СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 22, № 1 (85) **Январь—март, 2015**

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Математическое моделирование

Адрес редакции:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/

e-mail: prokopevav85@gmail.com; madu@ysu.ru; ivanegorov51@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2015. Том 22, № 1

УДК 514.764

О ГЛАДКИХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ЖЕВРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. И. Антипин, С. В. Попов

Аннотация. Рассматривается задача Жевре для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками с меняющимся направлением времени с непрерывными условиями склеивания, которые приведены к теории интегральных уравнений с ядром, однородным степени -1. Устанавливается разрешимость краевых задач в пространствах Гёльдера. Показано, что гёльдеровские классы их решений зависят от выполнения необходимых и достаточных условий на входные данные задачи.

Ключевые слова: задача Жевре, уравнения с меняющимся направлением времени, условия склеивания, корректность, пространство Гёльдера, интегральное уравнение с ядром, однородным степени -1.

V. I. Antipin and S. V. Popov. About Smooth Gevrey Solutions for Equations of the Third Order.

Abstract: Gevrey problem is considered for equations of the third order with multiple characteristics with changing time direction with the continuous conditions bonding, which is given to the theory of integral equations with a kernel homogeneous of degree -1. Establishes the solvability of boundary value problems in the spaces of Holder. It is shown that the holder classes of their decisions depend on the completion of necessary and sufficient conditions on the input data of the task.
Keywords: task Gevrey, equations with changing time direction, the conditions of bonding, correctness, space holder, integral equation with a kernel homogeneous of degree -1.

1. Введение

Рассматривается уравнение Жевре третьего порядка с кратными характеристиками

$$u_{xxx} - \operatorname{sgn} x \cdot u_t = F(x,t). \tag{1}$$

Впервые разрешимость краевых задач для уравнения (1) рассматривалась в работах Т. Д. Джураева [1]. Как известно, в обычных краевых задачах для строго параболических уравнений гладкость начальных и граничных данных без дополнительных условий полностью обеспечивает принадлежность решения пространствам Гёльдера $H_{x\ t}^{p,p/2}$, но в случае уравнений с меняющимся направлением времени гладкость начальных и граничных данных далеко не обеспечивает принадлежность решения этим пространствам. С. А. Терсеновым [2] в

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014–2016 гг. (проект № 3047).

простейших случаях получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи в пространствах $H_{x\ t}^{p,p/2}$ при $p > 2$. При этом условия разрешимости (ортогональности), которым должны удовлетворять данные задачи, были выписаны в явном виде. Далее краевые задачи Жевре рассматривались в работах [3–5]. Отметим, что в одномерном случае число необходимых условий ортогональности конечно. В то же время в многомерном случае число условий ортогональности (интегрального характера) бесконечно [6, 7]. Обобщенную, регулярную разрешимость краевых задачи Жевре можно найти в работах [8, 9].

2. Гладкая разрешимость

В области $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \equiv \mathbb{R}$, рассмотрим уравнение (1). Части полосы Q, где $x < 0$ и $x > 0$, обозначим через Q^- и Q^+.

Пространством $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q)$, $p = 3 + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, называется банахово пространство функций $u(x,t)$, непрерывных в $\overline{Q}$ вместе со всеми производными вида $D_t^r D_x^q$ при $3r + q < p$, имеющими конечную норму

$$|u|_Q^{(p)} = \langle u\rangle_Q^{(p)} + \sum_{j=0}^{3} \sum_{3r+q=j} \left|D_t^r D_x^q u\right|_Q^{(0)}, \quad |u|_Q^{(0)} = \max_Q |u|,$$

где

$$\langle u\rangle_Q^{(p)} = \langle u\rangle_{x,Q}^{(p)} + \langle u\rangle_{t,Q}^{(p/3)}, \quad \langle u\rangle_{x,Q}^{(p)} = \langle u_t\rangle_{x,Q}^{(\gamma)} + \langle u_{xxx}\rangle_{x,Q}^{(\gamma)},$$

$$\langle u\rangle_{t,Q}^{(p/3)} = \sum_{0<p-3r-q<3} \left\langle D_t^r D_x^q u\right\rangle_{t,Q}^{(\frac{p-3r-q}{3})}.$$

Решение уравнения ищется из пространства Гёльдера $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q^{\pm})$, $p = 3+\gamma$, $0 < \gamma < 1$, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$u(x,0) = \varphi_1(x),\ x > 0, \quad u(x,T) = \varphi_2(x),\ x < 0, \tag{2}$$

и условиям склеивания:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0,t) = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0,t) \quad (k = 0, 1, 2). \tag{3}$$

Единственность решения доказывается аналогично [1, с. 157].

Существование решения. Прежде чем приступить к доказательству существования решения поставленной задачи, приведем для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{4}$$

фундаментальное и элементарное решения Каттабрига [10–12]. Эти решения для уравнения (4) имеют вид

$$U_i(x,t;\xi,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(t-\tau)^{1/3}} f_i\left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}}\right), & t > \tau, \\ 0, & t \le \tau, \end{cases} \tag{5}$$

где $f_0(\eta)$, $f_1(\eta)$ называются функциями Эйри и являются линейно независимыми решениями дифференциального уравнения

$$z''(\eta) + \frac{\eta}{3} z(\eta) = 0 \tag{6}$$

и имеют вид

$$f_0(\eta)=\int\limits_0^\infty \cos(\lambda^3-\lambda\eta)\,d\lambda,\quad -\infty<\eta<+\infty,$$

$$f_1(\eta)=\int\limits_0^\infty [e^{-\lambda^3-\lambda\eta}+\sin(\lambda^3-\lambda\eta)]\,d\lambda,\quad \eta>-\infty.$$

Для фундаментального решения $f_0(\eta)$ и элементарного решения $f_1(\eta)$ справедливы оценки [11]

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\frac{\partial^{k+j}}{\partial x^k\partial t^j}U_0(x,t;\xi,\tau)\right| \\ \left|\frac{\partial^{k+j}}{\partial x^k\partial t^j}U_1(x,t;\xi,\tau)\right| \end{array}\right. < C_0\frac{|x-\xi|^{(2k+6j-1)/4}}{|t-\tau|^{(2k+6j+1)/4}} \tag{7}$$

при $\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}}\to+\infty$, $k+j\geq 1$ и

$$\left|\frac{\partial^{k+j}}{\partial x^k\partial t^j}U_0(x,t;\xi,\tau)\right|<\frac{C_1}{|t-\tau|^{\frac{1+k+3j}{3}}}\exp\left(-C_2\frac{|x-\xi|^{\frac{3}{2}}}{|t-\tau|^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{8}$$

при $\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}}<+\infty$, C_0, C_1, C_2 — положительные постоянные.

Кроме того, нетрудно проверить, что

$$f_0(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_0^\infty e^{-\eta^3}\,d\eta=\frac{1}{2\sqrt{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), f_1(0)=\frac{3}{2}\int\limits_0^\infty e^{-\eta^3}\,d\eta=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$f_0'(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_0^\infty \eta e^{-\eta^3}\,d\eta=\frac{1}{2\sqrt{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right), f_1'(0)=-\frac{3}{2}\int\limits_0^\infty \eta e^{-\eta^3}\,d\eta=-\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \tag{9}$$

$$\int\limits_0^\infty f_0(\eta)\,d\eta=\frac{2\pi}{3},\quad \int\limits_{-\infty}^0 f_0(\eta)\,d\eta=\frac{\pi}{3},\quad \int\limits_0^\infty f_1(\eta)\,d\eta=0.$$

Для удобства вместо уравнения (1) будем рассматривать систему уравнений при $F(x,t)\equiv 0$:

$$u_t^1=Lu^1,\quad u_t^2=Lu^2\quad \left(L\equiv\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) \tag{10}$$

в области Q^+. При этом начальные условия и условия склеивания будут иметь вид

$$u^1(x,0)=\varphi_1(x),\quad u^2(x,T)=\varphi_2(-x),\ x>0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^k u^1}{\partial x^k}(0,t)=(-1)^k\frac{\partial^k u^2}{\partial x^k}(0,t)\quad (k=0,1,2). \tag{12}$$

Будем предполагать, что $\varphi_i(x)\in H^p(\mathbb{R})$ $(i=1,2)$. Тогда функции

$$\omega_1(x,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} U_0(x,t;\xi,0)\varphi_1(\xi)\,d\xi,\quad \omega_2(x,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} U_0(\xi,T;x,t)\varphi_2(\xi)\,d\xi \tag{13}$$

являются решениями уравнений (10), удовлетворяющими условиям (11) в $\mathbb{R}$. Будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (10):

$$\begin{gathered} u^1(x,t) = \int\limits_0^t U_0(x,t;0,\tau)\alpha_0(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t U_1(x,t;0,\tau)\alpha_1(\tau)\,d\tau + \omega_1(x,t), \\ u^2(x,t) = \int\limits_t^T U_0(0,\tau;x,t)\beta_0(\tau)\,d\tau + \omega_2(x,t). \end{gathered} \tag{14}$$

В силу общих результатов [11, 13, 14] плотности α_0, α_1, β_0 должны принадлежать пространству H^q ($q = \frac{\gamma+1}{3}$), причем

$$\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = \beta_0(T) = 0. \tag{15}$$

В самом деле, отметим, что $u^1(x,t) \in H^{p,p/3}_{x\ t}(Q^+)$, если краевые условия $\psi_1(t) = u^1(0,t) \in H^{1+\frac{\gamma}{3}}(0,T)$ и $\psi_2(t) = u^1_x(0,t) \in H^{\frac{2+\gamma}{3}}(0,T)$ и выполнены условия согласования

$$\psi_1(0) = \varphi_1(0), \quad \psi_1'(0) = \varphi_1'''(0), \quad \psi_2(0) = \varphi_2'(0). \tag{16}$$

Пользуясь равенствами (9), имеем

$$\psi_1(t) = f_0(0)\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau) + \sqrt{3}\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\,d\tau + \omega_1(0,t),$$

$$\psi_2(t) = f_0'(0)\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau) - \sqrt{3}\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}}\,d\tau + \omega_{1x}(0,t),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \psi_1'(t) = f_0(0)\frac{d}{dt}\int\limits_0^t & \frac{\alpha_0(\tau) + \sqrt{3}\alpha_1(\tau) - \alpha_0(0) - \sqrt{3}\alpha_1(0)}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\,d\tau \\ & + f_0(0)(\alpha_0(0) + \sqrt{3}\alpha_1(0))t^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} U_0(0,t;\xi,0)\varphi_1'''(\xi)\,d\xi, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(t) = f_0'(0)\int\limits_0^t & \frac{\alpha_0(\tau) - \sqrt{3}\alpha_1(\tau) - \alpha_0(0) + \sqrt{3}\alpha_1(0)}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}}\,d\tau \\ & + 3f_0'(0)(\alpha_0(0) - \sqrt{3}\alpha_1(0))t^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} U_0(0,t;\xi,0)\varphi_1'(\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

Если $\alpha_0(t), \alpha_1(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{3}}(0,T)$, то справедливы утверждения [2, 11]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau) + \sqrt{3}\alpha_1(\tau) - \alpha_0(0) - \sqrt{3}\alpha_1(0)}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\,d\tau \in H^{\frac{\gamma}{3}}(0,T),$$

$$\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)-\sqrt{3}\alpha_1(\tau)-\alpha_0(0)+\sqrt{3}\alpha_1(0)}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}}\,d\tau \in H^{\frac{2+\gamma}{3}}(0,T),$$

кроме того,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} U_0(0,t;\xi,0)\varphi_1'''(\xi)\,d\xi \in H^{\frac{\gamma}{3}}(0,T),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} U_0(0,t;\xi,0)\varphi_1'(\xi)\,d\xi \in H^{\frac{2+\gamma}{3}}(0,T).$$

Следовательно, при выполнении условий $\alpha_0(0)=\alpha_1(0)=0$ будут выполнены условия $\psi_1(t)\in H^{1+\frac{\gamma}{3}}(0,T)$, $\psi_2(t)\in H^{\frac{2+\gamma}{3}}(0,T)$ и условия согласования (16) для функций $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$.

Из условий склеивания (12) получим систему интегральных уравнений с операторами Абеля относительно α_0, α_1, β_0:

$$\begin{cases} f_0(0)\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)+\sqrt{3}\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\,d\tau+\omega_1(0,t)=f_0(0)\int\limits_t^T \frac{\beta_0(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{3}}}\,d\tau+\omega_2(0,t), \\ f_0'(0)\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)-\sqrt{3}\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}}\,d\tau+f_0'(0)\int\limits_t^T \frac{\beta_0(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{2}{3}}}\,d\tau+\omega_{1x}(0,t)+\omega_{2x}(0,t)=0, \\ -\frac{2\pi}{3}\alpha_0(t)+\omega_{1xx}=-\frac{\pi}{3}\beta_0(t)+\omega_{2xx}. \end{cases} \tag{18}$$

Из уравнений (18) при помощи формул обращения оператора Абеля [2] получим эквивалентные системы сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_0(t)+\sqrt{3}\alpha_1(t))+\frac{1}{\sqrt{3}}\beta_0(t)-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{\tau}{t}\right)^{2/3}\frac{\beta_0(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Phi_0(\tau)}{(t-\tau)^{2/3}}\,d\tau, \\ \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_0(t)-\sqrt{3}\alpha_1(t))+\frac{1}{\sqrt{3}}\beta_0(t)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/3}\frac{\beta_0(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Phi_1(\tau)}{(t-\tau)^{1/3}}\,d\tau, \\ 2\alpha_0(t)-\beta_0(t)=\Phi_2(t), \end{cases} \tag{19}$$

где

$$\Phi_j(t)=\frac{1}{\pi f^{(j)}(0)}\left(\frac{\partial^j\omega_2}{\partial x^j}(0,t)-(-1)^j\frac{\partial^j\omega_1}{\partial x^j}(0,t)\right)\quad (j=0,1),$$

$$\Phi_2(t)=\frac{3}{\pi}[\omega_{2xx}(0,t)-\omega_{1xx}(0,t)].$$

Введем обозначения

$$F_0^0(t)=\int\limits_0^t \frac{\Phi_0'(\tau)-\Phi_0'(0)}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}}\,d\tau,\quad F_1^0(t)=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Phi_1(\tau)-\Phi_1(0)}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\,d\tau,$$

$$F_2^0(t)=\Phi_3(t)-\Phi_3(0).$$

Так как $\Phi_k^0(t)\in H^{q_k}(0,T)$, $q_k=1+\frac{\gamma-k}{3}$ [2], функции $F_k^0(t)$ $(k=0,1,2)$ принадлежат пространству $H^{(1+\gamma)/3}(0,T)$, причем $F_k^0(t)=O(t^{(1+\gamma)/3})$ для малых t.

Докажем существование решений α_1, α_2, β_0 системы уравнений (19) из пространства $H^q(0,T)$ $(q=(p-2)/3,\ p=3+\gamma,\ 0<\gamma<1)$, удовлетворяющие условиям (15).

Предположим, что функции α_1, α_2, β_0 принадлежат искомому пространству. Тогда из системы (19) следует выполнение условий

$$\begin{cases} -\frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\beta_0(\tau)}{\tau^{\frac{1}{3}}}\,d\tau = \Phi_0(0), \\ \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\beta_0(\tau)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\,d\tau = \Phi_1(0), \\ \beta_0(0) = -\Phi_2(0). \end{cases} \tag{20}$$

Последнее равенство эквивалентно первому условию (15) $\alpha_0(0) = 0$. Отметим также, что $2\alpha_0(T) = \Phi_2(T)$ эквивалентно условию $\beta_0(T) = 0$.

При выполнении условий (20) систему уравнений (19) можно переписать так:

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_0(t) + \sqrt{3}\alpha_1(t)) + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta_0(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/3}\frac{\beta_0(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 3\Phi_0'(0)t^{1/3} + F_0^0(t), \\ \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_0(t) - \sqrt{3}\alpha_1(t)) + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta_0(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{2/3}\frac{\beta_0(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = F_1^0(t), \\ 2\alpha_0(t) - \beta_0(t) + \beta_0(0) = F_2^0(t). \end{cases} \tag{21}$$

Имея в виду формулу [15, с. 177]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\tau^{\rho-1}(T-\tau)^{\sigma-1}}{\tau - t}\,d\tau = t^{\rho-1}(T-t)^{\sigma-1}\operatorname{ctg}(\sigma\pi) - \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma-1)}{\pi\Gamma(\rho+\sigma-1)}T^{\rho+\sigma-2}F\biggl(2-\rho-\sigma, 1, 2-\sigma; \frac{T-t}{T}\biggr), \tag{22}$$

определим $\alpha_1(T)$.

Введем в системе (21) новую искомую функцию $\bar{\beta}_0(t) = \beta_0(t) - \beta_0(0)\frac{T-t}{T}$. Тогда (21), воспользовавшись формулой (22), представим в виде

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_0(t) + \sqrt{3}\alpha_1(t)) + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\beta}_0(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/3}\frac{\bar{\beta}_0(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \\ \qquad = -\frac{9}{2\pi}\beta_0(0)F\bigl(-\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}; \frac{t}{T}\bigr)\bigl(\frac{t}{T}\bigr)^{\frac{1}{3}} + 3\Phi_0'(0)t^{1/3} + F_0^0(t), \\ \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_0(t) - \sqrt{3}\alpha_1(t)) + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\beta}_0(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{2/3}\frac{\bar{\beta}_0(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \\ \qquad = \frac{9}{2\pi}\beta_0(0)F\bigl(-\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}; \frac{t}{T}\bigr)\bigl(\frac{t}{T}\bigr)^{\frac{2}{3}} + F_1^0(t), \\ 2\alpha_0(t) - \bar{\beta}_0(t) = -\beta_0(0)\frac{t}{T} + F_2^0(t). \end{cases} \tag{23}$$

Так как функции $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_0(t)$ ищем из пространства $H^{(1+\gamma)/3}(0,T)$, из первого уравнения полученной системы уравнений следует, что должно выполняться условие

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\bar{\beta}_0(\tau)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\,d\tau = -\frac{9}{2\pi}\beta_0(0)\frac{1}{T^{\frac{1}{3}}} + 3\Phi_0'(0). \tag{24}$$

Тогда при выполнении (24) в конечном итоге придем к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_0(t)+\sqrt{3}\alpha_1(t))+\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\beta}_0(t)-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{t}{\tau}\right)^{4/3}\frac{\bar{\beta}_0(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\overline{F}_0^0(t),\\ \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_0(t)-\sqrt{3}\alpha_1(t))+\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\beta}_0(t)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{t}{\tau}\right)^{2/3}\frac{\bar{\beta}_0(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\overline{F}_1^0(t),\\ 2\alpha_0(t)-\bar{\beta}_0(t)=\overline{F}_2^0(t), \end{cases} \tag{25}$$

где функции

$$\overline{F}_0^0(t)=-\frac{9}{2\pi}\beta_0(0)\left[F\left(-\frac{2}{3},1,\frac{4}{3};\frac{t}{T}\right)-1\right]\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{3}}+F_0^0(t),$$

$$\overline{F}_1^0(t)=\frac{9}{2\pi}\beta_0(0)F\left(-\frac{1}{3},1,\frac{5}{3};\frac{t}{T}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{2}{3}}+F_1^0(t),$$

$$\overline{F}_2^0(t)=-\beta_0(0)\frac{t}{T}+F_2^0(t)$$

принадлежат пространству $H^{(1+\gamma)/3}(0,T)$, причем $\overline{F}_j^0(t)=O(t^{\frac{1+\gamma}{3}})$ $(j=0,1,2)$ для малых t.

Перейдем к доказательству существования функций $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_0(t)$ из пространства $H^{(1+\gamma)/3}(0,T)$ в полученной системе уравнений (25).

Исключив $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ из системы (25), имеем

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\bar{\beta}_0(t)+\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\pi}\int\limits_0^T K(t,\tau)\bar{\beta}_0(\tau)\,d\tau=Q(t), \tag{26}$$

где

$$K(t,\tau)=\frac{\tau^{\frac{1}{3}}+t^{\frac{1}{3}}}{\tau^{\frac{4}{3}}(\tau^{\frac{2}{3}}+\tau^{\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}}+t^{\frac{2}{3}})},\quad Q(t)=\overline{F}_0^0(t)+\overline{F}_1^0(t)-\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{F}_2^0(t).$$

Для ядра $K(t,\tau)$ уравнение (26) справедлива оценка

$$K(t,\tau)\le\frac{\tau^{\frac{1}{3}}+t^{\frac{1}{3}}}{\tau^{\frac{4}{3}}|\tau-t|^{\frac{2}{3}}}. \tag{27}$$

Ядро уравнения (26) преобразуем в следующем виде:

$$t^{\frac{2}{3}}K(t,\tau)=\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1+\gamma}{3}}\varphi\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{1}{\tau},\quad \varphi(x)=x^{\frac{1-\gamma}{3}}\frac{1-x^{\frac{2}{3}}}{1-x}.$$

Полагая в (26) $\beta_1(t)=\bar{\beta}_0(t)t^{-\frac{1+\gamma}{3}}$, $Q_1(t)=Q(t)t^{-\frac{1+\gamma}{3}}$, имеем

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\beta_1(t)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T\varphi\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\beta_1(\tau)}{\tau}\,d\tau=Q_1(t). \tag{28}$$

Интегральное уравнение (28) является уравнением с ядром, однородным степени -1 [16]. Вводя новые независимые переменные $t=Te^{-y}$, $\tau=Te^{-x}$ и обозначая

$$\beta_2(y)=\beta_1(Te^{-y}),\quad Q_2(y)=Q_1(Te^{-y}),\quad h(x)=\varphi(e^{-x})=e^{(1-\beta)x}K_1(1,e^x),$$

$$K_1(t,\tau) = \tau^{\frac{2}{3}} K(t,\tau), \quad \beta = \frac{1-\gamma}{3},$$

получим интегральное уравнение Винера — Хопфа [16, 17]

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\beta_2(y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} h(y-x)\beta_2(x)\,dx = Q_2(y), \quad 0 < y < +\infty. \tag{29}$$

Нетрудно проверить выполнение условия интегрируемости

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|\,dx = \int\limits_0^{+\infty} |K_1(1,u)| u^{-\beta}\,du = 2\sqrt{3}\pi \frac{\sin(\beta+\frac{1}{3})\pi}{\sin(3\beta\pi)}$$

при $0 < \beta < \frac{1}{3}$. Поэтому уравнение (28) будем рассматривать в пространстве $H^{\beta}(0,T)$, $0<\beta<\frac{1}{3}$. Функция

$$h(x) = e^{(1-\beta)x} K_1(1, e^x) = e^{(\frac{1}{6}-\beta)x} \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{3}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}},$$

будет четной при $\beta = \frac{1}{6}$. Ядро (28) симметризуемо в пространстве $E_{\frac{1}{6}}(0,T)$ [16], при этом [16, с. 518]

$$H(x) = 2\int\limits_0^{+\infty} \cos(xt) \frac{\operatorname{sh}\frac{t}{3}}{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}\,dt = \frac{2\sqrt{3}\pi}{2\operatorname{ch}(2\pi x) - 1},$$

положительна и монотонна на $(0,+\infty)$ и $H(0) = 2\sqrt{3}\pi$. В пространстве $E_{\frac{1}{6}}(0,T)$ уравнение [16]

$$\beta_1(t) + \lambda \int\limits_0^T \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{\beta_1(\tau)}{\tau}\,d\tau = Q_1(t) \tag{30}$$

однозначно разрешимо при $\lambda \in N_\lambda = \left(-\infty; \frac{1}{2\sqrt{3}\pi}\right)$, для (28) имеем $\lambda_0 = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \in N_\lambda$.

В пространствах Гёльдера исследование уравнений вида (28), на который теория уравнений Винера — Хопфа (29) не переносится прямо, можно найти в работах [19, 20]. Фредгольмовость интегрального оператора (28) следует из теоремы 2 в [19], а именно из условия

$$B(x) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \int\limits_0^{+\infty} \varphi(t) t^{q-ix}\,dt$$

нигде на действительной оси в нуль не обращается при любом $q \in \mathbb{R}$, которое легко проверяется.

Интегральное уравнение (26) будем рассматривать как уравнение относительно $\beta_3(t) = \bar{\beta}_0(t) t^{-\frac{2}{3}}$. Найдем решения $\beta_3(t)$, не ограниченные при $t=0$, но допускающие особенность порядка меньше 1 и ограниченные при $t = T$. Из уравнения (26) имеем

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\beta_3(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K(t,\tau)\tau^{\frac{2}{3}}\beta_3(\tau)\,d\tau = \frac{Q(t)}{t^{\frac{2}{3}}}. \tag{31}$$

Из уравнения (31) следует, что для того чтобы $\beta_0(T) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K(T,\tau)\tau^{\frac{2}{3}}\beta_3(\tau)\,d\tau = \frac{Q(T)}{T^{\frac{2}{3}}}. \tag{32}$$

При выполнении условия (32) придем к следующему уравнению:

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\beta_3(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K_2(t,\tau)\beta_3(\tau)\,d\tau = Q_3(t), \tag{33}$$

где

$$K_2(t,\tau) = \frac{(T^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}})(\tau^{\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{3}} + \tau^{\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{3}})}{\tau^{\frac{2}{3}}(\tau^{\frac{2}{3}} + \tau^{\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{2}{3}})(\tau^{\frac{2}{3}} + \tau^{\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{3}} + T^{\frac{2}{3}})}, \quad Q_3(t) = \frac{Q(t)}{t^{\frac{2}{3}}} - \frac{Q(T)}{T^{\frac{2}{3}}}.$$

Для функции $K_3(t,\tau) = \frac{K_2(t,\tau)}{T^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}}}$ уравнения (33) справедливы оценки

$$0 \le K_3(t,\tau) \le \frac{\tau^{\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{3}} + \tau^{\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{3}}}{\tau^{\frac{2}{3}}|\tau - t|^{\frac{2}{3}}|\tau - T|^{\frac{2}{3}}}. \tag{34}$$

Отсюда легко вывести, что $K_3(t,\tau)t^{\frac{2}{3}}$, $Q_3(t)t^{\frac{2}{3}}$ на концах 0, T соответственно будут вести себя как $t^{\frac{1+\gamma}{3}}(T-t)^{\frac{1+\gamma}{3}}$, $t^{\frac{1+\gamma}{3}}(T-t)^{\frac{1+\gamma}{3}}$, причем $\beta_0(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{3}}(0,T)$, $\alpha_k(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{3}}(0,T)$ $(k = 0,1)$.

Поведение интеграла $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K_3(t,\tau)\beta_3(\tau)\,d\tau$ на концах контура интегрирования находится по формуле [15, с. 136]

$$\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int\limits_0^t \tau^{\rho-1}(t-\tau)^{\sigma-1}\,d\tau = \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\sigma)}t^{\rho+\sigma-1}.$$

Отсюда легко получить

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_t^T K_3(t,\tau)\beta_3(\tau)\,d\tau = O((T-t)^{\frac{\gamma}{3}}) \quad \text{для малых } T-t,$$

$$\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\pi}\int\limits_0^t K_3(t,\tau)\beta_3(\tau)\,d\tau = O(t^{\frac{1+\gamma}{3}}) \quad \text{для малых } t.$$

Системы уравнений (25) эквивалентны исходной системе уравнений (18) при выполнении четырех условий (20), (24) и (32). Подставляя найденные значения функций $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_0(t)$ в условия (20), (24) и (32), получим четыре условия разрешимости задачи (1)–(3) в пространстве $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q)$. Эти условия обозначим так:

$$L_s(\varphi_1,\varphi_2) = 0, \quad s = 1,2,3,4. \tag{35}$$

Итак, доказана

Теорема. *Пусть* $\varphi_1,\varphi_2 \in H^p$ $(p = 3+\gamma)$, $0 < \gamma < 1$. *Тогда при выполнении четырех условий* (35) *существует единственное решение уравнения* (1) *в* Q *из пространства* $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q^{\pm})$, *удовлетворяющее условиям* (2), (3).

Замечание. Аналогичные исследования можно провести в случае $\varphi_1,\varphi_2 \in H^p$ $(p = 3l+\gamma)$, $0 < \gamma < 1$, где $l \ge 1$ — целое число.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979.

2. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.

3. *Попов С. В.* Параболические уравнения с меняющимся направлением эволюции // Мат. заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, № 2. С. 93–112.

4. *Попов С. В.* О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. РАН. 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.

5. *Потапова С. В., Попов С. В.* Разрешимость параболических уравнений $2n$-го порядка с меняющимся направлением эволюции // Вестн. Самар. ун-та: естественнонауч. сер. 2007. № 6. С. 162–175.

6. *Пятков С. Г.* О свойствах собственных функций одной спектральной задачи и их приложения // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики, 1984. С. 115–130.

7. *Пятков С. Г.* О разрешимости одной краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 6. С. 1322–1327.

8. *Антипин В. И., Попов С. В.* Краевые задачи для уравнений третьего порядка с меняющимся направлением времени // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. 2012. Т. 14, № 40. С. 19–28.

9. *Антипин В. И.* Разрешимость краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 245–257.

10. *Cattabriga L.* Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1961. V. 31. P. 1–45.

11. *Cattabriga L.* Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine $2n$ // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1958. V. 28. P. 376–401.

12. *Cattabriga L.* Equazioni paraboliche in due variabili. I // Rend. sem. fac. sc. Univ. Cagliari. 1961. V. 31, N 1-2. P. 48–79; II // Rend. sem. fac. sc. Univ. Cagliari. 1962. V. 32, N 3-4. P. 254–267.

13. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

14. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных уравнений общего вида // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.

15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М.: Наука, 1970.

16. *Михайлов Л. Г.* Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1. Душанбе: Дониш, 1966.

17. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.

18. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

19. *Солдатов А. П.* Решение одной краевой задачи теории функций со смещением // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 143–152.

20. *Солдатов А. П.* Один класс сингулярных интегральных уравнений со сдвигом некарлемановского типа // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 1. С. 137–150.

Статья поступила 16 февраля 2015 г.

Антипин Василий Иванович, Попов Сергей Вячеславович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
кафедра математического анализа,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
madu@ysu.ru, antvasiv@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2015. Том 22, № 1

УДК 514.755

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПЯТИМЕРНЫХ B–КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P^5

И. В. Бубякин

Аннотация. Рассматривается дифференциальная геометрия пятимерных B-комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5. Определяется строение пятимерных B-комплексов двумерных плоскостей.

Ключевые слова: комплексы двумерных плоскостей, грассманово отображение, многообразие Сегре.

I. V. Bubyakin. On the Differential Geometry of Five-Dimensional B-Complexes of Planes in the Projective Space P^5.

Abstract: The differential geometry of five-dimensional B-complexes is considered in the projective space P^5. The structure is determined five-dimensional B-complexes of two-dimensional planes.

Keywords: complexes of two-dimensional plane, Grassman map, Segre manifold.

1. Данная работа относится к многомерной проективно-дифференциальной геометрии, той ее части, в которой изучаются семейства плоскостей различных размерностей в проективном пространстве. Этой теории посвящено большое количество работ советских, российских и зарубежных геометров. Такая проблематика оформилась в работах по теории конгруэнций прямых, а также по теории комплексов прямых. Эти исследования объединены в известных монографиях С. П. Финикова [1] и Н. И. Кованцова [2] соответственно. Впоследствии с использованием метода внешних форм Картана [3] эти теории были развиты в более общей ситуации семейств m-мерных плоскостей в пространствах произвольной размерности. Многие вопросы представляют интерес не только для многомерной дифференциальной геометрии, но и для интегральной геометрии Радона — Хелгассона — нового направления в современной математике, которому посвящена книга [4] И. М. Гельфанда, С. Г. Гиндикина и М. И. Граева, а также для общей теории дифференциальных уравнений с частными производными, например исследуемой в работе [5] И. М. Гельфанда и М. И. Граева, где рассматриваются гипергеометрические функции, связанные с грассмановым многообразием двумерных плоскостей пятимерного пространства. В интегральной геометрии при решении основной задачи рассматриваются комплексы m-мерных плоскостей, размерность которых совпадает с размерностью пространства.

Одной из наиболее красивых областей дифференциальной геометрии, где всей полнотой проявляются преимущества инвариантных бескоординатных методов исследования, является теория комплексов многомерных плоскостей проективного пространства. Этот интерес к теории комплексов многомерных плоскостей обусловлен также и задачами интегральной геометрии, в которых требуется восстановить функцию, зная ее интегралы по плоскостям некоторого семейства. Основная задача состоит в выделении так называемых допустимых комплексов, для которых такое восстановление возможно. Для успешного решения этой задачи необходимо, очевидно, соединить методы интегральной геометрии с многообразными и красивыми конструкциями, которые получаются в рамках проективной теории комплексов многомерных плоскостей. В этой связи дифференциально-геометрические исследования допустимых комплексов плоскостей, которые играют важную роль в интегральной геометрии, остаются в то же время в стороне. Поэтому актуальной представляется также проективно-дифференциальная геометрия комплексов многомерных плоскостей. Некоторые допустимые пятимерные комплексы двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 и являются объектом исследования в данной работе. Комплексы двумерных плоскостей в пятимерном пространстве являются обобщением комплексов прямых трехмерного пространства в том смысле, что двумерные плоскости в пятимерном пространстве самодвойственны так же, как и прямые в трехмерном пространстве. Семейство двумерных плоскостей p в пятимерном проективном пространстве P^5 также будет самодвойственным, так как при коррелятивном преобразовании ему соответствует семейство того же типа. Ввиду этого построения, связанные с таким семейством, допускают двойственное толкование. Двойственные построения позволяют проводить исследования без дополнительных рассуждений. В дифференциальной геометрии семейств пятимерных комплексов двумерных плоскостей [6] такие построения широко применяются.

Впервые некоторые обобщения допустимых комплексов прямых проективного пространства P^n и описание их геометрической структуры рассматривались Л. З. Кругляковым в [7, 8] (назовем их K-допустимыми комплексами), А. М. Васильевым и В. А. Нерсесяном в [9, 10] (назовем их N-допустимыми комплексами), а также венгерским геометром Майусом [11–13] и А. Б. Гончаровым [14–16] (назовем эти комплексы допустимыми в смысле интегральной геометрии или просто допустимыми комплексами плоскостей). При этом конструкции K-допустимых комплексов двумерных плоскостей совпадают с некоторыми описанными конструкциями допустимых комплексов двумерных плоскостей из [14–16] и [11–13], а конструкции N-допустимых комплексов двумерных плоскостей не совпадают с описанными конструкциями допустимых комплексов двумерных плоскостей в смысле интегральной геометрии.

В n-мерном проективном пространстве P^n А. М. Васильев и В. А. Нерсесян [9, 10] называют *допустимыми* (*N-допустимыми*) n-мерные комплексы C^n m-мерных плоскостей, которые обладают следующим свойством: для точки M произвольной образующей $p \in C^n$ содержащая касательная плоскость к конусу, образованному плоскостями комплекса, проходящими через точку M, не зависит от выбора точки М $\in C^n$. Л. З. Кругляков [7, 8] называет *допустимыми* (*K-допустимыми*) n-мерные комплексы C^n m-мерных плоскостей, которые обладают следующим свойством: для $(m-1)$-мерной плоскости p^{m-1} произвольной образующей $p \in C^n$ содержащая касательная плоскость к конусу, образованному плоскостями комплекса, проходящими через $(m-1)$-мерную плоскость p^{m-1}, не зависит от выбора $(m-1)$-мерной плоскости $p^{m-1} \in C^n$.

Грассманово отображение [17] представляет собой биективное отображение многообразия $G(2,5)$ двумерных плоскостей проективного пространства P^5 на девятимерное точечное алгебраическое многообразие $\Omega(2,5)$, принадлежащее проективному пространству P^{19}. Касательное пространство $T_p\Omega(2,5)$ к многообразию $\Omega(2,5)$ в его произвольной точке p содержит пятимерный асимптотический конус $B_p(2)$ [18], связанный с окрестностью второго порядка, проективизацией которого является многообразие Сегре $S_p(2,2)$. Многообразие Сегре $S_p(2,2)$ остается при этом инвариантным при проективных преобразованиях пространства $P^8 = PT_p\Omega(2,5)$, являющемся проективизацией с центром в точке р касательного пространства $T_p\Omega(2,5)$ к многообразию $\Omega(2,5)$. Кроме того, пространство $T_p\Omega(2,5)$ содержит восьмимерный асимптотический конус $B_p(3)$ [18], связанный с окрестностью третьего порядка, проективизацией которого является кубическая гиперповерхность $PB_p(3)$ в пространстве P^8.

Пятимерному комплексу двумерных плоскостей C^5 на алгебраическом многообразии $\Omega(2,5)$ соответствует пятимерное гладкое многообразие V^5. Изучение взаимного расположения четырехмерной касательной плоскости PT_pV^5, являющейся проективизацией с центром в точке p касательного пространства T_pV^5 к многообразию V^5 с многообразием Сегре $S_p(2,2)$ и кубической гиперповерхностью $PB_p(3)$, дает возможность выделить N- и K-допустимые комплексы с единой точки зрения. А именно, как выясняется в книге [6], N-допустимые комплексы характеризуются тем, что для каждой двумерной образующей p четырехмерная плоскость PT_pV^5 пересекает гиперкубику $PB_p(3)$ по трехмерной кубической поверхности Q^3, которая распадается на конус Q^2 второго порядка и трехмерную плоскость, принадлежащую α-образующей гиперкубики $PB_p(3)$, а K-допустимые комплексы характеризуются тем, что для каждой двумерной образующей p четырехмерная плоскость PT_pV^5 содержит α-образующую многообразия Сегре $S_p(2,2)$. Более того, такой методический подход позволяет выделить также и некоторые пятимерные комплексы двумерных плоскостей, которые являются допустимыми комплексами в смысле интегральной геометрии.

Тем самым возникает задача обобщения понятия допустимости комплекса прямых в проективном пространстве P^n на основе отображения грассманова многообразия $G(m,n)$ на алгебраическое многообразие $\Omega(m,n)$ пространства P^N, где $N = C_{n+1}^{m+1} - 1$. Для выделенных n-мерных допустимых комплексов m-мерных плоскостей в проективном пространстве P^n ставится задача нахождения полного геометрического описания и строения. Полное геометрическое описание выделенных комплексов позволит использовать некоторые его результаты в многомерной дифференциальной геометрии, а также в интегральной геометрии. Естественно такие исследования начать с обобщения комплекса прямых в трехмерном проективном пространстве, а именно с пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5.

2. В проективном пространстве P^5 двумерная плоскость p определяется тремя линейно независимыми точками. Из матрицы координат этих точек можно составить $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 20$ определителей третьего порядка, которые называются *грассмановыми координатами* плоскости p. Они связаны системой алгебраических уравнений и определяют биективное отображение грассманова многообразия $G(2,5)$ двумерных плоскостей пространства P^5 на девятимерное алгебраическое многообразие $\Omega(2,5)$ проективного пространства P^{19}. Это отображение называется *грассмановым отображением* [17].

Исследуем более детально строение алгебраического многообразия $\Omega(2,5)$. Рассмотрим в пространстве P^5 две двумерные плоскости, пересекающиеся по прямой. Они порождают линейный пучок плоскостей, т. е. семейство двумерных плоскостей, проходящих через прямую и лежащих в некоторой трехмерной плоскости. Этому линейному пучку на многообразии $\Omega(2,5)$ соответствует прямолинейная образующая. При этом прямая и проходящая через нее трехмерная плоскость вполне определяют линейный пучок, а следовательно, и прямую на многообразии $\Omega(2,5)$.

Рассмотрим все двумерные плоскости, лежащие в некоторой фиксированной трехмерной плоскости. Они образуют линейное трехпараметрическое семейство, которому на многообразии $\Omega(2,5)$ соответствует трехмерная плоская образующая, называемая α-образующей. Поскольку в пространстве P^5 содержится восьмипараметрическое семейство трехмерных плоскостей, многообразие $\Omega(2,5)$ несет семейство α-образующих, зависящее от восьми параметров.

Пусть в пространстве P^5 фиксирована некоторая прямая. Рассмотрим все двумерные плоскости, проходящие через нее. Такие двумерные плоскости порождают трехпараметрическую связку, которой на многообразии $\Omega(2,5)$ также соответствует трехмерная плоская образующая, называемая β-образующей. Поскольку пространство P^5 содержит восьмипараметрическое семейство прямых, многообразие $\Omega(2,5)$ несет семейство β-образующих, зависящее от восьми параметров. Таким образом, многообразие $\Omega(2,5)$ несет два семейства трехмерных плоских образующих.

Если трехмерная плоскость пространства P^5 содержит фиксированную прямую, то соответствующие α- и β-образующие многообразия $\Omega(2,5)$ пересекаются по прямой. Если трехмерная плоскость в пространстве P^5 не содержит прямую, то соответствующие им плоские образующие многообразия $\Omega(2,5)$ общих точек не имеют.

Рассмотрим в пространстве P^5 фиксированную двумерную плоскость p. Через эту плоскость проходит двупараметрическое семейство трехмерных плоскостей. Поэтому через соответствующую плоскости p точку на многообразии $\Omega(2,5)$ проходит двупараметрическое семейство α-образующих. В то же время плоскость p содержит двупараметрическое семейство прямых. Следовательно, через точку p проходит двупараметрическое семейство β-образующих многообразия $\Omega(2,5)$. При этом две образующие различных семейств многообразия

$\Omega(2,5)$, проходящие через точку p, имеют общую прямую, которой в пространстве P^5 соответствует линейный пучок двумерных плоскостей, а две образующие одного семейства имеют единственную общую точку p. Отсюда следует, что все трехмерные плоские образующие, проходящие через точку p, являются плоскими образующими конуса Сегре $C_p(3,3)$ [18] с вершиной в точке p, лежащего на многообразии $\Omega(2,5)$. Этот конус представляет собой пересечение касательной плоскости $T_p\Omega(2,5)$ в точке p к многообразию $\Omega(2,5)$ с самим многообразием. В пространстве P^5 конусу Сегре $C_p(3,3)$ соответствует совокупность двумерных плоскостей, пересекающих двумерную плоскость p по прямым.

Рассмотрим в проективном пространстве P^5 пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей — пятимерный комплекс C^5. Комплексу C^5 при грассмановом отображении [17–19] соответствует пятимерное многообразие V^5, принадлежащее алгебраическому многообразию $\Omega(2,5)$. Многообразие V^5 в каждой своей точке p имеет пятимерную касательную плоскость T_pV^5. Проективизация плоскости T_pV^5 с центром в точке p представляет собой четырехмерную плоскость PT_pV^5. Различным видам взаимного расположения плоскости PT_pV^5 и многообразия Сегре $S_p(2,2)$ соответствуют различные классы комплексов C^5 [17–19] . Многообразие Сегре $S_p(2,2)$ представляет собой четырехмерную алгебраическую поверхность шестого порядка, несущую два двупараметрических семейства двумерных плоских образующих. При этом две образующие, принадлежащие различным семействам, имеют общую точку, а две образующие, принадлежащие одному семейству, не пересекаются. Поскольку многообразие Сегре $S_p(2,2)$ является алгебраической поверхностью шестого порядка, в общем случае плоскость PT_pV^5 пересекает это многообразие в шести точках. Эти точки определяют на многообразии V^5 шесть полей направлений, интегральным кривым которых на комплексе C^5 соответствует шесть семейств торсов (развертывающихся поверхностей с двумерными плоскими образующими) [6], образованных двумерными соприкасающимися плоскостями к некоторой кривой. При этом через каждую образующую комплекса проходит шесть торсов, по одному из каждого семейства. Каждый торс комплекса определяет для двумерной образующей p комплекса C^5 характеристическую прямую — прямую пересечения двух бесконечно близких образующих торса и трехмерную характеристическую плоскость — касательную к торсу.

3. В проективном пространстве P^5 рассмотрим семейство точечных реперов $\{A_I\}$, $I=0,1,\dots,5$, и семейство реперов, образованных гиперплоскостями $\alpha^I = (-1)^I(A_0,\dots,A_{I-1},A_{I+1},\dots,A_5)$. Уравнения перемещения этих реперов имеют вид

$$dA_I = \omega_I^J A_J, \quad d\alpha^I = \omega_J^I \alpha^J,$$

где ω_I^J — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства P^5:

$$d\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J, \quad I,J,K = 0,1,\dots,5.$$

Свяжем с двумерной плоскостью p пространства P^5 семейство точечных реперов так, что точки A_i, $i=0,1,\dots,5$, принадлежат плоскости p. Тогда

$$dA_i = \omega_i^j A_j + \omega_i^p A_p, \quad dA_p = \omega_p^i A_i + \omega_i^q A_q,$$

где $i, j = 0, 1, 2$ и $p, q = 3, 4, 5$. Отсюда видно, что двумерная плоскость p в пространстве P^5 зависит от девяти параметров, линейными комбинациями дифференциалов которых являются формы ω_p^i.

Пусть ω_p^i, $i = 0, 1, 2$, $p = 3, 4, 5$, — линейные дифференциальные формы, определяющие перемещение плоскости $p = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$ в пространстве P^5. Тогда поскольку размерность рассматриваемого комплекса C^5 равна пяти, на нем будут выполняться четыре независимых уравнения:

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \tag{1}$$

где $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Эти же уравнения определяют четырехмерную плоскость PT_pV^5 в пространстве $P^8 = PT_p\Omega(2, 5)$.

Однопараметрическое семейство двумерных плоскостей p представляет собой

трехмерную поверхность с двумерными плоскими образующими. Эта поверхность является торсом [20], если она тангенциально вырожденная ранга один. Торсу на многообразии $\Omega(2, 5)$ соответствует кривая, касательные к которой служат прямолинейными образующими этой поверхности. Данная кривая совпадает с асимптотической линией многообразия $\Omega(2, 5)$. Поэтому в произвольной точке этой линии выполняется равенство

$$\operatorname{rang}\left(\omega_i^p\right) = 1. \tag{2}$$

Следовательно, уравнения торсов в пространстве можно записать в параметрическом виде:

$$\omega_i^p = \alpha_i x^p \, dt.$$

На многообразии $\Omega(2, 5)$ асимптотические направления второго порядка, выходящие из точки p, определяются условием

$$D^2 p = 0 (\operatorname{mod} T_p\Omega(2, 5)),$$

откуда следует, что уравнения конуса $B_p(2)$ асимптотических направлений второго порядка имеют вид

$$\omega_i^p \omega_j^q - \omega_i^q \omega_j^p = 0.$$

Из этих уравнений видно, что координаты ω_i^p точки конуса $B_p(2)$ удовлетворяют условию (2) и, следовательно, допускают параметрическое представление:

$$\omega_i^p = \alpha_i x^p.$$

Стало быть, конус $B_p(2)$ асимптотических направлений второго порядка совпадает с конусом Сегре $C_p(3, 3)$.

Асимптотические направления третьего порядка многообразия $\Omega(2, 5)$, выходящие из точки p, задаются условием

$$d^3 p = 0 \big(\operatorname{mod} T_p^3 \Omega(2, 5) \big), \tag{3}$$

где

$$d^3 p = 6 \det \left(\omega_i^p\right) A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \big(\operatorname{mod} T_p^2 \Omega(2, 5) \big).$$

Рассмотрим проективизацию касательной плоскости $T_p\Omega(2,5)$ с центром в точке p, которая представляет собой проективное пространство $P^8 = PT_p\Omega(2,5)$, где ω_i^p — однородные координаты произвольной точки. Асимптотические направления третьего порядка многообразия $\Omega(2,5)$ образуют конус с вершиной в точке p, который обозначается через $B_p(3)$. Конус $B_p(3)$ определяется в силу (3) уравнением

$$\det\left(\omega_i^p\right) = 0. \tag{4}$$

Ввиду этого конус $B_p(3)$ представляет собой гиперконус третьего порядка в касательной плоскости $T_p\Omega(2,5)$ в точке p к многообразию $\Omega(2,5)$.

Геометрический смысл конуса $B_p(3)$ описывается следующим образом. Каждая гиперплоскость в пространстве P^5, проходящая через плоскость p, содержит шестипараметрическое семейство двумерных плоскостей, которому на алгебраическом многообразии $\Omega(2,5)$ соответствует подмногообразие $\Omega(2,4)$, проходящее через точку p. Шестимерные касательные плоскости к этим подмногообразиям образуют одно семейство плоских образующих конуса $B_p(3)$, которые называются α-образующими. Через каждую точку плоскости p проходит шестипараметрическое семейство двумерных плоскостей, которому на многообразии $\Omega(2,5)$ соответствует подмногообразие $\Omega^*(2,4)$, также проходящее через p. Шестимерные касательные плоскости к таким подмногообразиям образуют второе семейство плоских образующих конуса $B_p(3)$, которые называются его β-образующими. Таким образом, конус $B_p(3)$ несет два семейства шестимерных плоских образующих. Из (3) следует, что шестимерное подпространство, определяемое в пространстве $T_p\Omega(2,5)$ уравнениями

$$\alpha_p\omega_i^p = 0,$$

принадлежит асимптотическому конусу $B_p(3)$. Это подпространство совпадает с α-образующими конуса $B_p(3)$. Шестимерное подпространство, определяемое в пространстве $T_p\Omega(2,5)$ уравнениями

$$\beta^i\omega_i^p = 0,$$

также принадлежит асимптотическому конусу $B_p(3)$. Оно совпадает с β-образующими конуса $B_p(3)$. Легко видеть, что две образующие различных семейств конуса $B_p(3)$ пересекаются по четырехмерной плоскости, которой в пространстве P^5 соответствует совокупность двумерных плоскостей, проходящих через некоторую точку и принадлежащих фиксированной гиперплоскости, а две образующие одного семейства пересекаются по трехмерной плоскости, совпадающей с образующей конуса $B_p(2)$ асимптотических направлений второго порядка.

Асимптотическому конусу $B_p(3)$ в пространстве $P^8 = PT_l\Omega(2,5)$ соответствует кубическая гиперповерхность $PB_p(3)$, определяемая тем же уравнением (4), что и конус $B_p(3)$ в касательном пространстве $T_p\Omega(2,5)$. Гиперкубика $PB_p(3)$ несет семейство α-образующих, полученных при проективизации с центром в точке p α-образующих конуса $B_p(3)$, и семейство β-образующих, полученных при проективизации β-образующих конуса $B_p(3)$. Отметим, что многообразие Сегре $S_p(2,2)$ представляет собой совокупность двойных точек гиперкубики $PB_p(3)$. Плоскость PT_pV и гиперкубика $PB_p(3)$ пересекаются в общем случае по трехмерной кубической поверхности Q_3, несущей два двупараметрических семейства прямолинейных образующих, причем через каждую ее точку проходят две образующие различных семейств.

4. Пятимерные комплексы C^5 в проективном пространстве P^5 можно определить как пересечение четырех гиперкомплексов, принадлежащих одной связке. В результате указанной выше специализации репера уравнение связки μ гиперкомплексов C^8 двумерных плоскостей p в проективном пространстве P^5 запишется в виде

$$\mu_\alpha \wedge {}^{\alpha i}_{p} \omega_i^p = 0, \tag{5}$$

где $i = 0, 1, 2$, $p = 3, 4, 5$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, а ω_i^p — линейные дифференциальные формы, обращение в нуль которых фиксирует двумерную плоскость p на пятимерном комплексе C^5. Проективизация этой связки гиперкомплексов представляет собой трехмерное проективное пространство P^{*3}, однородными координатами точек которого являются коэффициенты μ_α связки гиперкомплексов.

Рассмотрим гиперкомплекс C^8, определяемый уравнением (3) при фиксированных значениях коэффициентов μ_α. Через каждую прямую $p^1 \subset p$ проходит двупараметрическое семейство двумерных плоскостей p гиперкомплекса C^8, образующих гиперконус с вершиной p^1. Касательные гиперплоскости к этим конусам пересекаются в общем случае по двумерной плоскости p:

$$\mu_\alpha \wedge {}^{\alpha i}_{p} x^p = 0.$$

Если выполняется условие

$$\operatorname{rang}\left(\mu_\alpha \wedge {}^{\alpha i}_{p}\right) = 1, \tag{6}$$

то система уравнений (5) определяет гиперплоскость, касательную к гиперконусу двумерных плоскостей p с одномерной вершиной $p^1 \subset p$. При этом каждая трехмерная плоскость, лежащая в этой касательной гиперплоскости, является касательной трехмерной плоскостью к некоторому торсу, принадлежащему пятимерному комплексу C^5.

Проведем теперь двойственные построения. В каждой трехмерной плоскости $p^3 \supset p$ содержится двупараметрическое семейство двумерных плоскостей p гиперкомплекса C^8, огибающей которого является двумерная тангенциально невырожденная поверхность, т. е. в каждой трехмерной плоскости p^3 существует такая точка, которая описывает двумерную тангенциально невырожденную поверхность. Многообразие всех таких точек задается системой уравнений

$$\mu_\alpha \wedge^{\alpha i}_{p} a_i = 0.$$

При выполнении условия (6) эта система уравнений определяют точку — центр пучка прямых, лежащих в двумерной образующей p гиперкомплекса C^8, при этом каждая прямая этого пучка является характеристической прямой некоторого торса, принадлежащего пятимерному комплексу C^5.

Условие (6) определяет в трехмерном проективном пространстве P^{*3} пересечение четырех линейно независимых квадратичных поверхностей Q_α, которые в общем случае не имеют общих точек. Рассмотрим пятимерные комплексы C^5 двумерных плоскостей p, которые определяются связкой гиперкомплексов C^8, характеризующейся тем, что при грассмановом отображении гиперплоскости, принадлежащие связке гиперплоскостей PT_pV^8, содержат одну

α-образующую кубической гиперповерхности $PB_p(3)$, а пересечение четырехмерной плоскости PT_pV^5 с многообразием Сегре $S_p(2,2)$ содержит две прямые, принадлежащие двум различным α-образующим многообразия $S_p(2,2)$ и одну прямую, принадлежащую β-образующей многообразия $S_p(2,2)$. Назовем выделенные пятимерные комплексы C^5 двумерных плоскостей p B-комплексами. Отметим при этом, что пятимерные В-комплексы двумерных плоскостей являются допустимыми комплексами [14–16].

Выбор указанного типа комплексов C^5 двумерных плоскостей p приводит к четырем гиперкомплексам, для которых соответствующие при грассмановом отображении гиперплоскости PT_pV^8, содержат α-образующие гиперкубики $PB_p(3)$:

$$\omega_0^5 = 0, \quad \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^5 - \omega_2^5 = 0. \tag{7}$$

Уравнение связки μ гиперкомплексов C^8 двумерных плоскостей p в этом случае запишется в виде

$$\alpha\omega_0^5 + \beta\omega_1^4 + \gamma\omega_2^3 + \delta\big(\omega_1^5 - \omega_2^5\big) = 0.$$

Центром этой связки μ гиперкомплексов C^8 служит пятимерный B-комплекс C^5 двумерных плоскостей p, являющийся пересечением четырех вышеуказанных гиперкомплексов C^8 и определяемый системой четырех дифференциальных уравнений (7).

Не составляет трудности проверить, что пересечение четырехмерной плоскости PT_pV^5 с многообразием Сегре $S_p(2,2)$ содержит две прямые, принадлежащие двум различным α-образующим многообразия $S_p(2,2)$:

$$\omega_0^4 = 0, \quad \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^5 = 0, \tag{8}$$

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^5 = 0, \tag{9}$$

и одну прямую, принадлежащую β-образующей многообразия $S_p(2,2)$:

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^5 = 0, \tag{10}$$

Теперь выясним строение пятимерных B-комплексов C^5 двумерных плоскостей p.

Теорема 1. *Пятимерные B-комплексы C^5 представляют собой многообразие двумерных плоскостей, принадлежащих гиперплоскостям однопараметрического семейства и касающихся в каждой гиперплоскости этого семейства двух трехмерных тангенциально невырожденных поверхностей.*

Доказательство. B-комплекс C^5 определяется дифференциальными уравнениями (7), и на нем формы ω_0^3, ω_0^4, ω_1^3, ω_2^4, ω_1^5 линейно независимы, следовательно, их можно принять в качестве базисных форм на B-комплексе C^5. Дифференцируя внешним образом уравнения (7), получим квадратичные уравнения

$$\begin{gathered}
\omega_3^5 \wedge \omega_0^3 + \omega_4^5 \wedge \omega_0^4 + \big(\omega_0^1 + \omega_0^2\big) \wedge \omega_1^5 = 0, \\
\omega_1^0 \wedge \omega_0^4 - \omega_3^4 \wedge \omega_1^3 + \omega_1^2 \wedge \omega_2^4 - \omega_5^4 \wedge \omega_1^5 = 0, \\
\omega_2^0 \wedge \omega_0^3 + \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 - \omega_4^3 \wedge \omega_2^4 - \omega_5^3 \wedge \omega_1^5 = 0, \\
\omega_3^5 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^5 \wedge \omega_2^4 + \big(\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_1^2 - \omega_2^1\big) \wedge \omega_1^5 = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Из первого квадратичного уравнения системы (11) следует, что формы ω_3^5, ω_4^5 выражаются через базисные формы ω_0^3, ω_0^4, ω_1^5 B-комплекса C^5, а из последнего квадратичного уравнения системы вытекает, что те же формы выражаются через базисные формы ω_1^3, ω_2^4, ω_1^5. Ввиду единственности разложения форм по базису B-комплекса C^5 получим, что указанные формы выражаются лишь через одну базисную форму ω_1^5, т. е. имеют место следующие уравнения:

$$\omega_3^5 = a\omega_1^5, \quad \omega_4^5 = b\omega_1^5. \tag{12}$$

Дифференциал гиперплоскости $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ в силу этих уравнений запишется так:

$$\begin{aligned} d(A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4) = \big(\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4\big)(A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4) \\ - \omega_1^5\{(A_0 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5) - (A_0 \wedge A_1 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5) \\ + a(A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_4 \wedge A_5) - b(A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_5)\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда следует, что гиперплоскость $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ описывает однопараметрическое семейство с трехмерной характеристической плоскостью, определяемой уравнением

$$x^1 + x^2 + ax^3 + bx^4 = 0. \tag{14}$$

Поместим в эту трехмерную характеристическую плоскость однопараметрического семейства гиперплоскостей $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ вершины A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 подвижного репера. Ввиду такой специализации подвижного репера имеем

$$a = b = 0, \tag{15}$$

и уравнение (14) трехмерной характеристической плоскости примет вид

$$x^1 + x^2 = 0.$$

В фиксированной гиперплоскости $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$, т. е. при $\omega_1^5 = 0$, получим, что двумерные плоскости p B-комплекса C^5 касаются двух тангенциально невырожденных трехмерных поверхностей, уравнения которых имеют вид

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0. \tag{16}$$

При этом точки A_1 и A_2 в каждой гиперплоскости $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ однопараметрического семейства описывают трехмерные тангенциально невырожденные поверхности, касательные 3-плоскости к которым совпадают соответственно с трехмерными плоскостями $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$ и $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_4$.

Таким образом, двумерные образующие p пятимерного B-комплекса C^5 принадлежат гиперплоскостям однопараметрического семейства и касаются в каждой гиперплоскости этого семейства двух трехмерных тангенциально невырожденных поверхностей.

Докажем теперь обратное утверждение. Рассмотрим множество двумерных плоскостей p, принадлежащих гиперплоскостям однопараметрического семейства и касающихся в каждой гиперплоскости этого семейства двух трехмерных тангенциально невырожденных поверхностей. Поместим вершины A_0, A_1, A_2,

A_3, A_4 подвижного репера $\{A_I\}$ в гиперплоскость однопараметрического семейства, а точки A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 — в трехмерную характеристическую плоскость этого семейства. Вершины A_1 и A_2 совместим с текущими точками трехмерных тангенциально невырожденных поверхностей. Точки A_0, A_1, A_2 поместим в двумерную плоскость, являющуюся пересечением трехмерных касательных плоскостей к тангенциально невырожденным поверхностям, а вершины A_3 и A_4 расположим соответственно в трехмерных касательных плоскостях к тангенциально невырожденным поверхностям.

Ввиду указанной специализации подвижного репера однопараметрическое семейство гиперплоскостей $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ будет определяться следующими уравнениями:

$$\omega_0^5 = 0, \quad \omega_1^5 - \omega_2^5 = 0, \quad \omega_3^5 = 0, \quad \omega_4^5 = 0, \tag{17}$$

где форма ω_1^5 является базисной на этом семействе гиперплоскостей.

Трехмерные тангенциально невырожденные поверхности, лежащие в каждой гиперплоскости $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ однопараметрического семейства гиперплоскостей, в результате специализации подвижного репера будут задаваться уравнениями (16). На основании (16) и (17) получаем, что уравнения (7) определяют пятимерный комплекс C^5 двумерных плоскостей p. При этом не представляет трудности установить, что такие комплексы определяются связкой гиперкомплексов C^8, которая при грассмановом отображении характеризуются тем, что гиперплоскости, принадлежащие связке гиперплоскостей PT_pV^8, содержат одну α-образующую кубической гиперповерхности $PB_p(3)$, а пересечение четырехмерной плоскости PT_pV^5 с многообразием Сегре $S_p(2,2)$ содержит две прямые, принадлежащие двум различным α-образующим многообразия $S_p(2,2)$, определяемым уравнениями (8) и (9), и одну прямую, принадлежащую β-образующей многообразия $S_p(2,2)$, определяемую уравнениями (10), т. е. являются пятимерными B-комплексами двумерных плоскостей p. Таким образом, утверждение о строении пятимерных B-комплексов двумерных плоскостей p полностью доказано.

Можно провести двойственные построения, т. е. в определении B-комплексов C^5 двумерных плоскостей p в проективном пространстве P^5 взять β-образующие кубической гиперповерхности $PB_p(3)$. Рассмотрим пятимерные комплексы C^5 двумерных плоскостей p в проективном пространстве P^5, определяющиеся связкой μ гиперкомплексов C^8, которая при грассмановом отображении характеризуются тем, что гиперплоскости, принадлежащие связке гиперплоскостей PT_pV^8, содержат одну β-образующую гиперкубики $PB_p(3)$, а пересечение четырехмерной плоскости PT_pV^5 с многообразием Сегре $S_p(2,2)$ содержит две прямые, принадлежащие двум различным β-образующим многообразия $S_p(2,2)$, и одну прямую, принадлежащую α-образующей многообразия $S_p(2,2)$. Назовем такие пятимерные комплексы C^5 двумерных плоскостей p *дуальными B-комплексами.* Для этих комплексов имеет место утверждение, двойственное утверждению теоремы 1.

Теорема 2. *Дуальные пятимерные B-комплексы C^5 представляют собой многообразие двумерных плоскостей, пересекающих некоторую кривую и касающихся двух тангенциально невырожденных гиперповерхностей.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фиников С. П.* Теория конгруэнций. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
2. *Кованцов Н. И.* Теория комплексов. Киев: Киев. гос. ун-т, 1963.
3. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М.: Гостехиздат, 1948.
4. *Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И.* Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2007.
5. *Гельфанд И. М., Граев М. И.* Гипергеометрические функции, связанные с грассманианом $G_{3,6}$ // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 1. С. 3–38.
6. *Бубякин И. В.* Геометрия пятимерных комплексов двумерных плоскостей. Новосибирск: Наука, 2001.
7. *Кругляков Л. З.* О некоторых комплексах многомерных плоскостей в проективном пространстве // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 3. С. 66–67.
8. *Кругляков Л. З., Мизин А. Г.* Допустимые комплексы коразмерности два многомерных плоскостей проективного пространства // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 5. С. 110–115.
9. *Нерсесян В. А.* Допустимые комплексы k-мерных плоскостей в P^n // Уч. зап. Ереван. гос. ун-та. 1986. № 2. С. 34–38.
10. *Нерсесян В. А.* Классификация допустимых комплексов двумерных плоскостей в R^5 // Докл. АН Армян. ССР. 1980. Т. 70, № 3. С. 151–155.
11. *Майус К.* Структура допустимых комплексов прямых в CP^n // Тр. Моск. мат. о-ва. 1979. Т. 39. С. 181–211.
12. *Майус К.* Структура допустимых комплексов прямых в C^n // Функцион. анализ и его прил. 1973. Т. 7, № 1. С. 79–81.
13. *Майус К.* Допустимые комплексы прямых с одной критической точкой // Функцион. анализ и его прил. 1975. Т. 9, № 2. С. 81–82.
14. *Гончаров А. Б.* Интегральная геометрия на семействах k-мерных подмногообразий // Функцион. анализ и его прил. 1989. Т. 23, № 3. С. 11–23.
15. *Гончаров А. Б.* Интегральная геометрия и многообразия минимальной степени в CP^n // Функцион. анализ и его прил. 1990. Т. 24, № 1. С. 5–20.
16. *Гончаров А. Б.* Допустимые семейства k-мерных подмногообразий // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 3. С. 535–539.
17. *Akivis M. A.* On the differential geometry of a Grassmann manifold // Tensor. 1982. V. 38. P. 273–282.
18. *Akivis M. A.,Goldberg V. V.* On the structure of submanifolds with degenerate Gauss maps // Geom. Dedic. 2001. V. 86, N 1–3. P. 205–226.
19. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam: NorthHolland, 1993.
20. *Landsberg J. M.* Algebraic geometry and projective differential geometry. Seoul, 1999. (Lect. Notes Ser. Seoul National Univ.; V. 45).

Статья поступила 15 января 2015 г.

Бубякин Игорь Витальевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
bubyakiniv@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2015. Том 22, № 1

УДК 514.764

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ N–ПРОДОЛЖЕННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

С. В. Галаев

Аннотация. На многообразии с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ вводятся понятия внутренней и N-продолженной связностей. На распределении D с помощью N-продолженной связности определяется новая почти контактная метрическая структура, называемая продолженной почти контактной метрической структурой. Исследуются свойства полученной структуры.
Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, внутренняя связность, N-продолженная связность, продолженная почти контактная метрическая структура.

S. V. Galaev. Almost Contact Metric Structures Defined by an N-prolonged Connection.

Abstract: The notion of intrisic and N-extended connections are introduced on a manifold with an almost contact metric structure $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$. Using N-extended connection, we define a new almost contact metric structure on the distribution D, which is called an extended almost contact metric structure. We study properties of this structure.
Keywords: almost contact metric structure, inrisic connection, N-extended connection, extended almost contact metric structure.

1. Введение

Изучение геометрии касательных расслоений начинается с основополагающей работы [1] Сасаки, опубликованной в 1958 г. Сасаки, используя риманову метрику g, заданную на гладком многообразии X, определяет риманову метрику G на касательном расслоении TX многообразия X. Конструкция Сасаки основана на естественном расщеплении (имеющем место благодаря существованию на римановом многообразии связности Леви-Чивиты) касательного расслоения TTX многообразия TX в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений, слои которых изоморфны слоям расслоения TX. Нечетным аналогом касательного расслоения является распределение D почти контактной метрической структуры $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$. Так же, как и расслоение TTX, касательное расслоение TD благодаря заданию связности над распределением [2] (а затем и N-продолженной связности, а именно связности в векторном расслоении (X, D)) расщепляется в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений. Как показано в [2, 3], на многообразии D тем самым естественным образом определяется почти контактная метрическая структура, позволяющая, например, придать инвариантный характер аналитическому описанию механики со связями. В [3] на многообразии D определяется геодезическая пульверизация связности над распределением, являющаяся аналогом геодезической пульверизации, заданной на пространстве касательного расслоения TX, имеющая ясную физическую интерпретацию: проекции интегральных кривых геодезической пульверизации связности над распределением совпадают с допустимыми геодезическими (траекториями движения механической системы со связями).

Предлагаемая работа, являясь введением в геометрию продолженных почти контактных метрических структур, посвящена развитию двух идей: идеи обобщения конструкции Сасаки [1] на случай нечетной размерности, а также идеи продолжения внутренней связности.

Работа устроена следующим образом. Разд. 2 состоит из трех пунктов, в первом из которых содержатся краткие сведения о внутренней геометрии почти контактных метрических пространств. Более подробно соответствующий материал излагается в [4].

В п. 2.2 вводится понятие N-продолженной метрической связности. Внутренняя связность задает параллельный перенос допустимых векторов (т. е. векторов, принадлежащих распределению D) вдоль допустимых кривых. Всякая соответствующая ей N-продолженная связность является связностью в векторном расслоении (D, π, X), определяемой внутренней связностью и эндоморфизмом $N : D \to D$. От выбора эндоморфизма $N : D \to D$ зависят свойства продолженной связности, а также свойства (продолженной) почти контактной метрической структуры, возникающей на пространстве D векторного расслоения (D, π, X). Центральной в этом пункте является теорема о существовании и единственности N-продолженной метрической связности с нулевым кручением. В п. 2.3 указывается на связь внутренней и продолженной связностей с известными связностями, возникающими на почти контактных метрических пространствах.

В разд. 3 работы на многообразии D с продолженной метрической связностью определяется продолженная почти контактная метрическая структура. Исследуются свойства продолженной почти контактной метрической структуры. Особое внимание уделяется почти контактным кэлеровым пространствам.

2. Внутренняя и N-продолженная связности

2.1. Основные сведения из внутренней геометрии почти контактных метрических пространств. Пусть X — гладкое многообразие нечетной размерности n, ΓTX — $C^\infty(X)$-модуль гладких векторных полей на X. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. *Почти контактной метрической структурой* на X называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на X, где φ — тензор типа (1, 1), называемый *структурным эндоморфизмом*, $\vec{\xi}$ и η —вектор и ковектор, называемые *структурным вектором* и *контактной формой* соответственно, g — (псевдо)риманова метрика. При этом

$$\eta(\vec{\xi}) = 1, \quad \varphi(\vec{\xi}) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \varphi^2 \vec{X} = -\vec{X} + \eta(\vec{X})\vec{\xi},$$

$$g(\varphi\vec{X},\varphi\vec{Y}) = g(\vec{X},\vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}), \quad d\eta(\vec{X},\vec{\xi}) = 0,$$

$\vec{X},\vec{Y} \in \Gamma TX$.

Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{X},\vec{Y}) = g(\vec{X},\varphi\vec{Y})$ называется *фундаментальной формой структуры.* Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием.* В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется *контактной метрической структурой.* Почти контактная метрическая структура называется *нормальной*, если $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где N_φ —кручение Нейенхейса, образованное тензором φ. Нормальная контактная метрическая структура называется *сасакиевой структурой.* Многообразие с заданной на нем сасакиевой структурой называется *сасакиевым многообразием.* Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = \mathrm{Span}(\vec{\xi})$ — его оснащение. Если ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = \mathrm{Span}(\vec{\xi})$ и называется *вектором Риба.*

Будем называть почти контактную метрическую структуру *почти нормальной*, если выполняется условие

$$N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0. \tag{1}$$

Почти нормальное почти контактное метрическое пространство в дальнейшем будем называть *почти контактным кэлеровым пространством*, если его фундаментальная форма замкнута. Почти контактное метрическое пространство будем называть *почти K-контактным метрическим пространством*, если $L_{\vec{\xi}}g = 0$. Последнее равенство чаще используется в случае, когда форма ω имеет максимальный ранг, тогда соответствующее пространство называют *K-контактным.*

Почти нормальная контактная метрическая структура очевидным образом является сасакиевой структурой. Сасакиевы пространства пользуются большой популярностью у исследователей почти контактных метрических пространств по двум основным причинам. С одной стороны, существует большое количество интересных и содержательных примеров сасакиевых структур, с другой стороны — многообразия Сасаки обладают очень важными и естественными свойствами. В то же время почти контактные кэлеровы пространства наследуют ряд важных свойств сасакиевых пространств, что оказывается очень существенным в тех случаях, когда почти контактное метрическое пространство в принципе не может быть сасакиевым пространством [6].

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha,\beta,\gamma = 1,\ldots,n)$ $(a,b,c,e = 1,\ldots,n-1)$ многообразия X будем называть *адаптированной к неголономному многообразию D*, если $D^\perp = \mathrm{Span}(\frac{\partial}{\partial x^n})$ [4]. Пусть $P : TX \to D$ — проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ —адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = \mathrm{Span}(\vec{e}_a)$. Таким образом, имеем на многообразии X неголономное поле базисов $(\vec{e}_a,\partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что

$[\vec{e}_a\vec{e}_b] = M^n_{ab}\partial_n$, где компоненты M^n_{ab} образуют так называемый *тензор неголономности* [7]. Если потребовать, чтобы во всех используемых адаптированных картах выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то, в частности, окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a\vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega = d\eta$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n\Gamma^n_a = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K(x^{\alpha'})$ —адаптированные карты, тогда при условии, что $\vec{\xi} = \partial_n$, получаем следующие формулы преобразования координат: $x^\alpha = x^\alpha(x^{\alpha'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{\alpha'})$.

Тензорное поле типа (p, q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, будем называть *допустимым* (к распределению D), если его координатное представление в адаптированной карте имеет вид

$$t = t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\vec{e}_{a_1}\otimes\dots\otimes\vec{e}_{a_p}\otimes dx^{b_1}\otimes\dots\otimes dx^{b_q}.$$

Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ является допустимым тензорным полем типа (1, 1). Поле аффинора φ, учитывая его свойства, называем *допустимой почти комплексной структурой.* Форму $\omega = d\eta$, также являющуюся допустимой формой, уместно в таком случае называть *допустимой симплектической формой.*

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется закону

$$t^a_b = A^a_{a'}A^{b'}_b t^{a'}_{b'},$$

где $A^a_{a'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}$.

Замечание 1. Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ являются вновь компонентами допустимого тензорного поля. Кроме того, обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат. Последнее обстоятельство подкрепляется тем фактом, что $(L_{\vec{\xi}}t)^a_b = \partial_n t^a_b$.

Замечание 2. Допустимую тензорную структуру, для которой выполняется равенство $\partial_n t^a_b = 0$, будем называть проектируемой (в литературе можно встретить и другие термины, обращенные к структурам с подобным свойством: «базисные», «полубазисные» и т. д.). Допустимые проектируемые структуры естественным образом могут рассматриваться как структуры, заданные на многообразии меньшей размерности.

Используя адаптированные координаты, введем следующие допустимые тензорные поля:

$$h^a_b = \frac{1}{2}\partial_n\varphi^a_b, \quad C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}, \quad C^a_b = g^{da}C_{db}, \quad \psi^b_a = g^{da}\omega_{da}.$$

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивиты тензора g: $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют следующий вид:*

$$\widetilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}, \quad \widetilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \widetilde{\Gamma}^b_{an} = \widetilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a - \psi^b_a, \quad \widetilde{\Gamma}^n_{na} = 0, \quad \widetilde{\Gamma}^a_{nn} = 0,$$

где

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

2.2. N-продолженная метрическая связность. Под *внутренней линейной связностью* на многообразии с почти контактной метрической структурой [4] понимается отображение $\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \to \Gamma D$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1 \vec{u_1} + f_2 \vec{u_2}} = f_1 \nabla_{\vec{u_1}} + f_2 \nabla_{\vec{u_2}}$,

2) $\nabla_{\vec{u}} f \vec{v} = f \nabla_{\vec{u}} \vec{v} + (\vec{u} f)\vec{v}$,

где ΓD — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определятся из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma^c_{ab} \vec{e}_c$.

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}} \vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}} \vec{X} - P[\vec{X}, \vec{Y}].$$

Таким образом, в адаптированных координатах имеем $S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}$.

Действие внутренней линейной связности естественным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Важным примером внутренней линейной связности является внутренняя метрическая связность, однозначно определяемая условиями $\nabla g = 0$, $S = 0$ [7]. В адаптированных координатах имеем

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Заметим, что $\Gamma^a_{bc} = \widetilde{\Gamma}^a_{bc}$ (см. теорему 1).

Так же, как и связность в объемлющем пространстве, внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством некоторого векторного расслоения. В случае внутренней связности в качестве такого расслоения выступает распределение D. Говорят, что над распределением D *задана связность*, если распределение $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to X$, разбивается в прямую сумму вида $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии X сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^n + a)$ на многообразии D, где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть *адаптированной*. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(x^\alpha, x^{n+a})$ такого, что $HD = \mathrm{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_a \partial_{n+b}$. В случае, когда $G^a_b(x^a, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^a) x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. В [2] введено понятие продолженной связности. Продолженная связность всегда рассматривается относительно некоторой связности над распределением и определяется разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset \widetilde{HD}$. Продолженная связность является связностью в векторном расслоении. Как следует из определения продолженной связности, для ее задания (при условии уже существующей связности над распределением) достаточно задать векторное поле $\vec{u}$ на многообразии D, имеющее следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}$, где эндоморфизм $N : D \to D$ может быть выбран произвольно. Будем называть *кручением продолженной связности* кручение исходной внутренней связности. В дальнейшем продолженную связность будем называть N-*продолженной связностью.*

В [7] допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{u}, \vec{v})\vec{w} = \nabla_{\vec{u}} \nabla_{\vec{u}} \vec{w} - \nabla_{\vec{v}} \nabla_{\vec{u}} \vec{w} - \nabla_{p[\vec{u}, \vec{v}]} \vec{w} - p[q[\vec{u}, \vec{v}] \vec{w}],$$

названо Вагнером *первым тензором кривизны Схоутена.* Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид

$$R^d_{abc} = 2\vec{e}[a \Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{a|e|} \Gamma^e_{b]c}.$$

В случае, когда распределение D не содержит интегрируемого распределения размерности $n-2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [7]. Назовем тензор Схоутена *тензором кривизны распределения* D, а распределение D в случае обращения в нуль тензора Схоутена — *распределением нулевой кривизны.* Нетрудно установить, что частные производные $\partial_n \Gamma^a_{bc} = P^a_{bc}$ являются компонентами допустимого тензорного поля [7].

Замечание 3. Для (почти) K-контактных пространств тензор кривизны Схоутена наделен теми же свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае это не так.

Векторные поля $\big(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - G^a_n \partial_{n+a}, \partial_{n+a}\big)$ определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $\big(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} dx^b + N^a_b x^{n+b} dx^n\big)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \vec{u} + x^{n+d} \big(2\omega_{ba} N^c_d + R^c_{bad}\big) \partial_{n+c}, \tag{3}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d} \big(\partial_n \Gamma^c_{ad} - \nabla_a N^c_d\big) \partial_{n+c}, \tag{4}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c}.$$

Из (3), (4) получаем выражение для тензора кривизны продолженной связности:

$$K(\vec{u}, \vec{v})\vec{w} = 2\omega(\vec{u}, \vec{v}) N \vec{w} + R(\vec{u}, \vec{v})\vec{w},$$

$$K(\vec{\xi}, \vec{u})\vec{v} = P(\vec{u}, \vec{v}) - (\nabla_{\vec{u}} N)\vec{v},$$

где $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma D$.

Теорема 2. *Существует N-продолженная метрическая связность, однозначно определяемая следующими условиями:*

(1) $\vec{Z}g(\vec{X},\vec{Y}) = g(\nabla_{\vec{Z}}\vec{X},\vec{Y}) + g(\vec{X},\nabla_{\vec{Z}}\vec{Y})$ *(свойство метричности)*,

(2) $\nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - p[\vec{X},\vec{Y}] = 0$ *(отсутствие кручения)*,

(3) N *— симметрический оператор такой, что*

$$g(N\vec{X},\vec{Y}) = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g(\vec{X},\vec{Y}), \tag{5}$$

где $\vec{X},\vec{Y},\vec{Z} \in \Gamma D$ *— сечения распределения* D, $P : TX \to D$ *— проектор.*

Доказательство. Первые два условия теоремы однозначно определяют внутреннюю метрическую связность [7]. Альтернируя вторую ковариантную производную, получаем $\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac}$.

Сравнивая полученный результат с (5), находим явное выражение для эндоморфизма N:

$$N^f_b = \frac{1}{4(n-1)}\omega^{ea}(R^f_{eab} + g_{bd}g^{cf}R^d_{eac}).$$

Если $\partial_n g_{ab} = 0$, то полагаем $N = 0$. Теорема доказана.

Будем называть N-продолженную связность, наделенную свойствами теоремы 2, *N-продолженной метрической связностью.* Будем использовать для продолженной связности обозначение $\nabla^N = (\nabla, N)$, в частном случае $\nabla^1 = (\nabla, 0)$.

3. Специальные связности на многообразиях с почти контактной метрической структурой

Картан (см. [8–10]) первым рассмотрел линейную метрическую связность с кручением вместо связности Леви-Чивиты. Наибольшим интересом среди метрических связностей с кручением пользуется полусимметрическая связность, систематическое исследование которой проведено Яно в [11]. Четверть-симметрическая связность определена в 1975 г. Голабом [12]. Большое количество работ посвящено как метрическим, так и не метрическим связностям с кручением, заданным на многообразиях с почти контактной метрической структурой. Остановимся здесь лишь на работе Бежанку [13]. Бежанку определяет связность ∇^B на многообразии Сасаки с помощью формулы

$$\nabla^B_{\vec{X}} = \widetilde{\nabla}_{\vec{X}}\vec{Y} - \eta(\vec{X})\widetilde{\nabla}_{\vec{Y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{Y})\widetilde{\nabla}_{\vec{X}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{X},\vec{Y})\vec{\xi}.$$

В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma^{B\alpha}_{\beta\gamma}$ связности ∇^B являются

$$\Gamma^{Ba}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической в более общем случае почти контактной метрической структурой, чем структура Сасаки. Действительно, так как $\nabla^B_n g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, метричность связности Бежанку эквивалентна почти K–контактности почти контактной метрической структуры. Определим на многообразии с почти контактной метрической структурой связность ∇^N с помощью равенства

$$\nabla^N_{\vec{X}} = \nabla^B_{\vec{X}}\vec{Y} + \eta(\vec{X})N\vec{Y},$$

где N — эндоморфизм из теоремы 2. Назовем введенную связность N-*связностью.* Отличными от нуля компонентами N-связности, самое большее, будут

$$\Gamma^{Na}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}),$$

$\Gamma^{Na}_{nc} = N^a_c$. Кручение N-связности определяется равенством

$$S^N(\vec{X}, \vec{Y}) = 2\omega(\vec{X}, \vec{Y})\vec{\xi} + \eta(\vec{X})N\vec{Y} - \eta(\vec{Y})N\vec{X}.$$

Непосредственными вычислениями в адаптированных координатах проверяется справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *N-связность является метрической связностью.*

4. N-продолженная связность как почти контактная метрическая структура

Пусть на многообразии X задана контактная метрическая структура $(D, \varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X)$. Определим на распределении D как на гладком многообразии почти контактную метрическую структуру $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$, полагая

$$\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\vec{e}_a, \vec{e}_b), \quad \tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = \tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{u}, \partial_{n+b}) = 0,$$

$$J(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a}, \quad J(\partial_{n+a}) = -\vec{\varepsilon}_a.$$

Векторные поля ($\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - G^a_n \partial_{n+a}, \partial_{n+a}$) определяются здесь продолженной связностью. Полученную структуру будем называть *продолженной почти контактной метрической структурой.* Пусть $\tilde{\omega} = d\lambda$. Непосредственно проверяется, что отличные от нуля компоненты формы $\tilde{\omega}$ определяются равенствами $\tilde{\omega}_{ab} = \omega_{ab}$. Таким образом, $\operatorname{rk} \tilde{\omega} = \frac{n-1}{2}$. Отсюда, в частности, следует, что построенная структура не является контактной и, в частности, структурой Сасаки.

Теорема 4. *Продолженная почти контактная метрическая структура является почти K-контактной тогда и только тогда, когда исходная структура K-контактна.*

Доказательство. Ненулевые компоненты производной Ли $L_{\vec{u}}\tilde{g}$ в адаптированных координатах имеют следующий вид:

$$(L_{\vec{u}}\tilde{g})_{ab} = \partial_n g_{ab}, \tag{6}$$

$$(L_{\vec{u}}\tilde{g})_{n+a,n+b} = \partial_n g_{ab} - g_{ac} N^c_b - -g_{cb} N^c_a, \tag{7}$$

$$(L_{\vec{u}}\tilde{g})_{n+a,b} = g_{ac}(P^c_{bd} - \nabla_b N^c_d) x^{n+d}. \tag{8}$$

На самом деле компоненты (7) также равны нулю как компоненты ковариантной производной от метрического тензора. Равенство $\partial_n g_{ab} = 0$ влечет два других: $N^c_d = 0$, $P^c_{bd} = 0$ (см. (6) и (8)), что и доказывает теорему.

Пусть теперь исходная структура K-контактна ($N = 0$), тогда имеет место

Теорема 5. *Почти контактная метрическая структура* $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ *почти нормальна тогда и только тогда, когда распределение* D *является распределением нулевой кривизны.*

Доказательство. Перепишем равенство (1) в новых обозначениях:

$$N_J + 2(d\tilde{\eta} \circ J) \circ \vec{u} = 0.$$

В [4] доказано, что почти контактная структура является почти нормальной тогда и только тогда, когда $\tilde{P} \circ N_J = 0$, где $\tilde{P} : TD \to \tilde{D}$ — проектор. Воспользовавшись равенствами (3)–(5) в случае связности ∇^1, получаем следующие выражения для компонент тензора Нейенхейса аффинора J:

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = -R^e_{abc} x^{n+c} \partial_{n+e},$$

$$N_J(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = 2\omega_{ba} + R^e_{abc} x^{n+c} \partial_{n+e},$$

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = 0,$$

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = N_J(\partial_{n+a}, \partial_n) = -x^{n+c} P^b_{ac} \partial_{n+b}.$$

Таким образом, продолженная почти контактная метрическая структура почти нормальна тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор кривизны Схоутена.

Теорема 6. *Почти контактная метрическая структура* $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ *является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда структура* $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ *— сасакиева структура с распределением нулевой кривизны.*

Доказательство. Непосредственными вычислениями подтверждается справедливость следующего утверждения: $d\Omega = 0 \Leftrightarrow d\tilde{\Omega} = 0$, где $\tilde{\Omega}(\vec{X}, \vec{Y}) = \tilde{g}(\vec{X}, J\vec{Y})$, что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1958. N 10. P. 338–354.
2. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, № 3. С. 17–22.
3. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Математика. 2013. № 4. С. 1–9.
4. *Галаев С. В.* Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, № 1. С. 16–22.
5. *Галаев С. В.* Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. вузов. Математика. 2014. № 8. С. 42–52.
6. *Галаев С. В., Гохман А. В.* О первых интегралах динамической системы с неинтегрируемой линейной связью // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2013. С. 23–26.
7. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. С. 173–255.
8. *Cartan E.* Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relative. I // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1923. V. 40. P. 325–412.

9. *Cartan E.* Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relative generalisee. I // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1924. V. 41. P. 1–25.

10. *Cartan E.* Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relative generalisee. II // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1925. V. 42. P. 17–88.

11. *Yano K.* On semi-symmetric metric connections // Revue Roumaine Math. Pures Appl. 1970. N 15. P. 1579–1586.

12. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor New Ser. 1975. N 29. P. 249–254.

13. *Bejancu A.* Kähler contact distributions // J. Geom. Phys. 2010. N 60. P. 1958–1967.

Статья поступила 31 января 2015 г.

Галаев Сергей Васильевич
Саратовский гос. университет им. Н. Г. Чернышевского
ул. Астраханская, 83, Саратов 410012
sgalaev@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2015. Том 22, № 1

УДК 517.9

НЕЛОКАЛЬНАЯ НА ПОЛУОСИ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Д. Иванова, В. Е. Федоров

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости в классическом и обобщенном смыслах нелокальной по времени задачи с интегральным условием на полуоси для линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве с вырожденным оператором при производной. Предполагаются выполненными условия на операторы в уравнении, гарантирующие экспоненциальное убывание его сильно непрерывной разрешающей полугруппы. Получена оценка экспоненциального убывания обобщенного решения. Абстрактные результаты использованы при рассмотрении нелокальной по времени краевой задачи для класса уравнений в частных производных с многочленами от оператора Лапласа, включающего в себя некоторые уравнения теории фильтрации, теории полупроводников.

Ключевые слова. нелокальная задача, вырожденное эволюционное уравнение, полугруппа операторов, классическое решение, обобщенное решение, краевая задача.

N. D. Ivanova and V. E. Fedorov. A Nonlocal Problem on the Semiaxis for Degenerate Evolution Equations.

Abstract: We obtain necessary and sufficient conditions of the unique solvability in the classical and generalized sense of a time nonlocal boundary value problem with an integral condition on the semiaxis for a linear homogeneous differential equation of the first order in Banach space with a degenerate operator at the derivative. The conditions on the operators in this equation ensure the exponential decay of the respective strongly continuous resolving semigroup. An estimate exhibiting the exponential decay of a generalized solution is given. The abstract results are used to examine a time nonlocal boundary value problem for a class of partial differential equations with polynomials of the Laplacian, including some equations of filtration theory and the theory of semiconductors.

Keywords: nonlocal problem, degenerate evolution equation, operator semigroup, classical solution, generalized solution, boundary value problem.

1. Введение

Рассмотрим нелокальную задачу

$$\int_0^\infty u(t)\eta(t)\,dt = u_0 \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

для вырожденного эволюционного уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t), \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

Здесь $L \in \mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ — линейный оператор, непрерывно действующий из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{V}$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(M)$, плотной в $\mathfrak{U}$, действующий в $\mathfrak{V}$, $\eta : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ — неотрицательная невозрастающая функция. Предполагается выполнение условия сильной (L,p)-радиальности оператора M [1], гарантирующее существование экспоненциально убывающей вырожденной сильно непрерывной разрешающей полугруппы уравнения (1.2).

Задачи для уравнений такого вида — с вырожденным оператором при производной, а потому не разрешимых относительно нее — представляют собой удобную для исследования операторными методами абстрактную форму начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных [1–4]. В частности, полученные в данной работе необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1.1), (1.2) использованы для установления однозначной разрешимости краевых задач для класса уравнений вида (1.2) с операторами L и M, представляющими собой многочлены от эллиптического по пространственным переменным оператора. Этот класс включает в себя некоторые уравнения теории фильтрации и теории полупроводников.

Результаты данной работы являются продолжением на случай вырожденных эволюционных уравнений вида (1.2) результатов из работы [5], в которой получены необходимые и достаточные условия разрешимости в обобщенном и классическом смыслах задачи (1.1) с неотрицательной невозрастающей функцией η для уравнения

$$\dot{u}(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

разрешенного относительно производной, где A — линейный оператор, порождающий в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ сильно непрерывную полугруппу класса C_0 [6]. В то же время они дополняют касающиеся вырожденного уравнения (1.2) результаты работы [7], в которой исследована однозначная разрешимость нелокальной задачи

$$\int_0^T u(t)\eta(t)\,dt = u_0 \tag{1.4}$$

для неоднородных уравнений вида (1.2) и (1.3). В [7] также отмечено, что в отличие от однородного уравнения поведение на бесконечности решения неоднородного уравнения не определяется лишь свойствами операторов A или L, M, поэтому для такого уравнения нельзя гарантировать в терминах этих операторов корректность нелокального условия (1.1). Именно по этой причине в данной работе рассматривается лишь однородное уравнение.

Отметим также работы И. В. Тихонова о единственности решения задач (1.2), (1.4) и (1.3), (1.4) [8], об однозначной разрешимости задач (1.1), (1.3) и (1.3), (1.4) [9], а также касающиеся близких по форме нелокальных задач работы А. А. Керефова [10], В. В. Шелухина [11], А. И. Кожанова [12] и многих других авторов, например, [13–15]. Несколько более подробную историографию вопроса можно найти в [7].

2. Предварительные сведения

Пусть задана функция $\eta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Рассмотрим нелокальную задачу

$$\int_0^\infty x(t)\eta(t)\,dt = x_0 \tag{2.1}$$

для однородного эволюционного уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

где A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A)$ в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, порождающий сильно непрерывную полугруппу $\{X(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}) : t \geq 0\}$ класса C_0.

Следуя [5], *обобщенным решением уравнения* (2.2) будем называть функцию $x(t) = X(t)v$, $t \geq 0$, $v \in \mathfrak{X}$. В данном случае такая функция непрерывна, но может быть недифференцируемой.

Функция $x \in C^1([0,\infty);\mathfrak{X})$ называется *классическим решением уравнения* (2.2), если для нее выполняется равенство (2.2) при каждом $t \geq 0$. Понятно, что для данного оператора A всякое классическое решение уравнения (2.2) является обобщенным, обобщенное решение является классическим при $v \in D(A)$.

Обобщенным или *классическим решением задачи* (2.1), (2.2) называется соответственно обобщенное или классическое решение уравнения (2.2), если для него выполняется условие (2.1).

Теорема 2.1 [5]. *Пусть оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $\{X(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}) : t \geq 0\}$ класса C_0, справедливо неравенство $\|X(t)\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{X})} \leq Ke^{-\alpha t}$ при $t \geq 0$ с константами $K > 0$, $\alpha > 0$, функция η неотрицательная и неубывающая на $(0,\infty)$, $\eta(t) > 0$ при $t \to 0+$. Тогда*

(i) *для любого $x_0 \in D(A)$ существует единственное обобщенное решение $x(t) = X(t)v$ задачи* (2.1), (2.2), *при этом $\|x(t)\|_{\mathfrak{X}} \leq Ce^{-\alpha t}\|Ax_0\|_{\mathfrak{X}}$, где константа C не зависит от x_0 и t;*

(ii) *обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2) *является классическим тогда и только тогда, когда $x_0 \in D(A^2)$;*

(iii) *если $x_0 \in \mathfrak{X} \setminus D(A)$, то не существует обобщенного решения задачи* (2.1), (2.2).

Перейдем к вырожденному эволюционному уравнению

$$L\dot{u}(t) = Mu(t), \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

Здесь $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, $L \in \mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})\}$, $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$.

Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным* с константами $K > 0$, $a \in \mathbb{R}$, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a,\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu \in (a,\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\left\{\left\|\left(R^L_\mu(M)\right)^{n(p+1)}\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})}, \left\|\left(L^L_\mu(M)\right)^{n(p+1)}\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V})}\right\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует плотный в $\mathfrak{V}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{V}}$, такой, что

$$\left\|M(\mu L-M)^{-1}\left(L_\mu^L(M)\right)^{p+1}f\right\|_{\mathfrak{V}}\le\frac{\mathrm{const}(f)}{(\mu-a)^{p+2}}\quad\forall f\in\overset{\circ}{\mathfrak{V}},$$

$$\left\|\left(R_\mu^L(M)\right)^{p+1}(\mu L-M)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})}\le\frac{K}{(\mu-a)^{p+2}}$$

при любом $\mu\in(a,\infty)$.

Замечание 2.1. Эквивалентность условий данного определения аналогичным более громоздким условиям, использованным в [1], доказана в [16].

Семейство операторов $\{U(t)\in\mathscr{L}(\mathfrak{U}):t\ge 0\}$ называется *разрешающей полугруппой* уравнения (2.3), если

(i) $U(s)U(t)=U(s+t)$, $s,t\ge 0$;

(ii) при любом u_0 из некоторого плотного линеала в пространстве $\mathfrak{U}$ функция $u(t)=U(t)u_0$ есть классическое решение уравнения (2.3);

(iii) для любого семейства операторов $\{V(t)\in\mathscr{L}(\mathfrak{U}):t\ge 0\}$ со свойствами (i), (ii) выполняется $\operatorname{im}V(0)\subset\operatorname{im}U(0)$.

Положим $\mathfrak{U}^0=\ker\left(R_\mu^L(M)\right)^{p+1}$, $\mathfrak{V}^0=\ker\left(L_\mu^L(M)\right)^{p+1}$, $\mathfrak{U}^1$ — замыкание образа оператора $\operatorname{im}\left(R_\mu^L(M)\right)^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}^1$ — замыкание образа $\operatorname{im}\left(L_\mu^L(M)\right)^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{V}$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($D(M_k)=D(M)\cap\mathfrak{U}^k$), $k=0,1$.

Теорема 2.2 [1]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален с константами $K>0$, $a\in\mathbb{R}$. Тогда*

(i) $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}^0\oplus\mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V}=\mathfrak{V}^0\oplus\mathfrak{V}^1$;

(ii) $L_k\in\mathscr{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $M_k\in\mathscr{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $k=0,1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1}\in\mathscr{L}(\mathfrak{V}^0;\mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1}\in\mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$;

(iv) *оператор* $H=M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* p;

(v) *существует разрешающая уравнение* (2.3) *сильно непрерывная полугруппа операторов* $\{U(t)\in\mathscr{L}(\mathfrak{U}):t\ge 0\}$, *при этом* $\|U(t)\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})}\le Ke^{at}$ *для всех* $t\ge 0$;

(vi) *оператор* $S=L_1^{-1}M_1$ *порождает* C_0*-непрерывную полугруппу операторов* $\{U_1(t)\equiv U(t)|_{\mathfrak{U}^1}\in\mathscr{L}(\mathfrak{U}^1):t\ge 0\}$.

Замечание 2.2. В случае $\ker L\ne\{0\}$ в условиях теоремы 2.2 единицей $U(0)$ разрешающей полугруппы является нетривиальный проектор, для которого $\ker L\subset\ker U(0)=\mathfrak{U}^0$, $\operatorname{im}U(0)=\mathfrak{U}^1$.

3. Нелокальная задача для вырожденного эволюционного уравнения

Рассмотрим нелокальную задачу

$$\int_0^\infty u(t)\eta(t)\,dt=u_0 \tag{3.1}$$

для однородного вырожденного эволюционного уравнения

$$L\dot u(t)=Mu(t),\quad t\ge 0, \tag{3.2}$$

в предположении сильной (L,p)-радиальности оператора M. Используя теорему 2.2, задачу (3.1), (3.2) редуцируем к двум задачам

$$\int\limits_0^\infty x(t)\eta(t)\,dt = U(0)u_0, \tag{3.3}$$

$$\dot{x}(t) = Sx(t), \quad t \geq 0, \tag{3.4}$$

и

$$\int\limits_0^\infty y(t)\eta(t)\,dt = (I - U(0))u_0, \tag{3.5}$$

$$H\dot{y}(t) = y(t), \quad t \geq 0, \tag{3.6}$$

где $x(t) \equiv U(0)u(t)$, $y(t) = (I - U(0))u(t)$ при $t \geq 0$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U}^1)$, $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^0)$.

В силу нильпотентности оператора H (утверждение (iv) теоремы 2.2) уравнение (3.6) имеет только тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ (см., например, [1]). Поэтому задача (3.5), (3.6) разрешима тогда и только тогда, когда $(I-U(0))u_0 = 0$. Следовательно, при $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ задача (3.1), (3.2) эквивалентна задаче (3.3), (3.4).

Обобщенным решением уравнения (3.2) будем называть функцию $u(t) = U(t)v$ при $v \in \mathfrak{U}$. Функция $u \in C^1([0,\infty);\mathfrak{U})$ называется *классическим решением уравнения* (3.2), если для нее равенство (3.2) выполняется непосредственно. Всякое классическое решение u уравнения (3.2) является классическим решением уравнения (3.4) в силу проведенных выше рассуждений, поэтому $u(t) = U_1(t)v_1 = U(t)v_1 = U(t)(v_0 + v_1) = U(t)v$, где $v_0 \in \mathfrak{U}^0$, $v_1 \in \mathfrak{U}^1$, $v = v_0 + v_1$, следовательно, оно является обобщенным решением уравнения (3.2). Здесь также использован тот факт, что в силу замечания 2.2 $U(t)v_0 = U(t)U(0)v_0 = 0$ при любом $v_0 \in \mathfrak{U}^0$.

Из тех же соображений и равенства $D(S) = D(M_1)$, справедливого в силу непрерывной обратимости оператора L_1, следует, что обобщенное решение $u(t) = U(t)v$ уравнения (3.2) является классическим в случае, когда $v \in \mathfrak{U}^0 \dot{+} D(M_1)$.

Обобщенным или *классическим решением задачи* (3.1), (3.2) называется соответственно обобщенное или классическое решение уравнения (3.2), если для него выполняется условие (3.1).

Теорема 3.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален с константами $K > 0$, $a < 0$, функция $\eta : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ неотрицательная и невозрастающая, не равная тождественно нулю. Тогда*

(i) *существует единственное обобщенное решение $u \in C([0,+\infty);\mathfrak{U})$ задачи (3.1), (3.2) для $u_0 \in D(M_1)$, при этом $\|u(t)\|_{\mathfrak{U}} \leq Ce^{-|a|t}\|Mu_0\|_{\mathfrak{V}}$ для всех $t \geq 0$, где константа C не зависит от u_0 и t;*

(ii) *если $u_0 \in \mathfrak{U} \setminus D(M_1)$, то не существует обобщенного решения задачи (3.1), (3.2);*

(iii) *обобщенное решение задачи (3.1), (3.2) является классическим тогда и только тогда, когда $u_0 \in D\big(\big(L_1^{-1}M_1\big)^2\big)$.*

Доказательство. Как было замечено, условие $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ необходимо для обобщенной разрешимости задачи (3.1), (3.2), при этом задача (3.1), (3.2) равносильна задаче (3.3), (3.4). Согласно теореме 2.2 оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U}^1)$ порождает полугруппу $\{U_1(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1) : t \geq 0\}$, удовлетворяющую неравенству

$$\|U_1(t)\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U}^1)} \leq \|U(t)\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} \leq Ke^{at} = Ke^{-|a|t}$$

в силу отрицательности a по условию данной теоремы. Применив к задаче (3.3), (3.4) теорему 2.1, получим утверждения данной теоремы, учитывая, что

$$\|u(t)\|_{\mathfrak{U}} = \|u(t)\|_{\mathfrak{U}^1} \leq C_1e^{-|a|t}\|Su_0\|_{\mathfrak{U}^1}$$
$$\leq C_1\left\|L_1^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)}e^{-|a|t}\|M_1u_0\|_{\mathfrak{V}^1} = Ce^{-|a|t}\|Mu_0\|_{\mathfrak{V}}. \quad \square$$

4. Нелокальная по времени краевая задача для одного класса уравнений в частных производных

Пусть многочлены $P_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$, $Q_m(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j\lambda^j$ таковы, что $c_i, d_j \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $c_n, d_m \neq 0$, $m \geq n$. Далее, $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\eta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, Δ — оператор Лапласа, $\theta \in \mathbb{R}$. Рассмотрим краевую задачу

$$\int\limits_0^\infty z(x,t)\eta(t)\,dt = z_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$P_n(\Delta)\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = Q_m(\Delta)z(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,\infty), \tag{4.2}$$

$$\theta\frac{\partial}{\partial n}\Delta^k z(x,t) + (1-\theta)\Delta^k z(x,t) = 0, \quad k = 0, \ldots, m-1, \ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,\infty). \tag{4.3}$$

Положим

$$z(\cdot,t) = u(t), \quad t \geq 0,$$

$$\mathfrak{U} = H_\theta^{2n}(\Omega) = \Big\{v \in H^{2n}(\Omega) : \theta\frac{\partial}{\partial n}\Delta^k v(x) + (1-\theta)\Delta^k v(x) = 0,$$
$$k = 0, \ldots, n-1, \ x \in \partial\Omega\Big\},$$

$$\mathfrak{V} = L_2(\Omega), \quad L = P_n(\Delta), \quad M = Q_m(\Delta),$$

$$D(M) = H_\theta^{2m}(\Omega)$$
$$= \Big\{v \in H^{2m}(\Omega) : \theta\frac{\partial}{\partial n}\Delta^k v(x) + (1-\theta)\Delta^k v(x) = 0, \ k = 0, \ldots, m-1, \ x \in \partial\Omega\Big\}.$$

Таким образом, задача (4.1)–(4.3) редуцирована к задаче (3.1), (3.2).

Обозначим через λ_k, $k \in \mathbb{N}$, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности собственные значения оператора A_1, определенного на

$$H_\theta^2(\Omega) = \Big\{v \in H^2(\Omega) : \theta\frac{\partial}{\partial n}\Delta v(x) + (1-\theta)\Delta v(x) = 0, \ x \in \partial\Omega\Big\}$$

равенством $A_1 u = \Delta u$ и действующего в $L_2(\Omega)$. Кроме того, пусть $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2(\Omega)}$ в $L_2(\Omega)$ система соответствующих собственных функций этого оператора. Будем считать, что $P_n(\lambda_k) = 0$ при некоторых $k \in \mathbb{N}$, т. е. уравнение (4.2) не разрешимо относительно производной по времени z_t.

Обобщенным решением для задачи (4.1)–(4.3) является любая функция вида

$$z(x,t) = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} e^{t\frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}} \langle v, \varphi_k\rangle_{L_2(\Omega)} \varphi_k(x), \quad v \in H_\theta^{2n}(\Omega).$$

Теорема 4.1. *Пусть $m > n$, $(-1)^{m-n}\operatorname{Re}(d_m/c_n) \leq 0$, а спектр $\sigma(A_1)$ не содержит общих корней многочленов P_n и Q_m,*

$$a = \sup_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \operatorname{Re}\frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} < 0,$$

функция $\eta : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ неотрицательная и невозрастающая, не равная тождественно нулю. Тогда при любом $z_0 \in H_\theta^{2m}(\Omega) \cap \operatorname{span}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) \neq 0\}$ существует единственное обобщенное решение задачи (4.1)–(4.3), при этом

$$\exists C > 0\ \forall t \geq 0 \quad \|z(\cdot,t)\|_{H^{2n}(\Omega)} \leq Ce^{-|a|t}\|z_0\|_{H^{2m}(\Omega)}.$$

Если $z_0 \notin H_\theta^{2m}(\Omega) \cap \operatorname{span}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) \neq 0\}$, то обобщенного решения не существует. Если $z_0 \in H_\theta^{4m-2n} \cap \operatorname{span}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) \neq 0\}$, то существует классическое решение задачи (4.1)–(4.3).

Доказательство. При условии, что $m > n$, $(-1)^{m-n}\operatorname{Re}(d_m/c_n) \leq 0$, а спектр $\sigma(A_1)$ не содержит общих корней многочленов P_n и Q_m, оператор M сильно $(L,0)$-радиален согласно теореме 5.1 из [17]. При этом $\sigma^L(M) = \left\{\mu_k = \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} : P_n(\lambda_k) \neq 0\right\}$, следовательно, в определении сильной $(L,0)$-радиальности можно выбрать

$$a = \sup_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \operatorname{Re}\frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}.$$

В [17] также доказано, что в рассматриваемой ситуации

$$P = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \langle\cdot,\varphi_k\rangle_{L_2(\Omega)}\varphi_k, \quad Q = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \langle\cdot,\varphi_k\rangle_{L_2(\Omega)}\varphi_k$$

(сходимость ряда понимается в смысле нормы пространства $\mathfrak{U}$ для оператора P и в смысле нормы пространства $\mathfrak{V}$ для оператора Q), $\mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{V}^1$ — замыкания одного и того же множества $\operatorname{span}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) \neq 0\}$ по норме пространства $\mathfrak{U}$ или $\mathfrak{V}$ соответственно. Осталось сослаться на теорему 3.1 и заметить, что в данном случае норма $\|Mz_0\|_{L_2(\Omega)}$ эквивалентна норме $\|z_0\|_{H^{2m}(\Omega)}$. $\square$

Пример 4.1. Пусть

$$P_1(\lambda) = 1 + \lambda, \quad Q_2(\lambda) = \lambda + 2\lambda^2, \quad \Omega = (0,\pi), \quad \theta = 0.$$

Тогда

$$\lambda_k = -k^2, \quad \varphi_k(x) = \sin kx, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \sup_{k=2,3,\ldots} \frac{2k^4 - k^2}{1 - k^2} = -9\frac{1}{3} < 0,$$

поэтому задача

$$\int_0^\infty z(x,t)\eta(t)\,dt = z_0(x), \quad x \in (0,\pi),$$

$$z(0,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,t) = z(\pi,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)z(x,t), \quad (x,t) \in (0,\pi) \times [0,\infty),$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 4.1.

Замечание 4.1. В случае $m \leq n$ теорема 4.1 также верна, при этом условие $(-1)^{m-n}\operatorname{Re}(d_m/c_n) \leq 0$ можно опустить без потери результата, оператор M будет непрерывным на $H_\theta^{2n}(\Omega)$, а значения индекса k в формулировке краевых условий (4.3) должны изменяться до величины $n-1$.

Замечание 4.2. Частными случаями уравнения (4.2) являются уравнение переходных процессов в полупроводниках [3]:

$$(\lambda - \Delta)\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \alpha z(x,t),$$

уравнение фильтрации в трещиновато-пористой среде [18]:

$$(\lambda - \Delta)\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \alpha \Delta z(x,t),$$

уравнение движения грунтовых вод со свободной поверхностью [19]:

$$(\lambda - \Delta)\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \alpha \Delta z(x,t) - \beta \Delta^2 z(x,t).$$

Замечание 4.3. В рассуждениях этого раздела можно заменить оператор Лапласа A_1 действующим в $L_2(\Omega)$ самосопряженным эллиптическим оператором, вообще говоря, высокого порядка

$$(A_1 u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2r} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

с областью определения $D(A_1) = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega)$ (обозначение см. в [20]), где

$$(B_l u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq r_l} b_{l\alpha}(x) D^\alpha u(x), \quad b_{l\alpha} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, 2, \dots, r,$$

при условии регулярной эллиптичности набора операторов $A, B_1, B_2, \dots, B_r$ [20] и ограниченности справа спектра $\sigma(A_1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 173–200.
2. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
3. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

4. *Федоров В. Е.* Обобщение теоремы Хилле — Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 426–448.

5. *Тихонов И. В.* О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 841–843.

6. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

7. *Федоров В. Е., Иванова Н. Д., Федорова Ю. Ю.* Нелокальная по времени задача для неоднородных эволюционных уравнений // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 876–891.

8. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. АН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 2. С. 133–166.

9. *Тихонов И. В.* Нелокальная задача с «периодическим» интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Интегральные преобразования и специальные функции. 2004. Т. 4, № 1. С. 49–69.

10. *Керефов А. А.* Нелокальные граничные задачи для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 74–78.

11. *Шелухин В. В.* Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 191–207.

12. *Кожанов А. И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 51–60.

13. *Byszewski L., Lakshmikantham V.* Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space // Appl. Anal. 1991. V. 40, N 1. P. 11–19.

14. *Agarwal R. P., Bochner M., Shakhmurov V. B.* Linear and nonlinear nonlocal boundary value problems for differential-operator equations // Appl. Anal. 2006. V. 85, N 6–7. P. 701–719.

15. *Уварова М. В.* О некоторых нелокальных краевых задачах для эволюционных уравнений // Мат. тр. 2010. Т. 13, № 2. С. 179–207.

16. *Федоров В. Е.* Свойства псевдорезольвент и условие существования вырожденной полугруппы операторов // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 11, № 20. С. 12–19.

17. *Федоров В. Е., Рузакова О. А.* О разрешимости возмущенных уравнений соболевского типа // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 4. С. 189–217.

18. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 58–73.

19. *Дзекцер Е. С.* Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 5. С. 1031–1033.

20. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

Статья поступила 4 ноября 2014 г.

Федоров Владимир Евгеньевич, Иванова Наталья Дмитриевна
Челябинский гос. университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Южно-Уральский гос. университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск 454080
kar@csu.ru, natalia.d.ivanova@gmail.com

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2015. Том 22, № 1

УДК 517.956

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ СИСТЕМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Е. М. Короткова, С. Г. Пятков

Аннотация. Рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева задачи определения функции источников в системе тепломассопереноса. В качестве условия переопределения берется значение концентрации на выделенных поверхностях (или в отдельных точках). Доказана локальная теорема существования решения задачи и получены оценки устойчивости.
Ключевые слова: параболическая система, обратная задача, тепломассоперенос, система Навье — Стокса, краевая задача.

E. M. Korotkova and S. G. Pyatkov. Inverse Problem of Determining Source Functions in the Heat-and-mass Transfer System.

Abstract: In the article we examine the question of well-posedness in the Sobolev spaces of an inverse problem on determining source functions in the heat-and-mass transfer system. The overdetermination conditions are the values of concentrations of admixtures on separate surfaces or at points. We prove that the problem is solvable locally and obtain stability estimates.
Keywords: parabolic system, inverse problem, heat-and-mass transfer, Navier–Stokes system, boundary value problem.

Введение

Рассматривается система

$$u_t - \nu\Delta u + (u,\nabla)u + \nabla p = f + \beta_c C + \beta_\theta\Theta, \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{1}$$

$$\Theta_t - \lambda_\theta\Delta\Theta + (u,\nabla)\Theta = f_\theta, \tag{2}$$

$$C_t + (u,\nabla)C - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}C_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_iC_{x_i} + a_0C = f_c, \tag{3}$$

где $\nu = \mathrm{const} > 0$, $(x,t)\in Q = G\times(0,T)$ ($G\subset\mathbb{R}^n$, $T<\infty$), u, Θ, p, C — вектор скорости, температура жидкости, давление, вектор концентраций примесей (органических или неорганических) в жидкости и f_c — объемная плотность источников примесей, соответственно. Здесь a_{ij}, a_i, a_0 — матрицы размера $h\times h$, где h — количество примесей, β_C — матрица размера $n\times h$, β_Θ — вектор-функция длины n, $\lambda_\Theta > 0$ — скалярная функция.

Работа поддержана грантом РФФИ № 15–41–00063 и правительством Ханты-Мансийского автономного округа — Югры (грант № 15–41–00063, р_урал_а).

Система (1)–(3) описывает распространение примесей в жидкости. В частности, в класс систем (1)–(3) входит классическая модель Обербека — Буссинеска (см. [1–4]). Функции f_θ и f являются плотностями источников тепла и внешних сил соответственно, а коэффициент λ_θ есть коэффициент теплопроводности. В модели Обербека — Буссинеска β_c и β_θ суть коэффициенты переноса массы и тепла, умноженные на ускорение свободного падения. Здесь считаем, что β_c — произвольная матрица-функция размера $n \times h$ и β_θ — вектор-функция длины n.

Система (1)–(3) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u|_S = g_1(t,x), \quad \Gamma = \partial G,\ S = \Gamma \times (0,T), \tag{4}$$

$$\Theta|_{t=0} = \Theta_0, \quad \Theta|_S = g_2(t,x), \quad C|_{t=0} = C_0, \quad C|_S = g_3(t,x). \tag{5}$$

Рассматривается обратная задача, заключающаяся в нахождении решения системы (1)–(3) и правой части f_c в (3) по данным дополнительных измерений на сечениях G или в отдельных точках.

Положим $x'' = (x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n)$ $(s = 0,1,\dots,n-1)$. Если $s \geq 1$, то положим $x' = (x_1, x_2, \dots, x_s)$. Предполагается, что правая часть в (3) известна в некоторой области $Q' = G_1 \times (0,T)$ и неизвестна в области $Q'' = G_0 \times (0,T)$, где G_1 и G_0 или непустые непересекающиеся области такие, что $\overline{G_0} \cup \overline{G_1} = \overline{G}$, или $G_1 = \varnothing$ и тем самым $Q'' = Q$. Правая часть в (3) имеет вид

$$f_c = f_0(x,t) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x,t) q_i(x',t), \quad (x,t) \in Q, \tag{6}$$

где f_i $(i = 0,1,\dots,m)$ — известные функции обращающиеся в нуль на Q'. Числовые функции $q_i(x',t)$ в данном представлении неизвестны и находятся с использованием условий переопределения:

$$C|_{S_i} = \psi_i(t,x') \quad (S_i = (0,T) \times \Gamma_i,\ i = 1,2,\dots,r,\ m = rh), \tag{7}$$

где $\{\Gamma_i\}$ — набор гладких s-мерных поверхностей, лежащих в G. При $s = 0$ поверхности Γ_i суть просто точки, лежащие в $G_0 = G$.

Обратные задачи такого типа возникают в химии, биологии и других областях при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации. Описание некоторых численных методов решения краевых задач для системы (1)–(3) можно найти в [4]. Отметим работу [5], где рассмотрено большое количество обратных и экстремальных задач в стационарном случае для системы (1)–(3). Подобные модели в упрощенной постановке рассматривались в [6–10]. Отметим, что в реальных моделях, используемых в региональных системах поддержки принятия решений, даже в одномерном случае используется несколько уравнений относительно различных примесей в жидкости. В них учитываются такие параметры воды, как фитопланктон, эпифитон и различные химические составляющие. Большое количество обратных коэффициентных задач с условиями переопределения вида (6) и $s = n - 1$ для параболических уравнений второго порядка рассмотрено в работах Ю. Я. Белова, Ю. Е. Аниконова и ряда других авторов (см. [11]). В случае $n = 1$ ($s = 0$, неизвестные функции q_i зависят только от t и поверхности S_i суть точки) такие линейные и нелинейные задачи рассматривались, например, в [12] для параболических уравнений второго порядка. Среди последних работ выделим результаты [13–15], где аналоги задач вида (1)–(6) рассмотрены для параболических систем уравнений. Вопросы корректности обратных задач для параболических уравнений и систем с условиями переопределения вида (7) (включая численные методы) рассмотрены в [16–21]. Среди монографий, посвященных обратным задачам для параболических и эллиптических уравнений и систем можно отметить монографии [22–25], где можно найти постановки и ряд результатов.

1. Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть E — банахово пространство. Обозначим через $L_p(G; E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в E, снабженное конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ (см., например, [26, § 1.18.4]). Также используются пространства $C^k(\overline{G}; E)$, состоящие из функций, обладающих всеми производными до k включительно, непрерывных и ограниченных в G, имеющих непрерывное продолжение на $\overline{G}$. Пространства Соболева $W_p^k(G; E)$, $W_p^k(Q; E)$ определены стандартным образом (см. [26]). Если $E = \mathbb{C}$ или $E = \mathbb{C}^n$, то используется обозначение $W_p^k(G)$ или $C^k(\overline{G})$. Принадлежность $u \in W_p^k(G)$ (или $u \in C^k(\overline{G})$) для заданной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ означает, что каждая компонента u_i принадлежит $W_p^k(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). Норма в соответствующем пространстве — сумма норм координат, если не указано противное. Аналогичное соглашение примем для матриц: принадлежность $a \in W_p^k(G)$ ($a = \{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$) означает, что $a_{ij}(x) \in W_p^k(G)$ для всех i, j. Для заданного интервала $J = (0, T)$ положим $W_p^{k,r}(Q) = W_p^r(J; L_p(G)) \cap L_p\big(J; W_p^k(G)\big)$ и $W_p^{k,r}(S) = W_p^r(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p\big(J; W_p^k(\Gamma)\big)$. Обозначим через $L_{p,\sigma}(G)$ замыкание соленоидальных C_0^∞-вектор-функций по норме $L_p(G)$ и положим $W_{p,\sigma}^k(G) = W_p^k(G) \cap L_{p,\sigma}(G)$ и $W_{p,\sigma}^{k,k/2}(Q) = W_p^{k,k/2}(Q) \cap L_p(0, T; L_{p,\sigma}(G))$ ($k \geq 0$). Символом $\overset{\circ}{W}{}_q^k(G)$ обозначено замыкание $C_0^\infty(G)$ по норме пространства $W_q^k(G)$ и $\dot{W}_q^1(G) = \{p \in L_{q,loc}(G) : \nabla p \in L_q(G)\}$. Мы отождествляем функции, отличающиеся на константу, и вводим в этом пространстве норму $\|p\|_{\dot{W}_q^1(G)} = \|\nabla p\|_{L_q(G)}$. Это банахово пространство. Обозначение $\nabla_{x''} f(x, t)$ используется для записи вектор-функции $(\partial_{x_{s+1}} f, \partial_{x_{s+2}} f, \ldots, \partial_{x_n} f)$, где символ ∂_{x_k} обозначает частную производную $\frac{\partial}{\partial x_k}$.

Сначала опишем класс областей G. Будем говорить, что $\Gamma = \partial G$ *принадлежит* C^β ($\beta \geq 1$), если существуют числа $d, r > 0$ такие, что для каждого $x_0 \in \Gamma$ существует окрестность U точки x_0 со следующими свойствами: в локальной системе координат y, полученной из начальной вращением системы координат и переносом начала координат так, что ось y_n направлена по внутренней нормали к Γ в x_0,

$$\overline{U}\cap G=\{y\in\mathbb{R}^n: y'\in\overline{B_r}, \omega(y')<y_n\le \omega(y')+d\},\quad y'=(y_1,\dots,y_{n-1}),$$
$$\overline{U}\cap(\mathbb{R}^n\setminus\overline{G})=\{y\in\mathbb{R}^n:\omega(y')-d\le y_n<\omega(y')\},$$
$$\Gamma\cap\overline{U}=\{y\in\mathbb{R}^n: y'\in\overline{B_r},\ y_n=\omega(y')\},$$

где $y_n=\omega(y')$ — уравнение в Γ, $\omega\in C^\beta(\overline{B_r})$ ($B_r=\{y': |y'|<r\}$) и нормы для всех функций ω из $C^\beta(\overline{B_r})$ ограничены константой, не зависящей от x_0. Без потери общности можно предположить, что $Mr<d/4$, где M константа Липшица для ω в B_r. Запишем условия на область G_0 и поверхности Γ_i.

(A) (а) Случай $s>0$. Имеется область $\Omega\subset\mathbb{R}^s$ с границей класса C^2 такая, что $G_0\subset\Omega\times\mathbb{R}^{n-s}$,

$$\Gamma_i=\big\{x\in\mathbb{R}^n: x''=\varphi^i(x')=\big(\varphi^i_{s+1}(x'),\varphi^i_{s+2}(x'),\dots,\varphi^i_n(x')\big), x'\in\Omega\big\},$$

$\varphi^i(x')\in C^2(\overline{\Omega})$ и существует константа $\delta>0$ такая, что

$$U_{\delta i}=\{(x',\varphi^i(x')+\eta): x'\in\Omega,\ \eta\in\mathbb{R}^{n-s},\ |\eta|<\delta\}\subset G_0,\quad \rho(U_{\delta i},G\setminus G_0)>0,$$

для $i=1,2,\dots,r$ и $U_{\delta i}\cap U_{\delta j}=\varnothing$ для $i\ne j$, $i,j=1,2,\dots,r$.

(б) Случай $s=0$. В этом случае в качестве множеств $\{\Gamma_i\}_{i=1}^r$ берем внутренние точки $\{x_i\}_{i=1}^r$ области G. Положим $U_{\delta i}=B_\delta(x_i)$ и выберем число $\delta>0$ такое, что $\overline{U_{\delta i}}\subset G$ и $U_{\delta i}\cap U_{\delta j}=\varnothing$ для $i\ne j$, $i,j=1,2,\dots,r$.

Условие (A) используется во всех статьях, посвященных данным задачам. Как легко увидеть, оно гарантирует единственность решений. Условие (A) выполнено, если $G_0=G=\Omega\times\mathbb{R}^{n-s}$, где Ω — ограниченная или неограниченная область класса C^2. В дальнейшем мы используем следующие обозначения: $Q^\tau=(0,\tau)\times G$, $Q_0^\tau=(0,\tau)\times\Omega$, $Q_T=(0,T)\times\Omega$, $G_\delta=\cup_i U_{\delta i}$, $Q_\tau^{\delta i}=(0,\tau)\times U_{\delta i}$ и $Q_\tau^\delta=(0,\tau)\times G_\delta$.

Лемма 1. *Пусть $u\in W_q^{2,1}(Q^\tau)$ ($q\in(1,\infty)$) и $u(x,0)=0$. Тогда существует константа $c>0$, не зависящая от u, такая, что*

$$\|u\|_{L_q(Q^\tau)}\le c\tau\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)},\qquad \|\nabla u\|_{L_q(Q^\tau)}\le c\tau^{1/2}\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}.$$

Утверждение является следствием формулы Ньютона — Лейбница и интерполяционного неравенства $\|\nabla u\|_{L_q(G)}\le c\|u\|^{1/2}_{W_q^2(G)}\|u\|^{1/2}_{L_q(G)}$.

Следующая лемма является следствием леммы 1 и леммы 3.3 из гл. 2 в [27], где $\delta=\sqrt{\tau}$.

Лемма 2. *Пусть $u\in W_q^{2,1}(Q^\tau)$. Тогда $u\in L_p(Q^\tau)$, где $2-(\frac1q-\frac1p)(n+2)\ge0$ и $p\ge q$, $\nabla u\in L_p(Q^\tau)$, где $1-(\frac1q-\frac1p)(n+2)\ge0$ и $p\ge q$. Более того, $u\in C^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q^\tau})$ для $q>(n+2)/2$ и $\nabla u\in C^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q^\tau})$ для $q>n+2$, где $\lambda\in[0,2-(n+2)/q)$ в первом случае и $\lambda\in[0,1-(n+2)/q)$ в последнем. Справедливы следующие оценки для соответствующих значений параметров:*

$$\|u\|_{L_p(Q^\tau)}\le c\tau^{\beta_1}\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)},\qquad \|\nabla u\|_{L_p(Q^\tau)}\le c\tau^{\beta_1-1/2}\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)},$$
$$\|u\|_{C^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q^\tau})}\le c\tau^{\beta_2}\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)},\qquad \|\nabla u\|_{C^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q^\tau})}\le c\tau^{\beta_2-1/2}\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)},$$

где $\beta_1=1-\frac{(n+2)}{2}(\frac1q-\frac1p)$, $\beta_2=1-\frac{(n+2)}{2q}-\frac{\lambda}{2}$ и константа c не зависит от $\tau\le T$ и $u\in W_q^{2,1}(Q^\tau)$.

Лемма 3. *Пусть $b \in L_p(Q)$. Тогда для любого $\tau \in (0,T]$ имеют место следующие неравенства: если $q > (n+2)/2$ и $p \geq q$, то*

$$\|bu\|_{L_q(Q^\tau)} \leq c\tau^{1-\frac{n+2}{2p}}\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)};$$

если $q > n+2$ и $p \geq q$, то

$$\|b\nabla u\|_{L_q(Q^\tau)} \leq c\tau^{1/2-\frac{(n+2)}{2p}}\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\tau)}.$$

Константа $c > 0$ не зависит от $\tau \leq T$ и $u \in W_q^{2,1}(Q^\tau)$.

Доказательство данной леммы можно найти в доказательстве теоремы 9.1 гл. 4 в [27].

Теорема 1. *Для каждой $f \in L_r(Q)$, $r \in (1,\infty)$, существует единственная вектор-функция $u \in W_{r,\sigma}^{2,1}(Q) \cap L_r\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_r^1(G)\big)$ и функция $p \in L_r(0,\tau;\dot{W}_r^1(G))$ такие, что*

$$u_t - \nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_S = 0, \quad u|_{t=0} = 0$$

и справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_r^{2,1}(Q)} + \|\nabla p\|_{L_r(Q)} \leq c\|f\|_{L_r(Q)},$$

где постоянная c не зависит от f.

Следствие 1. *Для каждой $f \in L_r(Q^\tau)$, $\tau \in (0,T]$, существует единственная вектор-функция $u \in W_{r,\sigma}^{2,1}(Q^\tau) \cap L_r\big(0,\tau;\overset{\circ}{W}{}_r^1(G)\big)$ и функция $p \in L_r\big(0,\tau;\dot{W}_r^1(G)\big)$ такие, что*

$$u_t - \nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_S = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \tag{8}$$

и выполнено неравенство

$$\|u\|_{W_r^{2,1}(Q^\tau)} + \|\nabla p\|_{L_r(Q^\tau)} \leq c\|f\|_{L_r(Q^\tau)},$$

где постоянная c не зависит от f и τ.

Теорема 1 вытекает теоремы 1.1 в [28]. Также можно сослаться на теорему 1.2 в [29] и свойства проектора Гельмгольца.

Следующий результат — теорема о разрешимости параболических задач. Рассматривается задача

$$u_t - Lu = f, \quad u|_S = 0, \quad u(x,0) = 0, \tag{9}$$

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} - a_0(x,t)u,$$

где a_{ij}, a_i, a_0 — матрицы размера $h \times h$ и существует константа $\delta_1 > 0$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j) \geq \delta_1 \sum_{i=1}^{n}\|\xi^i\|^2 \quad \forall \xi^j \in \mathbb{R}^h,\ (x,t) \in Q,\ j = 1,2,\dots,n. \tag{10}$$

Считаем, что

$$a_{ij} \in C(\overline{Q}), \quad a_i \in L_q(Q), \quad a_0 \in L_q(Q), \quad i,j = 1\dots n. \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть $\partial G \in C^2$, $q > n+2$, $\gamma \in (0,T]$ и условия* (10), (11) *выполнены. Тогда для каждого $f \in L_q(Q^\gamma)$ существует единственное решение $u \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$ задачи* (9), *удовлетворяющее оценке*

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} \le c\|f\|_{L_q(Q^\gamma)},$$

где константа c не зависит от $\gamma \in (0,T)$.

Для фиксированного $\gamma = T$ теорема является следствием теоремы 10.4 гл. 7 в [27] (см. также [30]). Независимость постоянной от γ очевидна.

Теорема 3. *Пусть $\partial G \in C^2$ и условия* (A), (10), (11) *выполнены. Потребуем также, чтобы для некоторого $q > n+2$ и для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$ выполнено, что*

$$\nabla_{x''} f \in L_q\big(Q_\gamma^\delta\big), \quad \nabla_{x''} a_{ij} \in L_\infty\big(Q_T^\delta\big), \quad \nabla_{x''} a_i, \in L_q\big(Q_T^\delta\big), \quad \nabla_{x''} a_0 \in L_q\big(Q_T^\delta\big).$$

Тогда решение $u \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$ задачи (9) *обладает свойствами: $\nabla_{x''} u \in W_q^{2,1}\big(Q_\gamma^{\delta_1}\big)$ для любого $\delta_1 < \delta$ и справедлива оценка*

$$\|\nabla_{x''} u\|_{W_q^{2,1}(Q_\gamma^{\delta_1})} \le c(\|f\|_{L_q(Q^\gamma)} + \|\nabla_{x''} f\|_{L_q(Q_\gamma^\delta)}).$$

Постоянная c зависит от $\delta_1 < \delta$ и не зависит от $\gamma \le T$.

2. Основные результаты

Сначала наложим условия на данные, полагая, что условие (A) выполнено. Всюду ниже считаем, что $q > n+2$.

Условие согласования и гладкости могут быть записаны в следующей форме: существуют вектор-функции Φ_1, Φ_3 и функция Φ_2 такие, что

$$\Phi_i(t,x) \in W_q^{2,1}(Q) : \Phi_1|_{t=0} = u_0,\ \Phi_2|_{t=0} = \Theta_0,\ \Phi_3|_{t=0} = C_0,\ \Phi_i|_S = g_i, \tag{12}$$

$$\operatorname{div} \Phi_1 = 0, \quad \Phi_3|_{S_j} = \psi_j, \quad f_0, f_\theta, f \in L_q(Q),\ f_j \in L_\infty(Q), \tag{13}$$

$$\nabla_{x''} \Phi_3 \in W_q^{2,1}\big(Q_T^\delta\big), \quad \nabla_{x''} f_0 \in L_q\big(Q_T^\delta\big), \quad \nabla_{x''} f_j \in L_\infty\big(Q_T^\delta\big), \tag{14}$$

где $j = 1, 2, \dots, m$, $i = 1, 2, 3$ и δ —постоянная из условия (A).

Определим матрицу B следующим образом: строки с номерами от $(k-1)h+1$ до kh $(k = 1, 2, \dots, r)$ занимают векторы-столбцы

$$[f_1(x', \varphi^k(x'), t), f_2(x', \varphi^k(x'), t), \dots, f_m(x', \varphi^k(x'), t)].$$

Полагаем, что существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B| \ge \delta_0 > 0, \quad \text{п. в. в } Q_T. \tag{15}$$

Также будем считать, что выполнено условие

(B) коэффициент $\lambda_\theta(x,t) \ge \delta_1 > 0$ $\forall (x,t) \in Q$, $\lambda_\theta, a_{ij} \in C(\overline{Q})$ и $\nabla_{x''} a_{ij} \in L_\infty(Q_T^\delta)$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$; β_c, a_i, a_0, $\beta_\theta \in L_q(Q)$, $\nabla_{x''} a_i$, $\nabla_{x''} a_0 \in L_q(Q_T^\delta)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 4. *Пусть* $\Gamma \in C^2$, $q > n+2$ *и условия* (A), (B), (10), (12)–(15) *выполнены. Фиксируем* $R_0 > 0$. *Тогда существует число* $\tau_0 = \tau_0(R_0) \in (0, T]$ *такое, что для всех данных* $(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, f, f_\theta, f_0)$ *удовлетворяющих условию*

$$\sum_{j=1}^{3}(\|\Phi_j\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\nabla_{x''}\Phi_3\|_{W_q^{2,1}(Q_T^\delta)} + \|f\|_{L_q(Q)} \\ + \|f_\theta\|_{L_q(Q)} + \|f_0\|_{L_q(Q)} + \|\nabla_{x''} f_0\|_{L_q(Q_T^\delta)}) \leq R_0, \quad (16)$$

существует единственное решение $(u, p, \Theta, C, q_1, \dots, q_m)$ *задачи* (1)–(7) *из класса*

$$u \in W_q^{2,1}(Q^{\tau_0}),\ p \in L_q(0, \tau_0; \dot{W}_q^1(G)),\ q_j \in L_q(Q_0^{\tau_0})\ j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\Theta, C \in W_q^{2,1}(Q^{\tau_0}), \quad \nabla_{x''} C \in W_q^{2,1}\big(Q_{\tau_0}^{\delta_2}\big) \quad \forall \delta_2 < \delta$$

и при $\delta_1 < \delta$ *найдется постоянная* $c = c(R_0, \delta_1)$ *такая, что для любых двух решений* u^i, Θ^i, C^i, q^i, $q^i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{im})$, $i = 1, 2$, *из этого класса, отвечающих данным* $(\Phi_1^i, \Phi_2^i, \Phi_3^i, f^i, f_\theta^i, f_0^i)$, $i = 1, 2$, *справедлива оценка*

$$\|u^1 - u^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} + \|\Theta^1 - \Theta^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} + \|C^1 - C^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} \\ + \|\nabla_{x''}(C^1 - C^2)\|_{W_q^{2,1}(Q_{\tau_0}^{\delta_1})} + \sum_{j=1}^{m}\|q_{1j} - q_{2j}\|_{L_q(Q_0^{\tau_0})} \\ \leq c\Bigg(\sum_{j=1}^{3}\big(\big\|\Phi_j^1 - \Phi_j^2\big\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} + \big\|\nabla_{x''}\Phi_3^1 - \nabla_{x''}\Phi_3^2\big\|_{W_q^{2,1}(Q_{\tau_0}^{\delta})} + \|f^1 - f^2\|_{L_q(Q^{\tau_0})} \\ + \big\|f_\theta^1 - f_\theta^2\big\|_{L_q(Q^{\tau_0})} + \big\|f_0^1 - f_0^2\big\|_{L_q(Q^{\tau_0})} + \big\|\nabla_{x''} f_0^1 - \nabla_{x''} f_0^2\big\|_{L_q(Q_{\tau_0}^{\delta})}\Bigg).$$

3. Доказательство главного результата

Доказательство теоремы 4. Сделаем замену $u = v + \Phi_1$, $\Theta = \Theta_1 + \Phi_2$ и $C = C_1 + \Phi_3$. Получим, что

$$L_{01}(v, p) = v_t - \nu\Delta v + \nabla p = g + \beta_c C_1 + \beta_\theta \Theta_1 \\ - (\Phi_1, \nabla)v - (v, \nabla)v - (v, \nabla)\Phi_1, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (17)$$

$$L_{02}\Theta_1 = \Theta_{1t} - \lambda_\theta \Delta\Theta_1 = g_\theta - (v, \nabla)\Theta_1 - (\Phi_1, \nabla)\Theta_1 - (v, \nabla)\Phi_2, \quad (18)$$

$$L_{03}C_1 = C_{1t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} C_{1x_ix_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j C_{1x_j} + a_0 C_1 = g_c \\ - (v, \nabla)C_1 - (\Phi_1, \nabla)C_1 - (v, \nabla)\Phi_3 + \sum_{j=1}^{m} f_j q_j,$$

где новая функция g_θ и вектор-функции g, g_c имеют вид

$$g = f - \Phi_{1t} + \nu\Delta\Phi_1 - (\Phi_1, \nabla)\Phi_1 + \beta_c\Phi_3 + \beta_\theta\Phi_2,\ g_\theta = f_\theta - L_{02}\Phi_2 - (\Phi_1, \nabla)\Phi_2,$$

$$g_c = f_0 - L_{03}\Phi_3 - (\Phi_1, \nabla)\Phi_3.$$

Обозначим координаты вектор-функции Φ_1 через Φ_{1j}, $j = 1, 2, \dots, n$. Новые функции v, θ_1, и вектор-функция C_1 удовлетворяют однородным краевым условиям (4), (5), (7). Далее определим функции q_{0i} из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x', \varphi^j(x'), t) q_{0i} + g_c(x', \varphi^j(x'), t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r. \tag{20}$$

Равенство (20) можно записать в виде

$$Bq_0 = -\vec{g},$$

где матрица B определена в разд. 2. Координаты вектора $\vec{g}$ с $h(k-1)+1$ до hk совпадают с координатами вектор-функции $\vec{g_c}(x', \varphi^k(x'), t)$. В силу условия (15) матрица B обратима.

Отметим, что вектор-функция g_c принадлежит $L_q(Q)$ и $\nabla_{x''} g_c \in L_q(Q_T^\delta)$. Тогда определен след $g_c|_{\Gamma_i} \in L_q(Q_T)$. Определим функции q_{0i} из равенства (20) и положим $q_i = q_{0i} + q_{1i}$. Получили уравнение

$$L_{03}C_1 = C_{1t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} C_{1x_ix_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j C_{1x_j} + a_0 C_1 = g_{0c} - (v, \nabla) C_1$$
$$- (\Phi_1, \nabla) C_1 - (v, \nabla)\Phi_3 + \sum_{j=1}^{m} f_j q_{1j}, \quad g_{0c} = g_c + \sum_{j=1}^{m} f_j q_{0j}. \tag{21}$$

Мы свели нашу задачу к эквивалентной задаче. Пусть $\gamma \in (0, T]$. Из теорем 1, 2 можем записать уравнения (17), (18), (21) в следующем виде:

$$(v, p) = (L_{01})^{-1} g + (L_{01})^{-1}(\beta_c C_1 + \beta_\theta \Theta_1 - (\Phi_1, \nabla) v - (v, \nabla) v - (v, \nabla)\Phi_1), \tag{22}$$

$$\Theta_1 = (L_{02})^{-1} g_\theta - (L_{02})^{-1}((v, \nabla)\Theta_1 + (\Phi_1, \nabla)\Theta_1 + (v, \nabla)\Phi_2), \tag{23}$$

$$C_1 = (L_{03})^{-1} g_{0c} + (L_{03})^{-1}\left(-(v, \nabla) C_1 - (\Phi_1, \nabla) C_1 - (v, \nabla)\Phi_3 + \sum_{j=1}^{m} f_j q_{1j}\right). \tag{24}$$

Здесь оператор $(L_{01})^{-1}$ отображает элемент $g \in L_q(Q^\gamma)$ в пару (v, p), которая является решением уравнения $L_{01}(v, p) = g$ и такую, что $\operatorname{div} v = 0$, $v \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$, $p \in L_q(0, \gamma; \dot{W}_q^1(G))$ и вектор-функция v удовлетворяет однородным начальным и краевым условиям. Операторы $(L_{0i})^{-1}$, $i = 2, 3$, определяются аналогично с использованием уже теоремы 2. Пусть $(L_{01})^{-1} g = (v_0, p_0)$. Определим пространство H^γ, содержащее вектора (v, p, Θ, C), где $v \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$ — соленоидальная вектор-функция длины n, удовлетворяющая однородным условиям (4), $C, \Theta \in W_q^{2,1}(Q^\gamma)$ — вектор длины h и скалярная функция соответственно, удовлетворяющие однородным условиям (5), p — скалярная функция из $L_q\big(0, \gamma; \dot{W}_q^1(G)\big)$. Введем в этом пространстве норму

$$\|(v, p, \Theta, C)\|_{H^\gamma} = \|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + \|p\|_{L_q(0,\gamma;\dot{W}_q^1(G))} + \|\Theta\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + \|C\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Положим $R = 3\|v_0, p_0, (L_{02})^{-1} g_\theta, (L_{03})^{-1} g_{0c}\|_{H^T}$. Будем искать решение системы (22)–(24), которая может быть переписана в виде

$$\omega = A(\omega, q^1), \quad \omega = (v, p, \Theta, C), \quad q^1 = (q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1m}), \tag{25}$$

где оператор A определен правой частью системы (22)–(24). Будем считать, что $\omega \in B_{R,\gamma} = \{\omega \in H^\gamma : \|\omega\|_{H^\gamma} \le R\}$. В силу условия (13) и теоремы 2 имеем

$$\left\|(L_{03})^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m} f_j q_{1j}\right)\right\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} \le c\left\|\sum_{j=1}^{m} f_j q_{1j}\right\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_1\|q^1\|_{L_q(Q_0^\gamma)}. \tag{26}$$

Предположим, что $c_1\|q^1\|_{L_q(Q_0^\gamma)} \le R/3$, т. е. вектор-функция q^1 принадлежит замкнутому шару $B^\gamma_{R/(3c_1)}$ радиуса $R/(3c_1)$ в пространстве $L_q(Q_0^\gamma)$ с центром в нуле. Оценим $\|A(\omega, q^1)\|_{H^\gamma}$. Из теорем 1, 2

$$\begin{aligned}\|A(\omega, q^1)\|_{H^\gamma} \le c\Bigg(&\|\beta_c C_1 + \beta_\theta \Theta_1 - (\Phi_1, \nabla)v - (v, \nabla)v - (v, \nabla)\Phi_1\|_{L_q(Q^\gamma)}\\ &+ \|(v, \nabla)\Theta_1 + (\Phi_1, \nabla)\Theta_1 + (v, \nabla)\Phi_2)\|_{L_q(Q^\gamma)}\\ &+ \left\|(v, \nabla)C_1 + (\Phi_1, \nabla)C_1 + (v, \nabla)\Phi_3 - \sum_{j=1}^{m} f_j q_{1j}\right\|_{L_q(Q^\gamma)}\Bigg) + R/3.\end{aligned}$$

Оценим по отдельности каждое из слагаемых:

$$\|\beta_c C_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \le \|\beta_c\|_{L_q(Q^T)}\|C_1\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \le c_1\gamma^{\beta_1}\|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично можно оценить

$$\|\beta_\theta \Theta_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_2\gamma^{\beta_2}\|\Theta_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Оценим следующее слагаемое:

$$\|(\Phi_1, \nabla)v\|_{L_q(Q^\gamma)} \le \|\Phi_1\|_{L_q(Q^T)}\|\nabla v\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \le c_3\gamma^{\beta_3}\|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично получим

$$\|(\Phi_1, \nabla)\Theta_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_4\gamma^{\beta_4}\|\Theta_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \quad \|(\Phi_1, \nabla)C_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_5\gamma^{\beta_5}\|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Имеем

$$\|(v, \nabla)\Phi_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \le \|\nabla\Phi_1\|_{L_q(Q^T)}\|v\|_{C(Q^\gamma)} \le c_6\gamma^{\beta_6}\|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Кроме того,

$$\|(v, \nabla)\Phi_2\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_7\gamma^{\beta_7}\|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}, \quad \|(v, \nabla)\Phi_3\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_8\gamma^{\beta_8}\|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Наконец,

$$\|(v, \nabla)v\|_{L_q(Q^\gamma)} \le \|\nabla v\|_{C(Q^\gamma)}\|v\|_{C(Q^\gamma)} \le c_9\gamma^{\beta_9}\|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично

$$\|(v, \nabla)\Theta_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_{10}(R)\gamma^{\beta_{10}}\|\Theta_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}$$

и

$$\|(v, \nabla)C_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_{11}(R)\gamma^{\beta_{11}}\|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Суммируя все слагаемые и учитывая (26), получим

$$\|A(\omega,q^1)\|_{H^\gamma} \le \frac{R}{3} + c_1(R)\gamma^{\beta_1}\|v\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + c_2(R)\gamma^{\beta_2}\|\Theta_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + c_3(R)\gamma^{\beta_3}\|C_1\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + c_1\|q^1\|_{L_q(Q_0^\gamma)}.$$

Так как $\gamma \in (0,T]$, выбрав $\beta = \min(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, имеем

$$\|A(\omega,q^1)\|_{H^\gamma} \le R/3 + c_0(R)\gamma^{\beta}\|\omega\|_{H^\gamma} + c_1\|q^1\|_{L_q(Q_0^\gamma)}, \tag{27}$$

где постоянная c_1 не зависит от R и β. Выберем константу $\gamma_0 \le T$ такую, что $c_0(R)\gamma^\beta \le R/3 \quad \forall \gamma \le \gamma_0$. Тогда неравенство (27) может быть переписано так:

$$\|A(\omega,q^1)\|_{H^\gamma} \le R \quad \forall q^1 \in B^\gamma_{R/(3c_1)}.$$

Это означает, что для каждого $q^1 \in B^\gamma_{R/(3c_1)}$ оператор $A(\omega,q^1)$ переводит шар $B_{R,\gamma}$ в себя. Рассуждая аналогично, можем получить оценку для $\|A(\omega^1,q^1) - A(\omega^2,q^1)\|_{H^\gamma}$, где $\omega^i = (v^i,p^i,\Theta^i,C^i)$, $i=1,2$. Имеем

$$\begin{aligned}\|A(\omega^1,q^1) - A(\omega^2,q^1)\|_{H^\gamma} &\le c(\|\beta_c(C^1-C^2) + \beta_\theta(\Theta^1-\Theta^2)\\ &- (\Phi_1,\nabla)(v^1-v^2) - (v^1,\nabla)v^1 + (v^2,\nabla)v^2 - (v^1-v^2,\nabla)\Phi_1\|_{L_q(Q^\gamma)}\\ &+ \|((v^1,\nabla)\Theta^1 - (v^2,\nabla)\Theta^2) + (\Phi_1,\nabla)(\Theta^1-\Theta^2) + (v^1-v^2,\nabla)\Phi_2\|_{L_q(Q^\gamma)}\\ &+ \|(v^1,\nabla)C^1 - (v^2,\nabla)C^2 + (\Phi_1,\nabla)(C^1-C^2) + (v^1-v^2,\nabla)\Phi_3\|_{L_q(Q^\gamma)}).\end{aligned}$$

Оценим по отдельности каждое из слагаемых:

$$\|\beta_c(C^1-C^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_1\gamma^{\beta_1}\|(C^1-C^2)\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

$$\|\beta_\theta(\Theta^1-\Theta^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_2\gamma^{\beta_2}\|(\Theta^1-\Theta^2)\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Кроме того,

$$\|(\Phi_1,\nabla)(v^1-v^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} \le \|\Phi_1\|_{L_q(Q^T)}\|\nabla(v^1-v^2)\|_{C(\overline{Q^\gamma})} \le c_3\gamma^{\beta_3}\|v^1-v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично можно оценить

$$\|(\Phi_1,\nabla)(\Theta^1-\Theta^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_4\gamma^{\beta_4}\|\Theta^1-\Theta^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}$$

и

$$\|(\Phi_1,\nabla)(C^1-C^2)\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_5\gamma^{\beta_5}\|C^1-C^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Оценим слагаемое:

$$\|(v^1-v^2,\nabla)\Phi_1\|_{L_q(Q^\gamma)} \le \|\nabla\Phi_1\|_{L_q(Q^T)}\|v^1-v^2\|_{C(\overline{Q^\gamma})} \le c_6\gamma^{\beta_6}\|v^1-v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично получим

$$\|(v^1-v^2,\nabla)\Phi_2\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_7\gamma^{\beta_7}\|v^1-v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}$$

и

$$\|(v^1-v^2,\nabla)\Phi_3\|_{L_q(Q^\gamma)} \le c_8\gamma^{\beta_8}\|v^1-v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Учитывая, что

$$(v^1,\nabla)v^1-(v^2,\nabla)v^2=(v^1-v^2,\nabla)v^1+(v^2,\nabla)(v^1-v^2),$$

$$\|(v^1-v^2,\nabla)v^1\|_{L_q(Q^\gamma)}\le\|\nabla v^1\|_{C(Q^\gamma)}\|v^1-v^2\|_{C(Q^\gamma)}\le c(R)\gamma^\beta\|v^1-v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)},$$

$$\|(v^2,\nabla)(v^1-v^2)\|_{L_q(Q^\gamma)}\le\|v^2\|_{C(Q^\gamma)}\|\nabla(v^1-v^2)\|_{C(Q^\gamma)}\le c(R)\gamma^\beta\|v^1-v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)},$$

имеем

$$\|(v^1,\nabla)v^1-(v^2,\nabla)v^2\|_{L_q(Q^\gamma)}\le c_9(R)\gamma^{\beta_9}\|v^1-v^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Аналогично

$$\left\|(v^1,\nabla)\Theta_1^1-(v^2,\nabla)\Theta_1^2\right\|_{L_q(Q^\gamma)}\le c_{10}(R)\gamma^{\beta_{10}}\left\|\Theta_1^1-\Theta_1^2\right\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}$$

и

$$\|(v^1,\nabla)C^1-(v^2,\nabla)C^2\|_{L_q(Q^\gamma)}\le c_{11}(R)\gamma^{\beta_{11}}\|C^1-C^2\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Выбрав соответствующее β, окончательно имеем

$$\|A(\omega^1,q^1)-A(\omega^2,q^1)\|_{H^\gamma}\le c_2(R)\gamma^\beta\|\omega^1-\omega^2\|_{H^\gamma},$$

т. е. оператор A сжимающий при $c_2(R)\gamma^\beta=r_0<1$. В частности,

$$\|A(\omega^1,q^1)-A(0,q^1)\|_{H^\gamma}\le c_2(R)\gamma^\beta\|\omega^1\|_{H^\gamma}.$$

Зафиксируем константу $r_0<1$ и найдем постоянную $\gamma_1\le\gamma_0$ такую, что $c_2(R)\gamma^\beta\le r_0$ для $\gamma\le\gamma_1$. Как прямое следствие теоремы о неподвижной точке получаем, что для любого $q^1\in B^\gamma_{R/(3c_1)}$ при $\gamma\le\gamma_1$ система (25) и система (22)–(24) соответственно имеет единственное решение ω в шаре $B_{R,\gamma}$. Решение удовлетворяет неравенству

$$\|\omega\|_{H^\gamma}\le\|A(0,q^1)\|_{H^\gamma}+\|A(\omega,q^1)-A(0,q^1)\|_{H^\gamma}\le R/3+c_1\|q^1\|_{L_q(Q_0^\gamma)}+r_0\|\omega\|_{H^\gamma}.$$

Это неравенство означает, что

$$\|\omega\|_{H^\gamma}\le\frac{R}{3(1-r_0)}+\frac{c_1}{1-r_0}\|q^1\|_{L_q(Q_0^\gamma)}.\tag{28}$$

По теореме 3 решение C_1 уравнения (24) обладает свойством $\nabla_{x''}C_1\in W_p^{2,1}\big(Q_\gamma^{\delta_1}\big)$ и выполнено соответствующее неравенство теоремы. В частности, из (28) получим оценку для C_1 вида

$$\|\nabla_{x''}C_1\|_{W_q^{2,1}(Q_\gamma^{\delta_1})}\le c\|q^1\|_{L_q(Q_0^\gamma)}+c_0(R),\tag{29}$$

где $\delta_1<\delta$ фиксирована и $\gamma\le\gamma_1$.

Рассмотрим два вектора $q^1,q^2\in B^\gamma_{R/(3c_1)}$ и найдем два решения ω^1,ω^2 ($\omega^i=(v^i,p^i,\Theta^i,C^i)$, $i=1,2$) системы (22)–(24). Их разность $\omega^1-\omega^2$ удовлетворяет равенству

$$\omega^1-\omega^2=A(\omega^1,q^1)-A(\omega^2,q^1)+A(\omega^2,q^1)-A(\omega^2,q^2)$$

из которого следует, что

$$\|\omega^1-\omega^2\|_{H^\gamma}\le r_0\|\omega^1-\omega^2\|_{H^\gamma}+c_1\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)}$$

и

$$\|\omega^1-\omega^2\|_{H^\gamma}\le\frac{c_1}{1-r_0}\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)}. \tag{30}$$

Пусть $\gamma\le\gamma_1$. Уравнение (24) может быть записано в виде (21). Отметим, что правая часть в (21) удовлетворяет условиям теоремы 3. По теореме 3 решение C^i, $i=1,2$, уравнения (24) обладает свойством $\nabla_{x''}C^i\in W_p^{2,1}\big(Q_\gamma^{\delta_1}\big)$ и выполнено соответствующее неравенство теоремы. Если вычесть два уравнения (21), отвечающие q^1 и q^2, друг из друга, то, используя теорему 3 и оценки (30), получим оценку для разности C^1-C^2 вида

$$\|\nabla_{x''}(C^1-C^2)\|_{W_q^{2,1}(Q_\gamma^{\delta_1})}\le c\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)}, \tag{31}$$

где $\delta_1<\delta$ фиксировано.

Зафиксируем номер $l=1,2,\dots,r$. Сделаем замену переменных $y''=x''-\varphi^l(x')$, $y'=x'$ в (21) в области $U_{\delta_1 l}$, где $\delta_1<\delta$. Опишем связь между производными в новых и старых переменных:

$$\partial_{x_j}=\partial_{y_j}-\sum_{r=s+1}^{n}\varphi^l_{ry_j}(y')\partial_{y_r}\quad(j\le s),\quad \partial_{x_j}=\partial_{y_j}\quad(j>s),$$

$$\partial_{y_j}=\partial_{x_j}+\sum_{r=s+1}^{n}\varphi^l_{rx_j}(x')\partial_{x_r}\quad(j\le s),\quad \partial_{y_j}=\partial_{x_j}\quad(j>s).$$

Имеем

$$v^i(y,t),C^i(y,t)\in W_q^{2,1}(Q_{\gamma,\delta_1}),\quad \nabla_{y''}C^i\in W_q^{2,1}(Q_{\gamma,\delta_1}),\quad i=1,2,$$

где $Q_{\gamma,\delta_1}=\Omega\times G^{\delta_1}\times(0,\gamma)$ и $G^{\delta_1}=(-\delta_1,\delta_1)^{n-s}$. Система (20) перепишется в виде

$$C_{1t}-L^lC_1=g_{0c}-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^lv_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j^lC_{1y_j}+\sum_{j=1}^{m}f_jq_{1j},\quad i=1,2, \tag{32}$$

где α_j^l — линейная комбинация координат векторов $\nabla_y\Phi_3$, а β_j^l — линейная комбинация координат векторов Φ_1 и v,

$$L^lC_1=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^l(y,t)C_{1y_iy_j}-\sum_{i=1}^{n}a_i^l(y,t)C_{1y_i}-a_0^l(y,t)C_1$$

и оператор L^l удовлетворяет условиям теорем 2 и 3. Обозначим через L_1^l часть оператора L^l, не содержащую производных по $y_{s+1},\dots,y_n$, и через L_2^l — разность $L^l-L_1^l$.

Так как все слагаемые в (32) и их производные по переменным $y_{s+1},\dots,y_n$ принадлежат $L_q(Q_{\gamma,\delta_1})$ и $q>n+2$, существует их след в точке $y''=0$. Возьмем $y''=0$. Как следствие получаем равенство

$$S_{0l}(q^1)=\left(-L_2^lC_1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^lv_j+\sum_{j=s+1}^{n}\beta_j^lC_{1y_j}\right)\Bigg|_{y''=0}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}f_j(y',\varphi^l(y'),t)q_{1j}(y',t),\quad i=1,2, \tag{33}$$

которое может быть переписано следующим образом:

$$q^1 = B^{-1}S_0(q^1) = S(q^1), \tag{34}$$

где координаты вектора S_0 с номерами от $(l-1)h+1$ до lh совпадают с координатами вектора S_{0l}. Здесь правая часть может рассматриваться как оператор S, определенный корректно на вектор-функциях $q^1 \in B^{\gamma}_{R/3c_1}$ для $\gamma \le \gamma_1$. Функции C_1, $v_1, \dots, v_n$, входящие в выражение $S(q^1)$, выражаются через вектор q^1 посредством (22)–(24).

Покажем, что локально по времени система (34) имеет единственное решение. Пусть $q^1, q^2 \in B^{\gamma}_{R/(3c_1)}$. В силу свойств матрицы B имеем

$$\|S(q^1) - S(q^2)\|_{L_q(Q_0^\gamma)} \le c\sum_{l=1}^{m} \|S_{0l}(C^1, v^1) - S_{0l}(C^2, v^2)\|_{L_q(Q_0^\gamma)}, \tag{35}$$

где C^i, v^i $(v^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i),\ i = 1, 2)$ — решение, соответствующее q^1, q^2 в (22)–(24). Запишем разность $S_{0l}(C^1, v^1) - S_{0l}(C^2, v^2)$:

$$S_{0l}(C^1, v^1) - S_{0l}(C^2, v^2) = -L_2^l(C^1 - C^2) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^l \bigl(v_j^1 - v_j^2\bigr) + \sum_{j=s+1}^{n} \bigl(\beta_j^{1l} C^1_{y_j} - \beta_j^{2l} C^2_{y_j}\bigr).$$

Имеем

$$L_2^l(C^1 - C^2) = \sum_{j=s+1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^l \bigl(C^1_{y_iy_j} - C^2_{y_iy_j}\bigr) + \sum_{i\ge s+1} a_i^l\bigl(C^1_{y_i} - C^2_{y_i}\bigr). \tag{36}$$

Оценим отдельно каждое из слагаемых. Положим $B_{\delta_1} = \{y'' : |y''| < \delta_1\}$.

$$\Bigl\|\sum_{j=s+1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^l\bigl(C^1_{y_iy_j} - C^2_{y_iy_j}\bigr)\big|_{y''=0}\Bigr\|_{L_q(Q_0^\gamma)} \le c_1 \sum_{j=s+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\bigl\|\bigl(C^1_{y_iy_j} - C^2_{y_iy_j}\bigr)\big|_{y''=0}\bigr\|_{L_q(Q_0^\gamma)}$$
$$\le c_2 \sum_{j=s+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\bigl\|\bigl(C^1_{y_iy_j} - C^2_{y_iy_j}\bigr)\bigr\|_{W_q^\alpha(B_{\delta_1}; L_q(Q_0^\gamma))},$$

где $\alpha \in (\frac{n-s}{q}, 1)$ (см. теорему вложения в [31, гл. 6, п. 6.1]). Применим далее интерполяционное неравенство, лемму 1 и оценку (31):

$$c_2 \sum_{j=s+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\bigl\|\bigl(C^1_{y_iy_j} - C^2_{y_iy_j}\bigr)\bigr\|_{W_q^\alpha(B_{\delta_1}; L_q(Q_0^\gamma))}$$
$$\le c_3 \sum_{j=s+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\bigl\|C^1_{y_iy_j} - C^2_{y_iy_j}\bigr\|^{\alpha}_{W_q^1(B_{\delta_1}; L_q(Q_0^\gamma))}\bigl\|C^1_{y_iy_j} - C^2_{y_iy_j}\bigr\|^{1-\alpha}_{L_q(B_{\delta_1}; L_q(Q_0^\gamma))}$$
$$\le c_4\gamma^{\frac{1-\alpha}{2}}\|\nabla_{y''}(C^1 - C^2)\|_{W_q^{2,1}(B_{\delta_1}\times Q_0^\gamma)} \le c_5\gamma^{\beta_5}\|q^1 - q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)}.$$

Оценим второе слагаемое в (36):

$$\Bigl\|\sum_{i=s+1}^{n} a_i^l\bigl(C^1_{y_i} - C^2_{y_i}\bigr)\big|_{y''=0}\Bigr\|_{L_q(Q_0^\gamma)} \le c_2\sum_{i=s+1}^{n}\bigl\|a_i^l\bigl(C^1_{y_i} - C^2_{y_i}\bigr)\bigr\|_{W_q^1(B_{\delta_1}; L_q(Q_0^\gamma))}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial y_k} a_i^l \big(C_{y_i}^1 - C_{y_i}^2\big)_{y_i} = a_{i_{y_k}}^l (C^1 - C^2)_{y_i} + a_i^l (C^1 - C^2)_{y_i y_k},$$

имеем

$$\begin{aligned} &c_2 \sum_{i=s+1}^{n} \big\| a_i^l \big(C_{y_i}^1 - C_{y_i}^2\big) \big\|_{W_q^1(B_{\delta_1}; L_q(Q_0^\gamma))} \\ &\le c_3 \left(\sum_{i=s+1}^{n} \big\| a_i^l \nabla_y \big(C_{y_i}^1 - C_{y_i}^2\big) \big\|_{L_q(B_{\delta_1}; Q_0^\gamma)} + \sum_{i=s+1}^{n} \big\| a_{i_{y_i}}^l \big(C_{y_i}^1 - C_{y_i}^2\big) \big\|_{L_q(B_{\delta_1}; Q_0^\gamma)} \right). \end{aligned}$$

Применяя неравенства леммы 3, имеем оценку

$$\begin{aligned} &c_3 \left(\sum_{i=s+1}^{n} \big\| a_i^l \nabla_y \big(C_{y_i}^1 - C_{y_i}^2\big) \big\|_{L_q(B_{\delta_1}; Q_0^\gamma)} + \sum_{i=s+1}^{n} \big\| a_{i_{y_i}}^l \big(C_{y_i}^1 - C_{y_i}^2\big) \big\|_{L_q(B_{\delta_1}; Q_0^\gamma)} \right) \\ &\qquad \le c_4 \gamma^{\beta_5} \| \nabla_{y''} (C^1 - C^2) \|_{W_q^{2,1}(B_{\delta_1}; Q_0^\gamma)} \le c_5 \gamma^{\beta_6} \| q^1 - q^2 \|_{L_q(Q_0^\gamma)}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\big\| L_2^l (C^1 - C^2)|_{y''=0} \big\|_{L_q(Q_0^\gamma)} \le c_1 \gamma^{\beta_7} \| q^1 - q^2 \|_{L_q(Q_0^\gamma)}$$

для некоторых $\beta_7 > 0$, $c_1 > 0$. Далее оценим

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^l \big(v_j^1 - v_j^2\big)\big|_{y''=0} \right\|_{L_q(Q_0^\gamma)} \le c \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^l \big(v_j^1 - v_j^2\big) \right\|_{W_q^1(B_{\delta_1}; L_q(Q_0^\gamma))} \\ &\quad \le \left(\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j y_k}^l \big(v_j^1 - v_j^2\big) \right\|_{L_q(B_{\delta_1} \times Q_0^\gamma)} + \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^l \big(v_j^1 - v_j^2\big)_{y_k} \right\|_{L_q(B_{\delta_1} \times Q_0^\gamma)} \right) \\ &\qquad \le c_4 \gamma^{\tau_1} \| v^1 - v^2 \|_{W_q^{2,1}(B_{\delta_1} \times Q_0^\gamma)} + c_5 \gamma^{\tau_2} \| v^1 - v^2 \|_{W_q^{2,1}(B_{\delta_1} \times Q_0^\gamma)}. \end{aligned}$$

Переходя к переменным x, окончательно имеем оценку

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^l \big(v_j^1 - v_j^2\big)\big|_{y''=0} \right\|_{L_q(Q_0^\gamma)} \le c \gamma^{\beta_2} \| v^1 - v^2 \|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} \le c_2 \gamma^{\beta_2} \| q^1 - q^2 \|_{L_q(Q_0^\gamma)},$$

где $\beta_2 = \min(\tau_1, \tau_2)$. Оценим последнее слагаемое $\left\| \sum\limits_{j=s+1}^{n} \big(\beta_j^{1l} C_{y_j}^1 - \beta_j^{2l} C_{y_j}^2\big)\big|_{y''=0} \right\|_{L_q(Q_0^\gamma)}$.
Имеем

$$\beta_j^{1l} C_{y_j}^1 - \beta_j^{2l} C_{y_j}^2 = \big(\beta_j^{1l} - \beta_j^{2l}\big) C_{y_j}^1 + \beta_j^{2l} \big(C_{y_j}^1 - C_{y_j}^2\big).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\big\| \big(\beta_j^{1l} - \beta_j^{2l}\big) C_{y_j}^1 + \beta_j^{2l} \big(C_{y_j}^1 - C_{y_j}^2\big) \big\|_{L_q(Q_0^\gamma)} \\ &\qquad \le \big\| \big(\beta_j^{1l} - \beta_j^{2l}\big) C_{y_j}^1 \big\|_{L_q(Q_0^\gamma)} + \big\| \beta_j^{2l} \big(C_{y_j}^1 - C_{y_j}^2\big) \big\|_{L_q(Q_0^\gamma)} \\ &\quad \le c_1 \big\| \beta_j^{1l} - \beta_j^{2l} \big\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})} \| C_{y_j}^1 \|_{L_q(Q_0^\gamma)} + c_2 \big\| \beta_j^{2l} \big\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})} \big\| C_{y_j}^1 - C_{y_j}^2 \big\|_{L_q(Q_0^\gamma)} \\ &\qquad \le c_1 \gamma^{\tau_1} \big\| \beta_j^{1l} - \beta_j^{2l} \big\|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} + c_2(R) \gamma^{\tau_2} \| C^1 - C^2 \|_{W_q^{2,1}(Q^\gamma)} \end{aligned}$$

$$\leq c_1\gamma^{\tau_1}\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)}+c_2(R)\gamma^{\tau_2}\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)}\leq c_3(R)\gamma^{\beta_3}\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)},$$

где $\beta_3=\min(\tau_1,\tau_2)$. Суммируя все слагаемые, имеем

$$\|S(q^1)-S(q^2)\|_{L_q(Q_0^\gamma)}\leq c_1\gamma^{\beta_1}\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)}$$
$$+c_2\gamma^{\beta_2}\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)}+c_3(R)\gamma^{\beta_3}\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)}.$$

Принимая $\beta_0=\min(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, окончательно имеем

$$\|S(q^1)-S(q^2)\|_{L_q(Q_0^\gamma)}\leq c(R)\gamma^{\beta_0}\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)}. \tag{37}$$

Получим дополнительную оценку для $\|S(0)\|_{L_q(Q_0^\gamma)}$. Повторяя рассуждения, используемые при получении (37), с учетом оценок (28), (29), получим оценку

$$\|S(0)\|_{L_q(Q_0^\gamma)}\leq\gamma^{\beta_0}c_1(R),\quad \gamma\leq\gamma_1. \tag{38}$$

Перепишем уравнение (34) в следующем виде:

$$q^1=S(0)+(S(q^1)-S(0)),$$

Ввиду (37) имеем

$$\|S(q^1)-S(0)\|_{L_q(Q_0^\gamma)}\leq c(R)\gamma^{\beta_0}\|q^1\|_{L_q(Q_0^\gamma)},\quad \gamma\leq\gamma_1.$$

Из (38) следует существование $\gamma_2\leq\gamma_1$ такого, что

$$\gamma^{\beta_0}c_1(R)\leq R/(6c_1),\quad \gamma^{\beta_0}c(R)\leq 1/2\quad \forall\gamma\leq\gamma_2.$$

Тогда для любой $\gamma\in(0,\gamma_2]$ и $q^1\in B^\gamma_{R/3c_1}$ выполнено

$$\|S(q^1)\|_{L_q(Q_0^\gamma)}=\|S(0)+(S(q^1)-S(0))\|_{L_q(Q_0^\gamma)}$$
$$\leq\|S(0)\|_{L_q(Q_0^\gamma)}+\|(S(q^1)-S(0))\|_{L_q(Q_0^\gamma)}$$
$$\leq\frac{R}{6c_1}+\frac{1}{2}\|q^1\|_{L_q(Q_0^\gamma)}\leq\frac{R}{6c_1}+\frac{R}{6c_1}\leq\frac{R}{3c_1},$$

т. е. оператор S переводит шар $B^{\gamma_2}_{R/(3c_1)}$ в себя и является в нем сжимающим. По теореме о неподвижной точке заключаем, что уравнение (34) имеет единственное решение q^1 в данном шаре. Возьмем $\tau_0=\gamma_2$. Определим вектор-функцию ω, являющуюся решением системы (22)–(24). Решение удовлетворяет однородным условиям (4) и (5). Покажем, что условие (7) выполнено. Зафиксируем $l=1,2,\dots,r$. После замены переменных $x\to y$ в (21) имеем

$$C_{1t}-L^lC_1=g_{0c}-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^lv_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j^lC_{1y_j}+\sum_{j=1}^{m}f_jq_{1j}, \tag{39}$$

Взяв след $y''=0$, перепишем (39) в виде

$$\left(C_{1t}-L^lC_1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^lv_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_j^lC_{1y_j}\right)\Bigg|_{y''=0}=\sum_{j=1}^{m}f_j(y',\varphi^l(y'),t)q_{1j}(y',t), \tag{40}$$

Ввиду (33)

$$\widetilde{C}_t - L_1^l\widetilde{C}_t + \sum_{j=1}^{s}\beta_j^l C_{1y_j} = 0, \quad \widetilde{C} = C_1(y',0,t). \tag{41}$$

Более того, $\widetilde{C}(y',0,0) = 0$ и $\widetilde{C}|_{\partial\Omega\times(0,\gamma)} = 0$. Ввиду единственности решения заключаем, что $C(y',0,t) = 0$.

Перейдем к доказательству оценок устойчивости. Фиксируем величину R_0. Очевидно, что величина R, введенная в доказательстве, удовлетворяет условию $R \leq cR_0$ (c — некоторая постоянная). Выбрав в качестве параметра R величину cR_0 и повторяя рассуждения, получим , что параметр γ_1, выбранный в процессе доказательства, один и тот же для всех данных из нашего класса, и таким образом справедливы оценки (28), (29), где постоянные не зависят от данных из нашего класса. Повторяя рассуждения доказательства теоремы существования, получим, что интервал разрешимости для всех данных один и тот же, он зависит только от величины R. Решение q^1 содержится в шаре радиуса $R/3c_1$, а нормы решений, как вытекает из оценок (28), (29), оцениваются некоторой постоянной, зависящей от R, т. е.

$$\|\omega\|_{H^\gamma} + \|\nabla_{x''}C_1\|_{W_q^{2,1}(Q_\gamma^{\delta_1})} \leq c_0(R), \tag{42}$$

где $\delta_1 < \delta$ фиксировано. Возьмем два решения, отвечающие двум различным наборам данных (C^i,Θ^i,v^i,q^i) $(v^i = (v_1^i,v_2^i,\dots,v_n^i),\ i = 1,2)$. Каждое из них удовлетворяет системе (22)–(24), где справа вместо функций g,g_θ,g_{0c} стоят соответствующие функции g^i,g_θ^i,g_{0c}^i. Вычитая эти две системы друг из друга, можем оценить норму разности решений и вместо оценок (30), (31) получим оценку вида

$$\begin{aligned}&\|\omega^1-\omega^2\|_{H^\gamma} + \|\nabla_{x''}(C^1-C^2)\|_{W_q^{2,1}(Q_\gamma^{\delta_1})}\\ &\quad\leq c_1(\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)} + \|g^1-g^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \left\|g_\theta^1-g_\theta^2\right\|_{L_q(Q^\gamma)} + \left\|g_{0c}^1-g_{0c}^2\right\|_{L_q(Q^\gamma)}).\end{aligned} \tag{43}$$

Далее повторяем рассуждения, использованные при получении оценок (37), (38). Рассмотрим равенства (33), записанные для этих двух решений. Вычитая их друг из друга и повторяя вышеупомянутые рассуждения, придем к оценкам

$$\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)} \leq c(R)\gamma^\beta(\|\omega^1-\omega^2\|_{H^\gamma} + \|\nabla_{x''}(C^1-C^2)\|_{W_q^{2,1}(Q_\gamma^{\delta_1})}),$$

где $\beta > 0$, $c(R)$ — положительные постоянные. Заменяя нормы в правой части последнего неравенства с использованием (43) и выбирая $\gamma_3 \leq \gamma_2$ достаточно малым, придем к неравенству

$$\|q^1-q^2\|_{L_q(Q_0^\gamma)} \leq c_2\big(\|g^1-g^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \left\|g_\theta^1-g_\theta^2\right\|_{L_q(Q^\gamma)} + \left\|g_{0c}^1-g_{0c}^2\right\|_{L_q(Q^\gamma)}\big), \quad \gamma \leq \gamma_3.$$

Используя это неравенство в правой части (43), получим

$$\begin{aligned}&\|\omega^1-\omega^2\|_{H^\gamma} + \|\nabla_{x''}(C^1-C^2)\|_{W_q^{2,1}(Q_\gamma^{\delta_1})}\\ &\quad\leq c_2\big(\|g^1-g^2\|_{L_q(Q^\gamma)} + \left\|g_\theta^1-g_\theta^2\right\|_{L_q(Q^\gamma)} + \left\|g_{0c}^1-g_{0c}^2\right\|_{L_q(Q^\gamma)}\big).\end{aligned} \tag{44}$$

Последние две оценки и гарантируют выполнение оценки устойчивости из формулировки теоремы. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bejan A.* Convection heat transfer. New York, etc.: J. Wiley & Sons, Inc., 2004.
2. *Joseph D. D.* Stability of fluid motions. I.. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1976. (Springer Tracts in Natural Philosophy; V. 27).
3. *Joseph D. D.* Stability of fluid motions. II.. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1976. (Springer Tracts in Natural Philosophy; V. 27).
4. *Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье — Стокса* / В. И. Полежаев, А. В. Бунэ, Н. А. Верезуб и др. М.: Наука, 1987.
5. *Алексеев Г. В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010.
6. *Capatina A., Stavre R.* A control problem in biconvective flow // J. Math. Kyoto Univ. 1997. V. 37, N 4. P. 585–595.
7. *Levandowsky M., Childress W. S., Hunter S. H., Spiegel E. A.* A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms // J. Protozoology. 1975. V. 22. P. 296–306.
8. *Babeshko O. M., Evdokimova O. V., Evdokimov S. M.* On taking into account the types of sources and settling zones of pollutants // Dokl. Math. 2000. V. 61, N 2. P. 283–285.
9. *Криксин Ю. А., Плющев С. Н., Самарская Е. А., Тишкин В. Ф.* Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции-диффузии // Мат. моделирование. 1995. Т. 7, № 11. С. 95–108.
10. *Калинина Е. А.* Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневосточный мат. журн. 2004. Т. 5, № 1. С. 89–99.
11. *Belov Ya. Ya.* Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
12. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTL Publishers, 2003. (Math. Studies. Monograph Series; V. 10).
13. *Pyatkov S. G., Tsybikov B. N.* On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // J. Evol. Equat. 2011. V. 11. P. 155–186.
14. *Pyatkov S. G.* On some classes of inverse problems for parabolic equations // J. Inv. Ill-Posed problems. 2011. V. 18. P. 917–934.
15. *Пятков С. Г., Самков М. Л.* О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений // Мат. тр. 2012. Т. 15. С. 155–177.
16. *Alifanov O. M.* Inverse heat transfer problems. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1994.
17. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов А. В.* Обратные задачи в исследование сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009.
18. *Badia A. El. , Ha-Duong T., Hamdi A.* Identification of a point source in a linear advection-dispersion-reaction equation: application to a pollution source problem // Inverse Problems. 2005. V. 21. P. 1–17.
19. *Dantas L. B., Orlande H. R. B., Cotta R. M.* An inverse problem of parameter estimation for heat and mass transfer in capillary porous media // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2003. V. 46. P. 1587–1598.
20. *Ozisik M. N., Orlando H. A. B.* Inverse heat transfer. New-York: Taylor & Francis, 2000.
21. *Su J., Neto N. G. S.* Two-dimensional inverse heat-conduction problem of source strength estimation in cylindrical rods // Applied mathematical modelling. 2001. V. 25. P. 861–872.
22. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2006. (Appl. Math. Sci.; V. 127).
23. *Kabanikhin S. I.* Inverse and ill-posed problems. Berlin; Boston: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2012.
24. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
25. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
26. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wiss., 1978.
27. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
28. *Solonnikov V. A.* Estimates of solutions of the Stokes equations in Sobolev spaces with a mixed norm // J. Math. Sci. 2004. V. 123, N 6. P. 4637–4653.
29. *Frölich A.* The Stokes operator in weighted Lq-spaces II: weighted resolvent estimates and maximal L_p-regularity // Math. Ann. 2007. V. 339. P. 287–316.

30. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.

31. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 10 февраля 2015 г.

Короткова Екатерина Михайловна
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
kem@uriit.ru

Пятков Сергей Григорьевич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
s-pyatkov@ugrasu.ru, pyatkov@math.nsc.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2015. Том 22, № 1

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНЫЙ УГОЛ НАКЛОНА ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЫ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА — ЛЯВА

Н. П. Лазарев

Аннотация. Исследуется задача о равновесии пластины модели Кирхгофа — Лява с условиями непроникания в виде неравенств для наклонной плоской трещины. Доказана разрешимость задачи оптимального управления. При этом в роли функционала качества выступает производная функционала энергии, а функции управления задаются углами наклона плоскости трещины.
Ключевые слова: наклонная трещина, оптимальное управление, пластина Кирхгофа — Лява, вариационное неравенство.

N. P. Lazarev. An Optimal Tilt Angle of a Flat Crack in the Equilibrium Problem for the Kirchhoff-Love Plate.

Abstract: We study the equilibrium problem for a plate in the Kirchhoff–Love model with the nonpenetration condition in the form of an inequality for a flat oblique crack. Solvability of the corresponding control problem is proven. The derivative of the quality functional serves as the cost functional and the tilt angles of the plane crack as the control functions.
Keywords: oblique crack, optimal control, Kirchhoff–Love plate, variational inequality.

Введение

Рассматривается известная вариационная постановка задачи о равновесии упругой пластины с наклонной трещиной [1]. На внешней и внутренней границах области с разрезом, соответствующей срединной поверхности пластины, заданы соответственно условия жесткого защемления и взаимного непроникания берегов трещины. Доказана разрешимость задачи оптимального управления параметром, задающим угол наклона плоской наклонной трещины. При этом найденная в [2] производная функционала энергии по параметру возмущения плоской наклонной трещины выступает в роли функционала качества.

Производная функционала энергии по длине трещины часто используется в формулировках критериев разрушения [3]. Проблема дифференцирования функционала энергии в линейных задачах достаточно широко изучена (см., например, [4, 5]). Нелинейным задам с условиями непроникания в виде неравенств, анализу поведения функционала энергии и решения при возмущении длины трещины или формы области посвящены работы [6, 7]. Математические модели для задач теории трещин с краевыми условиями типа Синьорини в настоящее время достаточно широко исследованы (см., например, монографии [7, 8], а также обзорную статью [9]). В частности, для моделей упругих двумерных и трехмерных тел, пластин моделей Тимошенко и Кирхгофа — Лява изучены вопросы гладкости решений, обоснованы методы фиктивных областей, найдены инвариантные интегралы, изучены различные задачи оптимального управления, для некоторых задач проведен анализ зависимости решения и физических характеристик задачи от вариации коэффициентов упругости или от изменения геометрии области. Кроме того, в настоящее время имеется ряд результатов, относящихся к математических моделям неоднородных тел с жесткими включениями (см., например, [7, 10, 11]).

1. Постановка задачи о равновесии пластины

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Через Γ_δ обозначим множество $\{(x_1,x_2) \mid 0 < x_1 < l+\delta,\ x_2 = 0\}$, $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$, $l > \delta_0 > 0$, описывающее в исходном недеформированном состоянии пластины пересечение трещины со срединной плоскостью.

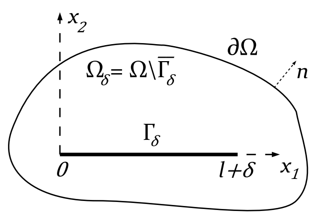


Рис. 1. Геометрия задачи в срединной плоскости

Будем считать, что $\overline{\Gamma}_{\delta_0} \subset \Omega$. Параметр δ описывает возмущение трещины. Для каждого фиксированного $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ срединная поверхность пластины занимает область $\Omega_\delta = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_\delta$. Область $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_0$ соответствует невозмущенной трещине (рис. 1). Срединная поверхность пластины лежит в плоскости $z = 0$, а система координат (x_1, x_2, z) считается декартовой. Будем считать, что толщина пластины равна 2. Трещина как поверхность в $\mathbb{R}^3$ описывается соотношениями: $x_2 + z\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$, $-1 \le z \le 1$, $0 < x_1 < l+\delta$, $\alpha = \mathrm{const}$, $0 \le \alpha \le \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$. Число α задает величину угла наклона трещины. Пусть $\chi = (W, w)$ — вектор перемещений точек срединной поверхности пластины, где $W = W(x) = (u(x), v(x))$ — горизонтальные перемещения вдоль срединной плоскости, а $w(x)$ — вертикальные перемещения.

Введем обозначения для тензоров деформаций срединной поверхности пластины [12]:

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}\big(w,^i_j + w,^j_i\big), \quad w^1 = u, \quad w^2 = v, \quad i,j = 1,2,$$

индекс после запятой обозначает производную по соответствующей координате. Тензоры усилий выражаются формулами [12]:

$$\sigma_{11}(W) = \varepsilon_{11}(W) + k\varepsilon_{22}(W), \quad \sigma_{22}(W) = \varepsilon_{22}(W) + k\varepsilon_{11}(W),$$

$$\sigma_{12}(W) = \sigma_{21}(W) = (1-k)\varepsilon_{12}(W), \quad k = \mathrm{const},\ 0 < k < \frac{1}{2}.$$

Считаем, что на внешней границе выполнены краевые условия

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = W = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{1}$$

где n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Эти условия описывают жесткое защемление пластины.

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_\delta)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_\delta)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Аналогично подпространство $H^{2,0}(\Omega_\delta)$

пространства $H^2(\Omega_\delta)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ вместе со всеми первыми производными. Введем обозначение

$$H(\Omega_\delta) = H^{1,0}(\Omega_\delta) \times H^{1,0}(\Omega_\delta) \times H^{2,0}(\Omega_\delta).$$

Условие непроникания для наклонных трещин перепишем в следующем виде [1]:

$$[v] + [w] \operatorname{tg} \alpha \geq |[w_{,2}]| \quad \text{на } \Gamma_\delta, \tag{2}$$

где $[V] = V^+ - V^-$ — скачок функции V на Γ_δ, $V^+ = V|_{\Gamma_\delta^+}$, $V^- = V|_{\Gamma_\delta^-}$ обозначают следы на положительном и отрицательном берегах кривой Γ_δ (в соответствии с направлением оси x_2). При $\alpha = 0$ в (2) получаем хорошо известное условие непроникания для пластин с вертикальными трещинами (см. [6–8]). Для фиксированных параметров $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$, $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ рассмотрим множества допустимых перемещений

$$K(\alpha, \delta, \Omega_\delta) = \{\chi = (W, w) \in H(\Omega_\delta) \mid \chi \text{ удовлетворяет (2)}\}.$$

Рассмотрим для фиксированного $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ функционал энергии пластины

$$\Pi(\Omega_\delta, \chi) = \frac{1}{2} B_\delta(w, w) + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W)\, d\Omega_\delta - \int\limits_{\Omega_\delta} F\chi \, d\Omega_\delta, \tag{3}$$

где $F = (f_1, f_2, f_3) \in C^1(\overline{\Omega})$ — заданный вектор внешних сил, а билинейная форма $B_\delta(\cdot,\cdot)$ определяется по формуле

$$B_\delta(w, \overline{w}) = \int\limits_{\Omega_\delta} b(w, \overline{w})\, d\Omega_\delta,$$

где $b(w, \overline{w}) = w_{,11}\, \overline{w}_{,11} + w_{,22}\, \overline{w}_{,22} + k w_{,11}\, \overline{w}_{,22} + k w_{,22}\, \overline{w}_{,11} + 2(1-k) w_{,12}\, \overline{w}_{,12}$. Справедливы неравенство Корна [13]

$$c_1 \|W\|^2_{H^{1,0}(\Omega_\delta)^2} \leq \int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W)\, d\Omega_\delta$$

и неравенство, полученное с помощью двукратного применения неравенства Пуанкаре [7]:

$$c_2 \|w\|^2_{H^{2,0}(\Omega_\delta)} \leq B_\delta(w, w),$$

с постоянными $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, не зависящими от w, W. На основании предыдущих двух неравенств можно сделать вывод об эквивалентности в $H(\Omega_\delta)$ стандартной нормы и нормы, введенной с помощью следующего выражения:

$$\left\{ \int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W)\, d\Omega_\delta + B_\delta(w, w) \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Задачу о равновесии пластины, решение которой удовлетворяет условиям (1) и (2), можно сформулировать как задачу минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений

$$\min_{\bar{\chi} \in K(\alpha, \delta, \Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta, \bar{\chi}). \tag{5}$$

Как известно, для фиксированных $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$, $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ решение χ_δ^α задачи (5) существует, причем единственно [1]. Кроме того, задача минимизации (5) эквивалентна следующему вариационному неравенству (см. [1]):

$$B_\delta\big(w_\delta^\alpha, \overline{w} - w_\delta^\alpha\big) + \int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}\big(W_\delta^\alpha\big)\varepsilon_{ij}\big(\overline{W} - W_\delta^\alpha\big)\, d\Omega_\delta \geq \int\limits_{\Omega_\delta} F\big(\bar{\chi} - \chi_\delta^\alpha\big)\, d\Omega_\delta, \quad \bar{\chi} \in K(\alpha, \delta, \Omega_\delta). \tag{6}$$

Заметим, что при условии достаточной гладкости решения вариационного неравенства (6) задача эквивалентна следующей дифференциальной постановке (см. [1]):

$$-\sigma_{ij,j} = f_i \quad \text{в } \Omega_\delta, \quad i = 1, 2,$$
$$\Delta^2 w = f_3 \quad \text{в } \Omega_\delta,$$
$$[\sigma_{22}(W)] = [t(w)] = [m(w)] = 0 \quad \text{на } \Gamma_\delta,$$
$$\sigma_{22}(W)\operatorname{tg}\alpha + t(w) = 0, \quad \sigma_{12}(W) = 0, \quad -\sigma_{22}(W) \geq |m(w)| \quad \text{на } \Gamma_\delta,$$
$$[v] + [w]\operatorname{tg}\alpha \geq |[w,_2]| \quad \text{на } \Gamma_\delta,$$
$$(-\sigma_{22}(W) - m(w))([v] + [w]\operatorname{tg}\alpha + [w,_2]) = 0 \quad \text{на } \Gamma_\delta,$$
$$(-\sigma_{22}(W) + m(w))([v] + [w]\operatorname{tg}\alpha - [w,_2]) = 0 \quad \text{на } \Gamma_\delta,$$

где величины $t(w)$, $m(w)$ определяются на Γ_δ по следующим формулам:

$$t(w) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Delta w + (1-\kappa)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right), \quad m(w) = \kappa\Delta w + (1-\kappa)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}.$$

Для задачи (5) в [2] найдена следующая формула, выражающая производную функционала энергии по параметру возмущения трещины δ:

$$\begin{aligned}
G\big(\alpha, \chi_0^\alpha\big) &= \frac{d\Pi\big(\Omega_\delta, \chi_\delta^\alpha\big)}{d\delta}\bigg|_{\delta=0} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\Pi(\Omega_\delta, \chi_\delta^\alpha) - \Pi(\Omega_0, \chi_0^\alpha)}{\delta} \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta,_1 \left(\big(u_{0,1}^\alpha\big)^2 - \big(v_{0,2}^\alpha\big)^2 + \frac{1}{2}(1-k)\Big(\big(v_{0,1}^\alpha\big)^2 - \big(u_{0,2}^\alpha\big)^2\Big)\right) d\Omega_0 \\
&\quad - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta,_2 \left(2v_{0,1}^\alpha v_{0,2}^\alpha + (1+k)v_{0,1}^\alpha u_{0,1}^\alpha + (1-k)u_{0,1}^\alpha u_{0,2}^\alpha\right) d\Omega_0 \\
&- \int\limits_{\Omega_0} \left(w_{0,11}^\alpha P_\alpha^1 + w_{0,22}^\alpha P_\alpha^2 + k\big(w_{0,11}^\alpha P_\alpha^2 + w_{0,22}^\alpha P_\alpha^1\big) + 2(1-k)w_{0,12}^\alpha P_\alpha^3\right) d\Omega_0 \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta,_1 b\big(w_0^\alpha, w_0^\alpha\big)\, d\Omega_0 - \int\limits_{\Omega_0} (F\theta),_1 \chi_0^\alpha\, d\Omega_0,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$P^1 = 2\theta,_1 w_{0,11}^\alpha + \theta,_{11} w_{0,1}^\alpha, \quad P^2 = 2\theta,_2 w_{0,12}^\alpha + \theta,_{22} w_{0,1}^\alpha,$$
$$P^3 = \theta,_1 w_{0,12}^\alpha + \theta,_2 w_{0,11}^\alpha + \theta,_{12} w_{0,1}^\alpha.$$

В формуле (7) вспомогательная функция $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ выбрана так, что $\theta = 1$ в окрестности точки $x_l = (l, 0)$, $\theta = 0$ в окрестности точки $x_0 = (0, 0)$ и

$\theta_{,2} = 0$ на Γ_{δ_0}. Заметим, что с помощью этой функции устанавливается взаимно однозначное соответствие между областями Ω_0 и Ω_δ:

$$y_1 = x_1 - \delta\theta(x_1, x_2), \quad y_2 = x_2,$$

где $y = (y_1, y_2) \in \Omega_0$, $(x_1, x_2) \in \Omega_\delta$. Кроме того, если $\chi(x) \in K(\alpha, \delta, \Omega_\delta)$ — произвольная функция, то функция $\hat{\chi}(y)$, определенная равенством $\hat{\chi}(y) = \chi(x)$, где $x = x(y, \delta)$, принадлежит множеству $K(\alpha, 0, \Omega_0)$. Справедливо также обратное включение: из условия принадлежности произвольной функции $\hat{\chi}(y)$ множеству $K(\alpha, 0, \Omega_0)$ следует включение $\chi(x) \in K(\alpha, \delta, \Omega_\delta)$ [2].

3. Задача оптимального управления

Для удобства в обозначении решения задачи (6), соответствующего параметру $\delta = 0$, далее будем опускать индекс 0, т. е. положим $\chi_0^\alpha = \chi^\alpha$. В соответствии с результатами разд. 2 заметим, что функция $G(\alpha, \chi^\alpha)$ определена равенством (7) для всех $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$.

Сформулируем теперь задачу оптимального управления. Требуется найти число $\alpha^* \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ такое, что

$$G(\alpha^*, \chi^{\alpha*}) = \sup_{\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]} G(\alpha, \chi^\alpha). \tag{8}$$

Теорема. *Задача оптимального управления* (8) *имеет решение.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — максимизирующая последовательность, соответствующая задаче (8). В силу ограниченности интервала $[-\alpha_0, \alpha_0]$ можно считать, выделяя при необходимости подпоследовательность, что $\{\alpha_n\}$ сходится к некоторому числу $\alpha^* \in [-\alpha_0, \alpha_0]$. В соответствии с утверждением доказанной ниже леммы можно выделить подпоследовательность (с прежним обозначением) такую, что при $n \to \infty$ выполняются соотношения: $\alpha_n \to \alpha^*$, $\chi^{\alpha_n} \to \chi^{\alpha^*}$ сильно в пространстве $H(\Omega_0)$. Для этой последовательности в силу сильной сходимости справедливо соотношение

$$G(\alpha_n, \chi^{\alpha_n}) \to G(\alpha^*, \chi^*) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Значит, α^* — решение задачи оптимального управления (8). Теорема доказана.

Лемма. *Пусть $\alpha_n \to \alpha^*$. Тогда из последовательности $\{\alpha_n\}$ можно выделить подпоследовательность с прежним обозначением, для которой*

$$\chi^{\alpha_n} \to \chi^{\alpha^*} \quad \textit{при } n \to \infty$$

сильно в пространстве $H(\Omega_0)$.

Доказательство. В самом деле, имеют место соотношения

$$\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(W^\alpha)\varepsilon_{ij}(W^\alpha)\, d\Omega_0 + B_0(w^\alpha, w^\alpha) = \int\limits_{\Omega_0} F\chi^\alpha\, d\Omega_0, \quad \alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0].$$

Отсюда нетрудно получить равномерную оценку

$$\|\chi^\alpha\| \le C,$$

где $C > 0$ не зависит от $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$. В силу вышеуказанной оценки и рефлексивности пространства $H(\Omega_0)$ из последовательности $\{\chi^{\alpha_n}\}$ можно выделить подпоследовательность (с прежним обозначением), сходящуюся слабо в $H(\Omega_0)$ к некоторой функции $\tilde{\chi}$ при $\alpha_n \to \alpha^*$.

Докажем далее, что $\tilde{\chi} \in K(\alpha^*, 0, \Omega_0)$. В силу слабой сходимости χ^{α_n} к $\tilde{\chi}$ в $H(\Omega_0)$, выбирая при необходимости подпоследовательность, имеем $\chi^{\alpha_n} \to \tilde{\chi}$ сильно в $L_2(\Gamma_0)^3$, $w,_2^{\alpha_n} \to \tilde{w},_2^{\alpha^*}$ сильно в $L_2(\Gamma_0)$ при $\alpha_n \to \alpha^*$ (см. [14, теорема 5.19]). Еще раз, если нужно, выделяя подпоследовательность, можно считать что $\chi^{\alpha_n} \to \tilde{\chi}$ и $w,_2^{\alpha_n} \to \tilde{w},_2^{\alpha^*}$ п. в. на Γ_0 при $\alpha_n \to \alpha^*$. Стало быть, переходя к пределу при $\alpha_n \to \alpha^*$ в неравенствах

$$[v^{\alpha_n}] + [w^{\alpha_n}] \operatorname{tg} \alpha_n \geq \big| [w,_2^{\alpha_n}] \big| \quad \text{на } \Gamma_0,$$

выведем

$$[\tilde{v}] + [\tilde{w}] \operatorname{tg} \alpha^* \geq |[\tilde{w},_2]| \quad \text{на } \Gamma_0.$$

Это означает, что $\tilde{\chi} \in K(\alpha^*, 0, \Omega_0)$.

Убедимся в том, что для любой пробной функции $\hat{\eta} = (\widehat{W}, \widehat{w}) \in K(\alpha^*, 0, \Omega_0)$ существует последовательность $\hat{\eta}^\alpha$ такая, что $\hat{\eta}^\alpha \in K(\alpha, 0, \Omega_0)$ и $\hat{\eta}^\alpha \to \hat{\eta}$ сильно в пространстве $H(\Omega_0)$. Для этого достаточно рассмотреть функции вида

$$\hat{\eta}^\alpha = (\widehat{W}^\alpha, \widehat{w}^\alpha) = \hat{\eta} + (0, \widehat{w}(\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha), 0).$$

Легко проверить, что построенная функция удовлетворяет необходимым свойствам. В самом деле, выполнение включения $\eta^\alpha \in H(\Omega_0)$ очевидно. Проверим условие непроникания. По построению имеем $[\hat{v}^\alpha] = [\hat{v}] + [\widehat{w}](\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha)$, $[\widehat{w},_2^\alpha] = [\widehat{w},_2]$, $[\widehat{w}^\alpha] = [\widehat{w}]$ на Γ_0. Поэтому

$$\begin{aligned} [\hat{v}^\alpha] + [\widehat{w}^\alpha] \operatorname{tg} \alpha &= [\hat{v}] + [\widehat{w}](\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha) + [\widehat{w}] \operatorname{tg} \alpha \\ &= [\hat{v}] + [\widehat{w}] \operatorname{tg} \alpha^* \geq |[\widehat{w},_2]| = |[\widehat{w},_2^\alpha]| \quad \text{на } \Gamma_0. \end{aligned} \tag{9}$$

Сильная сходимость $\hat{\eta}^\alpha \to \hat{\eta}$ в пространстве $H(\Omega_0)$ очевидна. Таким образом, построенная последовательность $\{\hat{\eta}^\alpha\}$ удовлетворяет требуемым свойствам.

Теперь можем доказать, что $\tilde{\chi} = \chi^{\alpha^*}$. Для этого подставим пробные функции вида $\hat{\eta}^{\alpha_n}$ в вариационные неравенства (6) с $\delta = 0$, соответствующие α_n, $n = 1, 2, \ldots$, и перейдем к пределу при $n \to \infty$. В итоге получим

$$\begin{gathered} B_0(\tilde{w}, \hat{w} - \tilde{w}) + \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\tilde{W}) \varepsilon_{ij}(\widehat{W} - \tilde{W})\, d\Omega_0 \geq \int\limits_{\Omega_0} F(\hat{\eta} - \tilde{\chi}) d\Omega_0, \\ \hat{\eta} = (\widehat{W}, \widehat{w}) \in K(\alpha^*, 0, \Omega_0). \end{gathered} \tag{10}$$

Принимая во внимание однозначную разрешимость вариационного неравенства (10), получим $\tilde{\chi} = \chi^{\alpha^*}$. В силу слабой сходимости имеем

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(W^{\alpha_n}) \varepsilon_{ij}(W^{\alpha_n})\, d\Omega_0 + B_0(w^{\alpha_n}, w^{\alpha_n}) \\ &\qquad = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_0} F \chi^{\alpha_n} d\Omega_0 = \int\limits_{\Omega_0} F \chi^{\alpha^*} d\Omega_0. \end{aligned} \tag{11}$$

Последнее равенство в силу эквивалентности стандартной нормы и нормы, введенной с помощью выражения (4) в пространстве $H(\Omega_\delta)$, влечет сильную сходимость $\chi^{\alpha_n} \to \chi^{\alpha^*}$ при $n \to \infty$ в пространстве $H(\Omega_0)$. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковтуненко В. А., Леонтьев А. Н., Хлуднев А. М.* Задача о равновесии пластины с наклонным разрезом // Прикл. механика и техн. физика. 1998. Т. 39, № 2. С. 164–174.
2. *Лазарев Н. П.* Дифференцирование функционала энергии в задаче о равновесии пластины, содержащей наклонную трещину // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2003. Т. 3, № 2. С. 62–73.
3. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
4. *Мазья В. Г., Назаров С. А.* Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. С. 79–129.
5. *Ohtsuka K.* Generalized J-integral and its applications. I. Basic theory // Japan J. Appl. Math. 1985. V. 2. P. 329–350.
6. *Рудой Е. М.* Асимптотика функционала энергии для смешанной краевой задачи четвертого порядка в области с разрезом // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 430–445.
7. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
8. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.
9. *Хлуднев А. М.* Теория трещин с возможным контактом берегов // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 4. С. 41–82.
10. *Lazarev N. P.* Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion // Z. Angew. Math. Phys. DOI:10.1007/s00033-014-0488-4
11. *Щербаков В. В.* Существование оптимальной формы тонких жестких включений в пластине Кирхгофа — Лява // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 4. С. 142–151.
12. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
13. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
14. *Байоки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 25 января 2015 г.

Лазарев Нюргун Петрович
Научно-исследовательский институт математики
Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
`nyurgun@ngs.ru`

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2015. Том 22, № 1

UDC 517.956

SINGULAR SOLUTIONS OF THE $(3+1)$–D PROTTER PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION

N. Popivanov, T. Popov, and R. Scherer

Abstract: We study some boundary value problems for the nonhomogeneous wave equation with three space and one time variables. The problems could be viewed as $\mathbb{R}^4$ analogs of Darboux problems in $\mathbb{R}^2$. In contrast to the planar Darboux problem the four-dimensional version is ill-posed, since its homogeneous adjoint problem has infinitely many classical solutions. Thus, in the framework of the classical solvability the problem is not Fredholm. Alternatively, it is known that for smooth right-hand side functions, there is a uniquely determined generalized solution that may have strong power-type singularity at one boundary point. This singularity is isolated at the vertex of the characteristic light cone and does not propagate along the cone. In this article we give a general existence result and find a priori estimates for singular solutions. A lengthy reference list is appended.

Keywords: wave equation, boundary value problems, generalized solution, singular solutions, propagation of singularities, special functions.

Попиванов Н., Попов Т., Шерер Р. Сингулярные решения задачи $(3+1)$-D Проттера для волнового уравнения.

Аннотация. Изучаются некоторые краевые задачи для неоднородного волнового уравнения с тремя пространственными и одной временной переменными. Эти задачи можно рассматривать как четырехмерный аналог плоской задачи Дарбу. В отличие от плоской задачи четырехмерная задача оказывается некорректной, поскольку однородная сопряженная к ней задача имеет бесконечно много классических решений. Таким образом, в рамках классической теории изучаемая задача не является фредгольмовой. С другой стороны, известно, что для гладкой правой части существует однозначно определенное обобщенное решение, которое может иметь сильную особенность в граничной точке. Эта особенность будет изолирована в вершине характеристического светового конуса и не будет распространяться вдоль конуса. В работе доказывается общий результат о существовании, существование сингулярних решений и для них устанавливаются априорные оценки. Прилагается обширная библиография.

Ключевые слова: волновое уравнение, краевая задача, обобщенное решение, сингулярное решение, распространение сингулярности, специальные функции.

1. Introduction

We study some boundary value problems for the wave equation in $\mathbb{R}^4$ that were proposed by Murrey Protter in the 1950s. Consider the wave equation with three space and one time variables

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} - u_{tt} = f(x,t) \tag{1}$$

The research of N. Popivanov and T. Popov was partially supported by the Bulgarian NSF Under Grant DCVP 02/1/2009 "Centre of Excellence on Supercomputer Applications" and by Sofia University Grants 94/2014 and 142/2015.

for $(x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4$ in the domain

$$\Omega = \{(x,t) : 0 < t < 1/2,\ t < \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1 - t\}.$$

This domain is bounded by the two characteristic cones

$$\Sigma_1 = \{(x,t) : 0 < t < 1/2,\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 - t\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x,t) : 0 < t < 1/2,\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = t\}$$

and the ball

$$\Sigma_0 = \{t = 0,\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1\},$$

centered at the origin O; i.e., $x = 0$ and $t = 0$. The right-hand side function f of (1) satisfies some smoothness conditions in Ω that will be fixed later. We will study the following BVPs:

Problem P1. *Find a solution of* (1) *in* Ω *satisfying the boundary conditions*

$$P1: \quad u|_{\Sigma_0} = 0, \quad u|_{\Sigma_1} = 0.$$

Problem P1*. *Find a solution of* (1) *in* Ω *satisfying the adjoint boundary conditions*

$$P1^*: \quad u|_{\Sigma_0} = 0, \quad u|_{\Sigma_2} = 0.$$

In this paper we give a general existence result and discuss the behavior of the generalized solution of Problem P1.

First, we present a brief historical overview here and provide an extensive list of references. Protter arrived at these problems while examining BVPs for mixed type equations which describe transonic flows in fluid dynamics. In particular, the classical two-dimensional Guderley–Morawetz problem for the Gellerstedt equation of hyperbolic-elliptic type which models flows around airfoils. The Guderley–Morawetz problem is well studied in the 1950s—see the surveys for the 2-D mixed type BVPs and the transonic models by Morawetz [1, 2]. For example, the existence of weak solutions and the uniqueness of strong solutions were proved by Morawetz [3], while Lax and Phillips [4] showed that the weak solutions are strong. In 1954 Protter [5, 6] formulated for $3D$ mixed-type equations (with two space and one time variables) some multidimensional analogs of the planar Guderley–Morawetz problem. The assumption was that the methods used to attack the $2D$ case could be applied for the multi-dimensional problems. However, the multi-dimensional case turns out to be rather different and the situation there is still unclear. Although, the uniqueness of the so-called quasiregular solutions is proved by Aziz and Schneider in [7], there are no general existence results for the Protter mixed-type problems. Even the question of well-posedness is not resolved completely.

As regards the results for existence or nonexistence of nontrivial solutions of related quasilinear problems of mixed hyperbolic-elliptic type in the multidimensional case, see [8, 9]. About results on BVPs for the multidimensional mixed-type Lavrent′ev–Bitsadze equation, see [10, 11].

In relation to the mixed-type problems, Protter also formulated and studied in [6] some BVPs in the hyperbolic part of the domain both for degenerated hyperbolic equations and for the wave equation—the $3D$ variants of Problems $P1$ and $P1^*$. Later Paul Garabedian [12] gave the statement of such problems in $\mathbb{R}^4$ and proved the uniqueness of the classical solutions of Problem P1. Problems P1 and P1* in Ω could be considered as four-dimensional analogs of the planar Darboux problems (or the Cauchy–Goursat problems) for the string equations in a characteristic triangle. Initially, the expectation was that such multidimensional BVPs are classically solvable for very smooth right-hand side functions. Contrary to this traditional belief, soon it became clear that unlike the planar Darboux problem, the Protter problems are ill-posed. In fact, the homogeneous adjoint problem P1* has smooth classical solutions and the linear space they span is infinite-dimensional. Thus, in the frame of the classical solvability the Protter problem P1 is not Fredholm, since it has infinite-dimensional cokernel. Alternatively, the notion of generalized solution that may have singularity on Σ_2 was introduced in [28]. In fact, it is known that the generalized solution has singularity isolated at only one point—the origin O. The point O lies both on the characteristic part of the boundary Σ_2 and on the noncharacteristic part Σ_0, and this case is different from the standard propagation of singularities (see Hörmander [13, Chapter 24.5]). A short survey and comparison of various recent results for Protter problems are in [14, 15]. In [16] the semi-Fredholm solvability of Problem $P1$ is discussed. According to the classical and singular solutions let us mention here some results of Serik Aldashev in [10, 11, 17, 18] and a series of papers of Khe Kan Cher [19–22] and also the joint papers with his co-authors [23, 24].

Results for the wave equation but with lower order terms could be found in [25, 26]. Regarding results for degenerated hyperbolic equations we refer to [18, 27, 28], and for equations of Keldysh type—to [29]. Some other multidimensional analogs of the classical Darboux problem are considered in [30–33].

In the present article we give sufficient conditions on the right-hand function f for the existence of a generalized solution of Problem $P1$ and discuss its exact behavior. On the one hand, we need a priori estimates away from the origin to ensure the existence of the solution (like in Theorems 1 and 2). On the other hand, our goal is to study singularity near O. We find upper estimates for the growth the generalized solution at O in Theorem 2 and Corollary 1, and a lower estimate is given in Theorem 3.

2. Classical and Generalized Solutions

In order to construct the solutions of the homogeneous adjoint problem P1* we need in $\mathbb{R}^3$ the orthonormal system of the *spherical functions* Y_n^m ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, and $m = 1, \ldots, 2n+1$). They are defined usually on the unit sphere $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ in spherical polar coordinates (see [34]). Expressed in Cartesian coordinates here, we can define them by

$$Y_n^{2k}(x_1, x_2, x_3) = C_{n,k} \frac{d^k}{dx_3^k} P_n(x_3)\ \mathrm{Im}\{(x_1 + ix_2)^k\}, \quad \text{for} \quad k = 1, \ldots, n; \tag{2}$$

$$Y_n^{2k+1}(x_1, x_2, x_3) = C_{n,k} \frac{d^k}{dx_3^k} P_n(x_3)\ \mathrm{Re}\{(x_1 + ix_2)^k\}, \quad \text{for} \quad k = 0, \ldots, n,$$

where $C_{n,k}$ are constants and P_n are the *Legendre polynomials*. The Legendre polynomials are defined by the Rodrigues formula as

$$P_n(s) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{ds^n}(s^2-1)^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} a_{n,2k}s^{n-2k},$$

with the coefficients

$$a_{n,2k} = (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}.$$

The constants $C_{n,m}$ are such that Y_n^m form a complete orthonormal system in $L_2(S^2)$ (see [34]). For convenience in the discussions that follow, we extend the spherical functions beyond S^2 radially, keeping the same notation Y_n^m for the extended functions, i.e., $Y_n^m(x) := Y_n^m(x/|x|)$ for $x \in \mathbb{R}^3 \backslash O$.

Let us define, for $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, the functions

$$h_k(\xi,\eta) = \int_\eta^\xi s^k P_n\left(\frac{\xi\eta + s^2}{s(\xi+\eta)}\right) ds.$$

Then Lemma 1.1 and Lemma 2.3 from [35] give the following solutions of the homogeneous adjoint problem.

Lemma 1 [35]. *The functions*

$$v_{k,m}^n(x,t) = |x|^{-1} h_{n-2k-2}\left(\frac{|x|+t}{2}, \frac{|x|-t}{2}\right) Y_n^m(x).$$

are classical solutions from $C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *of the homogeneous problem P1* for* $n \in \mathbb{N}$, $m = 1, \dots, 2n+1$ *and* $k = 0, 1, \dots, [(n-1)/2] - 2$.

Actually, the functions $v_{k,m}^n$ here are practically the same as the solutions from [35, Lemma 1.1]. On the other hand, [16, Theorem 1] suggests that there are no other linearly independent nontrivial classical solutions of the homogenous adjoint Problem $P1^*$. Solutions for the homogenous adjoint problem were first found by Tong Kwang-Chang [39]. Some different representations of the solutions of the homogeneous problem P1* and the functions $v_{k,m}^n$ are given by Khe Kan Cher [22].

Naturally, a necessary condition for the existence of a classical solution for Problem P1 is the orthogonality of the right-hand side function f to all $v_{k,m}^n(x,t)$. To avoid infinitely many necessary conditions in the framework of the classical solvability, we introduce *generalized solutions* for Problem P1, eventually with singularity at the origin O.

Definition 1 [36]. A function $u = u(x,t)$ is called a *generalized solution* of Problem P1 in Ω, if the following are satisfied:

1) $u \in C^1(\overline{\Omega}\backslash O)$, $u|_{\Sigma_0 \backslash O} = 0, u|_{\Sigma_1} = 0$, and

2) we have

$$\int_\Omega (u_t w_t - u_{x_1}w_{x_1} - u_{x_2}w_{x_2} - u_{x_3}w_{x_3} - fw)\, dxdt = 0 \tag{3}$$

for all $w \in C^1(\overline{\Omega})$ such that $w = 0$ on Σ_0 and a neighborhood of Σ_2.

Here we find some appropriate conditions for f under which there exists a generalized solution of Problem P1.

3. Existence of a Generalized Solution

The spherical functions form a complete orthonormal system in $L_2(S^2)$, and generally, each smooth function $f(x,t)$ can be expanded as a harmonic series

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} f_n^m(|x|,t) Y_n^m(x) \tag{4}$$

with the Fourier coefficients

$$f_n^m(r,t) := \int_{S(r)} f(x,t) Y_n^m(x)\, d\sigma_r, \tag{5}$$

where $S(r)$ is the three-dimensional sphere in $x = (x_1, x_2, x_3)$ variables; i.e., $S(r) := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\}$. In the previous paper [36], the Protter problem was studied in the special case when the right hand side function is a finite Fourier sum, while in [16] for the general case $f \in C^1(\overline{\Omega})$ the necessary and sufficient conditions for the existence of bounded solutions were found. In fact, the behavior of the generalized solution depends strongly on the inner product (with respect to the $L_2(\Omega)$ inner product) of the right-hand side function $f(x,t)$ with the functions $v_{k,m}^n(x,t)$ from Lemma 1. Thus, let us denote by $\beta_{k,m}^n$ the parameters

$$\beta_{k,m}^n := \int_{\Omega} v_{k,m}^n(x,t) f(x,t)\, dxdt, \tag{6}$$

where $n = 0, \ldots, l$, $k = 0, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$ and $m = 1, \ldots, 2n+1$.

Theorem 1 [16]. *Let $f(x,t)$ belong to $C^{10}(\overline{\Omega})$. Then the necessary and sufficient conditions for existence of a bounded generalized solution $u(x,t)$ of Protter's Problem $P1$ are*

$$\int_{\Omega} v_{k,m}^n(x,t) f(x,t)\, dxdt = 0, \tag{7}$$

for all $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$, $m = 1, \ldots, 2n+1$.

Moreover, this generalized solution $u(x,t) \in C^1(\overline{\Omega} \backslash O)$ and satisfies the a priori estimates

$$|u(x,t)| \le C \|f\|_{C^{10}(\overline{\Omega})}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{3} |u_{x_i}(x,t)| + |u_t(x,t)| \le C(|x|^2 + t^2)^{-1} \|f\|_{C^{10}(\overline{\Omega})} \tag{9}$$

where C is a constant independent of $f(x,t)$.

We turn now to investigation of the singular solution of Problem P1.

In order to formulate a general existence result, let us introduce, for $p \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{N}$, the series

$$\|f; n^p; C^k\| := \left\| f_0^0(|x|,t) \right\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{n=1}^{\infty} n^p \left\| \sum_{m=1}^{2n+1} f_n^m(|x|,t) Y_n^m(x) \right\|_{C^k(\Omega)}$$

and the power series

$$\Phi(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{2n+1} \sum_{k=0}^{[n/2]} \left| \beta_{k,m}^n \right| \right] s^n.$$

Obviously, $\|f; n^{p_1}; C^{k_1}\| \ge \|f; n^{p_2}; C^{k_2}\|$ for $p_1 \ge p_2$ and $k_1 \ge k_2$.

Now we can formulate the main result in the present paper.

Theorem 2. *Let $f(x,t)$ belong to $C^1(\overline{\Omega})$. Suppose that the series $\|f;n^6;C^0\|$ and $\|f;n^4;C^1\|$ are convergent and the power series $\Phi(s)$ has an infinite radius of convergence. Then there exists a unique generalized solution $u(x,t) \in C^1(\overline{\Omega}\backslash O)$ of Protter's Problem P1 and it satisfies in $\overline{\Omega}\backslash O$ the a priori estimates*

$$|u(x,t)| \le C\left[\Phi\left(\frac{C_1}{|x|+t}\right) + |x|^{-1}\|f;n^4;C^0\|\right],$$

$$|u(x,t)| \le C\left[\Phi\left(\frac{C_1}{|x|+t}\right) + \|f;n^6;C^0\| + \|f;n^4;C^1\|\right],$$

$$\sum_{i=1}^{3}|u_{x_i}(x,t)| + |u_t(x,t)| \le C|x|^{-2}\left[\Phi\left(\frac{C_2}{|x|+t}\right) + \|f;n^6;C^0\|\right],$$

where C, C_1, and C_2 are constants independent of $f(x,t)$.

In these estimates, the singularity of the generalized solution at O is controlled by the function $\Phi(s)$, while $\|f;n^p;C^k\|$ bounds the "regular part" of $u(x,t)$.

Let us compare the situation here for the (3+1)-D case (three space and one time dimensions) with the results of [37] for (2+1)-D Protter Problems. According to Theorem 5.3 of [37], the sufficient condition for existence of generalized solution is the convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}I_0\left(\frac{2n}{\varepsilon}\right)\left(\|f_n^1\|_{C^0(\Omega)} + \|f_n^2\|_{C^0(\Omega)}\right), \quad \text{for all } \varepsilon > 0, \tag{10}$$

where f_n^i are the Fourier coefficients of the right-hand side which could be viewed as the analogs of the functions f_n^m given by (5). The function I_0 is the modified Bessel function of the first kind:

$$I_0(s) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{s}{2}\right)^{2k}.$$

Notice that we have the estimate

$$I_0(s) \le e^s \quad \text{for } s \ge 0.$$

Using the exponential function in (10) instead of I_0, we then get the following result somewhat weaker than [37, Theorem 5.3]. Suppose that the power series

$$\Phi_1(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\|f_n^1\|_{C^0(\Omega)} + \|f_n^2\|_{C^0(\Omega)}\right)n^{-1}s^n$$

converges for all s. Then for the singularity of the unique generalized solution $u(x,t)$ for the (2+1)-D Protter Problem, near the origin we have the estimate

$$|u(x,t)| \le C\Phi_1\left[\exp\left(\frac{2}{|x|}\right)\right]. \tag{11}$$

Here, in the (3+1)-D case, note that from the definition of $v_{k,m}^n$ in Lemma 1 it follows that

$$|v_{k,m}^n(x,t)| \le |Y_n^m(x)| \le C_1 n^{1/2}$$

and so

$$\left|\beta_{k,m}^n\right| \le C_2 n^{1/2}\|f_n^m\|_{C^0(\Omega)}.$$

Then, to compare with [37, Theorem 5.3] and (11), we can formulate the next result that ensues from Theorem 2.

Corollary 1. *Let $f(x,t)$ belong to $C^1(\overline{\Omega})$. Suppose that the series $\|f; n^6; C^0\|$ and $\|f; n^4; C^1\|$ are convergent and the power series*

$$\Phi_2(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{2n+1} \|f_n^m\|_{C^0(\Omega)} \right] s^n$$

has an infinite radius of convergence. Then the unique generalized solution $u(x,t) \in C^1(\overline{\Omega} \backslash O)$ of Protter's Problem P1 satisfies near the origin the estimate

$$|u(x,t)| \leq C\Phi_2\left(\frac{C_0}{|x|+t}\right) \tag{12}$$

where C and C_0 are constants independent of $f(x,t)$.

4. Construction of Singular Solutions

In the special case when the right-hand side function f is a harmonic polynomial, the exact asymptotic formula for the generalized solution at O is found in [36]. It shows that the solution can have only power type singularity. However, in the general case $f(x,t) \in C^1(\overline{\Omega})$ some stronger singularities are also possible. Actually, in [38] the existence of generalized solutions with at least exponential growth at the origin is announced. The next theorem could be used to construct other singular solutions.

Theorem 3. *Let $f(x,t)$ belong to $C^1(\overline{\Omega})$, while the series $\|f; n^6; C^0\|$ and $\|f; n^4; C^1\|$ are convergent, and the power series $\Phi(s)$ has an infinite radius of convergence. Let the numbers $\alpha_p \geq 0$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, be such that the series*

$$\phi(s) := \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p s^p$$

converges for all $s \in \mathbb{R}$. Suppose that there is $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in \mathbb{R}^3$ such that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2p+4k+1} pa_{2k}\beta_{m,k}^{p+2k} Y_{p+2k}^m(x^*) \geq \alpha_p. \tag{13}$$

Then there exist a number $\delta \in (0, 1/2)$ that the unique generalized solution $u(x,t)$ of Problem P1 satisfies the estimate

$$|u(tx_1^*, tx_2^*, tx_3^*, t)| \geq \phi\left(\frac{1}{2t}\right)$$

for $t \in (0, \delta)$.

Remark. We can find a right-hand side $f(x,t) \in C^1(\overline{\Omega})$ by choosing suitable Fourier coefficients $f_n^m(r,t)$ "small enough" so that the required series $\|f; n^p4; C^k\|$ and $\Phi(s)$ be convergent. At the same time, selecting the functions f_n^m that satisfy (13) with larger constants α_p will produce solutions with a stronger singularity. In accordance with the result from [38], it is possible to obtain an appropriate function f with constants $\alpha_p = (p!)^{-1}$ for all p, and so the corresponding solution has exponential growth at O.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Morawetz C. S.* The mathematical approach to the sonic barrier // Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 1982. V. 6. P. 127–145.
2. *Morawetz C. S.* Mixed equations and transonic flow, // J. Hyperbolic Differ. Equ. 2004. V. 1, N 1. P. 1–26.
3. *Morawetz C. S.* A week solution for a system of equations of elliptic-hyperbolic type // Comm. Pure Appl. Math. 1958. V. 11. P. 315–331.
4. *Lax P. D. and Phillips R.* Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 427–455.
5. *Protter M. H.* A boundary value problem for the wave equation and mean value problems // Ann. Math. Stud. 1954. V. 33. P. 247–257.
6. *Protter M. H.* New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type // J. Rat. Mech. Anal. 1954. V. 3. P. 435–446.
7. *Aziz A. K. and Schneider M.* Frankl–Morawetz problems in $\mathbb{R}^3$ // SIAM J. Math. Anal. 1979. V. 10. P. 913–921.
8. *Lupo D., Payne K., and Popivanov N.* Nonexistence of nontrivial solutions for supercritical equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Contributions to Nonlinear Analysis. Basel: Birkhäuser, 2006. P. pp. 371–390 (Progr. Non-Linear Differ. Equ. Their Appl.; V. 66).
9. *Lupo D., Payne K., and Popivanov N.* On the degenerate hyperbolic Goursat problem for linear and nonlinear equations of Tricomi type // Nonlinear Anal. 2014. V. 108. P. 29-56.
10. *Aldashev S. A.* Problem of Tricomi for the many-dimensional Lavrent′ev–Bitsadze equation // Ukr. Math. J. 1991. V. 43. P. 526–530.
11. *Aldashev S. A.* Eigenvalues and eigenfunctions of the Gellerstedt problem for the multidimensional Lavrent′ev–Bitsadze equation // Ukr. Math. J. 2011. V. 63, N 86. P. 962–968.
12. *Garabedian P. R.* Partial differential equations with more than two variables in the complex domain // J. Math. Mech. 1960. V. 9. P. 241–271.
13. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag, 1985.
14. *Dechevsky L., Popivanov N., and Popov T.*, Exact asymptotic expansion of singular solutions for $(2+1)$-D Protter problem // Abstract Appl. Anal. ID 278542. 2012. V. 2012.
15. *Popivanov N., Popov T., and Tesdall A.* Semi-Fredholm solvability in the framework of singular solutions for (3+1)-D Protter–Morawetz problem // Abstract Appl. Anal. ID 260287. 2014. P. 1–19.
16. *Popivanov N., Popov T., and Scherer R.* Protter–Moravetz multidimensional problems, International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems // Proc. Steklov Inst. Math. 2012. V. 278, N 1. P. 179–198.
17. *Aldashev S. A.* Correctness of multi-dimensional Darboux problems for the wave equation // Ukr. Math. J. 1993. V. 45, N 9. P. 1456–1464.
18. *Aldashev S. A.* A criterion for the existence of eigenfunctions of the Darboux–Protter spectral problem for degenerating multidimensional hyperbolic equation // Differ. Equ. 2005. V. 41, N 6. P. 833–839.
19. *Khe K. Ch.* Nonuniqueness of solutions of the Darboux problem // Sib. Math. J. 1985. V. 26. P. 286–288.
20. *Khe K. Ch.* An estimate of the solution of Darboux–Protter problems for the two-dimensional wave equation // Soviet Math. Dokl. 1991. V. 43. P. 887–891.
21. *Khe K. Ch.* Darboux–Protter problems for the multidimensional wave equation in the class of unbounded functions // Mat. Zamet. YAGU. 1995. V. 2. P. 105–109.
22. *Khe K. Ch.* Nontrivial solutions of some homogeneous boundary value problems for a many-dimensional hyperbolic Euler–Poisson–Darboux equation in an unbounded domain // Differ. Equ. 1998. V. 34, N 1. P. 139–142.
23. *Jong D. J., Khe K. Ch., Ji H. P., Yong H. J., and Jong B. Ch.* Protter's conjugate boundary value problems for the two dimensional wave equation // J. Korean. Math. Soc. 1996. V. 33. P. 857–863.
24. *Jong B. Ch., and Jong Y. P.* On the conjugate Darboux–Protter problems for the two dimensional wave equations in the special case // J. Korean Math. Soc. 2002. V. 39, N 5. P. 681–692.
25. *Grammatikopoulos M. K., Hristov T. D., and Popivanov N. I.* Singular solutions to Protter's problem for the 3-D wave equation involving lower order terms // Electron. J. Diff. Equ. 2003. V. 2003, N 03. P. 1–31 (http://ejde.math.swt.edu/volumes/2003/03/).

26. *Nikolov A. and Popivanov N.* Exact behavior of singular solutions to Protter's problem for the $(2+1)$-D wave operator with lower order terms // Electron. J. Diff. Equ. 2012. V. 2012, N 149. P. 1–20.
27. *Nikolov A. and Popivanov N.* Asymptotic expansion of singular solutions to Protter problem for $(2+1)$-D degenerate wave equation // AIP Conf. Proc. 2013. V. 1570. P. 249-256.
28. *Popivanov N. and Schneider M.* The Darboux problems in $\mathbb{R}^3$ for a class of degenerated hyperbolic equations // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 175. P. 537–579.
29. Hristov T. Singular solutions to Protter problem for Keldysh type equations // AIP Conf. Proc. 2014. V. 1631. P. 255–262.
30. *Bitsadze A. V.* Some Classes of Partial Differential Equations. New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1988.
31. *Bazarbekov Ar. B. and Bazarbekov Ak. B.* The Goursat and Darboux problems for the three-dimensional wave equation // Differ. Equations. 2002. V. 38. P. 695–701.
32. *Kharibegashvili S.* On the solvability of a spatial problem of Darboux type for the wave equation // Georgian Math. J. 1995. V. 2. P. 385–394.
33. *Kharibegashvili S. and Midodashvili B.* On the solvability of one boundary value problem for one class of semilinear second order hyperbolic systems // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 400, N 2. P. 345–362.
34. *Jones M. N.* Spherical Harmonics and Tensors for Classical Field Theory. Letchworth: Res. Stud. Press, 1986.
35. *Popivanov N. and Popov T.* Singular solutions of Protter's problem for the $(3+1)$-D wave equation // Integral Transforms and Special Functions. 2004. V. 15, N 1. P. 73–91.
36. *Popivanov N., Popov T., and Scherer R.* Asymptotic expansions of singular solutions for $(3+1)$-D Protter problems // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 331. P. 1093–1112.
37. *Popivanov N. and Schneider M.* On M. H. Protter problems for the wave equation in $\mathbb{R}^3$ // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 194. P. 50–77.
38. *Popivanov N., Popov T., and Scherer R.* Singular solutions with exponential growth to Protter's problems // Sib. Adv. Math. 2013. V. 23, N 3. P. 219-226.
39. *Tong K.-Ch.* On a boundary-value problem for the wave equation // Sci. Record, New Series. 1957. V. 1, N 1. P. 1–3.
40. *Popivanov N. and Popov T.* Exact behavior of singularities of Protter's problem for the 3-D wave equation // Inclusion Methods for Nonlinear Problems with Applications in Engineering, Economics and Physics, Computing (J. Herzberger (ed.)) , 2002. V. 16. P. 213–236.

Nedyu Popivanov; Todor Popov
Department of Mathematics and Informatics,
University of Sofia, 1164 Sofia, Bulgaria
nedyu@fmi.uni-sofia.bg; topopover@fmi.uni-sofia.bg

Rudolf Scherer
Institute for Applied and Numerical Mathematics,
Karlsruhe Institute of Technology (KIT),
76128 Karlsruhe, Germany
rudolf.scherer@kit.edu

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2015. Том 22, № 1

УДК 517.946

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

К. С. Фаязов, И. О. Хажиев

Аннотация. Исследуется начально-краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка. Рассматриваемая задача относится к классу сильно некорректных задач математической физики. Исходя из идеи академика А. Н. Тихонова, необходимо показать условную корректность данной задачи. С помощью методов спектральных разложений и интегралов энергии доказаны теоремы о единственности и условной устойчивости решения на множестве корректности. Построено приближенное решение методом регуляризации и получена оценка погрешности нормы разности точного и приближенного решений. Параметр регуляризации вычисляется из условия минимума оценки разности нормы между точным и регуляризованным решениями задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, некорректная задача, априорная оценка, единственность, устойчивость, множество корректности, регуляризация.

K. S. Fayazov and I. O. Khajiev. Stability Estimates and Approximate Solutions to a Boundary Value Problem for a Forth Order Partial Differential Equation.

Abstract: Under study is some initial-boundary value problem for a forth order equation of mixed type. The problem belongs to the class of strongly ill-posed problems of mathematical physics. In accord with A. N. Tikhonov's ideas, we establish conditional well-posedness of this problem. Involving spectral decompositions and energy integrals, we prove uniqueness of a solution and its conditional stability on the well-posedness set. An approximate solution is constructed by the regularization method, and an estimate of the norm of the difference between the exact and approximate solutions is obtained. The regularization parameter is calculated from the minimality condition for an estimate of the norm of the difference between the exact and regularized solutions.

Keywords: mixed type equation, ill-posed problem, a priori estimate, uniqueness, stability, well-posedness set, regularization.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} x \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega = \{-1 < x < 1,\ x \neq 0,\ 0 < t < T\}$.

Задача. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению* (1) *в* Ω, *начальным условиям*

$$\left.\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 0,1,2,3,\ -1 \le x \le 1, \tag{2}$$

граничным условиям

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

а также условиям склеивания

$$u(-0,t) = u(+0,t), \quad u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Некорректные краевые задачи для модельных дифференциальных уравнений рассматривались многими авторами, в том числе Карлеманом, Хермандером, Ниренбергом, Кальдероном, М. М. Лаврентьевым, Е. М. Ландисом, Джоном, Левином, С. Г. Крейном и др., а для дифференциально-операторных уравнений — С. Г. Крейном, Левином, К. С. Фаязовым и др.

Задача (1)–(4) некорректна в смысле Адамара. В данной работе исследуется условная корректность задачи (1)–(4) и строится приближенное решение, устойчивое к изменениям данных на множестве корректности. В разд. 1 выводится априорная оценка решения, в разд. 2 доказываются теоремы о единственности решения и условной устойчивости задачи (1)–(4). В разд. 3 методом регуляризации найдено приближенное решение и получена оценка разности между точным и приближенным решениями. Из условия оптимальности оценки выводится формула для параметра регуляризации.

Одними из первых работ, посвященных параболическим уравнениям с меняющимся направлением времени, были работы М. Жевре. Теория разрешимости краевых задач для подобных уравнений была рассмотрена в работах С. А. Терсенова, А. М. Нахушева, И. Е. Егорова, Н. В. Кислова, С. Г. Пяткова, С. В. Попова и многих других авторов. Уравнениям смешанного типа посвящены работы А. В. Бицадзе, М. С. Салахитдинова, В. Н. Врагова, А. И. Кожанова, С. Г. Пяткова и др. (см. [1, 2] и цитированную там литературу). Некорректные краевые задачи рассмотрены в [3–5].

1. Априорная оценка

В дальнейшем будем пользоваться свойствами собственных функций спектральной задачи

$$\begin{cases} \operatorname{sgn} x X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(-1) = X(1) = 0, \\ X(-0) = X(+0),\ X'(-0) = X'(+0). \end{cases} \tag{5}$$

Пусть $\{X_k^+\}_{k=1}^\infty$, $\{X_k^-\}_{k=1}^\infty$ — собственные функции задачи (5), отвечающие соответственно положительным λ_k^+ и отрицательным λ_k^- собственным значениям, причем числа λ_k^+, $-\lambda_k^-$ образуют неубывающие последовательности.

Заметим, что

$$X_k^\pm(x) = \begin{cases} \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^\pm}\sin\sqrt{\lambda_k^\pm}(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ \sin\sqrt{\lambda_k^\pm}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^\pm}(1+x), & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

где $\pm\lambda_k^\pm = \mu_k^2$, $k = 1, 2, \dots$, причем μ_k — положительный корень уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{th}\mu$.

Обозначим через $(u,v)=\int\limits_{-1}^{1}uv\,dx$ скалярное произведение в $L_2(-1,1)$, $\|u\|^2=(u,u)$,

$$(\operatorname{sgn}xX_k^{\pm},X_j^{\pm})=\delta_{kj},\quad \delta_{kj}=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j.\end{cases}$$

Пусть $P^{\pm}$ — спектральные проекторы, определяемые равенствами

$$P^{\pm}u=\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{sgn}xu,X_k^{\pm})X_i^{\pm}.$$

Тогда согласно [2]

$$(P^+-P^-)u=u,\quad (\operatorname{sgn}x(P^+-P^-)u,u)=\|u\|_0^2,$$

$$(\operatorname{sgn}xP^{\pm}u,v)=(\operatorname{sgn}xu,P^{\pm}v),\quad u,v\in H_0=L_2(-1,1),$$

$$\|u(x,t)\|_0^2=\sum_{k=1}^{\infty}\{|(\operatorname{sgn}xu(x,t),X_k^+)|^2+|(\operatorname{sgn}xu(x,t),X_k^-)|^2\}. \tag{6}$$

Согласно результатам из [2] собственные функции задачи (5) образуют базис Рисса в H_0 и норма в пространстве $L_2(-1;1)$, определенная равенством (6), эквивалентна исходной.

Под *обобщенным решением краевой задачи* (1)–(4) понимаем функцию $u(x,t)$ такую, что $u(x,t)\in(C[0,T];L_2(-1,1))$,

$$\int_0^T\int_{-1}^1 u(x,t)(\operatorname{sgn}\,x\,V_{tttt}+V_{xx})\,dxdt$$

$$=\int_0^T\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}x(\varphi_3(x)V(x,0)-\varphi_2(x)V_t(x,0)+\varphi_1(x)V_{tt}(x,0)-\varphi_0(x)V_{ttt}(x,0))\,dxdt$$

для любой функции $V(x,t)\in W_2^4(\Omega)$, $V(x,T)=V_t(x,T)=V_{tt}(x,T)=V_{ttt}(x,T)=0$, $V(-1,t)=V(1,t)=0$.

Пусть решение задачи (1)–(4) существует и имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^+(t)X_k^++\sum_{k=1}^{\infty}u_k^-(t)X_k^-,$$

здесь

$$u_k^{\pm}(t)=\int_{-1}^1\operatorname{sgn}xu(x,t)X_k^{\pm}(x)\,dx,\quad k=1,2,3,\ldots.$$

Нетрудно заметить, что $u_k^{\pm}(t)$ при каждом $k=1,2,3,\ldots$ удовлетворяют следующим задачам соответственно:

$$\begin{cases}\{u_k^+(t)\}_{tttt}-\mu_k^2u_k^+(t)=0,\\ u_k^+(0)=\varphi_{0_k}^+,\ \{u_k^+(0)\}_t=\varphi_{1_k}^+,\ \{u_k^+(0)\}_{tt}=\varphi_{2_k}^+,\ \{u_k^+(0)\}_{ttt}=\varphi_{3_k}^+,\end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases}\{u_k^-(t)\}_{tttt}+\mu_k^2u_k^-(t)=0,\\ u_k^-(0)=\varphi_{0_k}^-,\ \{u_k^-(0)\}_t=\varphi_{1_k}^-,\ \{u_k^-(0)\}_{tt}=\varphi_{2_k}^-,\ \{u_k^-(0)\}_{ttt}=\varphi_{3_k}^-,\end{cases} \tag{8}$$

где

$$\varphi_{j_k}^{\pm}=\int_{-1}^1\operatorname{sgn}x\varphi_j(x)X_k^{\pm}(x)\,dx,\quad j=0,1,2,\ldots.$$

Лемма 1 (см. [6]). *Для решения уравнения* $\phi''(t)-\theta\phi(t)=0$ *при* $0<t<T$, *удовлетворяющего условиям* $\phi(0)=p$, $\phi'(0)=q$, *справедлива оценка*

$$\phi^2(t)\le(p^2+|\delta|)^{\frac{T-t}{T}}(\phi^2(T)+|\delta|)^{\frac{t}{T}}e^{2t(T-t)}-|\delta|,$$

где θ *— константа,* $\delta=\frac{1}{2}(\theta p^2-q^2)$.

Рассмотрим уравнение (7) и введем обозначения

$$\frac{1}{\mu_k}\frac{d^2u_k^+}{dt^2}=\vartheta_k^+,\quad w_k^+=u_k^+-\vartheta_k^+,\quad v_k^+=u_k^++\vartheta_k^+.$$

Тогда после преобразований имеем

$$\{v_k^+\}_{tt}-\mu_kv_k^+=0,\quad v_k^+(0)=\varphi_{0_k}^++\mu_k^{-1}\varphi_{2_k}^+,\quad \{v_k^+(0)\}_t=\varphi_{1_k}^++\mu_k^{-1}\varphi_{3_k}^+, \tag{9}$$

$$\{w_k^+\}_{tt}+\mu_kw_k^+=0,\quad w_k^+(0)=\varphi_{0_k}^+-\mu_k^{-1}\varphi_{2_k}^+,\quad \{w_k^+(0)\}_t=\varphi_{1_k}^+-\mu_k^{-1}\varphi_{3_k}^+. \tag{10}$$

Применяя лемму 1 для решения задач (9), (10), имеем соответствующие оценки:

$$\{v_k^+(t)\}^2\le(\{v_k^+(0)\}^2+|\alpha_k^+|)^{\frac{T-t}{T}}(\{v_k^+(T)\}^2+|\alpha_k^+|)^{\frac{t}{T}}e^{2t(T-t)}-|\alpha_k^+|,$$

$$\{w_k^+(t)\}^2\le(\{w_k^+(0)\}^2+|\beta_k^+|)^{\frac{T-t}{T}}(\{w_k^+(T)\}^2+|\beta_k^+|)^{\frac{t}{T}}e^{2t(T-t)}-|\beta_k^+|,$$

где $\alpha_k^+=0,5\big(\mu_k\{v_k^+(0)\}^2-\{v_k^+(0)\}_t^2\big)$, $\beta_k^+=0,5\big(\mu_k\{w_k^+(0)\}^2+\{w_k^+(0)\}_t^2\big)$.

Заметим, что $u_k^+=0,5(v_k^++w_k^+)$ и $\{u_k^+\}^2\le0,5(\{v_k^+\}^2+\{w_k^+\}^2)$. Тогда

$$\{u_k^+\}^2\le\frac{e^{2t(T-t)}}{2}\Bigg((\{v_k^+(0)\}^2+|\alpha_k^+|)^{\frac{T-t}{T}}\bigg(\{u_k^+(T)\}^2+\frac{1}{\mu_k^2}\{u_k^+(T)\}_{tt}^2+|\alpha_k^+|\bigg)^{\frac{t}{T}}$$
$$+(\{w_k^+(0)\}^2+|\beta_k^+|)^{\frac{T-t}{T}}\bigg(\{u_k^+(T)\}^2+\frac{1}{\mu_k^2}\{u_k^+(T)\}_{tt}^2+|\beta_k^+|\bigg)^{\frac{t}{T}}\Bigg). \tag{11}$$

Получим оценку для решения задачи (8). Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^4h}{dt^4}=-\mu^2h \tag{12}$$

при $0<t<T$ с условиями

$$\left.\frac{d^jh}{dt^j}\right|_{t=0}=f_j,\quad j=0,1,2,\ldots, \tag{13}$$

где μ — некоторое постоянное число. Перепишем уравнение (12) в следующем виде:

$$(\partial_t-r_1)(\partial_t-r_2)(\partial_t-r_3)(\partial_t-r_4)h=0, \tag{14}$$

где

$$r_1=l+il,\quad r_2=-l+il,\quad r_3=-l-il,\quad r_4=l-il,\quad l=\frac{\sqrt{2\mu}}{2},$$

r_j, $j=1,2,3,4,$ — корни уравнения $r^4+\mu^2=0$.

Уравнение (14) может быть записано в виде системы

$$\begin{cases}(\partial_t-r_4)h=v,\\(\partial_t-r_3)v=w,\\(\partial_t-r_2)w=z,\\(\partial_t-r_1)z=0.\end{cases} \tag{15}$$

Пусть $z(t)$ — решение уравнения

$$z_t - r_1 z = 0. \tag{16}$$

Очевидно, что его можно представить в виде $z(t) = x(t) + iy(t)$, где $x(t), y(t)$ — функции, которые являются решением системы

$$\begin{cases} x_t = l(x-y), \\ y_t = l(x+y). \end{cases}$$

Легко заметить, что для $z(t)$ справедлива оценка

$$|z(t)|^2 \le (|z(0)|^2)^{1-\frac{t}{T}} (|z(T)|^2)^{\frac{t}{T}},$$

где $|z(t)|^2 = x^2(t) + y^2(t)$. Отсюда и из (14) имеем $|z(t)|^2 \le \gamma_1(t)$, где

$$\gamma_1(t) = (\mu^3|f_0|^2 + \mu^2|f_1|^2 + \mu|f_2|^2 + |f_3|^2)^{1-\frac{t}{T}} \\ \times (\mu^3|h(T)|^2 + \mu^2|h_t(T)|^2 + \mu|h_{tt}(T)|^2 + |h_{ttt}(T)|^2)^{\frac{t}{T}}.$$

Пусть $w(t)$ — решение неоднородного уравнения

$$w_t - k_2 w = z, \tag{17}$$

которое может быть представлено в виде суммы

$$w(t) = \omega(t) + \widetilde{\omega}(t),$$

где $\omega(t)$ — общее решение однородного уравнения, $\widetilde{\omega}(t)$ — частное решение уравнения (17). Так как $\widetilde{\omega}(t) = \tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t)$, имеем

$$\begin{cases} \tilde{x}_t = -l(\tilde{x} + \tilde{y}) + x, \\ \tilde{y}_t = l(\tilde{x} - \tilde{y}) + y. \end{cases} \tag{18}$$

Нетрудно заметить, что частное решение неоднородной системы (18) может быть представлено в виде

$$\tilde{x}(t) = \frac{\cos lt}{2} \int_0^t (x(\tau)\sin l\tau + y(\tau)\cos l\tau) e^{l(\tau - t)}\, d\tau \\ + \frac{\sin lt}{2} \int_0^t (x(\tau)\sin l\tau - y(\tau)\cos l\tau) e^{l(\tau - t)}\, d\tau,$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{\sin lt}{2} \int_0^t (x(\tau)\sin l\tau + y(\tau)\cos l\tau) e^{l(\tau - t)}\, d\tau \\ - \frac{\cos lt}{2} \int_0^t (x(\tau)\sin l\tau - y(\tau)\cos l\tau) e^{l(\tau - t)}\, d\tau.$$

Имеем

$$|\tilde{x}(t)| \le \int_0^t (|x(\tau)| + |y(\tau)|)\, d\tau, \quad |\tilde{y}(t)| \le \int_0^t (|x(\tau)| + |y(\tau)|)\, d\tau,$$

или

$$\tilde{x}(t)^2 \le 2T\int\limits_0^t \left(x(\tau)^2 + y(\tau)^2\right)d\tau, \quad \tilde{y}(t)^2 \le 2T\int\limits_0^t \left(x(\tau)^2 + y(\tau)^2\right)d\tau,$$

тогда

$$\tilde{x}(t)^2 + \tilde{y}(t)^2 \le 4T\int\limits_0^t \left(x(\tau)^2 + y(\tau)^2\right)d\tau,$$

т. е. $|\widetilde{\omega}(t)|^2 = \tilde{x}(t)^2 + \tilde{y}(t)^2 \le 4T\int\limits_0^T |z(t)|^2\,dt$.

Для $\omega(t)$ верна оценка

$$|\omega(t)|^2 \le (|\omega(0)|^2)^{1-\frac{t}{T}}(|\omega(T)|^2)^{\frac{t}{T}}.$$

Отсюда

$$|w(t)|^2 \le (|w(0)|^2)^{1-\frac{t}{T}}(|w(T)|^2 + |\widetilde{\omega}(T)|^2)^{\frac{t}{T}} + |\widetilde{\omega}(T)|^2.$$

Из (15) имеем $|w(t)|^2 \le \gamma_2(t)$, где

$$\gamma_2(t) = (\mu^2|f_0|^2 + \mu|f_1|^2 + |f_2|^2)^{1-\frac{t}{T}}$$
$$\times\left(\mu^2|h(T)|^2 + \mu|h_t(T)|^2 + |h_{tt}(T)|^2 + 2T\int\limits_0^T \gamma_1(t)\,dt\right)^{\frac{t}{T}} + 4T\int\limits_0^T \gamma_1(t)\,dt.$$

Аналогичным образом для решений уравнений $v_t - r_3 v = w$, $h_t - r_4 h = v$ можно получить следующие оценки:

$$\begin{aligned} |v(t)|^2 &\le (|v(0)|^2)^{1-\frac{t}{T}}(|v(T)|^2 + |\tilde{v}(T)|^2)^{\frac{t}{T}} + |\tilde{v}(T)|^2, \\ |h(t)|^2 &\le (|h(0)|^2)^{1-\frac{t}{T}}(|h(T)|^2 + |\tilde{h}(T)|^2)^{\frac{t}{T}} + |\tilde{h}(T)|^2, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$|\tilde{v}(T)|^2 \le 4T\int\limits_0^T |w(t)|^2\,dt, \quad |\tilde{h}(T)|^2 \le 4T\int\limits_0^T |v(t)|^2\,dt.$$

С их учетом получим

$$|v(t)|^2 \le \gamma_3(t),$$
$$|h(t)|^2 \le (|f_0|^2)^{1-\frac{t}{T}}\left(|h(T)|^2 + 4T\int\limits_0^T \gamma_3(t)\,dt\right)^{\frac{t}{T}} + 4T\int\limits_0^T \gamma_3(t)\,dt,$$

где

$$\gamma_3(t) = (\mu|f_0|^2 + |f_1|^2)^{1-\frac{t}{T}}\left(\mu|h(T)|^2 + |h_t(T)|^2 + 2T\int\limits_0^T \gamma_2(t)\,dt\right)^{\frac{t}{T}} + 4T\int\limits_0^T \gamma_2(t)\,dt(t).$$

Таким образом, для решения задачи (8) верна оценка

$$|u_k^-(t)|^2 \le (|\varphi_{0_k}^-|^2)^{1-\frac{t}{T}}\left(|u_k^-(T)|^2 + 4T\int\limits_0^T \gamma_{3_k}(t)\,dt\right)^{\frac{t}{T}} + 4T\int\limits_0^T \gamma_{3_k}(t)\,dt, \tag{20}$$

где

$$\gamma_{3_k}(t) = (\mu_k|\varphi_{0_k}^-|^2 + |\varphi_{1_k}^-|^2)^{1-\frac{t}{T}}$$
$$\times \left(\mu_k|u_k^-(T)|^2 + |\{u_k^-(T)\}_t|^2 + 2T\int_0^T \gamma_{2_k}(t)\,dt\right)^{\frac{t}{T}} + 4T\int_0^T \gamma_{2_k}(t)\,dt,$$

$$\gamma_{2_k}(t) = \left(\mu_k^2|\varphi_{0_k}^-|^2 + \mu_k|\varphi_{1_k}^-|^2 + |\varphi_{2_k}^-|^2\right)^{1-\frac{t}{T}}$$
$$\times\left(\mu_k^2|u_k^-(T)|^2 + \mu_k|\{u_k^-(T)\}_t|^2 + |\{u_k^-(T)\}_{tt}|^2 + 2T\int_0^T \gamma_{1_k}(t)\,dt\right)^{\frac{t}{T}} + 4T\int_0^T \gamma_{1_k}(t)\,dt,$$

$$\gamma_{1_k}(t) = \left(\mu_k^3|\varphi_{0_k}^-|^2 + \mu_k^2|\varphi_{1_k}^-|^2 + \mu_k|\varphi_{2_k}^-|^2 + |\varphi_{3_k}^-|^2\right)^{1-\frac{t}{T}}$$
$$\times\left(\mu_k^3|u_k^-(T)|^2 + \mu_k^2|\{u_k^-(T)\}_t|^2 + \mu_k|\{u_k^-(T)\}_{tt}|^2 + |\{u_k^-(T)\}_{ttt}|^2\right)^{\frac{t}{T}},$$

здесь $k = 1, 2, \ldots$.

2. Теоремы единственности и условной устойчивости

Введем обозначение

$$M = \left\{u : \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{3}\mu_k^{3-j}\left(\frac{d^j u_k^+(T)}{dt^j}\right)^2 + \mu_k^{3-j}\left(\frac{d^j u_k^-(T)}{dt^j}\right)^2\right) \le m^2\right\},$$

и пусть

$$\|\varphi_0(x)\|_3 = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^3(\{\varphi_{0_k}^+\}^2 + \{\varphi_{0_k}^-\}^2), \quad \|\varphi_1(x)\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2(\{\varphi_{1_k}^+\}^2 + \{\varphi_{1_k}^-\}^2) \quad (21)$$

$$\|\varphi_2(x)\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(\{\varphi_{2_k}^+\}^2 + \{\varphi_{2_k}^-\}^2), \quad \|\varphi_3(x)\|_0 = \sum_{k=1}^{\infty}(\{\varphi_{3_k}^+\}^2 + \{\varphi_{3_k}^-\}^2). \quad (22)$$

Теорема 1. *Пусть существует решение $u(x,t) \in M$ задачи (1)–(4). Тогда оно единственно.*

Доказательство. Пусть $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ — решения задачи (1)–(4) с одинаковыми данными. Тогда $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет задаче (1)–(4) с нулевыми данными. Так как

$$\|u(x,t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|u_k^+|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}|u_k^-|^2,$$

из (11), (20) следует, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k^-|^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k^+|^2 \le 0$. Отсюда $\|u(x,t)\|_0 \le 0$, а значит, $u(x,t) = 0$, или $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ для всех $(x,t) \in \Omega$.

Теорема 2. *Пусть решение задачи* (1)–(4) *существует и* $u(x,t)\in M$. *Пусть*

$$\|\varphi_0(x)-\varphi_{0_\varepsilon}(x)\|_3\le\varepsilon,\quad \|\varphi_1(x)-\varphi_{1_\varepsilon}(x)\|_2\le\varepsilon,$$

$$\|\varphi_2(x)-\varphi_{2_\varepsilon}(x)\|_1\le\varepsilon,\quad \|\varphi_3(x)-\varphi_{3_\varepsilon}(x)\|_0\le\varepsilon.$$

Тогда для любого решения задачи (1)–(4) *при* $(x,t)\in\Omega$ *имеет место неравенство*

$$\|u(x,t)\|_0\le\varpi(\varepsilon,m),$$

где $\varpi(\varepsilon,m)=\inf\limits_t\{(2(8\varepsilon^2)^{\frac{T-t}{T}}(m^2+s)^{\frac{t}{T}}e^{2t(T-t)}+s)^{1/2}\}$.

Доказательство. Пусть решение задачи (1)–(4) существует и выполнены условия (21), (22). Рассмотрим разность

$$U(x,t)=u(x,t)-u_\varepsilon(x,t),$$

где $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(4) с точными данными, $u_\varepsilon(x,t)$ — решение задачи (1)–(4) с приближенными данными. Функция $U(x,t)$ является в области Ω решением уравнения

$$\operatorname{sgn}x\frac{\partial^4U(x,t)}{\partial t^4}+\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial x^2}=0$$

с начальными условиями

$$U(x,0)=\varphi_0(x)-\varphi_{0_\varepsilon}(x),\quad U_t(x,0)=\varphi_1(x)-\varphi_{1_\varepsilon}(x),$$

$$U_{tt}(x,0)=\varphi_2(x)-\varphi_{2_\varepsilon}(x),\quad U_{ttt}(x,0)=\varphi_3(x)-\varphi_{3\varepsilon}(x),\quad -1\le x\le1,$$

с граничными условиями

$$U(-1,t)=U(1,t)=0,\quad 0\le t\le T,$$

а также с условиями склеивания

$$U(-0,t)=U(+0,t),\quad U_x(-0,t)=U_x(+0,t),\quad 0\le t\le T.$$

Для решения данной задачи справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^\infty\{U_k^+\}^2\le\frac{e^{2t(T-t)}}{2}\sum_{k=1}^\infty\Big((\{v_{k\varepsilon}^+(0)\}^2+|\alpha_k^+|)^{\frac{T-t}{T}}\big(\{U_k^+(T)\}^2+\mu_k^{-2}\{U_k^+(T)\}_{tt}^2+|\alpha_{k\varepsilon}^+|\big)^{\frac{t}{T}}+(\{\omega_{k_\varepsilon}^+(0)\}^2+|\beta_{k_\varepsilon}^+|)^{\frac{T-t}{T}}\big(\{U_k^+(T)\}^2+\mu_k^{-2}\{U_k^+(T)\}_{tt}^2+|\beta_{k_\varepsilon}^+|\big)^{\frac{t}{T}}\Big),$$

где

$$\sum_{k=1}^\infty\{v_{k\varepsilon}^+(0)\}^2=\sum_{k=1}^\infty\big(\varphi_{0_k}^+-\varphi_{0_{k\varepsilon}}^++\mu_k^{-1}(\varphi_{2_k}^+-\varphi_{2_{k\varepsilon}}^+)\big)^2\le4\varepsilon^2,$$

$$\sum_{k=1}^\infty|\alpha_{k\varepsilon}^+|=0,5\sum_{k=1}^\infty\big|\mu_k\{v_{k\varepsilon}^+(0)\}^2-\{v_{k\varepsilon}^+(0)\}_t^2\big|\le4\varepsilon^2,$$

$$\sum_{k=1}^\infty\{\omega_{k\varepsilon}^+(0)\}^2\le4\varepsilon^2,\quad \sum_{k=1}^\infty|\beta_k^+|^2\le4\varepsilon^2,\quad \sum_{k=1}^\infty\big(\{U_k^+(T)\}^2+\mu_k^{-2}\{U_k^+(T)\}_{tt}^2\big)\le m^2.$$

После несложных преобразований получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{U_k^+\}^2 \le (8\varepsilon^2)^{\frac{T-t}{T}}(m^2+4\varepsilon^2)^{\frac{t}{T}}e^{2t(T-t)}.$$

Аналогично для $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\{U_k^-\}^2$ имеем оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|U_k^-(t)\right|^2 \le (\varepsilon^2)^{1-\frac{t}{T}}\left(m^2+4T\int\limits_0^T\gamma_{3_{k\varepsilon}}(m,t)\,dt\right)^{\frac{t}{T}}+4T\int\limits_0^T\gamma_{3_{k\varepsilon}}(m,t)\,dt,$$

где

$$\gamma_{3_{k\varepsilon}}(m,t)=(2\varepsilon^2)^{1-\frac{t}{T}}\left(m^2+2T\int\limits_0^T\gamma_{2_{k\varepsilon}}(m,t)\,dt\right)^{\frac{t}{T}}+4T\int\limits_0^T\gamma_{2_{k\varepsilon}}(m,t)\,dt,$$

$$\gamma_{2_{k\varepsilon}}(m,t)=(3\varepsilon^2)^{1-\frac{t}{T}}\left(m^2+2T\int\limits_0^T\gamma_{1_{k\varepsilon}}(m,t)\,dt\right)^{\frac{t}{T}}+4T\int\limits_0^T\gamma_{1_{k\varepsilon}}(m,t)\,dt,$$

$$\gamma_{1_{k\varepsilon}}(m,t)=(4\varepsilon^2)^{1-\frac{t}{T}}(m^2)^{\frac{t}{T}}.$$

Пусть

$$s=\max\left\{4\varepsilon^2, 4T\int\limits_0^T\gamma_{3_{k\varepsilon}}(m,t)\,dt\right\}.$$

Тогда

$$\|U(x,t)\|_0^2 \le 2(8\varepsilon^2)^{\frac{T-t}{T}}(m^2+s)^{\frac{t}{T}}e^{2t(T-t)}+s.$$

Отсюда

$$\|U(x,t)\| \le \varpi(\varepsilon,m),$$

где

$$\varpi(\varepsilon,m)=\inf_t\{(2(8\varepsilon^2)^{\frac{T-t}{T}}(m^2+s)^{\frac{t}{T}}e^{2t(T-t)}+s)^{1/2}\}.$$

3. Приближенное решение

Не ограничивая общности, предположим, что $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)=0$, $\varphi_3(x)=0$. Пусть решение задачи (1)–(4) существует, тогда его можно представить в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_{0_k}^+}{2}\operatorname{ch}(\sqrt{\mu_k}t)+\frac{\varphi_{0_k}^+}{2}\cos(\sqrt{\mu_k}t)\right)X_k^+(x)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{0_k}^-\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\mu_k}{2}}t\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\mu_k}{2}}t\right)\right)X_k^-(x),$$

где

$$\varphi_{0_k}^{\pm}=\int\limits_{-1}^{1}\operatorname{sgn}x\,\varphi_0(x)X_k^{\pm}(x)\,dx,\quad k=1,2,\ldots.$$

В качестве приближенного решения рассмотрим функцию

$$u^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\varphi_{0_k}^{+}}{2}\operatorname{ch}(\sqrt{\mu_k}t)+\frac{\varphi_{0_k}^{+}}{2}\cos(\sqrt{\mu_k}t)\right)X_k^{+}(x)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{0_k}^{-}\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\mu_k}{2}}t\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\mu_k}{2}}t\right)\right)X_k^{-}(x),$$

где N — целочисленный параметр регуляризации, а в качестве приближенного решения по приближенным данным рассмотрим функцию

$$u^{N_\varepsilon}(x,t)=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\varphi_{0_{k\varepsilon}}^{+}}{2}\operatorname{ch}(\sqrt{\mu_k}t)+\frac{\varphi_{0_{k\varepsilon}}^{+}}{2}\cos(\sqrt{\mu_k}t)\right)X_k^{+}(x)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{0_{k\varepsilon}}^{-}\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\mu_k}{2}}t\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\mu_k}{2}}t\right)\right)X_k^{-}(x),$$

где

$$\varphi_{0_{k\varepsilon}}^{\pm}=\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}x\varphi_{0_\varepsilon}(x)\,X_k^{\pm}(x)\,dx,\quad k=1,2,\ldots.$$

Пусть $\|\varphi_0(x)-\varphi_{0_\varepsilon}(x)\|_3\le\varepsilon$ и $u\in M$. Тогда оценим разность

$$\|u-u^{N_\varepsilon}\|_0\le\|u-u^N\|_0+\|u^N-u^{N_\varepsilon}\|_0. \tag{23}$$

Рассмотрим второй член в правой части неравенства (23):

$$\|u^N-u^{N_\varepsilon}\|_0^2=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2}(\varphi_{0_k}^{+}-\varphi_{0_{k\varepsilon}}^{+})\operatorname{ch}(\sqrt{\mu_k}t)+\frac{1}{2}(\varphi_{0_k}^{+}-\varphi_{0_{k\varepsilon}}^{+})\cos(\sqrt{\mu_k}t)\right)^2$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\left((\varphi_k^{-}-\varphi_{k_\varepsilon}^{-})\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\mu_k}{2}}t\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\mu_k}{2}}t\right)\right)^2$$
$$\le\sum_{k=1}^{N}\operatorname{ch}^2(\sqrt{\mu_k}t)((\varphi_{0_k}^{+}-\varphi_{0_{k\varepsilon}}^{+})^2+(\varphi_{0_k}^{-}-\varphi_{0_{k\varepsilon}}^{-})^2)\le\operatorname{ch}^2(\sqrt{\mu_N}t)\varepsilon^2. \tag{24}$$

Оценим первый член в правой части неравенства (23), при этом учтем, что $u\in M$. Имеем

$$\|u-u^N\|_0^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}|u_k^{+}|^2+\sum_{k=N+1}^{\infty}|u_k^{-}|^2.$$

Используя (11) и (20), получим

$$\|u-u^N\|_0^2\le\sigma^2(m,N), \tag{25}$$

где

$$\sigma^2(m,N)=\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}(1+0,5\mu_k)\{\varphi_{0_k}^{+}\}^2\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(m^2+\sum_{k=N+1}^{\infty}0,5\mu_k\{\varphi_{0_k}^{+}\}^2\right)^{\frac{t}{T}}e^{2t(T-t)}$$
$$+\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\{\varphi_{0_k}^{-}\}^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(m^2+4T\int_0^T\sum_{k=N+1}^{\infty}\gamma_{3_k}(t)\,dt\right)^{\frac{t}{T}}+4T\int_0^T\sum_{k=N+1}^{\infty}\gamma_{3_k}(t)\,dt,$$

при этом $\sigma(m, N) \to 0$ при $N \to \infty$. С учетом (24), (25) из (23) имеем

$$\|u - u^{N_\varepsilon}\|_0 \le \operatorname{ch}(\sqrt{\mu_N} t)\varepsilon + \sigma(m, N).$$

При $\varepsilon \to 0$ существует такое изменение N, что $\operatorname{ch}(\sqrt{\mu_N} t)\varepsilon + \sigma(m, N)$ стремится к нулю. В самом деле, если обозначить

$$\omega(t, \varepsilon) = \inf_N \{\operatorname{ch}(\sqrt{\mu_N} t)\varepsilon + \sigma(m, N)\},$$

то можно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \omega(t, \varepsilon) = 0. \tag{26}$$

Предположим, что δ — достаточно малое число. Из $\lim\limits_{N \to \infty} \sigma(m, N) = 0$ следует существование такого $N(\delta)$, что для всех $N \ge N(\delta)$ выполняется неравенство $\sigma(m, N) \le \frac{\delta}{2}$. Обозначим $\eta(\delta) = \inf\limits_{N \ge N(\delta)} \operatorname{ch}(\sqrt{\mu_N} t)$. Если $\varepsilon \le \frac{1}{2} \frac{\delta}{\eta(\delta)}$, то функция $\omega(t, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенству $\omega(t, \varepsilon) \le \delta$. Это доказывает (26).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 1999.

2. *Пятков С. Г.* Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: Сб. науч. тр. АН СССР. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1986. С. 65–84.

3. *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1991.

4. *Фаязов К. С.* Некорректная задача Коши для дифференциального уравнения первого и второго порядка с операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 702–706.

5. *Фаязов К. С.* Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка // Узбек. мат. журн. 1995. № 2. С. 89–93.

6. *Фаязов К. С., Хажиев И. О.* Условная корректность краевой задачи для составного дифференциального уравнения четвертого порядка // Изв. вузов. Математика. 2015. № 4. С. 65–74.

Статья поступила 24 февраля 2015 г.

Фаязов Кудратилло Садридинович, Хажиев Икромбек Озодович
Национальный университет Узбекистана,
Вузгородок, 100174
kfayazov@yahoo.com, h.ikrom@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2015. Том 22, № 1

УДК 513.83

О МОЩНОСТИ ФИНАЛЬНО КОМПАКТНОГО T_1–ПРОСТРАНСТВА СЧЕТНОГО ПСЕВДОХАРАКТЕРА

П. В. Черников

Аннотация. А. В. Архангельский сформулировал проблему: оценить мощность финально компактного T_1-пространства X счетного псевдохарактера. В работе получена такая оценка, а именно доказано, что $|X| < \beta$, где β — первый измеримый кардинал. Оценка точная.
Ключевые слова: счетно полный ультрафильтр, финально компактное пространство.

P. V. Chernikov. Cardinality of a Finally Compact T_1-Space.

Abstract: A. V. Arkhangel′skiĭ posed the problem: Estimate the cardinality of a finally compact T_1-space X of countable pseudocharacter. We obtain such an estimate; namely, we prove that $|X| < \beta$, where β is the first measurable cardinal. The estimate is sharp.
Keywords: countably complete ultrafilter, finally compact space.

1. Приведем необходимые определения. Топологическое пространство X называется *финально компактным*, если каждое открытое покрытие пространства X содержит счетное подпокрытие этого пространства.

Говорят, что топологическое пространство X *имеет счетный псевдохарактер*, если всякая точка пространства X представима в виде пересечения счетного числа открытых множеств.

Ультрафильтр D над множеством A называется *счетно полным*, если для любых $A_i \in D$, $i = 1, 2, \dots$, множество $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ принадлежит D.

Мощность множества X называется *измеримым кардинальным числом*, если над X существует нетривиальный счетно полный ультрафильтр.

В [1, с. 34] сформулирована **проблема**: *оценить мощность финально компактного T_1-пространства счетного псевдохарактера.*

В начале 80-х годов прошлого века И. Юхас и П. В. Черников независимо установили, что если X — финально компактное T_1-пространство счетного псевдохарактера, то $|X| < \beta$, где β — первый измеримый кардинал [2, с. 31; 3]. Юхас привел это утверждение без доказательства. Доказательство автора содержится в малодоступной работе [3]. В данной работе мы приводим это утверждение с доказательством. Оно решает сформулированную проблему.

Далее потребуется

Лемма. *Пусть A — произвольное непустое множество, D — счетно полный ультрафильтр над A, X — финально компактное T_1-пространство счетного псевдохарактера, $f \in X^A$. Тогда существует единственная точка $x_0 \in X$ такая, что для всякой окрестности V точки x_0*

$$\{i : f(i) \in V\} \in D.$$

Доказательство. Пусть для всякой точки $x \in X$ существует окрестность V_x такая, что $\{i : f(i) \in V_x\} \notin D$. Пространство X финально компактно, поэтому можно выбрать счетное подпокрытие $\{V_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ покрытия $\{V_x\}_{x\in X}$ пространства X. Поскольку

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{i : f(i) \in V_{x_n}\} = A,$$

найдется номер m, для которого $\{i : f(i) \in V_{x_m}\} \in D$. Противоречие. Таким образом, существование точки x_0 установлено.

Докажем единственность. Пусть существуют две различные точки $x_1, x_2 \in X$, обладающие указанным свойством. Имеем

$$\{x_j\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma_n^j, \quad j = 1, 2,$$

где σ_n^j — открытые подмножества пространства X $(n = 1, 2, \dots)$. Следовательно,

$$A_j = \{i : f(i) = x_j\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{i : f(i) \in \sigma_n^j\} \in D, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $i_0 \in A_1 \cap A_2$. Тогда $f(i_0) = x_1$, $f(i_0) = x_2$. Противоречие. Лемма доказана.

Точка x_0 называется *D-пределом функции $f \in X^A$* [4]. Обозначим эту точку, следуя [4], через $D\text{-}\lim f$.

Теорема 1. *Пусть X — финально компактное T_1-пространство счетного псевдохарактера. Тогда $|X|$ — неизмеримое кардинальное число.*

Доказательство. Пусть D — счетно полный ультрафильтр над множеством X, $\mathrm{id} : X \to X$ — тождественное отображение. Пусть $x_0 = D\text{-}\lim \mathrm{id}$. По условию существуют открытые множества σ_n, $n \geq 1$, в X такие, что $\{x_0\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n$. При всех $n \geq 1$ имеем $\sigma_n \in D$, поэтому $\{x_0\} \in D$, т. е. D — главный ультрафильтр. Теорема доказана.

Таким образом, если X — финально компактное T_1-пространство счетного псевдохарактера, то $|X| < \beta$, β — первый измеримый кардинал.

Ранее этот результат был известен в случае, когда X — регулярное финально компактное пространство счетного псевдохарактера [1, с. 34; 5, гл. IV, задача 119].

Замечание. И. Юхас в [2] показал, что для всякого множества X_0, $|X_0| < \beta$, существует финально компактное T_1-пространство X^* счетного псевдохарактера такое, что $|X_0| < |X^*| < \beta$. Отсюда следует, что полученная (выше) оценка $|X| < \beta$ точная.

2. Остановимся на сходимости D-пределов.

Теорема 2. *Пусть A — произвольное непустое множество, D — счетно полный ультрафильтр над A, X — финально компактное T_1-пространство счетного псевдохарактера, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^A$, $f \in X^A$. Для того чтобы последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходилась к точке $D\text{-}\lim f$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$S = \{i \in A : \lim_{n\to\infty} f_n(i) = f(i)\} \in D.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке $D\text{-}\lim f$. Пусть $a_n = D\text{-}\lim f_n$, $n \geq 1$, $a_0 = D\text{-}\lim f$. Найдется счетное семейство открытых в X множеств $\{\sigma_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ такое, что

$$\{a_n\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma_k^n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Имеем

$$M_n = \{i \in A : f_n(i) = a_n\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{i \in A : f_n(i) \in \sigma_k^n\} \in D, \quad n \geq 1,$$

$$M_0 = \{i \in A : f(i) = a_0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{i \in A : f(i) \in \sigma_k^0\} \in D.$$

Пусть $M = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} M_n \in D$. Если $i_0 \in M$, то

$$f_n(i_0) = a_n \to a_0 = f(i_0).$$

Следовательно, $S \supset M$ и, значит, $S \in D$.

Достаточность. Пусть множество S принадлежит D. Покажем, что тогда последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке $D\text{-}\lim f$. Пусть $a_n = D\text{-}\lim f_n$, $n \geq 1$, $a_0 = D\text{-}\lim f$. Найдется счетное семейство открытых в X множеств $\{V_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ такое, что

$$\{a_n\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k^n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Имеем

$$M_n = \{i \in A : f_n(i) = a_n\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{i \in A : f_n(i) \in V_k^n\} \in D, \quad n \geq 1,$$

$$M_0 = \{i \in A : f(i) = a_0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{i \in A : f(i) \in V_k^0\} \in D.$$

Имеем также

$$M = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n \in D, \quad S \cap M \in D.$$

Если $i_0 \in S \cap M$, то последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке $D\text{-}\lim f$. Теорема доказана.

Сходимость D-пределов рассматривается также в $[6, 7]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Архангельский А. В.* Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, № 6. С. 29–84.
2. *Juhasz I.* Cardinal functions in topology-ten years later. Second ed. Amsterdam: Math. Centrum, 1980.
3. *Черников П. В.* О счетно полных ультрафильтрах. М., 1984. Деп. в ВИНИТИ, № 3206–84Деп. Аннот.: Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 4. С. 201–202.
4. *Кейслер Г. Дж., Чэн Чень-чунь.* Теория непрерывных моделей. М.: Мир, 1971.
5. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
6. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
7. *Черников П. В.* Об элементарных теориях, пространстве моделей и D-пределах // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 155–158.

Статья поступила 10 января 2015 г.

Черников Павел Васильевич
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2015. Том 22, № 1

УДК 519.853

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ТРЕЩИНОЙ

А. В. Жильцов, Р. В. Намм

Аннотация. Рассматривается метод решения модельной задачи с трещиной, построенный на основе модифицированных функционалов Лагранжа. Доказывается слабая полунепрерывность снизу функционала чувствительности. На основе доказанного свойства строится двойственный метод решения модельной задачи. Приводятся результаты численных расчетов.
Ключевые сдлва: модельная задача с трещиной, функционал Лагранжа, методы двойственности, функционал чувствительности, седловая точка, выпуклое программирование, минимизация, численный эксперимент.

A. V. Zhil′tsov and R. V. Namm. The Method of Lagrange Multipliers for Solving a Model Crack Problem.

Abstract: We consider a method for solving a model crack problem constructed from modified Lagrange functionals. The weak lower semicontinuity of the sensitivity functional is proved. Basing on the proven property, a dual method for solving the model problem is constructed. The results of numerical computations are given.
Keywords: model crack problem, Lagrange functional, duality method, sensitivity functional, saddle point, convex programming, minimization, numerical experiment.

Введение

Классический подход к описанию задачи о равновесии упругого тела с трещиной состоит в том, что на берегах трещины задаются краевые условия вида равенств. Исследованию таких краевых задач посвящено большое число работ. В то же время хорошо известно, что с точки зрения приложений получаемые линейные модели обладают очевидным недостатком: противоположные берега трещины могут проникать друг в друга.

В монографии [1] рассматривается более сложная модель, в которой берега трещины не могут проникать друг в друга. Взаимное непроникновение берегов трещины достигается за счет того, что на берегах задаются нелинейные краевые условия.

Анализ подобных задач можно найти в [2–6]. Для их решения в этих работах используются различные подходы и приемы. Там же приводятся и численные расчеты.

В настоящей работе рассматривается возможность применения модифицированных функционалов Лагранжа для решения задачи с трещиной при условии взаимного непроникновения берегов. В общем случае решения подобных задач обладают лишь H^1-гладкостью, это не позволяет доказать существование седловой точки лагранжиана. Однако можно доказать, что в случае разрешимости двойственной задачи алгоритм типа Удзавы будет сходиться по функционалу к решению. Для классических функционалов Лагранжа разрешимость двойственной задачи таких гарантий не дает.

1. Модифицированная схема двойственности

Рассмотрим задачу о равновесии мембраны, содержащей разрез, на берегах которого заданы нелинейные краевые условия [1, с. 58]. Полагаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная выпуклая область с границей Γ, $\gamma \subset \Omega$ — непрерывная незамкнутая кривая без самопересечений (для определенности рассматривается случай, когда γ — прямолинейная трещина, параллельная оси x_2). Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \backslash \overline{\gamma}$.

В области Ω_γ требуется найти функцию u такую, что

$$\begin{gathered} -\triangle u = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \\ u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \\ [u] \geq 0, \quad [u_{x_2}] = 0, \quad u_{x_2} \leq 0, \quad u_{x_2}[u] = 0 \quad \text{на } \gamma. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $f \in L_2(\Omega)$ — заданная функция; $u_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$ — производная по нормали к трещине; $[u] = u^+ - u^-$ — скачок функции u на γ (в каждой точке $x \in \gamma$ функция принимает два значения: u^+ и u^-, соответствующие верхнему и нижнему берегам трещины).

Пусть $H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) : v = 0 \text{ на } \Gamma\}$. Задача (1) соответствует задаче минимизации функционала энергии

$$\begin{gathered} J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla v|^2\,dx - \int\limits_{\Omega_\gamma} fv\,dx \to \min_{v\in K}, \\ K = \bigl\{v \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) : [v] \geq 0 \text{ п. в. на } \gamma\bigr\}. \end{gathered} \tag{2}$$

Для произвольного $m \in L_2(\gamma)$ введем множество

$$K_m = \bigl\{v \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) : -[v] \leq m \text{ п. в. на } \gamma\bigr\}.$$

Если функция ограничена снизу, то множество K_m непусто. Но если функция $m \in L_2(\gamma)\backslash H^{1/2}(\gamma)$ не является ограниченной снизу, то множество K_m может оказаться пустым.

Определим для функции $m \in L_2(\gamma)$ функционал чувствительности

$$\chi(m) = \begin{cases} \inf\limits_{v\in K_m} J(v), & \text{если } K_m \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } K_m = \varnothing. \end{cases}$$

Его эффективная область $\operatorname{dom}\chi = \{m \in L_2(\gamma) : \chi(m) < +\infty\}$ является выпуклым, но не замкнутым множеством в $L_2(\gamma)$, причем $\overline{\operatorname{dom}\chi} = L_2(\gamma)$.

При условии, что $m \in \operatorname{dom}\chi$, в силу коэрцитивности функционала $J(v)$ задача

$$\begin{gathered} J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla v|^2\,dx - \int\limits_{\Omega_\gamma} fv\,dx \to \min_{v\in K_m}, \\ K_m = \bigl\{v \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) : -[v] \leq m \text{ п. в. на } \gamma\bigr\}, \end{gathered} \tag{3}$$

имеет единственное решение, которое обозначим $u_m = \operatorname*{argmin}_{-[v]\le m} J(v)$. Тогда по определению $\chi(m) = J(u_m)$, а $\chi(0) = \inf_{-[v]\le 0} J(v) = J(u)$.

Покажем, что $\chi(m)$ — выпуклый на $\operatorname{dom}\chi$ функционал. Пусть $m', m'' \in L_2(\gamma)$ и $\chi(m') = J(v')$, $\chi(m'') = J(v'')$. Выполняются неравенства

$$-[v'] \le m', \quad -[v''] \le m''.$$

Домножив их соответственно на $(1-\lambda)$ и λ (при $0 \le \lambda \le 1$), а затем сложив, получим

$$-(1-\lambda)[v'] - \lambda[v''] \le (1-\lambda)m' + \lambda m'', \quad \lambda \in (0,1).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}\chi((1-\lambda)m' + \lambda m'') &= \inf_{-[v]\le(1-\lambda)m'+\lambda m''} J(v)\\ &\le J((1-\lambda)[v'] + \lambda[v'']) \le (1-\lambda)J(v') + \lambda J(v'')\\ &= (1-\lambda)\chi(m') + \lambda\chi(m'').\end{aligned}$$

Лемма 1. *Если $\{u_i\}$ — ограниченная последовательность в $H^1(\Omega_\gamma)$, то $\{[u_i]\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\gamma)$.*

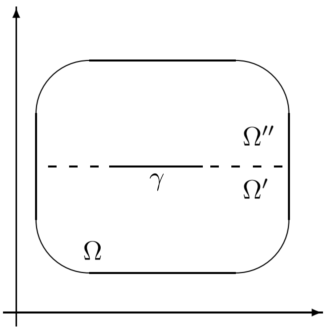


Рис. 1.

Доказательство Будем считать, что γ может быть продолжена до пересечения с внешней границей Γ так, что область Ω разбивается на две подобласти Ω', Ω'', с липшицевыми границами $\partial\Omega', \partial\Omega''$ соответственно и при этом $\gamma^+ = \partial\Omega'' \cap \gamma$, $\gamma^- = \partial\Omega' \cap \gamma$ (рис. 1). Вложения $H^1(\Omega') \subset H^{1/2}(\partial\Omega') \subset H^{1/2}(\gamma^-)$ и $H^1(\Omega'') \subset H^{1/2}(\partial\Omega'') \subset H^{1/2}(\gamma^+)$ непрерывны, значит, справедливы следующие оценки для норм:

$$\|u'\|_{H^{1/2}(\gamma^-)} \le C_1\|u'\|_{H^1(\Omega')},$$
$$\|u''\|_{H^{1/2}(\gamma^+)} \le C_2\|u''\|_{H^1(\Omega'')},$$

где u', u'' — сужения некоторой функции u (возможно, принимающей на γ^- и γ^+ разные значения) на области Ω' и Ω'' соответственно.

Возведя эти неравенства во вторую степень и сложив, получим

$$\|u''\|^2_{H^{1/2}(\gamma^+)} + \|u'\|^2_{H^{1/2}(\gamma^-)} \le C_2\|u''\|^2_{H^1(\Omega'')} + C_1\|u'\|^2_{H^1(\Omega')}, \quad C_1, C_2 > 0,$$

или, иначе, $\|u^+\|^2_{H^{1/2}(\gamma)} + \|u^-\|^2_{H^{1/2}(\gamma)} \le \max\{C_1, C_2\}\|u\|^2_{H^1(\Omega_\gamma)}$.

Из известного неравенства $\|u-v\|^2_X \le 2\big(\|u\|^2_X + \|v\|^2_X\big)$ получаем

$$\|u^+\|^2_{H^{1/2}(\gamma)} + \|u^-\|^2_{H^{1/2}(\gamma)} \ge \frac{1}{2}\|u^+ - u^-\|^2_{H^{1/2}(\gamma)}.$$

Здесь в правой части получена норма скачка функции. Таким образом, пришли к неравенству $\|[u]\|_{H^{1/2}(\gamma)} \le C\|u\|_{H^1(\Omega_\gamma)}$, где $C = \sqrt{2\max\{C_1, C_2\}}$.

Это означает, что если $\{u_i\}$ является ограниченной последовательностью в $H^1(\Omega_\gamma)$, то $\{[u_i]\}$ — ограниченная последовательность в $H^{1/2}(\gamma)$.

Пространство $H^{1/2}(\gamma)$ компактно вкладывается в $L_2(\gamma)$, из чего следует, что $\{[u_i]\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\gamma)$. □

Необходимо уточнить, что $[u] \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$. Норма в $H_{00}^{1/2}(\gamma)$ определяется следующим образом [1, с. 53]:

$$\|v\|^2_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} = \|v\|^2_{H^{1/2}(\gamma)} + \|\frac{v}{\sqrt{\rho}}\|^2_{L_2(\gamma)},$$

где $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\gamma)$.

Теорема 1. *Функционал чувствительности $\chi(m)$ слабо полунепрерывен снизу на $L_2(\gamma)$.*

Доказательство. Так как функционал $\chi(m)$ выпуклый, для доказательства теоремы достаточно показать, что он полунепрерывен снизу (в смысле сходимости по норме) в $L_2(\gamma)$. Возьмем произвольную сходящуюся последовательность $\{m_i\} \subset L_2(\gamma)$, пусть $\overline{m} = \lim\limits_{i\to\infty} m_i$. Функционал чувствительности $\chi(m)$ будет полунепрерывным снизу, если выполняются условия

1) $\lim\limits_{i\to\infty} \chi(m_i) = +\infty$ при $\overline{m} \notin \mathrm{dom}\,\chi$,

2) $\varliminf\limits_{i\to\infty} \chi(m_i) \geq \chi(\overline{m})$ при $\overline{m} \in \mathrm{dom}\,\chi$.

Рассмотрим поочередно оба случая. При проведении доказательства можно ограничиться последовательностью $\{m_i\}$ из эффективной области $\chi(m)$, $m_i \in \mathrm{dom}\,\chi$, так как вне этой области функционал принимает значение $+\infty$ и неравенство полунепрерывности снизу выполняется.

1. Пусть $\overline{m} \notin \mathrm{dom}\,\chi$. Рассмотрим последовательность $\{u_{m_i}\}$, где $u_{m_i} = \operatorname*{argmin}\limits_{v\in K_{m_i}} J(v)$.

Докажем, что $\lim\limits_{i\to\infty} \|u_{m_i}\|_{H^1(\Omega_\gamma)} = +\infty$. Допустим противное, т. е. пусть у последовательности $\{u_{m_i}\}$ существует ограниченная подпоследовательность. Без ограничения общности полагаем, что сама последовательность $\{u_{m_i}\}$ является ограниченной в $H^1(\Omega_\gamma)$. В силу леммы 1 $\{[u_{m_i}]\}$ — компактная последовательность в $L_2(\gamma)$. Пусть $t \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$ — слабая предельная точка этой последовательности, которую, не ограничивая общности, будем считать слабым пределом. Тогда $\{[u_{m_i}]\}$ сходится к t по норме в $L_2(\gamma)$.

Так как $m_i \longrightarrow \overline{m}$ в $L_2(\gamma)$ и $u_{m_i} \longrightarrow t$ в $L_2(\gamma)$, из условия $-[u_{m_i}] \leq m_i$ следует, что $-t \leq \overline{m}$, а это означает, что $K_{\overline{m}} \neq \varnothing$ или $\overline{m} \in \mathrm{dom}\,\chi$. Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{i\to\infty} \|u_{m_i}\|_{H^1(\Omega_\gamma)} = +\infty$.

В силу коэрцитивности функционала $J(v)$ получаем

$$\lim_{i\to\infty} \chi(m_i) = \lim_{i\to\infty} J(u_{m_i}) = +\infty.$$

2. Пусть теперь $\overline{m} \in \mathrm{dom}\,\chi$. Из последовательности $\{m_i\}$ выделим подпоследовательность $\{m_j\} \subset \{m_i\}$, для которой

$$\lim_{j\to\infty} \chi(m_j) = \varliminf_{i\to\infty} \chi(m_i).$$

Как и выше, рассмотрим последовательность $\{u_{m_j}\}$, где $u_{m_j} = \operatorname*{argmin}\limits_{v\in K_{m_j}} J(v)$.

Если последовательность $\{u_{m_j}\}$ не является ограниченной в $H^1(\Omega_\gamma)$, то в силу коэрцитивности функционала $J(u_{m_i}) \longrightarrow +\infty$, а тогда $\lim\limits_{i\to\infty} \chi(m_i) = +\infty$, и требуемое неравенство полунепрерывности снизу выполняется.

В случае, если последовательность $\{u_{m_j}\}$ ограничена в $H^1(\Omega_\gamma)$, вновь проведем рассуждения из первого пункта доказательства и получим $-t \le \overline{m}$.

Пусть $\tilde{u} = \operatorname*{argmin}\limits_{[v]=t \text{ на } \gamma} J(v)$. Имеем

$$J(u_{m_j}) - J(\tilde{u}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla u_{m_j}|^2\,d\Omega - \int\limits_{\Omega_\gamma} f u_{m_j}\,d\Omega - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla \tilde{u}|^2\,d\Omega + \int\limits_{\Omega_\gamma} f\tilde{u}\,d\Omega$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla(\tilde{u} + (u_{m_j} - \tilde{u}))|^2\,d\Omega - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla \tilde{u}|^2\,d\Omega - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(u_{m_j} - \tilde{u})\,d\Omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\gamma} \nabla\tilde{u}\nabla(u_{m_j} - \tilde{u})\,d\Omega + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla(u_{m_j} - \tilde{u})|^2\,d\Omega - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(u_{m_j} - \tilde{u})\,d\Omega$$

$$= \langle \Theta, [u_{m_j} - \tilde{u}]\rangle + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla(u_{m_j} - \tilde{u})|^2\,d\Omega,$$

где

$$\langle \Theta, [v]\rangle = \int\limits_{\Omega_\gamma} \nabla\tilde{u}\nabla v\,d\Omega - \int\limits_{\Omega_\gamma} fv d\Omega,$$

при этом $\Theta \in H_{00}^{-1/2}(\gamma)$ [1, 7].

Так как $\{[u_{m_j}]\}$ слабо сходится к t в $H_{00}^{1/2}(\gamma)$, в силу единственности слабого предела имеем

$$\lim_{j\to\infty} \langle \Theta, [u_{m_j} - \tilde{u}]\rangle = 0.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\lim_{j\to\infty} J(u_{m_j}) \ge J(\tilde{u}) \ge \chi(\overline{m}),$$

следовательно,

$$\varliminf_{j\to\infty} \chi(m_j) \ge \chi(\overline{m}). \quad \square$$

В пространстве $H^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma)$ определим модифицированный функционал Лагранжа

$$M(v,l) = J(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_{\gamma} (((l - r[v])^+)^2 - l^2)\,d\sigma,$$

где $r = \text{const} > 0$, $(l - r[v])^+ = \max\{0, l - r[v]\}$.

Определение 1. Пара $(v^*, l^*) \in H^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma)$ называется *седловой точкой функционала* $M(v,l)$, если выполняется двустороннее неравенство

$$M(v^*, l) \le M(v^*, l^*) \le (v, l^*), \quad (v,l) \in H^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma).$$

Двойственный функционал для $M(v,l)$ имеет два эквивалентных представления [8]:

$$\underline{M}(l) = \inf_{v\in H^1(\Omega_\gamma)} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_{\gamma} (((l - r[v])^+)^2 - l^2)\,d\sigma \right\}, \tag{4}$$

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_\gamma lm\, d\sigma + \frac{r}{2} \int_\gamma m^2\, d\sigma \right\}, \tag{5}$$

где $\chi(m)$ — определенный ранее функционал чувствительности.

Пользуясь той же схемой, что и в [9], можно доказать следующие теоремы.

Теорема 2. *Двойственный функционал* $\underline{M}(l)$ *непрерывен в* $L_2(\gamma)$.

Теорема 3. *Двойственный функционал* $\underline{M}(l)$ *дифференцируем по Гато в* $L_2(\gamma)$ *и его производная* $\nabla\underline{M}(l)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* $1/r$, *т. е.*

$$\|\underline{M}(l_1) - \underline{M}(l_2)\|_{L_2(\gamma)} \le \frac{1}{r}\|l_1 - l_2\|_{L_2(\gamma)}, \quad l_1, l_2 \in L_2(\gamma).$$

Рассмотрим двойственную задачу

$$\underline{M} \to \max, \quad l \in L_2(\gamma). \tag{6}$$

Для решения задачи (6) можно использовать градиентный метод максимизации [9–11]

$$l^{k+1} = l^k + \theta_k m(l^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (l^0 \in L_2(\gamma)), \tag{7}$$

где

$$m(l^k) = \operatorname*{argmin}_{m \in L_2(\gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_\gamma l^k m\, d\sigma + \frac{r}{2} \int_\gamma m^2\, d\sigma \right\}, \quad \theta_k \in [\beta, 2r - \beta],\ \beta \in (0, r].$$

Теорема 4. *Для алгоритма* (7) *выполняется предельное равенство* [9]

$$\lim_{k \to \infty} \|m(l^k)\|_{L_2(\gamma)} = 0.$$

Алгоритм (7) переписывается следующим образом [8]:

$$\begin{gathered} u^{k+1} = \operatorname*{argmin}_{v \in H^1(\Omega_\gamma)} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int_\gamma (((l^k - r[v])^+)^2 - (l^k)^2)\, d\sigma \right\} \\ l^{k+1} = l^k + \theta_k \max\left\{ -u^{k+1}, -\frac{l^k}{r} \right\}, \quad l^0 \in L_2(\gamma),\ \theta_k \in [\beta, 2r - \beta],\ \beta \in (0, r]. \end{gathered} \tag{8}$$

При условии разрешимости задачи (6) алгоритм (8) сходится по функционалу, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} J(u^k) = \min_{v \in K} J(v) = J(u^*),$$

здесь u^* — решение задачи (2).

Действительно, $\chi(m)$ — слабо полунепрерывный снизу на $L_2(\gamma)$ функционал. Поэтому

$$\varliminf_{k \to \infty} \left\{ \chi(m(l^k)) + \int_\gamma l^k m(l^k)\, d\sigma + \frac{r}{2} \int_\gamma m^2(l^k)\, d\sigma \right\} = \varliminf_{k \to \infty} \chi(m(l^k)) \ge \chi(0) = J(u^*).$$

С другой стороны,

$$\underline{M}(l^k) = \chi(m(l^k)) + \int\limits_{\gamma} l^k m(l^k)\, d\sigma + \frac{r}{2}\int\limits_{\gamma} m^2(l^k)\, d\sigma$$
$$= \inf_{m \in L_2(\gamma)} \left\{ \chi(m) + \int\limits_{\gamma} l^k m\, d\sigma + \frac{r}{2}\int\limits_{\gamma} m^2\, d\sigma \right\} \le \chi(0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left\{ \chi(m(l^k)) + \int\limits_{\gamma} l^k m(l^k)\, d\sigma + \frac{r}{2}\int\limits_{\gamma} m^2(l^k)\, d\sigma \right\} \le \chi(0).$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \chi(m(l^k)) + \int\limits_{\gamma} l^k m(l^k)\, d\sigma + \frac{r}{2}\int\limits_{\gamma} m^2(l^k)\, d\sigma \right\} = \chi(0) = J(u^*).$$

Тогда из теоремы 4 следует, что

$$\lim_{k\to\infty} J(u^k) = \lim_{k\to\infty} \chi(m(l^k)) = \chi(0) = J(u^*).$$

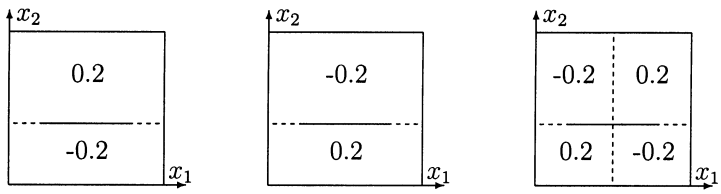
В предположении, что решение исходной задачи u^* принадлежит $H^2(\Omega_\gamma)$, можно доказать [9], что метод (8) сходится к седловой точке $(u^*, l^*) \in H^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma)$ функционала Лагранжа.

2. Численный эксперимент на основе метода конечных элементов

Пусть $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$, $\gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0.2 < x_1 < 0.8,\ x_2 = 0.4\}$. Триангуляция области Ω проведена с помощью равномерной сетки с шагом $h = 1/20$. Критерии остановки счета на внутренних и на внешних итерациях таковы:

$$\max_i \left| u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)} \right| \le \varepsilon, \quad \max_i \left| l_i^{(n+1)} - l_i^{(n)} \right| \le 10^2 \varepsilon,$$

соответственно, где $\varepsilon = 10^{-8}$. Параметр $r \in \{1, 10, 10^2, 10^3, 10^4\}$. В качестве стартовой точки $(u^{(0)}, l^{(0)})$ взята точка $(0, 0)$.



(a) f_1 (b) f_2 (c) f_3

Рис. 2.

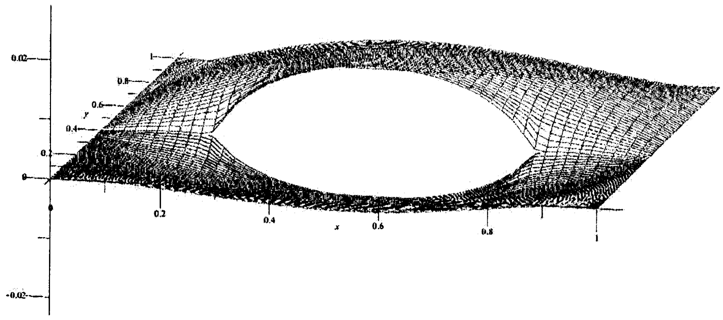


Рис. 3. Вид пластины при f_1.

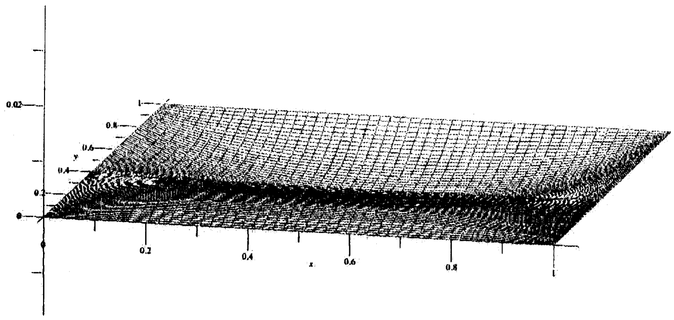


Рис. 4. Вид пластины при f_2.

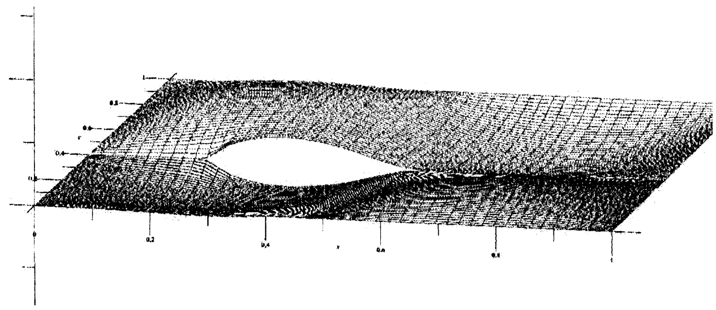


Рис. 5. Вид пластины при f_3.

В качестве функции f выбирались кусочно постоянные функции. Рассмотрено три различных варианта функции f (рис. 2), дающих принципиально различные решения.

Рассмотрен эффект, оказываемый каждым из вариантов задания функции f, приведено количество внешних и внутренних итераций, а также время выполнения для демонстрации сложности решаемых задач друг относительно друга (табл. 1).

Таблица 1. Относительная сложность решаемых задач

r	f	Число внутренних итераций	Число внешних итераций	Время выполнения (мс)
	f_1	438	1	11
1	f_2	5172	125	134
	f_3	4510	124	117
	f_1	348	1	11
10	f_2	1277	22	33
	f_3	1108	22	28
	f_1	438	1	11
10^2	f_2	644	6	17
	f_3	536	6	14
	f_1	438	1	11
10^3	f_2	484	4	12
	f_3	404	4	10
	f_1	438	1	11
10^4	f_2	394	3	11
	f_3	342	3	9

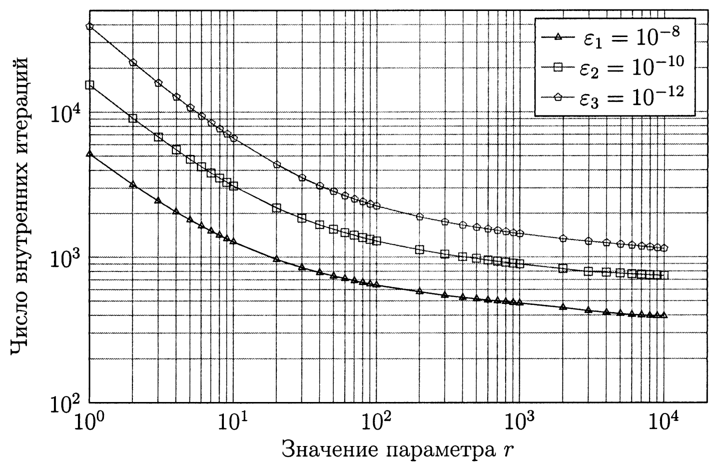


Рис. 6. Зависимость числа внутренних итераций от r.

В первом варианте берега трещины полностью расходятся (рис. 3), а это значит, что двойственная переменная, соответствующая значению скачка производной по нормали на γ, равна нулю во всех точках γ. Так как изначально для двойственной переменной l взята нулевая функция, совершается лишь одна итерация внешнего цикла.

Для второго примера ограничения задачи не позволяют берегам разойтись (рис. 4), так что скачок функции u на γ равен нулю, при этом двойственная переменная принимает ненулевые значения.

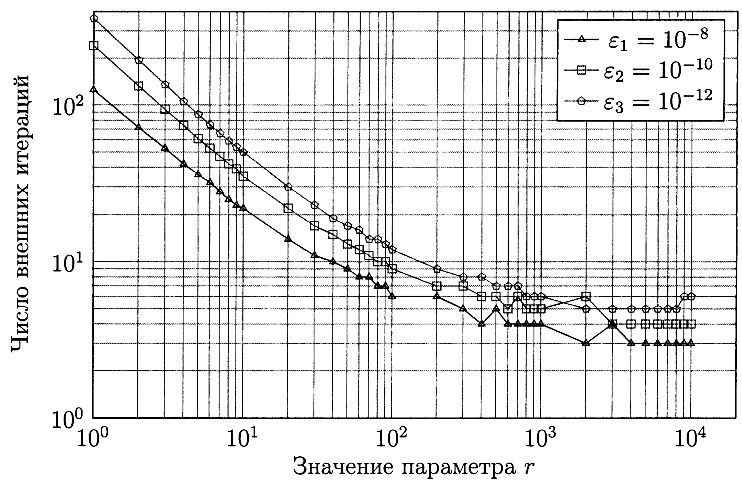


Рис. 7. Зависимость числа внешних итераций от r.

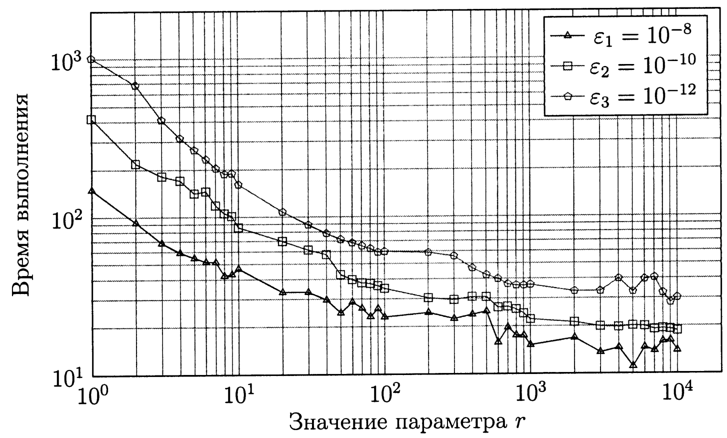


Рис. 8. Зависимость времени выполнения от r.

В третьем варианте берега разошлись на части трещины (рис. 5).

При исследовании модифицированных методов двойственности параметр r можно задавать любым, причем в силу теоремы 3 с увеличением параметра r увеличивается скорость сходимости решения двойственной задачи. На рис. 6–8 представлены графики количества внутренних и внешних итераций, а также времени выполнения алгоритма в зависимости от r. Графики представлены в логарифмическом масштабе. Использовалось значение функции f, изображенное на рис. 4. Решение искалось с точностями $\varepsilon_1 = 10^{-8}$, $\varepsilon_2 = 10^{-10}$, $\varepsilon_3 = 10^{-12}$.

Из графиков видно, что увеличение r стабильно приводит к асимптотическому уменьшению количества итераций и времени работы алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
2. *Kovtunenko V. A.* Numerical simulation of the non-linear crack problem with nonpenetration // Math. Meth. Appl. Sci. 2010. V. 27, N 2. P. 163–179.
3. *Hintermüller M., Kovtunenko V., Kunisch K.* The primal-dual active set method for a crack problem with non-penetration // IMA J. Appl. Math. 2004. V. 69, N 1. P. 1–26.
4. *Вторушин Е. В.* Численное исследование модельной задачи для уравнения Пуассона с ограничениями типа неравенств в области с разрезом // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 41–49.
5. *Вторушин Е. В.* Численное исследование модельной задачи деформирования упруго-пластического тела с трещиной при условии возможного контакта берегов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 4. С. 301–310.
6. *Рудой Е. М.* Метод декомпозиции области для модельной задачи теории трещин с возможным контактом берегов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 2б. С. 310–321.
7. *Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я.* Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986.
8. *Вихтенко Э. М., Ву Г., Намм Р. В.* О сходимости метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа в вариационных неравенствах механики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 8. С. 1357–1366.
9. *Вихтенко Э. М., Ву Г. С., Намм Р. В.* Методы решения полукоэрцитивных вариационных неравенств механики на основе модифицированных функционалов Лагранжа // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 14, № 1. С. 6–17.
10. *Гроссман К., Каплан А. А.* Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. Новосибирск: Наука, 1981.
11. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
12. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973.
13. *Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В.* Модифицированные функции Лагранжа. М.: Наука, 1989.

Статья поступила 5 февраля 2015 г.

Жильцов Александр Владимирович
Дальневосточный гос. университет путей сообщения,
ул. Серышева, 47, Хабаровск 680021
egrevid@gmail.com

Намм Роберт Викторович
Вычислительный центр ДВО РАН,
ул. Ким-Ю-Чена, 65, Хабаровск 680000
rnamm@yandex.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2015. Том 22, № 1

УДК 519.67+624.04:531/534

РАВНОМЕРНОЕ РАЗБИЕНИЕ СФЕРЫ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБЛУЧЕННОСТИ

М. Ф. Семенов, В. Ю. Шадрин

Аннотация. Предложен метод равномерного разбиения сферы, которое можно применить для численного интегрирования поверхностных интегралов по сфере. Приводятся результаты численных экспериментов вычисления коэффициентов облученности.

Ключевые слова: сфера, разбиение, узлы кубатурной формулы, коэффициент облученности.

M. F. Semenov and V. Yu. Shadrin. Uniform Partition of a Sphere and Its Application to Computing Irradiance Coefficients.

Abstract: We propose a method of uniform partition of a sphere which can be applied for the numerical integration of surface inegrals over the sphere. The results are given of numerical experiments for calculating irradiance coefficients.

Keywords: sphere, partition, nodes of a cubature formula, irradiance coefficient.

Пусть дана сфера с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$ и с радиусом R. Выберем натуральное число n и положим $\alpha = \alpha_n = \frac{\pi}{2n+1}$. Вокруг «северного полюса» с координатами $(0, 0, R)$ описываем сегмент с центральным углом α_n, далее сверху вниз верхнюю полусферу разбиваем на n поясов с одинаковыми центральными углами α_n. Площадь сегмента при «полюсе» равна

$$S = 2\pi Rh, \quad \text{где } h = R - R\cos\frac{\alpha_n}{2}.$$

Если пронумеровать пояса сверху вниз $i = 1, 2, \dots, n$, то площадь i-го пояса равна

$$S_i = 2\pi Rh_i,$$

где $h_i = R\sin(n - i + 1)\alpha_n - R\sin(n - i)\alpha_n = 2R\sin\frac{\alpha_n}{2}\sin i\alpha_n$.

Рассмотрим отношение площади i-го пояса S_i к площади «полюса» S:

$$\mu_{ni} = \frac{S_i}{S} = \frac{2\sin i\alpha_n}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{4}}.$$

Целая часть этого числа $[\mu_{ni}]$ означает количество равновеликих секторов с площадями, равными площади «полюса», из которых состоит i-й пояс.

Положим $\varphi_i = \frac{\pi}{2} - \alpha_n i$, $\theta_{ij} = \frac{\pi(2j-1)}{\mu_{ni}}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, [\mu_{ni}]$. Определим упорядоченное множество равномерно распределенных точек на верхней полусфере $U_N = \{(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})\}$. Координаты точек вычисляются по следующим формулам:

$$x_{ij} = R\cos\varphi_i\cos\theta_{ij}, \quad y_{ij} = R\cos\varphi_i\sin\theta_{ij}, \quad z_{ij} = R\sin\varphi_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, [\mu_{ni}].$$

Аналогично определим упорядоченное множество равномерно распределенных точек на нижней полусфере $U_S = \{(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})\}$. Координаты точек вычисляются по следующим формулам:

$$x_{ij} = R\cos\varphi_i\cos\theta_{ij}, \quad y_{ij} = R\cos\varphi_i\sin\theta_{ij}, \quad z_{ij} = -R\sin\varphi_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, [\mu_{ni}].$$

К этим множествам добавим «северный полюс» P_N с координатами

$$x_{2n+1,1} = 0, \quad y_{2n+1,1} = 0, \quad z_{2n+1,1} = R$$

и «южный полюс» P_S с координатами

$$x_{2n+2,1} = 0, \quad y_{2n+2,1} = 0, \quad z_{2n+2,1} = -R.$$

Таким образом получили упорядоченное множество точек (узлов), которые равномерно распределены по всей сфере:

$$U = U_N \cup U_S \cup P_N \cup P_S.$$

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{n1} = 8$;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu_{nn}}{n} = \frac{16}{\pi}$;
(3) $\frac{16}{\pi} \le \frac{\mu_{ni}}{i} \le 8, \ i = 1, 2, \ldots, n.$

Доказательство. (1) Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{n1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n1}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sin\alpha_n}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sin\frac{\pi}{2n+1}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4(2n+1)}} = 8.$$

Это означает, что в первом поясе возле «северного полюса» при $n \to \infty$ количество секторов с площадью, равной площади полюса, стремится к 8. Заметим, что, как показано в [1], в плоском случае при аналогичном разбиении круга в первом кольце расположено ровно 8 секторов с площадью, равной площади центрального круга.

(2) Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{nn}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2\sin n\alpha_n}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2\sin n\frac{\pi}{2n+1}}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2n+1}\right)} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{4(2n+1)}{n\pi} = \frac{16}{\pi}.$$

(3) Очевидно, что для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место оценка

$$\frac{16}{\pi} \le \frac{\mu_{ni}}{i} \le 8.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим применение предложенного разбиения для приближенного вычисления коэффициентов облученности при лучистом теплообмене между поверхностями, одной из которых является сфера.

Множество узлов U можно взять в качестве узлов для кубатурной формулы, аналогичной формуле, предложенной в $[1, 2]$.

Коэффициент облученности (угловой коэффициент) F_{1-2} с поверхности 1 с площадью A_1 на поверхность 2 с площадью A_2 определяется следующим образом [3]:

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1} \iint\limits_{A_1 A_2} \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2 \, dA_1 dA_2}{\pi R^2}, \tag{1}$$

где R — расстояние от элементарной площадки dA_1 на A_1 до элементарной площадки dA_2 на A_2, β_1, β_2 — углы между R и нормальными векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ к dA_1 и к dA_2 соответственно, направленными в сторону другой поверхности. Коэффициент облученности показывает долю лучистого потока, попадающую на поверхность 2, от всего потока, излучаемого поверхностью 1.

Приближенное вычисление двукратного поверхностного интеграла второго рода (1) проведем с помощью кубатурной формулы, которая является многомерным аналогом формулы средних прямоугольников, основанным на определении данного интеграла. Идея состоит в разбиении поверхностей, участвующих в лучистом теплообмене, на элементарные площадки и в выборе в качестве узлов кубатурной формулы «средних» точек этих площадок. Тогда кубатурная формула примет вид

$$F_{1-2} = \frac{1}{\pi A_1} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{j_2=1}^{m_2} f(M_{i_1 j_1}, M_{i_2 j_2}) \Delta s_{i_1 j_1} \Delta s_{i_2 j_2}, \tag{2}$$

где $n_1 \times m_1$ — количество элементарных площадок поверхности 1, $n_2 \times m_2$ — количество элементарных площадок поверхности 2, $M_{i_1 j_1} \in \Delta s_{i_1 j_1}$, $M_{i_2 j_2} \in \Delta s_{i_2 j_2}$ — узлы кубатурной формулы,

$$f(M_{i_1 j_1}, M_{i_2 j_2}) = \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2}{R_{12}^2},$$

$$\vec{R}_{12} = \overrightarrow{M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2}}, \quad \vec{R}_{21} = \overrightarrow{M_{i_2 j_2} M_{i_1 j_1}},$$

$$\beta_1 = \angle(\vec{N}_1, \vec{R}_{12}), \quad \beta_2 = \angle(\vec{N}_2, \vec{R}_{21}),$$

$\Delta s_{i_1 j_1}$, $\Delta s_{i_2 j_2}$ — площади элементарных площадок. Косинусы вычисляются через скалярное произведение:

$$\cos\beta_1 = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{R}_{12}}{|\vec{N}_1||\vec{R}_{12}|}, \quad \cos\beta_2 = \frac{\vec{N}_2 \cdot \vec{R}_{21}}{|\vec{N}_2||\vec{R}_{21}|}.$$

В четырехкратном суммировании (2) учитываются только слагаемые с узлами, участвующими в лучистом теплообмене, т. е. те слагаемые, для которых $\cos\beta_1 > 0$, $\cos\beta_2 > 0$.

В табл. 1 приведены результаты вычислений для вложенных концентрических сфер с общим центром в начале координат и с радиусами $R_1 = 2$ и $R_2 = 1$.

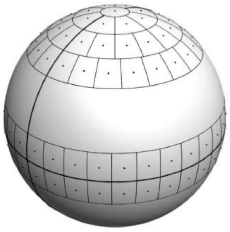


Рис. 1. Равномерное разбиение.

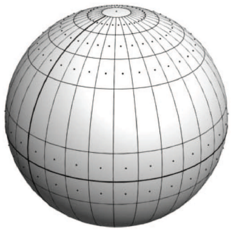


Рис. 2. Географическое разбиение.

Очевидно, что коэффициент облученности наружной сферы со стороны внутренней сферы равен 1. В первом столбце указаны значения площади элементарных площадок ΔS. Во втором столбце РР означает «равномерное разбиение», ГР — «географическое разбиение». При равномерном разбиении (рис. 1) все площадки имеют почти одинаковую указанную площадь, при географическом разбиении (рис. 2) указанную площадь будут иметь площадки, расположенные выше и ниже «экватора», остальные площадки, очевидно, будут иметь меньшую площадь. Тем не менее, измельчение сетки возле «полюсов» при географическом разбиении не приводит к улучшению результатов вычислений. Как видно из табл. 1, имеет место сходимость кубатурной формулы к точному значению с увеличением числа узлов разбиения сферы, причем равномерное разбиение предпочтительнее не только с точки зрения быстроты вычисления, но и точности кубатурной формулы.

В табл. 2 приведены результаты тестовой задачи вычисления коэффициента облученности со сферы радиуса $R = 1$ на внутреннюю поверхность куба, содержащего данную сферу. Центры куба и сферы совпадают, ребро куба равно 4.

По свойству замкнутости коэффициента облученности сумма коэффициентов облученности на отдельные грани куба должна равняться 1. Каждая грань куба разбивалась на 400×400 элементарных квадратиков площадью 0.0001, элементарный сектор сферы при равномерном разбиении имеет площадь 0.0001181, при географическом разбиении наибольший элементарный сектор при «экваторе» имеет такую же площадь 0.0001181. Через F_{S-i} обозначается коэффициент облученности со сферы на i-ю грань, через ε — погрешность вычисления.

Как видим, результаты данного численного эксперимента также показывают, что применение узлов предложенного равномерного разбиения предпочтительнее обычного географического разбиения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Семенов М. Ф., Шадрин В. Ю.* Об одном разбиении круга и его применении для вычисления коэффициентов облученности при лучистом теплообмене // Мат. I Междунар. науч.-практ. конф. «Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения». Липецк, 2013. Т. 1. С. 28–31.

2. *Софронова Е. Ф., Шадрин В. Ю.* О приближенном вычислении коэффициентов облученности при лучистом теплообмене между двумя плоскими выпуклыми четырехугольниками // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, № 1. С. 166–174.

Таблица 1. Численные результаты для вложенных сфер

Площадь ΔS	Способ разбиения	Число узлов S_1	Число узлов S_2	Погрешность	Время счета в секундах
0.0671150	РР	726	202	0.000115448	< 1
	ГР	2354	589	0.005913457	< 1
0.0082660	РР	6060	1574	0.000002844	< 1
	ГР	19105	4777	0.000800807	4
0.0046685	РР	10676	2746	0.000007244	1
	ГР	33826	8457	0.000463989	11
0.0021060	РР	23788	6060	0.000000447	7
	ГР	74984	18747	0.000210775	67
0.0011890	РР	42094	10676	0.000000200	20
	ГР	132813	33204	0.000119545	130
0.0006285	РР	79290	20022	0.000000145	70
	ГР	251256	62815	0.000063867	480
0.0003915	РР	128128	32294	0.000000122	190
	ГР	403356	100840	0.000039819	1335
0.0001925	РР	260866	65590	0.000000106	780
	ГР	820332	205084	0.000019831	5460

Таблица 2. Численные результаты для сферы, вложенной в куб

	Равномерное разбиение	Географическое разбиение
F_{S-1}	0.1667937281	0.1666543690
F_{S-2}	0.1667937281	0.1666543690
F_{S-3}	0.1666035189	0.1666656458
F_{S-4}	0.1666035191	0.1666656458
F_{S-5}	0.1666035189	0.1666656457
F_{S-6}	0.1666035191	0.1666656458
Сумма	1.0000015322	0.9999713211
ε	0.0000015322	-0.0000286789

3. *Зигель Р., Хауэлл Дж.* Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975.

Статья поступила 28 января 2015 г.

Семенов Михаил Федорович, Шадрин Василий Юрьевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677801, Республика Саха (Якутия)
sem.mi@mail.ru, vshadr@mail.ru

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья может быть представлена в виде файла в формате pdf или распечатки, подготовленной с использованием какой-либо компьютерной системы подготовки математических текстов.

5. В начале статьи указывается индекс УДК. Статья сопровождается краткой аннотацией, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках. Подготовленная с использованием компьютера графика должна быть высококачественной, не ниже 600 DPI, и не использующей шрифты Adobe, отсутствующие в пакете MikTeX.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках.

Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних трех лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в издательстве и в редакции издания в течение пяти лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство образования и науки Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. Если статья принимается к опубликованию после доработки, то автор направляет в редакцию файл ее последней версии. При подготовке файла следует использовать, как правило, макропакет AMS-TEX со стилевым файлом amsppt.

11. Предоставление файлов в форматах TEX или LaTeX возможно только при согласовании с редакцией. Автор не должен использовать необязательные авторские командные последовательности, введенные для облегчения набора. Запрещается переопределять греческие буквы, стандартные команды и т. п.

12. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

13. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

14. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.