$

Следовательно, в предположении, что $\sigma_\nu^+(t,x_0) < 0$, получаем

$$[u(t,x_0)]\nu(x_0) = 0.$$

Таким образом, при фиксированном $t$ из вариационного неравенства (24) выведены все уравнения и условия (2)–(7).

Обратно, умножая уравнение (2) на $\bar{v} - u(t)$, $\bar{v} \in K_\gamma$, и интегрируя по частям, получим уравнение

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(\bar{v} - u(t))\,dx - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(t)(\bar{v} - u(t))\,dx$$
$$= \int\limits_{\gamma^-} \sigma_{ij}(t)\nu_j(\bar{v}_i - u_i(t))\,dS - \int\limits_{\gamma^+} \sigma_{ij}(t)\nu_j(\bar{v}_i - u_i(t))\,dS.$$

Обозначим

$$L \equiv \int\limits_{\gamma^-} \sigma_{ij}(t)\nu_j(\bar{v}_i - u_i(t))\,dS - \int\limits_{\gamma^+} \sigma_{ij}(t)\nu_j(\bar{v}_i - u_i(t))\,dS.$$

Очевидно, что для вывода вариационного неравенства (24) достаточно показать, что $L \geq 0$. Действительно,

$$L = \int\limits_{\gamma^-} \sigma(t)\nu(\bar{v} - u(t))\,dS - \int\limits_{\gamma^+} \sigma(t)\nu(\bar{v} - u(t) - \rho - \rho_0(t) + \rho + \rho_0(t))\,dS$$
$$= \int\limits_{\gamma^-} \sigma_{ij}(t)\nu_j(\bar{v}_i - u_i(t))\,dS - \int\limits_{\gamma^+} \sigma_{ij}(t)\nu_j(\rho - \rho_0(t))\,dS - \int\limits_{\gamma^+} \sigma(t)\nu(\bar{v} - u(t) - \rho + \rho_0(t))\,dS$$
$$= -\int\limits_{\gamma} [\sigma(t)\nu](\rho - \rho_0(t))\,dS - \int\limits_{\gamma^+} \sigma(t)\nu(\bar{v} - u(t) - \rho + \rho_0(t))\,dS$$
$$= -\int\limits_{\gamma} \sigma^+(t)\nu[\bar{v}]\,dS + \int\limits_{\gamma} \sigma^+(t)\nu[u(t)]\,dS \geq 0.$$

Таким образом, мы показали, что решения задачи (2)–(7) удовлетворяют вариационному неравенству (24). Неравенство (8) совпадает с (24) при почти всех $t \in (0,T)$. Тем самым обосновано, что ввиду эквивалентности задачи (2)–(7) вариационному неравенству (8) исходная задача однозначно разрешима. Теорема доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Khludnev A. M.* On equilibrium problem for a plate having a crack under the creep condition // Control Cybern. 1996. V. 25, N 5. P. 1015–1030.
2. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
3. *Попова Т. С.* Метод фиктивных областей в задаче Синьорини для вязкоупругих тел // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, № 1. С. 105–120.
4. *Попова Т. С.* Жесткое включение в задаче о вязкоупругом теле с трещиной // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 1. С. 87–106.
5. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
6. *Khludnev A. M., Leugering G.* On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // Math. Methods Appl. Sci. 2010. V. 33, N 16. P. 1955–1967.

**7.** *Хлуднев А. М.* Об изгибе упругой пластины с отслоившимся тонким жестким включением // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 114–126.
**8.** *Khludnev A. M.* Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates // Eur. J. Mech., A, Solids. 2012. V. 32. P. 69–75.
**9.** *Lazarev N. P.* An equilibrium problem for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion // J. Sib. Federal Univ., Math. Phys. 2013. V. 6, N 1. P. 53–62.
**10.** *Неустроева Н. В.* Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 4. С. 92–105.
**11.** *Неустроева Н. В.* Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 51–64.
**12.** *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
**13.** *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
**14.** *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
**15.** *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
**16.** *Кравчук А. С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во Моск. гос. акад. приборостроения и информатики, 1997.
**17.** *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
**18.** *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.

*Статья поступила 20 мая 2014 г.*

Попова Татьяна Семеновна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
кафедра математического анализа
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
ptsokt@mail.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.956*

# О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**С. Н. Шергин, С. Г. Пятков**

**Аннотация.** Рассматривается обратная задача об определении правой части для псевдопараболических уравнений 3-го порядка. В качестве условия переопределения рассматриваются значения решения в отдельных точках. В пространствах Соболева доказывается теорема существования и единственности решений и приводится оценка устойчивости.

**Ключевые слова:** уравнение псевдопараболического типа, теорема существования и единственности решения, обратная задача, краевая задача.

## 1. Введение

Рассматриваем задачу об определении неизвестной правой части в уравнении

$$LU_t + MU = f, \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{1}$$

где $L, M$ — дифференциальные операторы второго порядка по переменным $x$, $G$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ с границей $\Gamma \in \mathbb{C}^2$. Уравнение дополняется краевыми и начальными условиями:

$$U|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0,T), \tag{2}$$

$$U|_{t=0} = U_0(x). \tag{3}$$

Правая часть в (1) имеет вид

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i(t) f_i(x,t) + f_0(x,t), \tag{4}$$

где функции $f_i$ даны, функции $c_i(t)$ подлежат определению с использованием условий

$$U(x_i,t) = \psi_i(t) \quad (i = 1,2,\dots,m) \tag{5}$$

и $x_i$ — произвольные точки, лежащие в $G$.

Псевдопараболические уравнения и более общий класс уравнений — уравнения типа Соболева — возникают при описании процессов тепломассопереноса, процессов фильтрации, волновых процессов и во многих других областях. Исследованию вопросов разрешимости краевых задач для псевдопараболических уравнений посвящено значительное количество работ (см., например,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00260а).

[1, 2]). В частности, рассматривались начальные, начально-краевые и периодические задачи, исследовались вопросы глобальной во времени разрешимости и разрушения решений. В случае глобальной во времени разрешимости исследовались вопросы асимптотического поведения решений рассматриваемых задач при больших временах, теория рассеяния и устойчивость решений типа уединенных волн как для одномерных, так и для многомерных уравнений, в частности, для уравнений типа Бенджамена — Бона — Махони — Бюргерса и Розенау — Бюргерса [3, 4]. Применение полугруппового подхода к общей теории сингулярных уравнений соболевского типа получило глубокое и широкое развитие в работах Г. А. Свиридюка и В. Е. Федорова [2]. Исследованию краевых задач для псевдопараболических уравнений с незнакоопределенным или необратимым оператором при старшей производной по времени посвящен ряд результатов, содержащихся в книге [5]. В [6] рассматриваются вопросы локальной разрешимости для нелинейных уравнений псевдопараболического типа.

Псевдопараболические уравнения с монотонной нелинейностью исследовались в [7], где в развернутом виде применялся классический метод монотонности в приложении к разнообразным классам уравнений математической физики и, в частности, к нелинейным уравнениям соболевского типа с монотонными нелинейностями. Существование глобального во времени решения нелинейного уравнения Буссинеска с источником и его разрушения за конечное время исследовалось А. И. Кожановым [8]. В его работах доказательство разрушения решения первой краевой задачи приводится на основе принципа сравнения для данного уравнения. В частности, доказано разрушение положительного решения задачи и получены результаты типа теорем существования-несуществования.

В [9] исследован вопрос о единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа

$$u_t = c\Delta u_t + \varphi(u)$$

в классе растущих функций $\varphi(u)$, где $u$ принадлежит некоторому классу корректности. Доказательству принципа максимума для уравнений псевдопараболического типа посвящена работа [10].

Исследованию псевдопараболических уравнений методами функций комплексного переменного посвящена работа [11]. Метод доказательства несуществования решений некоторых классов краевых задач, основанный на использовании принципа максимума, развит в работах Ю. В. Егорова и В. А. Кондратьева.

Принципиально новый подход, называемый методом пробных функций, предложен в [12, 13]. Вопросы существования и несуществования решений для различных математических моделей на основе уравнений типа Соболева приведены в известной монографии [14], где также может быть найдена необходимая библиография.

Обратные задачи для уравнений соболевского типа исследовались крайне мало. В [15, 16] изучена обратная задача идентификации старшего коэффициента, зависящего от времени, в линейном псевдопараболическом уравнении при интегральном условии переопределения на границе области и доказана локальная теорема существования и единственности сильного решения, а также установлен ряд свойств решений обратных задач этого типа. В [17] рассматривался вопрос о восстановлении ядра интегрального оператора, входящего в уравнение типа Соболева, по заданному функционалу от решения. Близкие результаты получены в [18].

Близкая к нашей постановка задачи рассмотрена в [18], где по функционалу от решения восстанавливалась зависящая от $t$ скалярная функция, входящая в качестве множителя перед элементом данного банахова пространства в правую часть абстрактного уравнения типа Соболева. Аналогичная постановка рассмотрена в [19], где восстанавливался уже элемент банахова пространства по интегральному условию переопределения. Можно отметить монографию [20], где также рассмотрен ряд обратных задач для уравнений составного типа.

Отметим ряд работ и монографий, где сделаны существенные продвижения в теории обратных задач для параболических уравнений и систем [21–25]. В частности, обратная задача в той же постановке, но для параболических уравнений и систем рассмотрена в [26–28].

Основной результат работы — теорема 3, в которой доказаны существование и единственность решения задачи (1)–(3), (5) и приведена оценка устойчивости.

## 2. Обозначения и вспомогательные результаты

В работе используются пространства Соболева $W_p^s(G)$ и Гёльдера $C^\alpha(\overline{G})$. Пространство сильно измеримых функций, определенных на $[0,T]$, со значениями в $H$ обозначим через $L_p(0,T;H)$ ($H$ — банахово пространство). Условие $\Gamma \in C^{2m}$ означает, что для любой точки $x_0 \in \Gamma$ найдутся окрестность $U$ (координатная окрестность) и система координат $y$ (локальная система координат), полученная путем поворота и переноса начала координат из исходной, в которой

$$\overline{U} \cap G = \{y \in \mathbb{R}^n : y' \in \overline{B_r},\ \omega(y') < y_n \le \omega(y') + \delta\},$$
$$\overline{U} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}) = \{y \in \mathbb{R}^n : \omega(y') - \delta \le y_n < \omega(y')\},$$
$$\Gamma \cap \overline{U} = \{y \in \mathbb{R}^n : y' \in \overline{B_r},\ y_n = \omega(y')\},$$

где $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, $B_r = \{y' : |y'| < r\}$, $\delta > 0$ — некоторая постоянная и $\omega \in C^{2m}(\overline{B_r})$. Без ограничения общности считаем, что для локальной системы координат ось $y_n$ направлена по нормали к $\Gamma$ в точке $x_0$.

Пусть $L$ и $M$ — операторы второго порядка вида

$$LU = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,t)U_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)U_{x_i} + a_0(x,t)U,$$

$$MU = \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(x,t)U_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,t)U_{x_i} + b_0(x,t)U.$$

Считаем, что $L$ эллиптичен. Таким образом, существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \delta_0|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ (x,t) \in \overline{Q}.$$

Запишем условия на коэффициенты операторов $L$, $M$. Фиксируем параметр $p > n$ и предположим, что

$$\begin{gathered} a_{ij} \in C(\overline{Q}), \quad b_{ij} \in L_\infty(Q), \\ a_i, a_0 \in C([0,T]; L_p(G)), \quad a_0(x,t) \le 0 \ \text{ п. в. в } Q, \\ b_i, b_0 \in L_\infty(0,T; L_p(G)) \quad (i,j = 1,2,\dots,n). \end{gathered} \tag{6}$$

При этих условиях на коэффициенты $L$ справедлива

**Теорема 1.** *Задача Дирихле*

$$Lu = f, \quad u|_\Gamma = 0, \tag{7}$$

*для всех* $f \in L_p(Q)$ *имеет единственное решение* $u \in L_p\bigl(0, T; W_p^2(G)\bigr)$, *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{L_p(0,T;W_p^2(G))} \le c\|f\|_{L_p(Q)},$$

*где постоянная* $c$ *не зависит от* $f$.

Доказательство. Разрешимость задач (7) (зависящих от параметра $t$) вытекает из единственности решений (см. принцип максимума в [29, гл. 9]) и фредгольмовости этих задач. Оценка для решений может быть получена с использованием того факта, что коэффициенты оператора непрерывны по $t$, значит, в некоторой окрестности любой точки $t_0 \in [0, T]$ можно получить оценку вида $\|u\|_{W_p^2(G)} \le c\|Lu\|_{L_p(G)}$ с постоянной $c$, не зависящей от $t$. Эти оценки гарантируют и наличие глобальной оценки из формулировки теоремы.

Запишем условия на данные задачи.

**Условия согласования:**

$$\varphi(x, 0)|_\Gamma = U_0(x)|_\Gamma, \quad \psi_i(0) = U_0(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{8}$$

**Условия корректности.** Пусть $B$ — матрица с элементами $b_{ij} = L^{-1} f_i(x_j, t)$, и пусть существует $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B| \ge \delta_0, \quad t \in [0, T], \tag{9}$$

где $L^{-1} f_i$ — решение $U_i$ задачи $LU_i = f_i, \quad U_i|_S = 0$.

**Лемма 1.** *Найдется постоянная* $c > 0$ *такая, что для всех*

$$u \in W_p^{2,1}(Q^\gamma) \ (p > 1), \quad Q^\gamma = G \times (0, \gamma),$$

*таких, что* $u(x, 0) = 0$, *выполняется неравенство*

$$\|u\|_{L_p(0,\gamma,W_p^1(G))} \le c\gamma^{1/2}\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из интерполяционного неравенства (см. [30])

$$\|u\|_{W_p^1(G)} \le c\|u\|^{1/2}_{W_p^2(G)}\|u\|^{1/2}_{L_p(G)}$$

и формулы Ньютона — Лейбница.

**Лемма 2.** *Пусть* $p > n$. *Если* $b \in L_p(G)$, *то найдется постоянная* $c > 0$ *такая, что для всех* $u \in W_p^2(G)$ *выполнено*

$$\|b\nabla U\|_{L_p(G)} \le c\|U\|_{W_p^2(G)}, \tag{10}$$

$$\|bU\|_{L_p(G)} \le c\|U\|_{W_p^2(G)}. \tag{11}$$

Доказательство. Оба неравенства вытекают из теорем вложения [30, 31]. Имеем $W_p^2(G) \subset C^1(\overline{G})$ при $p > n$. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Фиксируем $i = 1, 2, \ldots, n$. С помощью неравенства Гёльдера получим

$$\|bU_{x_i}\|_{L_p(G)} = \biggl(\int\limits_G |b|^p |U_{x_i}|^p \, dx\biggr)^{1/p} \le \|U\|_{C^1(\overline{G})}\|b\|_{L_p(G)} \le c\|U\|_{W_p^2(G)}.$$

Пусть далее $Q^\gamma = G \times (0, \gamma)$.

**Теорема 2** (о разрешимости прямой задачи). *Пусть $f \in L_p(Q)$ $(p > n)$, $U_0(x) \in W_p^2(G)$ и $\varphi_t \in L_p\big(0,T; W_p^{2-1/p}(G)\big)$ и выполнены условия (6) на коэффициенты. Тогда существует единственное решение задачи (1)–(3) такое, что*

$$U, U_t \in L_p\big(0,T; W_p^2(G)\big), \quad U(t) \in C\big([0,T]; W_p^2(G)\big).$$

*Если $\varphi \equiv 0$, $U_0(x) \equiv 0$, то найдется постоянная $c > 0$, не зависящая от $\gamma \in [0,T]$, и $f$ такие, что решение задачи (1)–(3) удовлетворяет оценке*

$$\|U\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))} + \|U_t\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \le c\|f\|_{L_p(Q^\gamma)}.$$

Доказательство. Рассмотрим промежуток $[0,T]$. Построим функцию $\Phi$ такую, что

$$\Phi_t \in L_p\big(0,T; W_p^2(G)\big), \quad \Phi|_S = \varphi, \quad \Phi|_{t=0} = U_0(x),$$

например, следующим образом:

$$\Phi = \psi + U_0, \quad \psi = \int_0^t \psi_0(x,\tau)\,d\tau, \quad \Delta\psi_0 = 0, \quad \psi_0|_\Gamma = \varphi_t$$

(существование такой функции $\psi_0$ вытекает из известных результатов, см., например, [29]). Сделаем замену неизвестного $V = U - \Phi$. Тогда функция $V$ удовлетворяет условиям

$$V|_S = 0, \quad V|_{t=0} = 0, \quad LV_t + MV = f - L\Phi_t - M\Phi = g.$$

С помощью теоремы 1 можно переписать уравнение в виде

$$V + \int_0^t L^{-1}MV(\tau,x)\,d\tau = L^{-1}g.$$

Используя теорему 1 и лемму 2, легко понять, что справедлива оценка

$$\|L^{-1}MV\|_{L_p(0,\tau;W_p^2(G))} \le c\|V\|_{L_p(0,\tau;W_p^2(G))}, \quad \tau \le T, \tag{12}$$

которая с использованием теоремы о неподвижной точке позволяет доказать утверждение теоремы. Отметим, что $\int_0^t L^{-1}MV(\tau,x)\,d\tau$ — оператор типа Вольтерра. Решение удовлетворяет оценке (12) с $\gamma = T$. Рассмотрим промежуток $(0,\gamma)$ $(\gamma \le T)$ и докажем утверждение теоремы об оценке. Рассмотрим (1)–(3), (5), где $U_0 = 0$, $\varphi = 0$, и возьмем в качестве $f$ функцию

$$f_0 = \begin{cases} f, & t \le \gamma, \\ 0, & t > \gamma, \end{cases} \in L_p(Q).$$

Тогда существует единственное решение $U_0$ задачи (1)–(3), удовлетворяющее оценке

$$\|U_0\|_{L_\infty(0,T;W_p^2(G))} + \|U_{0t}\|_{L_p(0,T;W_p^2(G))} \le c\|f_0\|_{L_p(Q)} = c\|f\|_{L_p(Q^\gamma)}. \tag{13}$$

В силу теоремы единственности $U_0$ совпадает на $[0,\gamma]$ с решением $U$ задачи (1)–(3), где $U_0 = 0$, $\varphi = 0$. Из оценки $U$ получим

$$\|U\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))} + \|U_t\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} \le c\|f\|_{L_p(Q^\gamma)}.$$

## 3. Основные результаты

Рассматриваем задачу (1)–(3), (5). Основной результат состоит в следующем.

**Теорема 3.** *Пусть коэффициенты операторов $L, M$ удовлетворяют условиям* (6)*, выполнены условия согласования* (8) *и условия корректности* (9) *и*

$$f_0 \in L_p(Q), \quad f_i \in L_\infty(0,T; L_p(G)), \quad U_0(x) \in W_p^2(G),$$

$$\varphi_t \in L_p\big(0,T; W_p^{2-1/p}(G)\big), \quad \psi_i \in W_p^1(0,T), \quad i = 1,2,\dots,m, \ p > n.$$

*Тогда существует единственное решение задачи* (1)–(5) *такое, что*

$$U, U_t \in L_p\big(0,T; W_p^2(G)\big), \quad c_i(t) \in L_p(0,T) \quad (i = 1,2,\dots,m).$$

*Решение* $(U, c_1, \dots, c_m)$ *удовлетворяет оценке*

$$\|U\|_{L_p(0,T;W_p^2(G))} + \|U_t\|_{L_p(0,T;W_p^2(G))} + \sum_{i=1}^m \|c_i(t)\|_{L_p(0,T)} \\ \le c\left(\|f_0\|_{L_p(Q)} + \|\varphi_t\|_{L_p(0,T;B_{p,p}^{2-1/p}(G))} + \sum_{i=1}^m \|\psi_{it}\|_{L_p(0,T)}\right),$$

*где $c$ — некоторая постоянная, не зависящая от функций $f_0$, $\varphi$, $\psi_i$, $i = 1,2,\dots,m$.*

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 2, построим функцию $\Phi(x,t)$ такую, что $\Phi, \Phi_t \in L_p\big(0,T; W_p^2(G)\big)$:

$$\Phi|_S = \varphi, \quad \Phi|_{t=0} = U_0(x).$$

Сделаем замену неизвестного: $U = V + \Phi$ $(V = U - \Phi)$. Уравнение приходит к виду

$$LV_t + MV = f_0 - L\Phi_t - M\Phi + \sum_{i=1}^m c_i f_i = g_0 + \sum_{i=1}^m c_i f_i,$$

где функция $V$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} V(x_i,t) = U(x_i,t) - \Phi(x_i,t) = \psi_i - \Phi(x_i,t) = \varphi_i(t) \quad (i = 1,\dots,m), \\ V|_S = 0, \quad V|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Обращая $L$, получим

$$V_t + L^{-1}MV = L^{-1}g_0 + \sum_{i=1}^m c_i L^{-1} f_i, \tag{15}$$

где оператор $L^{-1}$ сопоставляет правой части $g$ решение задачи:

$$LV = g, \quad V|_S = 0, \quad V|_{t=0} = 0.$$

Поскольку $\Phi(x,t) \in W_p^2\big(G; W_p^1(0,T)\big)$ и $p > n$, после, может быть, изменения на множестве меры нуль можем считать, что функция $\Phi(x,t)$ непрерывна по $x$ при п. в. $t$ и $\Phi(x,t) \in C\big(\overline{G}; W_p^1(0,T)\big)$. Следовательно, $\Phi(x_i,t) \in W_p^1(0,T)$, тем самым $\varphi_i \in W_p^1(0,T)$. Полагая $x = x_i$, получим

$$\varphi_{it} + L^{-1}MV(x_i,t) = L^{-1}g_0(x_i,t) + \sum_{j=1}^m (L^{-1}f_j)(x_i,t)c_j(t).$$

По условию (9) имеем

$$|\det B| \geq \delta_0 > 0, \quad t \in [0,T], \quad B = \{L^{-1}f_i(x_j,t)\}_{i,j=1}^m.$$

Таким образом,

$$\vec{c} = B^{-1}\begin{pmatrix} \varphi_{1t} + L^{-1}MV(x_1,t) - L^{-1}g_0(x_1,t) \\ \dots \\ \dots \\ \varphi_{mt} + L^{-1}MV(x_m,t) - L^{-1}g_0(x_m,t) \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Получили уравнение для нахождения вектор-функции $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$, где $V = V(c)$ — оператор, сопоставляющий вектору $\vec{c}$ решение задачи

$$A_0V = LV_t + MV = g_0 + \sum_{i=1}^m c_if_i, \quad V|_S = 0, \quad V|_{t=0} = 0. \tag{16}$$

Функцию $V$ представим в виде

$$V = A_0^{-1}g_0 + A_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^m c_if_i\right) = V_0 + A_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^m c_if_i\right).$$

Таким образом, систему для нахождения вектор-функции $\vec{c}$ можно записать в виде:

$$\vec{c} = \vec{c_0} + R(\vec{c}), \tag{17}$$

$$\vec{c_0} = B^{-1}\begin{pmatrix} \varphi_{1t} + L^{-1}MV_0(x_1,t) - L^{-1}g_0(x_1,t) \\ \dots \\ \dots \\ \varphi_{mt} + L^{-1}MV_0(x_m,t) - L^{-1}g_0(x_m,t) \end{pmatrix},$$

$$R(\vec{c}) = B^{-1}\begin{pmatrix} L^{-1}MA_0^{-1}\sum\limits_{i=1}^m c_if_i(x_1,t) \\ \dots \\ \dots \\ L^{-1}MA_0^{-1}\sum\limits_{i=1}^m c_if_i(x_m,t) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что функции $L^{-1}f_i(x_j,t)$ принадлежат $L_\infty(0,T)$. Действительно, $f_i(x,t) \in L_\infty(0,T;L_p(G))$ и $L^{-1}f_i \in L_\infty\big(0,T;W_p^2(G)\big)$. Таким образом, при $L^{-1}f_i \in W_p^2(G)$ п. в. $t$. В силу теорем вложения (см., например, [31]) и условия $p > n$ функция $L^{-1}f_i(x,t)$ непрерывна после, может быть, изменения на множестве меры 0 при п. в. $t$ и определен след $L^{-1}f_i(x_j,t)$. Имеем

$$\|L^{-1}f_i(x_j,t)\|_{L_\infty(0,T)} \leq c\|L^{-1}f_i(x,t)\|_{L_\infty(0,T;W_p^2(G))} \leq c_1\|f_i\|_{L_\infty(0,T;L_p(G))}.$$

Легко видеть, что справедлива оценка

$$\|B^{-1}\vec{g}(t)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c\|\vec{g}(t)\|_{L_p(0,\gamma)}$$

для любого вектора $\vec{g} \in L_p(0,\gamma)$ и $\gamma \in [0,T]$, причем постоянная $c$ не зависит от $\gamma$. Таким образом,

$$\|R(\vec{c})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c\sum_{j=1}^m \left\| L^{-1}MA_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^m c_if_i\right)(x_j,t)\right\|_{L_p(0,\gamma)}.$$

В силу теорем вложения правая часть оценивается так:

$$c_2\left\|L^{-1}MA_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^m c_if_i\right)\right\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))}\le c_3\left\|MA_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^m c_if_i\right)\right\|_{L_p(0,\gamma;L_p(G))}$$
$$\le c_3\gamma^{1/p}\left\|MA_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^m c_if_i\right)\right\|_{L_\infty(0,\gamma;L_p(G))}$$
$$\le c_4\gamma^{1/p}\left\|A_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^m c_if_i\right)\right\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^2(G))}.$$

Воспользуемся оценкой из теоремы 2. Тогда последнее выражение оценим через

$$c_5\gamma^{1/p}\sum_{i=1}^m\|c_if_i\|_{L_p(Q^\gamma)}. \tag{18}$$

Имеем

$$\|c_if_i\|_{L_p(Q^\gamma)}=\left(\int\limits_0^\gamma\int\limits_G|c_i|^p|f_i|^p(x,t)\,dxdt\right)^{1/p}$$
$$=\left(\int\limits_0^\gamma|c_i|^p(t)\int\limits_G|f_i|^p(x,t)\,dxdt\right)^{1/p}\le\|f_i\|_{L_\infty(0,T;L_p(G))}\left(\int\limits_0^\gamma|c_i|^p(t)\,dt\right)^{1/p}.$$

Таким образом, (18) оценивается через

$$c_6\gamma^{1/p}\sum_{i=1}^m\|c_i\|_{L_p(0,T)}.$$

Окончательная оценка имеет вид

$$\|R(\vec c)\|_{L_p(0,\gamma)}\le c_7\gamma^{1/p}\|\vec c\|_{L_p(0,T)}, \tag{19}$$

где $c_7$ не зависит от $\gamma$. Таким образом, если $c_7\gamma^{1/p}=q_0<1$, то уравнение (17) имеет единственное решение $\vec c$ на $[0,\gamma]$. Рассмотрим уравнение

$$\vec c-R(\vec c)=\vec c_0. \tag{20}$$

Без ограничения общности можем считать, что все постоянные, возникающие в процессе доказательства оценки (19), не зависят от $\gamma$. Пусть $\vec c$ — решение, определенное на промежутке $[0,\gamma]$. Построим вектор

$$\vec c_1=\begin{cases}\vec c, & t\le\gamma,\\ 0, & t>\gamma.\end{cases}$$

Сделаем в (20) замену $\vec k_1=\vec c-\vec c_1$. Если $c$ — решение на промежутке $[0,2\gamma]$, то $\vec k_1=0$ при $t\le\gamma$ и $\vec k_1-R(\vec k_1)=\vec c_0-\vec c_1+R(\vec c_1)$. Здесь правая часть обращается в нуль на $[0,\gamma]$, тем самым $R(\vec k_1)=0$ при $t\le\gamma$. Решаем систему

$$\vec k_1-R(\vec k_1)=\vec c_0-\vec c_1+R(\vec c_1) \tag{21}$$

уже на $[\gamma, 2\gamma]$. Таким образом, если $\vec{k}_1 \in L_p(0, 2\gamma)$, то

$$\|R(\vec{k}_1)\|_{L_p(\gamma,2\gamma)} \le c\sum_{j=1}^{m}\left\|L^{-1}MA_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}k^i f_i\right)(x_j,t)\right\|_{L_p(\gamma,2\gamma)}$$
$$\le c_2\sum_{j=1}^{m}\left\|L^{-1}MA_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}k^i f_i\right)\right\|_{L_p(\gamma,2\gamma;W_p^2(G))}$$
$$\le c_3\left\|MA_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}k^i f_i\right)\right\|_{L_p(\gamma,2\gamma;L_p(G))} \le c_3\gamma^{1/p}\left\|MA_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}k^i f_i\right)\right\|_{L_\infty(\gamma,2\gamma;L_p(G))}$$
$$\le c_4\gamma^{1/p}\left\|A_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}k^i f_i\right)\right\|_{L_\infty(\gamma,2\gamma;W_p^2(G))} \le c_5\gamma^{1/p}\left\|\sum_{i=1}^{m}k^i f_i\right\|_{L_p(Q^\gamma)}$$
$$\le c_6\gamma^{1/p}\sum_{i=1}^{m}\|k^i\|_{L_p(0,T)}, \quad \vec{k}_1 = (k^1, k^2, \dots, k^m).$$

Окончательная оценка имеет вид

$$\|\vec{R}(\vec{k}_1)\|_{L_p(\gamma,2\gamma)} \le c_7\gamma^{1/p}\|\vec{k}_1\|_{L_p(0,T)},$$

где без ограничения общности можно считать, что $c_7$ — та же постоянная, что и в (19). Таким образом, уравнение (21) имеет единственное решение $\vec{k}_1 \in L_p(0, 2\gamma)$ такое, что $\vec{k}_1 = 0$ при $t \in (0, \gamma)$. Следовательно, функция $\vec{c} = \vec{c}_1 + \vec{k}_1$ — решение (17) из $L_p(0, 2\gamma)$.

Повторяя рассуждения, построим решение $\vec{c}$ уравнения (17) на всем промежутке $[0, T]$. Построим функцию $V$ как решение задачи (16). Покажем, что функция $V$ удовлетворяет условиям (14). Обращая $L$, получим, что $V$ удовлетворяет уравнению (15). Берем в (15) $x = x_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ и получаем

$$V_t(x_i,t) + L^{-1}MV(x_i,t) = L^{-1}g_0(x_i,t) + \sum_{j=1}^{m}L^{-1}c_j(t)f_j(x_i,t). \tag{22}$$

Вектор-функция $\vec{c}$ такова, что

$$\varphi_{it}(t) + L^{-1}MV(x_i,t) = L^{-1}g_0(x_i,t) + \sum_{j=1}^{m}L^{-1}c_j(t)f_j(x_i,t). \tag{23}$$

Вычитая (23) из (22), имеем $V_t(x_i,t) - \varphi_{it}(t) = 0$, или $\partial_t(V(x_i,t) - \varphi_i(t)) = 0$. Интегрируя от 0 до $t$, получим $V(x_i,t) - \varphi_i(t) = V(x_i,0) - \varphi_i(0) = 0$, поскольку $v(x_i,0) = 0$ и $\varphi_i(0) = \psi_i(0) - \phi(x_i,0) = \psi_i(0) - U_0(x_i) = 0$ в силу условий согласования. Таким образом, $V(x_i,t) = \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$.

Получим оценки для решения. Оценим $\|\vec{c}\|$, где $\vec{c}$ — решение уравнения (17). Имеем

$$\|\vec{c}\|_{L_p(0,\gamma)} \le \frac{1}{1-q_0}\|\vec{c}_0\|_{L_p(0,\gamma)}$$
$$\le \frac{c_1}{1-q_0}\Big(\sum_i\|\varphi_{it}\|_{L_p(0,\gamma)} + \|f_0\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|\Phi_t\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))} + \|\Phi\|_{L_p(0,\gamma;W_p^2(G))}\Big).$$

Далее

$$\vec{k}_1 - R(\vec{k}_1) = \vec{c}_0 - \vec{c}_1 + R(\vec{c}_1)$$

на промежутке $[\gamma, 2\gamma]$, значит,

$$\|\vec{k}_1\|_{L_p(\gamma,2\gamma)} \le \frac{1}{1-q_0}\|\vec{c}_0 - \vec{c}_1 + R(\vec{c}_1)\|_{L_p(\gamma,2\gamma)}$$
$$\le \frac{c_2}{1-q_0}\left(\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_{it}\|_{L_p(0,2\gamma)} + \|f_0\|_{L_p(Q^{2\gamma})} + \|\Phi_t\|_{L_p(0,2\gamma;W_p^2(G))} + \|\Phi\|_{L_p(0,2\gamma)}\right).$$

Тогда

$$\|\vec{c}\|_{L_p(0,2\gamma)}$$
$$\le \frac{c_3}{1-q_0}\left(\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_{it}\|_{L_p(0,2\gamma)} + \|f_0\|_{L_p(Q^{2\gamma})} + \|\Phi_t\|_{L_p(0,2\gamma;W_p^2(G))} + \|\Phi\|_{L_p(0,2\gamma)}\right).$$

Повторяя рассуждения, получим неравенство

$$\|\vec{c}\|_{L_p(0,T)}$$
$$\le c_4\left(\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_{it}\|_{L_p(0,T)} + \|f_0\|_{L_p(Q)} + \|\Phi_t\|_{L_p(0,T;W_p^2(G))} + \|\Phi\|_{L_p(0,T;W_p^2(G))}\right).$$

Как вытекает из свойств построенной функции $\Phi$, правая часть в этом неравенстве оценивается через

$$c\left(\|f_0\|_{L_p(Q)} + \|\varphi_t\|_{L_p(0,T;W_{p,p}^{2-1/p}(G))} + \sum_{i=1}^{m}\|\psi_{it}\|_{L_p(0,T)}\right),$$

откуда и вытекает утверждение теоремы об оценке.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Bebernes J., Lacey A. A.* Global existence and finite time blow-up for a class of nonlocal parabolic problems // Adv. Differ. Equations. 1997. V. 2. P. 927–954.

**2.** *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht: VSP, 2003.

**3.** *Chung S. K., Pani A. K.* Numerical methods for the Rosenau equation // J. Appl. Anal. 2001. V. 77, N 3–4. P. 100–116.

**4.** *Chen Yu.* Remark on the global existence for the generalized Benjamin–Bona–Mahony equations in arbitrary dimension // Appl. Anal. 1988. V. 30, N 1–3. P. 1–15.

**5.** *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

**6.** *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

**7.** *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. (Math. Surveys Monogr.; V. 49).

**8.** *Кожанов А. И.* Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 70–75.

**9.** *Гладков А. Л. Единственность решения задачи* Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 3. С. 356–362.

**10.** *Di Benedetto E., Pierre M.* On the maximum principle for pseudoparabolic equations // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30, N 6. P. 821–854.

**11.** *Begehr H., Dai D. Q.* Initial boundary value problem for nonlinear pseudoparabolic equations // Complex Variables, Theory Appl. 1992. V. 18, N 1–2. P. 33–47.

**12.** *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 234. С. 3–234.

**13.** *Лаптев Г. Г.* Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 232. С. 223–235.
**14.** *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
**15.** *Любанова А. Ш.* Идентификация коэффициента в старшем члене псевдопараболического уравнения типа фильтрации. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012.
**16.** *Lyubanova A. Sh., Tani A.* On inverse problems for pseudoparabolic and parabolic equations of filtration // Inverse Probl. Sci. Eng. 2011. V. 19, N 7. P. 1023–1042.
**17.** *Асанов А., Атаманов Э. Р.* Обратная задача для операторного псевдопараболического интегродифференциального уравнения // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 38, № 4. С. 752–762.
**18 .** *Favini A., Lorenzi A.* Differential equations. Inverse and direct problems. Tylor & Francis Group, LLC, 2006.
**19.** *Urazaeva A. V., Fedorov V. E.* On the well-posedness of the prediction-control problem for certain systems of equations // Math. Notes. 2009. V. 85, N 3. P. 426–436.
**20.** *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems.. Utrecht: VSP, 1999. (Inverse Ill-posed Probl. Ser.).
**21.** *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
**22.** *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
**23.** *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: VNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).
**24.** *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2006. (Appl. Math. Sci.; V. 127).
**25.** *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
**26.** *Pyatkov S. G.* On some classes of inverse problems for parabolic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 18, N 8. P. 917–934.
**27.** *Pyatkov S. G., Samkov M. L.* On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations // Sib. Adv. Math. 2012. V. 22, N 4. P. 287–302.
**28.** *Pyatkov S. G., Tsybikov B. N.* On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // J. Evol. Equations. 2011. V. 11, N 1. P. 155–186.
**29.** *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
**30.** *Трибель Х.* Теория интерполяции.Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
**31.** *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

*Статья поступила 28 мая 2014 г.*

Шергин Сергей Николаевич,   Пятков Сергей Григорьевич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова 16, Ханты-Мансийск 628012
`Shergin@shadrinsk.net`,  `s_pyatkov@ugrasu.ru`

*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.956*

# ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

**С. Г. Пятков, Е. И. Сафонов**

**Аннотация.** Рассматривается задача об определении функции источников в математических моделях массопереноса по данным дополнительных измерений в отдельных точках области. Искомая неизвестная функция является правой частью в параболическом уравнении конвекции-диффузии относительно концентрации переносимого вещества. В частности, эта функция характеризует источники загрязнения и их местоположение. В работе приведены некоторые теоретические результаты, построен численный алгоритм и описаны результаты численных экспериментов. Известные ранее алгоритмы в основном основаны на минимизации некоторого функционала, не являющегося выпуклым. Отличие построенного алгоритма от известных ранее состоит в том, что он является прямым, не требует большого количества вычислений и показывает хорошую сходимость к решению. Численная реализация основана на методе конечных элементов.

**Ключевые слова:** алгоритм, параболическое уравнение, обратная задача, метод конечных элементов.

## Введение

Рассмотрим вопрос об определении, вместе с решением, правой части специального вида (функции источника) в параболическом уравнении. Пусть $G$ — область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\Gamma$ класса $C^2$ и $Q = G \times (0, T)$. Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t - A(t, x, D)u = f_c, \quad (t, x) \in Q, \tag{1}$$

где $A$ — эллиптический оператор второго порядка вида

$$A(t, x, D)u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x)u_{x_i} + a_0(t, x)u.$$

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad Bu|_S = g(t, x), \tag{2}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x, t)u$, или $Bu = \frac{\partial u}{\partial l} + \sigma(x, t)u$ и $S = (0, T) \times \Gamma$. Таким образом, рассматриваем одно из классических граничных условий Дирихле, Неймана, Робина, или условие с косой производной. Здесь $n$ — единичный

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00260а).

вектор внешней нормали и $l = (l_1(x,t), \dots, l_n(x,t))$ — гладкое некасательное векторное поле на $S$. Правая часть в (1) имеет вид

$$f_c = \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x)q_i(t) + f. \tag{3}$$

Неизвестными в (1), (2) являются решение $u$ и функции $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), входящие в правую часть (1). Рассмотрим два вида условий переопределения. В первом случае условия переопределения имеют вид

$$\int\limits_{G_i} u\varphi_i(x)dx = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \tag{4}$$

где $\varphi_i(x)$, $\psi_i(t)$ — некоторые гладкие функции, условия на них уточним ниже, и $G_i \subset G$ — некоторые области. Во втором случае рассматриваем условия вида

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad x_i \in G, \ i = 1, 2 \dots, r. \tag{5}$$

Задача о нахождении функций $u$, $q_i$ с использованием краевых условий и условий переопределения может быть сформулирована и как задача управления. Обратные задачи подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях [1–4]. В литературе рассматривались условия переопределения как вида (4), так и вида (5). В частности, обратные задачи об определении коэффициентов уравнения (1), зависящих от переменной $t$, с условием переопределения (4), где $r = 1$ и $G_i = G$, рассматривались в [5–11]. Линейные обратные задачи об определении правой части исследовались в [12, 13]. Линейные и коэффициентные обратные задачи с условием переопределения (5) рассматривались в [14, 15] и в [16–18] соответственно. Большое количество физических постановок и численных методов решения обратных коэффициентных задач и задач об определении функции источника с условиями переопределения вида (5) приведены в [19, 20]. Задачи определения функции источника вида (3) с условиями переопределения вида (5) рассмотрены в [21, гл. 3], где основное внимание уделено численным методам решения обратных задач. В этой монографии рассматривается задача определения произвольной функции источника $G(x,t)$, исходя из произвольного количества измерений вида (5). При этом функция источника заменяется его приближением вида (3), которое и подлежит определению. Однако, как в этой монографии, так и в других работах, в основном рассматриваются модельные уравнения в случае $n = 1$. Можно отметить работы [22, 23] одного из авторов, где рассмотрены задачи вида (1), (2), (5) в общей постановке. Сошлемся также на монографии [2, 5, 15, 24, 25], где имеется большое количество постановок обратных задач для параболических уравнений и систем. Кроме того, для численного решения задачи ранее главным образом использовались численные алгоритмы, основанные на минимизации некоторого функционала, т. е. задача сводилась к задаче оптимального управления (см. [19–21, 26–28]). Этот функционал невыпуклый, и это создавало ряд дополнительных сложностей. Случаев, когда используются другие методы, в литературе описано крайне мало. В частности, в [14] рассматривалась более простая, чем у нас, задача: определялась временная компонента $q(t)$ функции источника $q(t)\psi(x,y)$ и задача рассматривалась при более жестких, чем у нас, условиях на правую часть, точнее, требовалось, чтобы $\psi|_\Gamma = 0$.

В данной работе мы строим численный алгоритм решения задачи (1)–(3), (5) и приводим результаты численных экспериментов. Алгоритм основан на приближении решения задачи (1)–(3), (5) решениями задачи (1)–(4) со специально выбранными функциями $\varphi_i = \varphi_i(x,\varepsilon)$. Обратная задача (1)–(4) сводится к некоторому интегральному уравнению типа Вольтерра 2-го рода, которое затем решается численно.

В § 1 приводятся теоретические результаты, на которых основывается построение численного алгоритма решения задачи (1)–(4). В § 2 описывается алгоритм решения задачи, в § 3 — программная реализация алгоритма, а в § 4 — результаты численных экспериментов.

## § 1. Основные предположения и вспомогательные результаты

Опишем теоретические результаты, на которых основан наш алгоритм. Обозначения функциональных пространств, используемых ниже, в частности, пространств Соболева и Лебега, стандартны (см. [29]). Фиксируем $p > n + 2$. Используем следующие условия на данные задачи:

$$\begin{gathered} u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \\ g(x,t) \in W_p^{1-1/2p,2-1/p}(S) \quad \text{или} \quad g(x,t) \in W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(S), \end{gathered} \tag{6}$$

где первое из условий на $g$ используется в случае задачи Дирихле, второе — в случае оставшихся краевых условий:

$$f \in L_p(Q), \tag{7}$$

$$g(x,0) = B(x,0)u_0(x)|_{\partial G}. \tag{8}$$

$$\psi_i(t) \in W_p^1(0,T), \quad \psi_i(0) = \int\limits_{G_i} u_0(x)\varphi_i(x)\,dx, \quad i = 1,2,\dots,r, \tag{9}$$

$$\psi_i(t) \in W_p^1(0,T), \quad \psi_i(0) = u_0(x_i), \quad i = 1,2,\dots,r. \tag{10}$$

Условия на коэффициенты операторов $A$ и $B$ более или менее стандартны. Для простоты выкладок будем использовать не самые точные условия на коэффициенты. Считаем, что

$$\begin{gathered} a_i(t,x) \in L_\infty(Q),\ i = 0,1,\dots,n, \quad a_{ij} \in C(\overline{Q}),\ i,j = 1,\dots,n, \\ l_j \in C^1(\overline{S}),\ j = 1,\dots,n, \quad \sigma(x,t) \in C^1(\overline{S}), \end{gathered} \tag{11}$$

$$b_i(x,t) \in L_\infty(0,T;L_p(G)), \quad i = 1,2,\dots,r. \tag{12}$$

Пусть $\{G_j\}$ — набор областей с границей класса $C^1$, вложенных в $G$. Будем использовать два вида условий на весовые функции $\{\varphi_j(x)\}$:

$$\operatorname{supp}\varphi_j \subset \overline{G_j}, \quad \varphi_j \in W_q^1(G_j)\ (1/q + 1/p = 1), \quad j = 1,2,\dots,r, \tag{13}$$

$$\operatorname{supp}\ \varphi_j \subset G_j, \quad \varphi_j \in L_1(G), \quad j = 1,2,\dots,r. \tag{14}$$

При выполнении минимальных требований (14) нам понадобятся дополнительные условия на данные задачи. Пусть $G_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{r} G_j$, $Q_0 = G_0 \times (0,T)$. Введем также вспомогательную область

$$Q_\delta = G_\delta \times (0,T), \quad G_\delta = \bigcup_{j=1}^{r} G_j^\delta,\ G_j^\delta = \{x \in G_j : \rho(x,\partial G_j) > \delta\}.$$

Здесь $\rho(x, \partial G_j)$ обозначает расстояние от $x$ до $\partial G_j$,

$$\nabla f \in L_p(Q_0), \quad \nabla b_j \in L_\infty(0, T, L_p(G_0)), \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\nabla u_0 \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G_0), \quad \nabla a_{ij}(x,t), \nabla a_k(x,t) \in W_\infty^1(Q_0), \\ i,j = 1,\dots,n, \quad k = 0,1,\dots,n.\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь и далее $\nabla$ рассматривается только по пространственным переменным. Построим матрицу $B$ с элементами $b_{ij} = b_j(t, x_i)$ в случае задачи (1)–(3), (5) и $b_{ij} = \int\limits_{G_i} b_j(x,t)\varphi_i(x)\,dx$ в случае задачи (1)–(4). Потребуем, чтобы существовала постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_0 \quad \text{для п. в. } t \in [0, T]. \tag{17}$$

Условие эллиптичности оператора $A$ имеет вид: существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2, \quad (x,t) \in Q, \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{18}$$

Доказательство приведенных ниже теорем 1, 2, 4 может быть найдено в [30], а теоремы 3 — в [22].

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* (6)–(9), (11)–(13), (17), (18). *Тогда существует единственное решение* $(u, q_1, \dots, q_r)$ *задачи* (1)–(4) *такое, что*

$$u \in W_p^{1,2}(Q), \quad q_i(t) \in L_p(0,T), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

*Решение удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \sum_{i=1}^{r} \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq c\left(\|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \sum_{j=1}^{r} \|\psi_i\|_{W_p^1(0,T)}\right),$$

*где* $k_0 = 1 - 1/2p$ *в случае условия Дирихле и* $k_0 = 1/2 - 1/2p$ *в случае остальных краевых условий.*

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия* (6)–(9), (11), (12), (14)–(18). *Тогда существует единственное решение* $(u, q_1, \dots, q_r)$ *задачи* (1)–(4) *такое, что*

$$u \in W_p^{1,2}(Q), \quad q_i(t) \in L_p(0,T), \ i = 1, 2, \dots, r, \quad \nabla_x u \in W_p^{1,2}(Q_\delta)$$

*для всех* $\delta > 0$. *При фиксированном* $\delta > 0$ *решение удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \|\nabla_x u\|_{W_p^{1,2}(Q_\delta)} + \sum_{i=1}^{r} \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq c\Bigg(\|f\|_{L_p(Q)} + \|\nabla_x f\|_{L_p(Q_0)} + \|g\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G)} + \|\nabla_x u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G_0)} + \sum_{j=1}^{r} \|\psi_i\|_{W_p^1(0,T)}\Bigg).$$

**Теорема 3.** *При выполнении условий* (6)–(8), (10)–(12), (15)–(18) *существует единственное решение задачи* (1)–(3), (5) *такое, что* $\vec{q} \in L_p(0,T)$, $u \in W_p^{1,2}(Q)$, $\nabla u \in W_p^{1,2}(Q_\delta)$, $\delta > 0$.

Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(B_1)$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, такую, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$ и $\varphi(x) \geq 0$ для всех $x$. Определим

$$\varphi_{j\varepsilon}(x) = \varphi\left(\frac{x - x_j}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon^n}.$$

Имеем

$$\|\varphi_j\|_{L_1(G)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_{j\varepsilon}(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x - x_j}{\varepsilon}\right)dx = 1.$$

Введем

$$r_{j\varepsilon} = \int\limits_G \varphi_{j\varepsilon}(x) u_0(x)\,dx - u_0(x_j).$$

В силу теорем вложения и условий на функцию $u_0$ легко видеть, что найдется постоянная $M > 0$ такая, что $|r_{j\varepsilon}| \leq M\varepsilon$ для всех $j$. Рассмотрим задачу (1)–(4), где $\varphi_j = \varphi_{j\varepsilon}$, $\varepsilon < \delta_1$, $G_j = B_{\delta_1}(x_j)$ — шар радиуса $\delta_1$ с центром в точке $x_j$, а в качестве $\psi_j$ возьмем функции $\psi_{j\varepsilon} = \psi_j(t) + r_{j\varepsilon}$. По построению и в силу условий (10) имеем

$$\psi_{j\varepsilon}(0) = \int\limits_G \varphi_{j\varepsilon} u_0(x)\,dx.$$

Параметр $\delta_1$ выбираем настолько малым, что $G_j \cap G_i = \varnothing$ при $i \neq j$ и $G_j \subset G$ для всех $j$. Решение этой задачи (1)–(4) (оно существует и обладает свойствами, указанными в теореме 2) обозначим через $u_\varepsilon$, $\vec{q}_\varepsilon = (q_1^\varepsilon, \ldots, q_r^\varepsilon)$, а решение задачи (1)–(3), (5) — через $u$, $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_r)$.

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда*

$$\|\vec{q}_\varepsilon - \vec{q}\|_{L_p(Q)} + \|u_\varepsilon - u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \to 0 \quad \text{\textit{при} } \varepsilon \to 0.$$

Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(4), где $\varphi_i(x) = \varphi_{i\varepsilon}(x)$, а уравнение (1) имеет вид

$$u_t - \operatorname{div}(c(x,t)\nabla u) + b(x,t)\nabla u + a(x,t)u = f, \tag{19}$$

$$f = \sum_{i=1}^r f_i(t,x) q_i(t) + f_0, \quad b(x,t) = (b_1(x,t), b_2(x,t))^T, \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^T.$$

Считаем, что в качестве граничных условий рассматриваются условия Неймана, таким образом,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = g(t,x).$$

Соответствующие изменения в рассуждениях в случае других краевых условий очевидны. Интегрируем уравнение (19) по $G$ с весом $\varphi_j(x)$. Получаем, используя наши данные, что

$$\psi_{jt} + \int\limits_G c\nabla u \cdot \nabla\varphi_j\,dx + \int\limits_G (b\nabla u + au)\varphi_j\,dx - \int\limits_\Gamma g(t,x)\varphi_j\,d\Gamma$$
$$= \int\limits_G f_0\varphi_j\,dx + \sum_{i=1}^r (f_i, \varphi_j) q_i(t).$$

В силу условий $|\det B| \geq \delta_0$ для п. в. $t \in [0,T]$. Ввиду определения матрицы $B$ имеем

$$\vec{q} = B^{-1} \begin{bmatrix} \psi_{1t} + (c\nabla u, \nabla\varphi_1) + (b\nabla u, \varphi_1) + (au, \varphi_1) - \int\limits_\Gamma g\varphi_1 \, d\Gamma - (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ \psi_{rt} + (c\nabla u, \nabla\varphi_r) + (b\nabla u, \varphi_r) + (au, \varphi_r) - \int\limits_\Gamma g\varphi_r \, d\Gamma - (f, \varphi_r). \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Здесь $(u,v)$ обозначает скалярное произведение в пространстве $L_2(G)$, т. е. $(u,v) = \int\limits_G u(x)v(x)\,dx$. Функция (20) в правой части — некоторый оператор $R(\vec{q})$, сопоставляющий вектор-функции $\vec{q}$ правую часть (20), где $u$ — решение задачи (1)–(3). Тогда на уравнение (20) можно смотреть как на уравнение для нахождения функции $\vec{q}$: $\vec{q} = R(\vec{q})$. Можно показать, что оператор $R(\vec{q})$ при малых $t$ сжимающий, значит, справедлива теорема о неподвижной точке. Более того, можно показать, что метод последовательных приближений сходится к решению и на произвольном промежутке времени $[0,T]$. Именно это уравнение и будет использоваться при построении численного алгоритма ниже.

## § 2. Описание алгоритма

Опишем численный алгоритм в случае краевых условий Неймана, в случае остальных краевых задач изменения незначительны. Уравнение

$$u_t - \operatorname{div}(c(x,t)\nabla u) + b(x,t)\nabla u + a(x,t)u = f, \quad (21)$$

$$f = \sum_{i=1}^{r} f_i(t,x)q_i(t) + f_0, \quad b(x,t) = (b_1(x,t), b_2(x,t))^T, \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^T,$$

рассматривается в области $Q = G \times (0,T)$, $x = (x_1, x_2) \in G \subset \mathbb{R}^2$, $t \in [0,T]$, с начально-краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G \times (0,T)} = g. \quad (22)$$

Функции $q_i$ определяются на основе дополнительных измерений вида

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, r. \quad (23)$$

В теории тепломассопереноса [1] функция $u$ — концентрация переносимого вещества, $b$ — вектор скорости течения, $a$ — коэффициент, определяющий скорость осаждения в результате химических реакций, $c$ — коэффициент диффузии, правая часть $f$ — плотность функции источников.

При построении численного алгоритма обратной задачи (21)–(23) приходится находить старшие частные производные приближенных решений, что не очень удобно, поэтому заменим условие (23) (см. теорему 4) условием вида

$$\int\limits_G \varphi_{i\varepsilon}(x)u(x,t)\,dx = \psi_i(t),$$

где функции $\varphi_{i\varepsilon}$ обладают свойствами, приведенными перед теоремой 4, а именно, считаем, что они неотрицательны, имеют носитель, лежащий в области $G$ и стягивающийся к соответствующей точке $x_i$ при $\varepsilon \to 0$, и интеграл по $G$ от каждой из этих функций равен 1.

Алгоритм итерационный и основан на методе конечных элементов (МКЭ). Пусть на $k$-м шаге построено приближение $\vec{q}^{\,k} = \left(q_1^k, \ldots, q_r^k\right)$ вектор-функции $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_r)$, $\vec{q}^{\,0} = 0$. Задаем триангуляцию области $G$, узлы триангуляционной сетки $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m$ и соответствующие базисные кусочно-линейные функции $\{\varphi_i(x)\}$ (таким образом, $\varphi_i(\tilde{x}_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера). Без ограничения общности считаем, что точки замеров $x_1, x_2, \ldots, x_r$ являются узлами сетки. Тогда найдутся номера $j_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, такие, что $x_i = \tilde{x}_{j_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Выберем в качестве $\varphi_{i\varepsilon}$ функции $\frac{1}{V_i}\varphi_{j_i}$, где $V_i = \int\limits_G \varphi_{j_i}\, dx$. Такие функции удовлетворяют всем нашим условиям (в качестве параметра $\varepsilon$ можно брать наибольший диаметр треугольника сетки). Приближенное решение (21) ищем в виде

$$u_k = \sum_{i=1}^{m} C_i(t)\varphi_i(x).$$

Вектор-функция $\vec{C}(t) = (C_1(t), C_2(t), \ldots, C_m(t))$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M\vec{C}_t + K\vec{C} = F_0 + G + \sum_{i=1}^{r} F_i q_i^k, \tag{24}$$

где $M$ и $K$ — матрицы с элементами

$$M_{ji} = \int\limits_G \varphi_i\varphi_j\, dx, \quad K_{ji} = \int\limits_G (c\nabla\varphi_i\nabla\varphi_j + b\nabla\varphi_i\varphi_j + a\varphi_i\varphi_j)\, dx,$$

$F_0$, $G$ и $F_i$ — векторы с координатами $\int\limits_G f\varphi_j\, dx$, $\int\limits_\Gamma g\varphi_j\, dx$ и $\int\limits_G f_i\varphi_j\, dx$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, соответственно. Пусть

$$\vec{U}(t) = (C_1(t), C_2(t), \ldots, C_m(t)), \quad \vec{U}(0) = ((u_0(\tilde{x}_1), u_0(\tilde{x}_2), \ldots, u_0(\tilde{x}_m)).$$

Чтобы решить систему (24), используем метод конечных разностей (МКР). Заменяем (24) конечно-разностным уравнением

$$M\frac{\vec{C}_i - \vec{C}_{i-1}}{\Delta t} + K\vec{C}_i = \widetilde{F}_i, \quad \vec{C}_0 = \vec{U}|_{t=0}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,\ \Delta t = T/N, \tag{25}$$

где $\Delta t$ — шаг по времени и $\widetilde{F}_i$ — значение правой части в (24) в точке $i\Delta t$. Таким образом, кусочно-постоянное приближение решения $\vec{C}(t)$ системы (24) есть кусочно-постоянная функция, равная вектору $\vec{C}_i$ на множестве $((i-1)\Delta t, i\Delta t]$. В соответствии с равенством (20) (подставляем в правую часть (20) функции $\varphi_{i\varepsilon}$ и используем их определение) для нахождения следующей итерации $\vec{q}^{\,k+1}$ используем равенство

$$\vec{q}^{\,k+1} = B^{-1}\begin{bmatrix} \psi_{1t}V_1 + (c\nabla u_k, \nabla\varphi_{j_1}) + (b\nabla u_k + au_k, \varphi_{j_1}) - \int\limits_\Gamma g\varphi_{j_1}\, d\Gamma - (f, \varphi_{j_1}) \\ \vdots \\ \psi_{rt}V_r + (c\nabla u_k, \nabla\varphi_{j_r}) + (b\nabla u_k + au_k, \varphi_{j_r}) - \int\limits_\Gamma g\varphi_{j_r}\, d\Gamma - (f, \varphi_{j_r}) \end{bmatrix}, \tag{26}$$

где

$$(f, \varphi_{j_i}) = (f_0, \varphi_{j_i}) + \sum_{j=1}^{r} q_j^k(f_j, \varphi_{j_i}), \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

$$B = \begin{bmatrix} (f_1,\varphi_1) & \cdots & (f_r,\varphi_1) \\ & \vdots & \\ (f_1,\varphi_r) & \cdots & (f_r,\varphi_r) \end{bmatrix}.$$

Отметим, что поскольку $x_i$ — внутренние точки области $G$, а носители функций $\varphi_{j_i}$ стягиваются к точкам $x_i$ при измельчении сетки, без ограничения общности можно считать, что слагаемые $\int\limits_\Gamma g\varphi_{j_1}d\Gamma$ в (26) равны нулю. При численной реализации (см. ниже) заменяем функции $C_i(t)$, входящие в определение функции $u_k$, их кусочно-постоянными приближениями.

## § 3. Программная реализация алгоритма

Реализация алгоритма осуществлялась в среде инженерных и научных расчетов Matlab 2008, полученные функции Matlab компилировались и собирались в dll-библиотеку, которая впоследствии используется в .Net веб-приложении на движке Razor. Серверная и клиентская части программы писались на языке $C\#$ в среде разработки Visual Studio 2012 Express. Для наибольшей наглядности трехмерный график функции $u$ и графики функций $q(t)$ выводились при использовании JavaScript-библиотек Three.js и flot.js соответственно. Веб-приложение позволяет пользователю проще вводить данные задачи для его последующего решения.

Программная реализация алгоритма состоит из трех частей.

1. Инициализация массива, описывающего геометрию области и граничного вектора.

В этом пункте по заданным пользователем типу геометрии (эллипс или прямоугольник), параметрам геометрии (для эллипса — радиусы по горизонтали и по вертикали, для прямоугольника — стороны по горизонтали и по вертикали) и по координатам точек замера при помощи функции decsg создаем матрицу декомпозиционной геометрии, содержащую информацию о граничных участках. Используя декомпозиционную геометрию области и условия на границе, задаем граничный вектор.

2. Реализация итерационного расчета методом конечных элементов.

Для реализации МКЭ используем библиотеку Matlab, Partial Differential Equation Toolbox. На первой итерации генерируем триангуляционную сетку Делоне для ранее заданной декомпозиционной геометрии, используя функцию initmesh. Если пользователем задано количество разбиений сетки, то разбиваем сетку нужное количество раз с помощью функции refinemesh. Обозначим через $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ узлы триангуляционной сетки, которую строим таким образом, что все точки замеров $\{x_i\}$ являются узлами сетки. Далее определяем индексы этих точек, скажем $j_1, j_2, \dots, j_r$. При помощи функции assemb собираем граничный вектор правой части $G$, используя функцию assema и assemban, находим матрицу масс $M$, вектор правой части $F_0$ и матрицу жесткости $K$. Далее при помощи функции assema находим векторы правой части $F_j$, $j = 1, 2, \dots, r$.

3. Реализация метода конечных разностей.

Из уравнения (25) получаем

$$\vec{C}_i = (M + \Delta t \cdot K)^{-1} \cdot (\Delta t \cdot \widetilde{F}_i + M \cdot \vec{C}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где вектор $\vec{C}_0$ совпадает с начальным вектором $U|_{t=0}$ и $\vec{C}_i$ — значение кусочно-постоянного приближения вектора $\vec{C}(t)$ на $((i-1)\Delta t, i\Delta t]$.

Также на каждой итерации добавляется возмущение функции $\psi_{jt}$ случайными погрешностями в соответствии с формулой

$$\tilde{\psi}_j(t) = \psi_{jt} + \delta(2\sigma_n - 1).$$

Здесь $\sigma_n$ — случайная функция, нормально распределенная на $[0, 1]$, а величина $\delta$ задает уровень погрешности. Положим

$$\vec{\psi}(t) = (V_1\tilde{\psi}_1(t), \ldots, V_r\tilde{\psi}_r(t)).$$

Таким образом, заменяем (26) следующим равенством:

$$\vec{q}_i^{\,k+1} = B^{-1}(i\Delta t) \cdot (\vec{\psi}(i\Delta t) + K \cdot \vec{C}_i - F0(i\Delta t)), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где $F0$ — вектор с координатами $((f_0, \varphi_{j_1}), \ldots, (f_0, \varphi_{j_r}))$ и $\vec{q}_i^{\,k+1}$ — значение кусочно-постоянного приближения вектора $\vec{q}^{\,k+1}(t)$ на множестве $((i-1)\Delta t, i\Delta t]$.

Далее проверяем истинность неравенства

$$\max_i \left|\vec{q}_i^{\,k+1} - \vec{q}_i^{\,k}\right| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ — погрешность, задаваемая пользователем, $i = 1, 2, \ldots, r$. Если неравенство верно или число $k$ превысит некоторую наперед заданную пользователем величину $I$, то произойдет выход из программы.

## § 4. Результаты численных экспериментов

В этом параграфе проанализируем результаты численных экспериментов для двух групп входных данных задачи, полученных в результате решения модельных обратных задач в рамках эксперимента на ЭВМ. Характеристики испытуемой ЭВМ следующие: процессор Intel(R) Core(TM) i7-3517U CPU @ 1.90GHz 2.40GHz, ОЗУ 4,00 Гб, 64-разрядная операционная система Windows 7 Ultimate.

В результате расчетов определялось приближенное значение решения $(u, q_1, q_2, \ldots, q_r)$ задачи (21)–(23) в узлах сетки в моменты времени $t_i = i\Delta t$. Чтобы не загромождать изложение, ниже приведем результаты вычислений только функций $q_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Зададим решение и начальные условия для модельной задачи

$$u = (x^2 + y^2)(1 + t), \quad u|_{t=0} = x^2 + y^2, \quad u_t = x^2 + y^2.$$

Перейдем к обсуждению результатов решения модельных обратных задач по восстановлению зависимости плотности источника от времени в окружности единичного радиуса с центром в точке $(0, 0)$. Будем считать, что $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = y$ и дополнительная информация задается в трех точках наблюдения: $(0.3, -0.3)$, $(0.1, 0)$, $(-0.5, 0.5)$. Для численного решения задачи рассматриваем две сетки для описанной области с количеством узлов $N_1 = 263$ и $N_2 = 1015$ (рис. 1).

Все проводимые вычислительные эксперименты разобьем на две группы в зависимости от искомых коэффициентов $q_i$, граничных условий, коэффициентов уравнения $a$, $b$, $c$, $d$ и правой части $f$. Входные данные для первой группы таковы:

искомые коэффициенты $q_1 = 1$, $q_2 = t + 2$, $q_3 = t^2 + 4$;
граничные условия Неймана $\frac{\partial u}{\partial n} = 2(t + 1)$;
коэффициенты уравнения $d = 1$, $c = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $a = 1$;

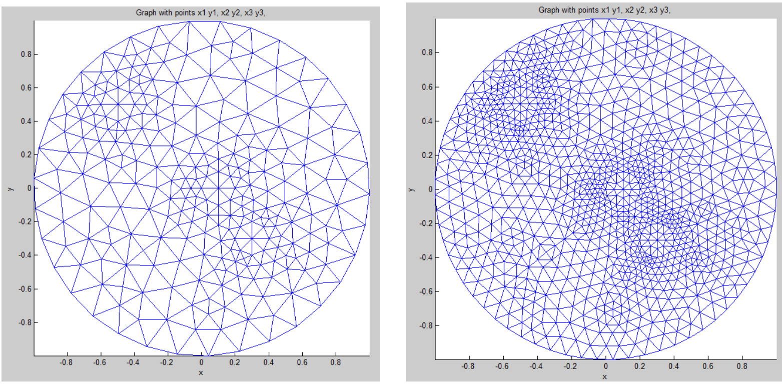


Рис. 1. Сетки: a) $N_1 = 263$; b) $N_2 = 1015$

правая часть $f = (x^2 + y^2) \cdot (t+1) - 4t + 2x(t+1) + 2y(t+1) + x^2 + y^2 - 5 - x(t+2) - y(t^2+4)$.

Приведем результаты численных экспериментов для первой группы. Сначала сравним результаты вычислений коэффициентов $q_i$ для двух сеток без зашумления данных, $\delta = 0$ и $\varepsilon = 10^{-5}$ (погрешность, задаваемая пользователем). Обозначим через $\iota$ количество полных итераций работы алгоритма и через $\tau$ — время, затраченное на вычисление, в секундах. Пусть алгоритм остановился на $k$-й итерации. В качестве еще одной погрешности работы алгоритма определим величину $\varepsilon_0 = \max\limits_i \left|\vec{q}_i^{\,k} - \vec{q}(i\Delta t)\right|$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Рассмотрим промежуток $[0, T]$, $T = 1$, положим $\Delta t = T/N$ — шаг по времени, $N = 100$.

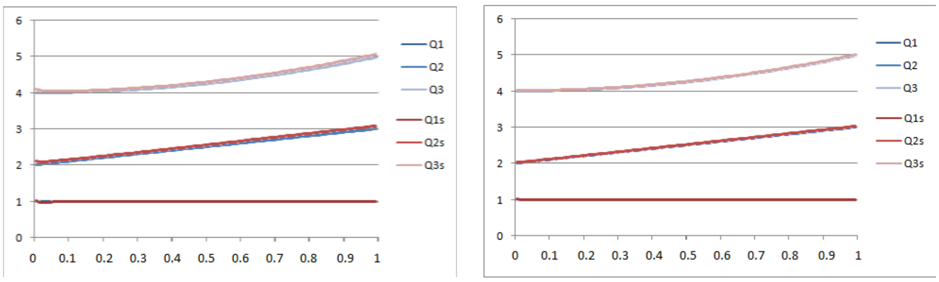


Рис. 2. Сравнение результатов вычислений для сеток:
a) сетка $N_1$: $\tau = 24.18$, $\iota = 16$, $\varepsilon_0 = 0.109$;
b) сетка $N_2$: $\tau = 510.01$, $\iota = 16$, $\varepsilon_0 = 0.027$

На рис. 2(a) и 2(b) приведены графики функций $q_i(t)$ (синие) и графики их приближения (красные). Как можно видеть, они практически сливаются. Далее будем изменять параметры $\varepsilon$ и $\delta$ так, чтобы описать зависимость ошибки решения $\varepsilon_0$ от уровня погрешности данных $\delta$ и параметра $\varepsilon$. Результаты экспериментов представлены на рис. 3.

На рис. 3 видно, что вне зависимости от уровня вводимого возмущения $\delta$ результаты вычислений $q_i$ повторяют искомые значения (рис. 3(a,b)) или располагаются рядом с ними (рис. 3(c,d)). Видим, что использование сетки $N_2$ приводит к меньшей погрешности вычислений.

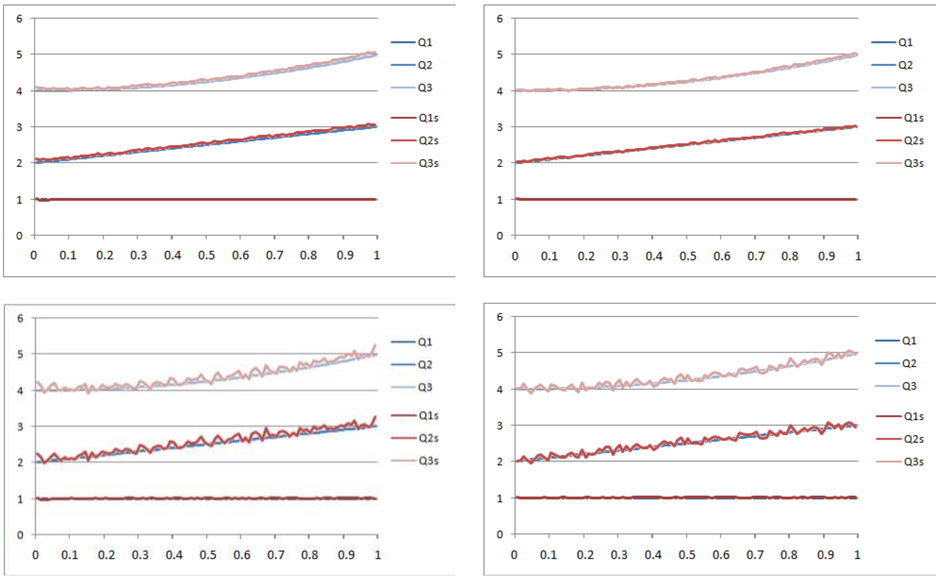


Рис. 3. Результаты вычислений для первой группы данных:
a) сетка $N_1$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.002$, $\tau = 23.29$, $\iota = 15$, $\varepsilon_0 = 0.112$;
b) сетка $N_2$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.002$, $\tau = 477.46$, $\iota = 14$, $\varepsilon_0 = 0.05$;
c) сетка $N_1$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 24.59$, $\iota = 16$, $\varepsilon_0 = 0.257$;
d) сетка $N_2$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 530.44$, $\iota = 16$, $\varepsilon_0 = 0.209$

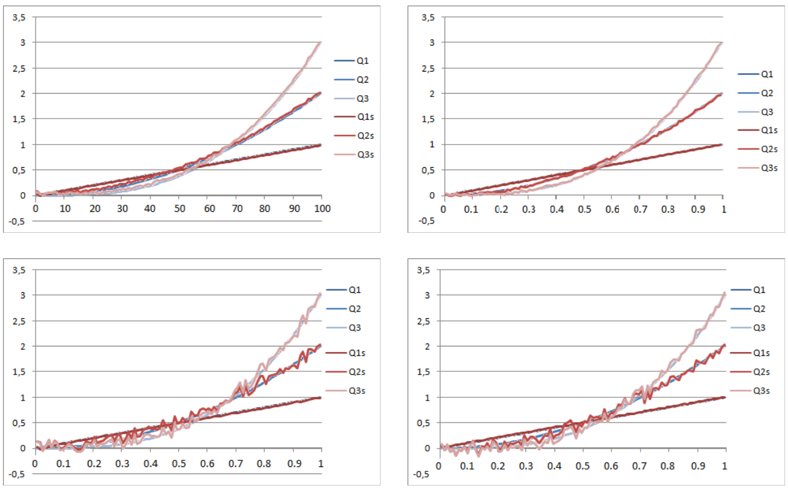


Рис. 4. Результаты вычислений для первой группы данных:
a) сетка $N_1$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.002$, $\tau = 14.22$, $\iota = 9$, $\varepsilon_0 = 0.078$;
b) сетка $N_2$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.002$, $\tau = 292.7$, $\iota = 9$, $\varepsilon_0 = 0.032$;
c) сетка $N_1$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 11.8$, $\iota = 7$, $\varepsilon_0 = 0.172$;
d) сетка $N_2$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 245.66$, $\iota = 7$, $\varepsilon_0 = 0.177$

Приведем результаты численных экспериментов для второй группы данных:

искомые коэффициенты $q_1 = t$, $q_2 = 2t^2$, $q_3 = 3t^3$;

граничные условия Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 2;$$

коэффициенты уравнения

$$d = 1, \quad c = \frac{1}{1+t}, \quad b_1 = \frac{x}{2(1+t)}, \quad b_2 = \frac{y}{2(1+t)}, \quad a = \frac{1}{1+t};$$

правая часть

$$f = 3 \cdot (x^2 + y^2) - 4 - t - 2x \cdot t^2 + 3y \cdot t^3.$$

Так же, как и с первой группой, будем изменять параметры $\varepsilon$ и $\delta$.

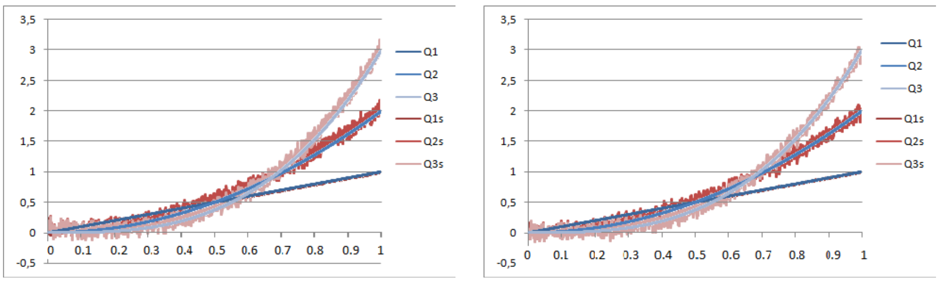


Рис. 5. Результаты вычислений для первой группы данных:
a) сетка $N_1$: $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 118.19$, $\iota = 7$, $\varepsilon_0 = 0.27$;
b) сетка $N_2$: $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 0.01$, $\tau = 2546.07$, $\iota = 7$, $\varepsilon_0 = 0.192$

Для двух экспериментов уменьшим шаг по времени в 10 раз ($\Delta t = 0.001$). Как видим из результатов экспериментов, в связи с изменением данных время выполнения $\tau$ для второй группы уменьшилось. Так же заметим, что при уменьшении шага по времени в 10 раз время, затраченное на просчет, увеличивается в 10 раз, а погрешность вычислений не уменьшается.

Подводя итоги, отметим, что эксперименты с использованием сетки $N_2$ показывают лучшую точность, чем с сеткой $N_1$, но выполнение программы с использованием сетки $N_2$ занимает больше времени. Необходимо принять во внимание тот факт, что число узлов сетки $N_2$ в $\approx 3.86$ больше $N_1$, а время выполнения программы с сеткой $N_2$ больше в среднем в $\approx 20$ раз, чем с сеткой $N_1$. Увеличение переменной $\varepsilon$ приводит к уменьшению времени вычислений $\tau$ и количества итераций $\iota$, а результаты вычислений становятся менее схожи с искомыми. Увеличение зашумленности данных $\delta$ в 5 раз приводит к увеличению выходной погрешности между искомым решением и найденным приблизительно в 5 раз.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Алексеев Г. В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Науч. мир, 2010.
2. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.

**3.** *Levandowsky M., Childress W. S., Hunter S. H., Spiegel E. A.* A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms // J. Protozoology. 1975. V. 22. P. 296–309.
**4.** *Capatina A., Stavre R.* A control problem in biconvective flow // J. Math. Kyoto Univ. 1997. V. 37, N 4. P. 585–595.
**5.** *Iskenderov A. D., Akhundov A. Ya.* Inverse problem for a linear system of parabolic equations // Dokl. Math. 2009. V. 79, N 1. P. 73–75.
**6.** *Ismailov M. I., Kanca F.* Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data // Inverse Probl. Sci. Eng. 2012. V. 20, N 24. P. 463–476.
**7.** *Ivanchov M. I.* Inverse problem of simultaneous determination of two coefficients in a parabolic equation // Ukr. Math. J. 2000. V. 52, N 3. P. 379–387.
**8.** *Li J., Xu Y.* An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation // J. Appl. Math. Comput. 2010. V. 34. P. 195–206.
**9.** *Kamynin V. L., Franchini E.* An inverse problem for a higher-order parabolic equation // Math. Notes. 1998. V. 64, N 5. P. 590–599.
**10.** *Kerimov N. B., Ismailov M. I.* An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 396. P. 546–554.
**11.** *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 12. С. 2168–2184.
**12.** *Криксин Ю. А., Плющев С. Н., Самарская Е. А., Тишкин В. Ф.* Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции-диффузии // Мат. моделирование. 1995. Т. 7, № 11. С. 95–108.
**13.** *Васин И. А., Камынин В. Л.* Об асимптотическом поведении решений обратных задач для параболических уравнений // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 4. С. 750–766.
**14.** *Калинина Е. А.* Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневост. мат. журн. 2004. Т. 5, № 1. С. 89–99.
**15.** *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
**16.** *Трянин А. П.* Определение коэффициентов теплообмена на входе в пористое тело и внутри него из решения обратной задачи // Инженерно-физ. журн. 1987. Т. 52, № 3. С. 469–475.
**17.** *Dehghan M., Shakeri F.* Method of lines solutions of the parabolic inverse problem with an overspecification at a point // Numer. Algorithms. 2009. V. 50, N 4. P. 417–437.
**18.** *Dehghan M.* Numerical computation of a control function in a partial differential equation // Appl. Math. Comput. 2004. V. 147. P. 397–408.
**19.** *Алифанов О. М., Артюхов Е. А., Ненарокомов А. В.* Обратные задачи сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009.
**20.** *Alifanov O. M.* Inverse heat transfer problems. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1994.
**21.** *Ozisik M. N., Orlando H. A. B.* Inverse heat transfer. New York: Taylor & Francis, 2000.
**22.** *Pyatkov S. G., Samkov M. L.* On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations // Sib. Adv. Math. 2012. V. 22, N 4. P. 287–302.
**23.** *Pyatkov S. G.* On some classes of inverse problems for parabolic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 18, N 8. P. 917–934.
**24.** *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: VNTL publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).
**25.** *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
**26.** *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Эдиториал УРСС, 2003.
**27.** *El Badia A., Ha-Duong T., Hamdi A.* Identification of a point source in a linear advection-dispersion-reaction equation: application to a pollution source problem // Inverse Probl. 2005. V. 21. P. 1–17.
**28.** *Панасенко А. Е., Старченко А. В.* Численное решение некоторых обратных задач с различными типами источников атмосферного загрязнения // Вестн. ТГУ. 2008. Т. 2, № 3. С. 47–55.
**29.** *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

**30.** *Пятков С. Г., Сафонов Е. И.* О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Математика. Физика. 2014. Т. 35, № 7. С. 61–74.

*Статья поступила 20 мая 2014 г.*

Пятков Сергей Григорьевич, Сафонов Егор Иванович
Югорский гос. университет,
ул. Чехова 16, Ханты-Мансийск 628012
s_pyatkov@ugrasu.ru, dc.gerz.hd@gmail.com

## *ВНИМАНИЮ АВТОРОВ*

К публикации в «Математических заметках ЯГУ» принимаются оригинальные статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

В редакцию представляется рукопись в двух экземплярах объемом не более 1 авторского листа, оформленная согласно стандартным требованиям к авторским оригиналам. К рукописи должны быть приложены два экземпляра аннотации и список ключевых слов на двух языках (русский и английский), шифр УДК. Депонирование рукописи редакцией не осуществляется. Авторы обязаны указать место работы, должность и контактную информацию на двух языках. В случае возвращения статьи для переработки указываются две даты поступления — первоначальная дата и дата получения редакцией окончательного текста.

Основные требования к оформлению рукописи:

1. Текст статьи должен быть напечатан через 2 интервала на одной стороне листа белой писчей бумаги форматом $210 \times 300$ мм.

2. Рисунки и сложные диаграммы выполняются на отдельных листах с указанием на обороте фамилии автора, название статьи и номера рисунка; их место в тексте указывается на полях статьи.

3. Номер формулы ставится у правого края листа.

4. Рукописи желательно подготовить с использованием наборных систем типа TEX.

5. В рукописях, подготовленных с помощью текстовых редакторов типа Word, должны быть размечены греческие, готические, латинские рукописные буквы, указано использование букв прямого начертания, а также проведена разметка индексов.

6. В авторских оригиналах, подготовленных с использованием наборных систем типа TEX и выданных на лазерном принтере, разметка формул не проводится, однако на полях поясняются буквы готического алфавита.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Список литературы на двух языках печатается в конце текста на отдельном листе. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

Рукописи, оформленные не по стандартам или превышающие указанный выше объем, возвращаются.