

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 22, № 2 (86)

Апрель—июнь, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- Агошков В. И., Гребенников Д. С., Шелопут Т. О.** *Исследование и численное решение одной обратной задачи моделирования циркуляции в акваториях с «жидкими» границами* 3
- Блохин А. М., Ткачев Д. Л., Егитов А. В.** *Линейная неустойчивость решений математической модели, описывающей течения полимеров в бесконечном канале* 16
- Булгатова Е. Н., Павлова Е. Б.** *Оптимальное распределение узлов квадратурной формулы с весом* 28
- Васильева Е. Г., Цыренжапов Н. Б.** *Оценка сверху функционала погрешности квадратурных формул с симметричным пограничным слоем* 33
- Никитина Т. Н.** *О $\bar{d}d$ -уравнении на положительном потоке* 38
- Суродин И. В.** *Параллельные алгоритмы для решения прямых задач электрического каротажа на графических процессорах* 51

Математическое моделирование

- Волчков Ю. М., Полтавская Е. Н.** *Моделирование напряженно-деформированного состояния в слоистых ортотропных пластинах* 62
- Кабанихин С. И., Криворотько О. И., Ермоленко Д. В., Воронов Д. А.** *Сравнение градиентного и симплекс методов численного решения обратной задачи для простейшей модели инфекционного заболевания* 72

Луцкий А. Е., Ханхасаева Я. В. <i>Трехмерная задача обтекания модели летательного аппарата при активном воздействии на поток</i>	83
Михайлов А. А., Мартынов В. Н. <i>Математическое моделирование распространения акустико-гравитационных и сейсмических волн в неоднородной модели «Земля — атмосфера» при наличии стратификации ветра в атмосфере</i>	92

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

<http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/>

e-mail: prokopevav85@gmail.com; madu@ysu.ru;

ivanegorov51@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ
РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦИРКУЛЯЦИИ
В АКВАТОРИЯХ С «ЖИДКИМИ» ГРАНИЦАМИ

В. И. Агошков,
Д. С. Гребенников, Т. О. Шелопут

Аннотация. В геофизической гидродинамике известна проблема моделирования физических процессов в водоемах с «жидкими» границами. Одним из подходов к ее решению является использование теории оптимального управления и ассимиляции данных наблюдений. В настоящей работе рассматривается задача о вычислении неизвестной функции в граничном условии для уравнений, относящихся к типу «уравнений мелкой воды». С использованием известных методов исследования и решения обратных задач и задач оптимального управления предложен итерационный алгоритм решения, получены условия однозначной и плотной разрешимости задачи и сходимости итерационного алгоритма. Приведены результаты численной реализации данного алгоритма применительно к акватории Балтийского моря.

Ключевые слова: обратные задачи, открытые («жидкие») границы, некорректно поставленные задачи, итерационный алгоритм, уравнения мелкой воды.

V. I. Agoshkov., D. S. Grebennikov, T. O. Sheloput. Investigation and the numerical solution of the problem of modeling of the circulation in water areas with "liquid" boundaries.

Abstract: In geophysical fluid dynamics a problem of modeling physical processes in water areas with "liquid" boundaries is known. One way to solve this problem is to apply the optimal control theory and data assimilation methods. In this paper the problem of unknown function calculation in the boundary condition of the system of "shallow-water equations" is considered. By using the known methods for inverse problems investigation and optimal control theory an iteration algorithm is proposed. Conditions for the unique and dense solvability of the considered problem and conditions for the iteration algorithm convergence are obtained as well. The results of numerical implementation of this algorithm related to Baltic Sea area are also demonstrated in this work.

Keywords: inverse problem, "liquid" (open) boundary, ill-posed problem, iteration process, shallow-water equations.

1. Введение

В задачах геофизической гидродинамики часто возникает проблема моделирования физических процессов в водоемах (морях, океанах, реках и т. д.) с «жидкими» границами. Например, «жидкими» (открытыми) являются южные

Работа выполнена при частичной поддержке РФФ (грант 14-11-00609, в рамках которого был сформулирован итерационный процесс и проведены численные эксперименты) и РФФИ (грант 16-01-00548, в рамках которого задача была сформулирована и исследована).

границы Индийского океана, северные границы Баренцева, Карского морей, границы, проходящие по проливам, устьям рек и т. д. Данная работа посвящена задаче уточнения граничных функций на «жидких» границах.

Существуют различные приближения, которые можно применить для задания граничных условий на «жидких» границах. Иногда используется приближение «материальной» границы — жидкая граница считается подвижной, и на ней задается условие «непротекания» [1, с. 82–141]. Такое приближение удобно тогда, когда деформация моделируемой области не слишком велика. Однако в данном случае граница является дополнительным неизвестным задачи [2], и использование многих современных численных методов, алгоритмов и инструментов, а также теоретическое исследование, затруднены. Еще одним распространенным приемом является использование осредненных данных о потоках через открытую границу [3]. Иногда возможно провести предварительный расчет по всей акватории Мирового океана на грубой сетке и использовать полученные данные в качестве граничных условий на «жидкой» границе. Вероятно, наиболее перспективным является использование комбинации одного из этих методов с ассимиляцией данных наблюдений.

Идея использования теории оптимального управления и ассимиляции данных наблюдений для решения проблемы «жидких» границ изучена, например, в работах [4–6]. В частности, в [5] предложен и исследован итерационный алгоритм восстановления по данным наблюдений неизвестной граничной функции, учитывающей влияние океана на открытую границу расчетной области, где в качестве модели, описывающей физические процессы в акватории, выбрана система уравнений динамики приливов. Отметим, что итерационные алгоритмы, сформулированные в [4, 5], необходимо реализовывать на каждом шаге по времени.

В настоящей работе проведено исследование вопросов существования и единственности решения обратной задачи о вычислении неизвестной функции в граничном условии для уравнений, относящихся к типу «уравнений мелкой воды», применяющихся для моделирования некоторых типов циркуляций жидкости в акваториях. Суть подхода к исследованию этих вопросов состоит в сведении их к аналогичным вопросам о «граничной функции» для волнового уравнения, к которому (при известных ограничениях) сводится исходная система. При этом само граничное условие для волнового уравнения также строится на основе рассматриваемых уравнений мелкой воды. Также ниже предложен итерационный алгоритм, который в дальнейшем применяется к акватории Балтийского моря. Проведен тестовый эксперимент, в котором «жидкая» граница проходит в районе шведского города Треллеборг и отделяет Северное море от Балтийского. На примере данного эксперимента в работе проиллюстрировано, что предложенный алгоритм является достаточно точным.

§ 2. Постановка задачи

1. Введем следующие обозначения: (x, y, z) — прямоугольная система координат, $(x, y) \in \Omega$, где Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^2 , t — переменная времени, $t \in [0, T]$, $T < \infty$, $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$ — цилиндр над Ω , $\Gamma \equiv \partial\Omega$ — «кусочно-

гладкая» класса C^2 граница области Ω , удовлетворяющая условию Липшица, $\Gamma_T \equiv \Gamma \times (0, T)$ — боковая поверхность Q_T , $\Gamma_{cT} = \Gamma_c \times (0, T)$, где Γ_c — «жидкая» граница. Пусть также u, v — скорости жидкости соответственно по осям Ox, Oy , $-\xi(x, y, t) < z < H(x, y)$, где $z = \xi(x, y, t)$ — уравнение свободной поверхности океана, $z = H(x, y)$ — уравнение рельефа дна (считаем для простоты $H(x, y)$ гладкой функцией), $g = \text{const}$ — ускорение свободного падения, ρ — плотность жидкости, p^a — атмосферное давление, τ_1, τ_2 — напряжения трения ветра, l — параметр Кориолиса.

Запишем осредненную по глубине (по координате z) систему уравнений гидродинамики [7, с. 47]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - lV + g \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} p_x^a + \frac{1}{H\rho_0} \tau_1 \quad \text{в } Q_T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + lU + g \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} p_y^a + \frac{1}{H\rho_0} \tau_2 \quad \text{в } Q_T, \quad (2)$$

$$\xi_t + (UH)_x + (VH)_y = 0 \quad \text{в } Q_T, \quad (3)$$

где U, V — функции средних скоростей жидкости соответственно по осям Ox, Oy (далее — «скорости»):

$$U = \frac{1}{H} \int_0^H u \, dz, \quad V = \frac{1}{H} \int_0^H v \, dz;$$

$$p_x^a = \frac{\partial p^a}{\partial x}, \quad p_y^a = \frac{\partial p^a}{\partial y}, \quad (UH)_x \equiv \frac{\partial(UH)}{\partial x}, \quad (VH)_y \equiv \frac{\partial(VH)}{\partial y}, \quad \xi_t \equiv \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

В дальнейшем силой Кориолиса пренебрегаем, т. е. полагаем $l \equiv 0$.

Система дополняется начальными и граничными условиями:

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad V(x, y, 0) = V_0(x, y), \quad \xi(x, y, 0) = \xi(x, y) \quad \text{в } \Omega, \quad (4)$$

$$(\mathbf{U}, \mathbf{n}) = m_c u_c \quad \text{на } \Gamma_{cT}, \quad (5)$$

где $\mathbf{U} = (U, V)^T$ — вектор скорости, \mathbf{n} — вектор внешней нормали, m_c — характеристическая функция границы Γ_{cT} .

Введем следующие обозначения:

$$f_1 = -\frac{H}{\rho_0} p_x^a + \frac{1}{\rho_0} \tau_1, \quad f_2 = -\frac{H}{\rho_0} p_y^a + \frac{1}{\rho_0} \tau_2, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2)^T.$$

Умножая уравнения (1), (2) на H , дифференцируя первое уравнение по x , второе — по y , а уравнение (3) по t , комбинируя их, получаем

$$-\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \text{div}(gH\nabla\xi) = \text{div } \mathbf{f} \quad \text{в } Q_T.$$

Первые два уравнения можно переписать в векторном виде:

$$gH \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x \\ \partial\xi/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} UH \\ VH \end{pmatrix} \quad \text{в } Q_T.$$

Рассматривая эти два уравнения на Γ и умножая их на вектор внешней к Ω нормали \mathbf{n} , получаем граничное условие вида

$$gH \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) - \frac{\partial}{\partial t} H(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \quad \text{на } \Gamma_T.$$

Таким образом, задачу (1)–(5) для уравнений мелкой воды можно переформулировать как следующую задачу для волнового уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH \nabla \xi) &= -\operatorname{div} \mathbf{f} \quad \text{в } Q_T, \\ \xi|_{t=0} &= \xi_0 \quad \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=0} &= -\frac{\partial U_0}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial y} \equiv \xi_1 \quad \text{в } \Omega, \\ gH \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} &= (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \quad \text{на } (\Gamma \setminus \Gamma_c) \times (0, T), \\ gH \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} &= (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) - m_c H \frac{\partial u_c}{\partial t} \equiv (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + m_c U_c \quad \text{на } \Gamma_c \times (0, T), \end{aligned} \quad (6)$$

где $U_c = -m_c H \partial u_c / \partial t$. Предполагается, что выполнены необходимые условия гладкости и согласованности при рассмотрении классической постановки задачи типа (6).

Пусть далее U_c есть дополнительное неизвестное на $\Gamma_c \times (0, T)$, тогда введем уравнение замыкания:

$$m_0 \xi = m_0 \varphi_{obs} \quad \text{на } \Gamma_T,$$

где m_0 — характеристическая функция границы $\Gamma_{oT} \subset \Gamma_T$, $\Gamma_{oT} \equiv \Gamma_o \times (0, T)$, а φ_{obs} — результаты наблюдений за уровнем ξ на границе Γ_{oT} .

2. В дальнейшем будем рассматривать только вещественные переменные, функции и функциональные пространства. Введем следующие гильбертовы пространства (см., например, [8]):

$$\begin{aligned} L_2(Q_T) : (u, v)_{L_2(Q_T)} &\equiv (u, v)_{2, Q_T} = \int_0^T \int_{\Omega} uv \, d\Omega dt, \\ W_2^1(Q_T) : (u, v)_{W_2^1(Q_T)} &= \int_{Q_T} \left(uv + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) d\Omega dt, \\ W_{2,T}^1 &\equiv \{u : u \in W_2^1(Q_T), u = 0 \text{ при } t = T\}. \end{aligned}$$

Считаем, что норма в каждом из указанных пространств порождается соответствующим скалярным произведением.

Введем пространство H_o — подпространство пространства $L_2(\Gamma_T)$, состоящее из элементов $L_2(\Gamma_T)$, равных нулю на $\Gamma_T \setminus \Gamma_{oT}$. Также введем пространство H_c — подпространство пространства следов функций из $W_2^1(Q_T)$ на Γ_T , состоящее только из тех элементов, которые равны нулю на $\Gamma_T \setminus \Gamma_{cT}$. Пусть $\mathbf{f} \in (W_2^1(Q_T))^2$, $\xi_0 \in W_2^1(Q_T)$, $\xi_1 \in L_2(Q_T)$, $0 < \nu \leq gH(x)$, $\varphi_{obs} \in H_o$. Сформулируем следующую **обратную задачу**: найти $\xi \in W_2^1(Q_T)$ на Q_T и $U_c \in H_c$ такие что

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH \nabla \xi) = -\operatorname{div} \mathbf{f} \quad \text{п. в. в } Q_T, \quad (7)$$

$$\xi|_{t=0} = \xi_{(0)}, \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{t=0} = \xi_{(1)} \quad \text{п. в. в } \Omega, \quad (8)$$

$$gH \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \quad \text{п. в. на } (\Gamma \setminus \Gamma_c) \times (0, T), \quad (9)$$

$$gH \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + U_c \quad \text{п. в. на } \Gamma_c \times (0, T), \quad (10)$$

$$m_0 \xi = m_0 \varphi_{obs} \quad \text{п. в. на } \Gamma_T. \quad (11)$$

Для обобщенной постановки задачи (7)–(10) умножим (7) скалярно на $\tilde{\xi} \in W_{2,T}^1(Q_T)$ и выполним интегрирование по частям с учетом краевых условий. В результате получаем равенство

$$a(\xi, \tilde{\xi}) = F(\tilde{\xi}) + b(U_c, \tilde{\xi}) \quad \forall \tilde{\xi} \in W_{2,T}^1(Q_T), \quad (12)$$

где

$$a(\xi, \tilde{\xi}) \equiv \int_{Q_T} (-\xi_t \tilde{\xi}_t + gH \nabla \xi \nabla \tilde{\xi}) \, d\Omega dt,$$

$$F(\tilde{\xi}) \equiv \int_{Q_T} \mathbf{f} \cdot \nabla \tilde{\xi} \, d\Omega dt + \int_{\Omega} \xi_1 \tilde{\xi}(x, y, 0) \, d\Omega, \quad b(U_c, \tilde{\xi}) \equiv \int_{\Gamma_c T} U_c \tilde{\xi} \, d\Gamma dt.$$

Обобщенная постановка (7)–(10) формулируется следующим образом: найти $\xi \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую (12) и условию $\xi|_{t=0} = \xi_0$ п. в. в Ω . Теперь вводим обобщенную постановку обратной задачи так: найти $\xi \in W_2^1(Q_T)$ и $U_c \in H_c$ такие, что выполнено соотношение (12), условие $\xi|_{t=0} = \xi_0$ п. в. в Ω и дополнительное условие (11).

В последующем изложении задачи типа (7)–(10) понимаются в обобщенной постановке, хотя для наглядности будем часто приводить их классические формы записи вида (7)–(10).

§ 3. Задача оптимального управления

Перейдем к обобщенной постановке задачи (7)–(11), в которой (11) понимается уже в смысле наименьших квадратов: необходимо найти $\xi \in W_2^1(Q_T)$, $U_c \in H_c$, удовлетворяющие условиям (7)–(10) и решающие задачу минимизации функционала J_α :

$$\inf_{U_c \in H_c} J_\alpha(U_c, \xi(U_c)),$$

где $\alpha \geq 0$ и

$$J_\alpha(U_c, \xi(U_c)) \equiv \frac{\alpha}{2} \iint_{\Gamma_T} m_c U_c^2 \, d\Gamma dt + \frac{1}{2} \iint_{\Gamma_T} m_0 (\xi - \varphi_{obs})^2 \, d\Gamma dt. \quad (13)$$

Нетрудно показать, что при $\alpha > 0$ функционал является строго выпуклым и задача минимизации имеет единственное решение. Условие оптимальности $\delta J_\alpha = 0$ приводит к следующему уравнению:

$$\alpha \iint_{\Gamma_T} m_c U_c \delta U_c \, d\Gamma dt + \iint_{\Gamma_T} m_0 (\xi - \varphi_{obs}) \delta \xi \, d\Gamma dt = 0, \quad (14)$$

где $\delta U_c, \delta \xi$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta \xi}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH \nabla \delta \xi) &= 0 \quad \text{в } Q_T, \\ \delta \xi|_{t=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ gH \frac{\partial \delta \xi}{\partial \mathbf{n}} &= m_c \delta U_c \quad \text{на } \Gamma_T. \end{aligned} \quad (15)$$

Преобразуем вид равенства (14). Для этого введем сопряженную задачу вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH \nabla q) &= 0 \quad \text{в } Q_T, \\ q|_{t=T} &= 0, \quad \left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{t=T} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ gH \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} &= m_0(\xi - \varphi_{obs}) \quad \text{на } \Gamma_T. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH \nabla q) \right) \delta \xi \, d\Omega dt \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial t} \delta \xi \Big|_0^T \, d\Omega - \int_{\Omega} q \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} \Big|_0^T \, d\Omega + \iint_{Q_T} q \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \delta \xi}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH \nabla \delta \xi) \right)}_{=0} \, d\Omega dt \\ &\quad - \iint_{\Gamma_T} \underbrace{\left(gH \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} \right)}_{=m_0(\xi - \varphi_{obs})} \delta \xi \, d\Gamma dt + \iint_{\Gamma_T} q \underbrace{\left(gH \frac{\partial \delta \xi}{\partial \mathbf{n}} \right)}_{=m_c \delta U_c} \, d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\iint_{\Gamma_T} m_0(\xi - \varphi_{obs}) \delta \xi \, d\Gamma dt = \iint_{\Gamma_T} q m_c \delta U_c \, d\Gamma dt, \quad (17)$$

и (14) принимает вид

$$\alpha \iint_{\Gamma_T} m_c U_c \delta U_c \, d\Gamma dt + \iint_{\Gamma_T} q m_c \delta U_c \, d\Gamma dt = 0. \quad (18)$$

Поскольку δU_c — независимая вариация, условие оптимальности может быть записано так:

$$\alpha m_c U_c + m_c q = 0 \quad \text{на } \Gamma_T. \quad (19)$$

Теперь мы можем выписать полную систему вариационных уравнений и сформулировать итерационный процесс получения приближенного решения

обобщенной задачи. Система вариационных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH\nabla\xi) &= -\operatorname{div} \mathbf{f} \text{ в } Q_T, \\
\xi|_{t=0} &= \xi_0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \xi_1 \text{ в } \Omega, \\
gH \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} &= (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \text{ на } (\Gamma \setminus \Gamma_c) \times (0, T), \\
gH \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} &= (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + U_c \text{ на } \Gamma_c \times (0, T), \\
\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH\nabla q) &= 0 \text{ в } Q_T, \\
q|_{t=T} &= 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0 \text{ в } \Omega, \\
gH \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} &= m_0(\xi - \varphi_{obs}) \text{ на } \Gamma_T, \\
\alpha m_c U_c + m_c q &= 0 \text{ на } \Gamma_T.
\end{aligned} \tag{20}$$

Прежде чем формулировать итерационный процесс, исследуем обратную задачу на разрешимость.

§ 4. Исследование разрешимости задачи

4.1. Однозначная разрешимость. Перейдем к рассмотрению проблемы однозначной разрешимости задачи (7)–(11).

Предположим, что существуют два решения задачи: $\xi' \neq \xi''$, $U'_c \neq U''_c$. Тогда для $\xi \equiv \xi' - \xi''$, $U_c \equiv U'_c - U''_c$ справедливо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH\nabla\xi) &= 0 \text{ в } Q_T, \\
\xi|_{t=T} &= 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0 \text{ в } \Omega, \\
gH \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} &= m_c U_c \text{ на } \Gamma \times (0, T), \\
\xi &= 0 \text{ на } \Gamma_o \times (0, T).
\end{aligned} \tag{21}$$

В случае $\Gamma_c = \Gamma_o$ мы можем трактовать задачу (21) как смешанную начально-краевую задачу. По теореме (5.1) из [8] получаем, что система (21) имеет единственное решение $\xi = 0$ в классе $W_2^1(Q_T)$, следовательно, U_c также равно нулю на Γ_{cT} .

В случае $\Gamma_c \neq \Gamma_o$ имеем задачу с однородными граничными условиями типа Коши по пространству и времени:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH\nabla\xi) &= 0 \text{ в } Q_T, \\
\xi|_{t=T} &= 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0 \text{ в } \Omega, \\
gH \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} &= \xi = 0 \text{ на } \Gamma_o \times (0, T).
\end{aligned} \tag{22}$$

Исследование однозначной разрешимости данной задачи проведено в работе [9] (см., например, теорему 1.2.1 и следствие 1.2.5 на с. 4–10). Не будем приводить здесь условия этих теорем, однако отметим, что предложенные в них достаточные условия единственности решения задачи (22) (назовем их условиями I) включают слишком «жесткие» требования к границе Γ_o , часто несовместимые с практическими задачами.

4.2. Плотная разрешимость. Перейдем к рассмотрению проблемы плотной разрешимости задачи (7)–(11) (см. [10]).

Как видно из (18), при $\alpha = 0$ условие оптимальности имеет вид $m_c q = 0$ п. в. на Γ_{cT} , где q — решение системы (16). В случае $\Gamma_c = \Gamma_o$ условия оптимальности имеют вид системы

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH\nabla q) = 0 \text{ в } Q_T, \quad (23)$$

$$q|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (24)$$

$$gH \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} = m_o(\xi - \phi_{obs}) \text{ на } \Gamma_o \times (0, T), \quad (25)$$

$$gH \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_o \times (0, T), \quad (26)$$

$$q = 0 \text{ на } \Gamma_o \times (0, T). \quad (27)$$

Данная система имеет единственное, причем нулевое обобщенное решение, следовательно, из условия (25) имеем $m_o(\xi - \phi_{obs}) = 0$ и минимум функционала J_α при $\alpha = 0$ тоже нуль, что и означает плотную разрешимость задачи (7)–(11) (см. [10]).

В случае $\Gamma_c \neq \Gamma_o$ имеем задачу с граничными условиями типа Коши на Γ_c , поэтому для плотной разрешимости необходимо потребовать выполнения дополнительных условий (условия I, см. предыдущий пункт).

Итак, на основании приведенных рассуждений можно сформулировать следующие утверждения.

1. В случае $\Gamma_c = \Gamma_o$ задача (7)–(11) однозначно и плотно разрешима.
2. В случае $\Gamma_c \neq \Gamma_o$ и при выполнении условий I имеем однозначную либо плотную разрешимость.

§ 5. Итерационный алгоритм

Поскольку в силу плотной разрешимости задачи (7)–(11) имеем $\inf J_\alpha = J_* \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, при достаточно малом $\alpha > 0$ можно предположить, что $\xi \cong \xi(\alpha)$, $U_c \cong U_c(\alpha)$ (где $\xi(\alpha)$, $U_c(\alpha)$ — точное решение задачи минимизации функционала J_α), поэтому достаточно построить приближения к $\xi(\alpha)$, $U_c(\alpha)$, например, подходящими итерационными алгоритмами (см. [10]).

Сформулируем метод простой итерации для системы вариационных уравнений (20), который по виду совпадает с методом градиентного спуска для

функционала J_α :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi^k}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH\nabla \xi^k) &= -\operatorname{div} \mathbf{f} \text{ в } Q_T, \\
\xi^k|_{t=0} &= \xi_0, \quad \frac{\partial \xi^k}{\partial t} \Big|_{t=0} = \xi_1 \text{ в } \Omega, \\
gH \frac{\partial \xi^k}{\partial \mathbf{n}} &= (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \text{ на } (\Gamma \setminus \Gamma_c) \times (0, T), \\
gH \frac{\partial \xi^k}{\partial \mathbf{n}} &= (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + U_c^k \text{ на } \Gamma_c \times (0, T), \\
\frac{\partial^2 q^k}{\partial t^2} - \operatorname{div}(gH\nabla q^k) &= 0 \text{ в } Q_T, \\
q^k|_{t=T} &= 0, \quad \frac{\partial q^k}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0 \text{ в } \Omega, \\
gH \frac{\partial q^k}{\partial \mathbf{n}} &= m_0(\xi^k - \varphi_{obs}) \text{ на } \Gamma_T, \\
U_c^{k+1} &= U_c^k - \tau_k(\alpha U_c^k + q^k), \text{ на } \Gamma_c \times (0, T).
\end{aligned} \tag{28}$$

Здесь τ_k — параметр итерационного процесса. От выбора τ_k и параметра регуляризации $\alpha \geq 0$ зависит сходимость приближенных решений $\xi^k(\alpha)$, $U_c^k(\alpha)$ к решениям ξ , U_c задачи (7)–(11). Так, например, из результатов работы [10] следует, что при любом $\alpha > 0$ и достаточно малом $\tau = \tau_k$ итерационный алгоритм (28) сходится.

Заметим также, что согласно теории экстремальных задач параметры итерационного процесса можно выбрать следующим образом [11]:

$$\tau_k \cong \frac{J_\alpha(v^k) - J_*}{\|J'_\alpha(v^k)\|^2},$$

где $\inf J_\alpha = J_*$. Из плотной разрешимости следует $J_* \approx 0$, и можно принять [10]:

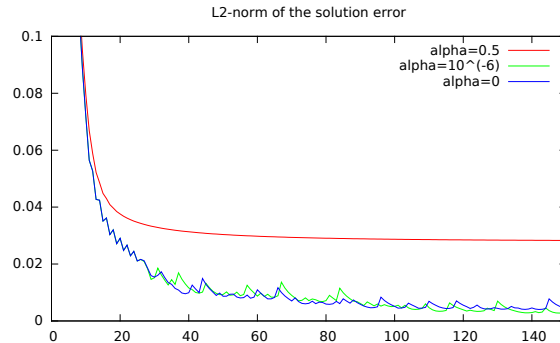
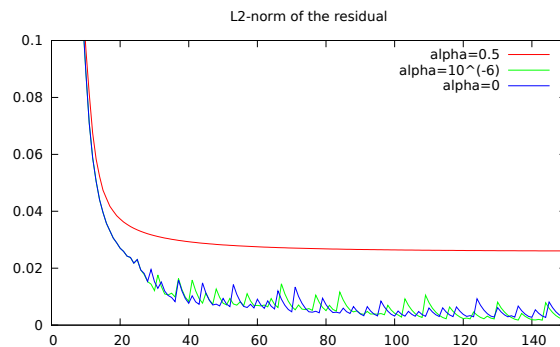
$$\tau_k \cong \frac{J_\alpha(v^k)}{\|J'_\alpha(v^k)\|^2} = \frac{\|m_0(\xi^k - \phi_{obs})\|_{L_2(\Gamma_T)}^2}{4\|m_c q^k\|_{L_2(\Gamma_T)}^2} \tag{29}$$

— оптимальный набор параметров итерационного процесса в данной задаче.

Как показано выше, на каждой итерации необходимо решать прямую и сопряженную задачи. Для численной реализации этих задач можно, к примеру, использовать проекционно-сеточные методы или методы конечных разностей.

§ 5. Численные эксперименты

Приведем результаты реализации итерационного алгоритма (28) применительно к акватории Балтийского моря. В рамках данной работы были проведены две серии экспериментов: первая — на тестовых функциях (расчет в реальной акватории), вторая — на близких к реальным данным по Балтийскому морю. Целью проведения численных экспериментов на тестовых функциях являлось тестирование и оценка эффективности разработанных программ, анализ сходимости итерационного процесса, оценка относительной ошибки полученного решения. Проведение экспериментов с близкими к реальным данными

Рис. 1. Относительная ошибка решения при $t = T$ от числа итераций.Рис. 2. Относительная невязка решения при $t = T$ от числа итераций.

дало возможность оценить эффективность разработанного метода и возможность его практического применения. Во всех проведенных экспериментах в качестве «жидкой» была выбрана граница, проходящая в районе шведского города Треллеборг и отделяющая Северное море от Балтийского. Для решения прямой и сопряженной задач использовался метод конечных разностей (см. [8]). Данные о границе Балтийского моря были представлены в виде «маски» из нулей и единиц, а сама граница аппроксимировалась отрезками, параллельными осям координат.

Для проведения исследовательских испытаний программ в качестве тестовой была выбрана функция $\sin(x/L) \sin(y/L) \sin(t/2T)$, по ней была вычислена правая часть, начальные и граничные условия, далее эта функция и граничная функция на «жидкой» границе считались неизвестными и восстанавливались при помощи приведенного выше итерационного алгоритма. На рис. 1 приведен график зависимости относительной ошибки решения от числа итераций при разных параметрах регуляризации α , а на рис. 2 — норма невязки (иначе — квадратный корень от величины функционала J_α). Как видно из этих рисунков, алгоритм сходится достаточно быстро (за 20 итераций) и монотонно при больших α , однако ошибка решения при этом велика. При меньших параметрах имеет смысл либо завершать итерационный процесс при 40–60 итерациях,

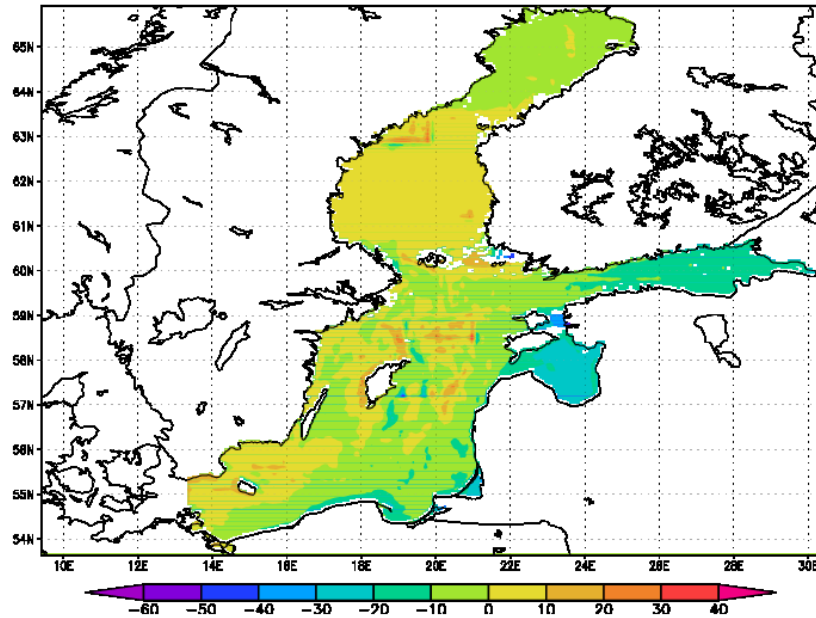
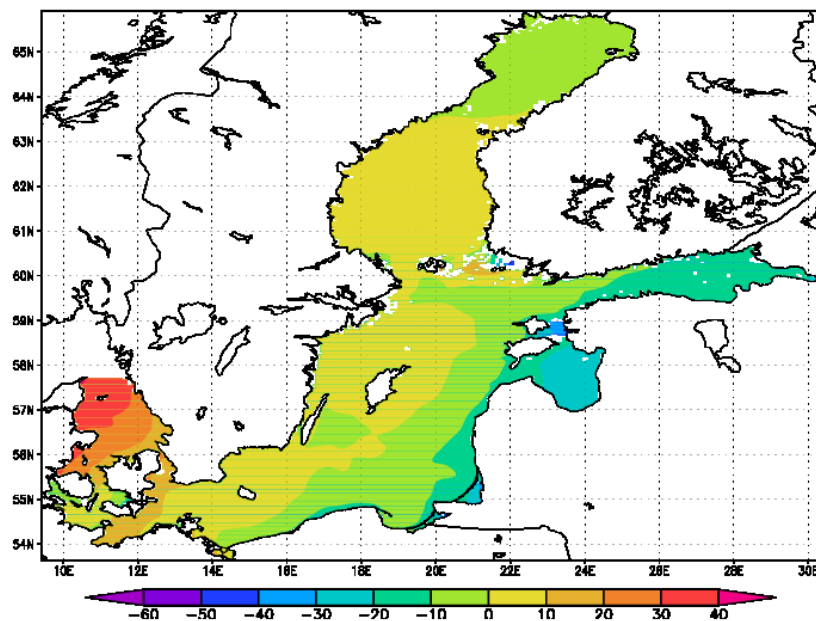
Рис. 3. Уровень (в см) при $t = T$ — после трех итераций.

Рис. 4. Уровень (в см), полученный по результатам расчета модели [12].

либо увеличивать точность решения прямой и сопряженной задач (в частности, уменьшать шаг сетки по пространству и времени). Экспериментально показано, что относительная ошибка полученного решения распределена равномерно

по всей области, следовательно, полученное решение приемлемо воспроизводит характер тестового решения. Результаты показали также, что при малых параметрах регуляризации невязка, как и ошибка решения, может быть уменьшена приблизительно в 10^4 раз.

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы. Во-первых, выбор оптимального параметра τ_k по формуле (29) обеспечивает быструю сходимость итерационного процесса (20 итераций). Во-вторых, выбор параметра регуляризации зависит от точности решения прямой и сопряженной задач (в частности, от шага по времени и пространству).

Приведем результаты моделирования гидродинамики Балтийского моря с учетом «жидких» границ при исходных данных, близких к реальным. Необходимые для экспериментов данные об атмосферных форсингах были взяты с ресурса ERA-Interim, а начальные данные и наблюдения получены из результатов расчетов трехмерной модели гидротермодинамики Балтийского моря, разработанной в ИВМ РАН [12]. В качестве начальных данных были использованы данные за 1 января 2012 года. Также были выбраны следующие параметры итерационного процесса: τ_k по формуле (29), $\alpha = 10^{-3}$. При таком выборе параметров процесс сходится за 3 итерации (т. е. достаточно быстро), что согласуется с теорией, приведенной в [10]. На рис. 3 представлен уровень (в сантиметрах) в финальный момент времени, полученный на последней итерации. Как видно из рисунка, полученные результаты воспроизводят данные из модели (рис. 4) приемлемо. Колебания уровня, изображенные на рис. 3 в центральной части акватории, вызваны большими перепадами глубины Балтийского моря в данной области. Полученная норма невязки решения (норма разности между полученным и модельным уровнем на «жидкой» границе) на последней итерации составила $6 \cdot 10^{-4}$, что позволяет судить о точности предложенных выше алгоритмов решения проблемы уточнения вида граничных условий на «жидких» границах.

Нетрудно заметить, что алгоритмы и подходы, изложенные в настоящей работе, могут быть применены при решении проблем граничных условий на «жидких» границах при рассмотрении циркуляций воды и в других акваториях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. Т. 1.
2. Agoshkov V. I. Investigation of a class of inverse problems on optimal boundaries // Computational Science for the 21-st Century (Ed. by M.-O. Bristeau, G. Etgen and others). Chichester; New York; Toronto: John Wiley and Sons, 1997. P. 589–598.
3. Чернов И. А., Толстикова А. В. Численное моделирование крупномасштабной динамики Белого моря // Тр. Карел. науч. центра РАН. 2014. № 4. С. 137–142.
4. Дементьева Е. В., Каропова Е. Д., Шайдунов В. В. Восстановление граничной функции по данным наблюдений для задачи распространения поверхностных волн в акватории с открытой границей // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 10–20.
5. Agoshkov V. I. Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2005. V. 20, N 1. P. 1–18.
6. Agoshkov V. I. Application of mathematical methods for solving the problem of liquid boundary conditions in hydrodynamics // Numerical Analysis, Scientific Computing, Computer Science, Special Volume of ZAMM (Proc. ICAM-95). Berlin, 1996. P.337–338
7. Вольцингер Н. Е., Пяковский Р. В. Основные океанологические задачи теории мелкой воды. Л.: Гидрометеиздат, 1968.

8. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
9. *Isakov V.* Inverse source problems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996.
10. *Агошков В. И.* Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2003.
11. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
12. *Zalesny V. B., Gusev A. V., Chernobay S. Yu., Aps R., Tamsalu R., Kujala P., Rytönen J.* The Baltic Sea circulation modelling and assessment of marine pollution // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2014. V. 29, N 2. P. 129–138.

Статья поступила 27 августа 2015 г.

Агошков Валерий Иванович
Институт вычислительной математики,
ул. Губкина, 8, Москва 119333
agoshkov@inm.ru

Гребенников Дмитрий Сергеевич, Шелопут Татьяна Олеговна
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Институтский пер., 9, г. Долгопрудный Московской обл. 141700
dmitry.ew@gmail.com, sheloput@phystech.edu

УДК 517.958:539.3(6)+517.968.72+517.956.3

ЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
РЕШЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ТЕЧЕНИЯ
ПОЛИМЕРОВ В БЕСКОНЕЧНОМ КАНАЛЕ
А. М. Блохин, Д. Л. Ткачев, А. В. Егитов

Аннотация. Изучается новая реологическая модель, описывающая течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости. Доказана линейная неустойчивость (по Ляпунову) аналога течения Пуазейля для системы уравнений Навье — Стокса в плоском бесконечном канале.

Ключевые слова: несжимаемая вязкоупругая полимерная жидкость, реологическое соотношение, броуновская частица, гантель, решение типа Пуазейля, корректность смешанной проблемы, линейная неустойчивость.

Blokhin A. M., Tkachev D. L., Yegitov A. V.

Abstract: We study new rheological model describing the flow of incompressible viscoelastic polymer fluid. The theorem about linear instability (by Lyapunov) of Poiseuille flow analogue for Navier - Stocks equation system was proven in infinite plane channel.

Keywords: incompressible viscoelastic polymer fluid, rheological correlation, Brownian particle, dumbbell, Poiseuille type solutions, correctness of mixed problem, linear instability.

1. Введение

В работе изучается новая реологическая модель, которая с приемлемой точностью учитывает нелинейные эффекты, возникающие при рассмотрении движения полимерной среды как суспензии невзаимодействующих упругих гантелей [1]. Каждая из гантелей представляет собой две броуновские частицы, связанные упругой силой и движущиеся в анизотропной жидкости, образованной растворителем и другими гантелями.

Эта модель, основное звено которой — новое реологическое соотношение, устанавливающее связь между кинематическими характеристиками потока и внутренними термодинамическими параметрами, является модификацией известной модели Покровского — Виноградова [2, 3]. По мнению авторов модели она продемонстрировала свою высокую эффективность при численном исследовании течений полимеров в областях со сложной геометрией [4, 5].

В работе рассмотрен вопрос о линейной устойчивости экспериментально наблюдаемого аналога течения Пуазейля для системы уравнений Навье — Стокса.

2. Постановка задачи. Вспомогательные сведения. Формулировка основных результатов

В [1] изложена новая математическая модель для описания течений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости. В плоском случае нестационарные течения полимерных сред описываются с помощью следующей реологической модели (предварительно проведена процедура обезразмеривания):

$$u_x + v_y = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{du}{dt} + p_x = \frac{1}{Re} \{ (a_{11})_x + (a_{12})_y \}, \quad (2.2)$$

$$\frac{dv}{dt} + p_y = \frac{1}{Re} \{ (a_{12})_x + (a_{22})_y \}, \quad (2.3)$$

$$\frac{da_{11}}{dt} - 2A_1 u_x - 2a_{12} u_y + K_I a_{11} = -\beta (a_{11}^2 + a_{22}^2), \quad (2.4)$$

$$\frac{da_{12}}{dt} - A_1 v_x - A_2 u_y + \tilde{K}_I a_{12} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{da_{22}}{dt} - 2A_2 v_y - 2a_{12} v_x + K_I a_{22} = -\beta (a_{12}^2 + a_{22}^2). \quad (2.6)$$

Здесь t — время, u, v — компоненты вектора скорости в декартовой системе координат (x, y) , p — гидростатическое давление, a_{ij} — симметричный тензор анизотропии второго ранга, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u, \nabla)$ — субстанциональная производная.

Остальные величины определяются следующим образом: $I = a_{11} + a_{22}$ — первый инвариант тензора анизотропии, $\bar{k} = k - \beta$, k, β — скалярные феноменологические параметры реологической модели ($0 < \beta < 1$), η_0, τ_0 — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации,

$$\begin{aligned} A_1 &= a_{11} + \frac{1}{W}, & A_2 &= a_{22} + \frac{1}{W}, \\ K_I &= \frac{1}{W} + \frac{\bar{k}}{3} I, & \tilde{K}_I &= \frac{1}{W} + \frac{\hat{k}}{3} I = K_I + \beta I, \\ & & \hat{k} &= k + 2\beta = \bar{k} + 3\beta, \\ Re &= \frac{\rho u_H l}{\eta_0} \text{ — число Рейнольдса,} \end{aligned}$$

ρ ($= \text{const}$) — плотность среды, u_H — характерная скорость, l — характерная длина, $W = \frac{\tau_0 u_H}{\eta}$ — число Вейсенберга (см. [5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В формулировке реологической модели (2.1)–(2.6) участвуют числа Рейнольдса и Вейсенберга, а также феноменологические параметры k и β , определяющие течение физического эксперимента. Как следует из [6], наиболее адекватным экспериментам с полимерными жидкостями является соотношение $k = 1.2\beta$.

Линейная система уравнений, которая возникает в результате линеаризации системы (2.1)–(2.6) относительно выбранного стационарного решения (в дальнейшем его компоненты снабжены значком « $\hat{}$ ») в случае, когда жидкость движется в бесконечном плоском канале, получена в [7].

В векторном виде она формулируется следующим образом. В области

$$G = \{(t, x, y) \mid t > 0, (x, y) \in \Pi = \{(x, y) \mid |x| < \infty, 0 < y < 1\}\}$$

требуется найти решение системы уравнений

$$U_t + \widehat{B}U_x + \widehat{C}U_y + \widehat{R}U + F = 0, \quad (2.7)$$

$$\Delta\Omega = \frac{1}{Re}\{\sigma_{xx} + 2(a_{12})_{xy}\} - 2\widehat{\omega}v_x. \quad (2.8)$$

Здесь $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ — неизвестная вектор-функция, $\sigma = a_{11} - a_{22}$, $\Omega = p - \frac{1}{Re}a_{22}$,

матрицы $\widehat{B} = B(\widehat{U})$, $\widehat{C} = C(\widehat{U})$, $\widehat{R} = R(\widehat{U})$ выписываются с помощью компонент стационарного решения $\widehat{U}(y)$:

$$\widehat{U}(y) = \begin{pmatrix} \hat{u}(y) \\ 0 \\ \hat{a}_{11}(y) \\ \hat{a}_{12}(y) \\ \hat{a}_{22}(y) \end{pmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u} & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 \\ -2\widehat{A}_1 & 0 & \hat{u} & 0 & 0 \\ 0 & -\widehat{A}_1 & 0 & \hat{u} & 0 \\ 0 & -2\hat{a}_{12} & 0 & 0 & \hat{u} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Re} \\ -2\hat{a}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\widehat{A}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\widehat{A}_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{R} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a}'_{11} & R_{33} & R_{34} & R_{35} \\ 0 & \hat{a}'_{12} & R_{43} & R_{44} & R_{45} \\ 0 & \hat{a}'_{22} & R_{53} & R_{54} & R_{55} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

где

$$\widehat{A}_1 = \hat{a}_{11} + \frac{1}{W}, \quad \widehat{A}_2 = \hat{a}_{22} + \frac{1}{W},$$

$$R_{33} = \frac{1}{W} + \frac{\bar{k}}{3}\hat{I} + \frac{k+5\beta}{3}\hat{a}_{11}, \quad R_{34} = -2(\widehat{\omega} - \beta\hat{a}_{12}), \quad \widehat{\omega} = \hat{u}_y, \quad R_{35} = \frac{\bar{k}}{3}\hat{a}_{11},$$

$$R_{43} = \frac{\hat{k}}{3}\hat{a}_{12}, \quad R_{44} = \frac{1}{W} + \frac{\hat{k}}{3}\hat{I}, \quad R_{45} = -\widehat{\omega} + \frac{\hat{k}}{3}\hat{a}_{12},$$

$$R_{53} = \frac{\bar{k}}{3}\hat{a}_{22}, \quad R_{54} = 2\beta\hat{a}_{12}, \quad R_{55} = \frac{1}{W} + \frac{\bar{k}}{3}\hat{I} + \frac{k+5\beta}{3}\hat{a}_{22},$$

$F = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Δ — символ оператора Лапласа.

Будем предполагать, что на границах области G выполнены краевые условия

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = u|_{y=1} = v|_{y=1} = 0; \quad (2.10)$$

$$\Omega_y = \frac{1}{Re}(a_{12})_x \quad \text{при } y = 0, 1, \quad (2.11)$$

$$\|U(t, x, y)\| = (U, U)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad p(t, x, y) \rightarrow 0, \quad p_x(t, x, y) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

и заданы начальные данные

$$U|_{t=0} = U_0(x, y), \quad p|_{t=0} = p_0(x, y), \quad (2.13)$$

при этом начальные данные удовлетворяют уравнению (2.8) и условиям (2.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В качестве основного решения можно рассматривать, например, решение, аналогичное решению Пуазейля для системы уравнений Навье — Стокса (см. [4, 8, 9]), которое симметрично относительно оси канала $y = \frac{1}{2}$ (при этом $\hat{p}(x, y) = \frac{1}{Re} \hat{a}_{22}(y) + \hat{p}_0 = \hat{A}x$, \hat{p}_0 — значение давления на оси канала, \hat{A} — параметр, связанный с безразмерным перепадом давления на отрезке h).

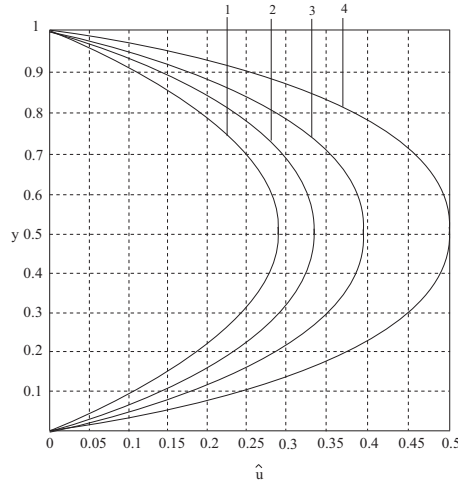


Рис. 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В [7] доказано, что система (2.7) при известном давлении $p(t, x, y)$ t -гиперболическая [10], если $\hat{A}_1 > 0$, $\hat{A}_2 > 0$, $\hat{A}_1 \hat{A}_2 - \hat{a}_{12}^2 > 0$ (см. представления (2.9) матриц \hat{B} и \hat{C}). Эти неравенства, в частности, справедливы, когда в качестве основного решения выбирается «решение Пуазейля» (при $k = \beta$ этот факт проверяется непосредственно, а при $k \neq \beta$ численным образом). Информация о корнях характеристического уравнения играет существенную роль при постановке смешанных задач для t -гиперболических систем.

В силу геометрии области Π система уравнений (2.7) и уравнение Пуассона (2.8) допускают преобразование Фурье по переменной x . Поэтому будем рассматривать задачу (2.7), (2.8), (2.10)–(2.13), предполагая, что $u, v \in D'_{+,a}(P'_x(R), C^1_y[0, 1])$, давление p и компоненты тензора анизотропии a_{11}, a_{12}, a_{22} из класса $D_{+,a}(P'_x(R), C^2_y[0, 1])$, где $D'_{+,a}(P'_x(R), C^1_y[0, 1])$, $D_{+,a}(P'_x(R), C^2_y[0, 1])$ — пространства обобщенных функций $u(t, x, y)$, обращающихся в нуль при $t < 0$, $u(t, x, y)e^{-\sigma t} \in P_{+,t}$ при всех $\sigma > a$, $P'_+ = D'_+ \cap P$, D'_+ — множество обобщенных функций из $D'(R)$, равных нулю при $t < 0$, P — пространство функций медленного роста [11, 12], являющихся обобщенными функциями медленного роста по

переменным x и принадлежащих пространствам $C_y^1[0, 1]$, $C_y^2[0, 1]$ соответственно по переменной y . Индекс при обозначении пространства, например, $P_x(R)$, указывает на действующую переменную.

Таким образом, смешанная задача (2.7), (2.8), (2.10)–(2.13) понимается как краевая задача для обобщенных функций по переменным t , y и x , при этом начальные данные (2.13) выполняются в смысле предельного перехода при $t \rightarrow +0$ [11, 12].

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Смешанная задача (3.4)–(3.6) имеет единственное решение из $D'_{+,a}(C_y[0, 1])$ при любом значении вещественного параметра ξ (ξ — двойственная переменная к переменной x).*

Теорема 2. *При $|\xi| \rightarrow \infty$ решение смешанной задачи (3.4)–(3.6) выходит за пределы пространства $D'_{+,a}(C_y[0, 1])$ для любого положительного числа a . Таким образом, задача поставлена некорректно в пространстве обобщенных функций $D_{+,a}$.*

3. Формулировка одномерной задачи с параметром. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим уравнение (2.8) вместе с граничными условиями (2.11), (2.12) и применим к этой проблеме преобразование Фурье по переменной x . Тогда получим следующую краевую задачу:

$$\tilde{\Omega}_{yy} - \xi^2 \tilde{\Omega} = -\xi^2 \frac{1}{Re} (\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22}) - \frac{2i\xi}{Re} (\tilde{a}_{12})_y + 2i\xi \hat{\omega} \tilde{v}, \quad 0 < y < 1, \quad (3.1)$$

$$\tilde{\Omega}_y = -\frac{i\xi}{Re} \tilde{a}_{12} \quad \text{при } y = 0, 1 \quad (3.2)$$

(предполагается, что основное стационарное решение зависит только от переменной y , в дальнейшем символ « $\tilde{}$ », использованный для обозначения Фурье-образов функций, будет опущен).

Функция Грина краевой задачи (3.1), (3.2) (ξ — вещественный параметр, $\xi \neq 0$) имеет вид

$$G(y, \eta) = \begin{cases} -\frac{1}{2\xi(e^{2\xi}-1)}(e^{\xi\eta} + e^{-\xi\eta}e^{2\xi})(e^{\xi y} + e^{-\xi y}), & 0 \leq y \leq \eta, \\ -\frac{1}{2\xi(e^{2\xi}-1)}(e^{\xi\eta} + e^{-\xi\eta})(e^{\xi y} + e^{-\xi y}e^{2\xi}), & \eta < y \leq 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Применив преобразование Фурье, можно найти решение уравнения (3.1), подставить его в правую часть F и получить следующую систему:

$$U_t + \tilde{C}U_y + (-i\xi\tilde{B} + \hat{R})U + F = 0, \quad 0 < y < 1, \quad (3.4)$$

где

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\hat{a}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{A}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\hat{A}_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 & \frac{1}{Re}a_{22} \\ 0 & \hat{u} & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 \\ -2\hat{A}_1 & 0 & \hat{u} & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{A}_1 & 0 & \hat{u} & 0 \\ 0 & -2\hat{a}_{12} & 0 & 0 & \hat{u} \end{pmatrix},$$

компоненты $-i\xi p$ и p_y вектора $F(t, \xi, y) = \begin{pmatrix} -i\xi p \\ p_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, находятся с использовани-

ем функции Грина (3.3).

Кроме того, компоненты скорости u, v должны удовлетворять краевым условиям

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = u|_{y=1} = v|_{y=1} = 0, \quad (3.5)$$

а в целом для неизвестной вектор-функции $U(t, x, y)$ справедливо начальное условие

$$U|_{t=0} = U_0(\xi, y). \quad (3.6)$$

Упростим вид системы (3.4), приведя матрицу \tilde{C} к верхней жордановой форме [13]. Для этого заметим, что собственные числа матрицы \tilde{C} таковы:

$$\lambda_{1,2,3} = 0, \quad \lambda_{4,5} = \pm \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{Re}} \quad (3.7)$$

(предполагается, что выполнено условие t -гиперболичности системы (2.7), а значит, как отмечено в замечании 3, в частности, $\hat{A}_2 > 0$ на отрезке $[0, 1]$).

Непосредственные расчеты показывают, что жорданова форма матрицы \tilde{C} имеет следующий вид:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\hat{A}_2}{Re}} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Сделаем замену неизвестной вектор-функции

$$U = TZ, \quad (3.9)$$

систему (3.4) можно эквивалентным образом преобразовать, получая в качестве коэффициента при производной Z_y блочно-диагональную матрицу K (см. представление (3.8)):

$$Z_t + KZ_y - i\xi LZ + [T^{-1}\tilde{C}T_y + M]Z + G = 0, \quad t > 0, \quad 0 < y < 1, \quad (3.10)$$

где матрицы L, M зависят только от стационарного решения, а вектор $G =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \end{pmatrix}$ имеет, например, компоненту

$$\begin{aligned} g_3 = & -2\widehat{A}_2 \left\{ \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi(y-1))}{\operatorname{sh} \xi} \int_0^y \operatorname{ch}(\xi\eta) \left(\frac{\xi}{\operatorname{Re}} \left(Z_1 - Z_2 + 2\frac{\widehat{a}_{12}}{\widehat{A}_2} Z_4 + 2\frac{\widehat{a}_{12}}{\widehat{A}_2} Z_5 \right) + \frac{i\widehat{\omega}}{\widehat{A}_2} Z_3 \right) d\eta \right. \\ & \left. + \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi y)}{\operatorname{sh} \xi} \int_y^1 \operatorname{ch}(\xi(\eta-1)) \left(\frac{\xi}{\operatorname{Re}} \left(Z_1 - Z_2 + 2\frac{\widehat{a}_{12}}{\widehat{A}_2} Z_4 + 2\frac{\widehat{a}_{12}}{\widehat{A}_2} Z_5 \right) + \frac{i\widehat{\omega}}{\widehat{A}_2} Z_3 \right) d\eta \right\} \\ & + \frac{2\widehat{A}_2}{\operatorname{Re}} \frac{i\xi}{\operatorname{sh} \xi} [(Z_4(t, \xi, 0) + Z_5(t, \xi, 0)) \operatorname{sh}(\xi(y-1)) - (Z_4(t, \xi, 1) + Z_5(t, \xi, 1)) \operatorname{sh}(\xi y)]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

При этом граничные условия (3.5) преобразуются так:

$$\begin{cases} Z_3(t, \xi, 0) = Z_3(t, \xi, 1) = 0, \\ Z_4(t, \xi, 0) = Z_5(t, \xi, 0), \\ Z_4(t, \xi, 1) = Z_5(t, \xi, 1), \end{cases} \quad (3.12)$$

а начальное условие (3.6) для вектора $U(t, \xi, y)$ меняет свой вид:

$$Z|_{t=0} = T^{-1}U_0 = Z_0(\xi, y). \quad (3.13)$$

Исследуем смешанную задачу (3.10), (3.12), (3.13). Применяя технику преобразований Лапласа и используя вид матрицы K , компоненты Z_1 и Z_2 можно выразить через Z_3 , Z_4 , Z_5 .

Для функции $Z_3(t, \xi, y)$ в силу (3.10) можно выписать интегральное уравнение

$$Z_3(t, \xi, y) = e^{i\xi\hat{u}(t)} Z_{30}(\xi, y) + \int_0^t e^{i\xi\hat{u}(t-\tau)} \left[\frac{2\widehat{A}_2}{\operatorname{Re}} i\xi Z_4 + \frac{2\widehat{A}_2}{\operatorname{Re}} i\xi Z_5 - g_3 \right] d\tau, \quad (3.14)$$

при этом из (3.11) следует, что функция $g_3(t, \xi, y)$ зависит от компонент $Z_3(t, \xi, y)$, $Z_4(t, \xi, y)$ и $Z_5(t, \xi, y)$ (учитываются возможность интегрирования по частям в интеграле от функции $\frac{\partial Z_3}{\partial y}$ по переменной η и первые два граничных соотношения в (3.12)).

Применяя метод последовательных приближений при известных граничных значениях $Z_4(t, \xi, 0)$ и $Z_5(t, \xi, 1)$, из уравнения (3.15) можно однозначно найти $Z_3(t, \xi, y)$, выражая эту функцию через компоненты $Z_4(t, \xi, y)$, $Z_5(t, \xi, y)$.

Таким образом, решение задачи (3.10), (3.12), (3.13) сводится к поиску двух компонент $Z_4(t, \xi, y)$, $Z_5(t, \xi, y)$, при этом начальные данные $Z_{40}(t, \xi, y)$, $Z_{50}(t, \xi, y)$ известны, а граничные значения $Z_4(t, \xi, 0)$ и $Z_5(t, \xi, 1)$ требуется определить.

Допустим, что упомянутые граничные значения также известны. Тогда, принимая во внимание структуру матрицы K (см. представление (3.8)), интегрируя вдоль характеристик два последних уравнения системы (3.10) и вновь

применяя метод последовательных приближений, однозначно определим неизвестные функции $Z_4(t, \xi, y)$, $Z_5(t, \xi, y)$, двигаясь «по слоям» в полуполосе $t > 0$, $0 \leq y \leq 1$ [10].

Следовательно, для нахождения функций $Z_4(t, \xi, y)$, $Z_5(t, \xi, y)$ достаточно знать граничные условия $Z_4(t, \xi, 0)$ и $Z_5(t, \xi, 1)$. Предположим, что выполнен аналог условий согласования:

$$Z_{30}(\xi, 0) = Z_{30}(\xi, 1) = 0 \quad (3.15)$$

(см. первые два соотношения в (3.12)).

Обратимся вновь к интегральному уравнению (3.14) и положим сначала $y = 0$, а затем $y = 1$. Учитывая равенства (3.15), получим два соотношения:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{i\xi\hat{u}(0)(t-\tau)} \frac{8\hat{A}_2}{Re} i\xi Z_4(\tau, \xi, 0) d\tau &= 0, \\ \int_0^t e^{i\xi\hat{u}(1)(t-\tau)} \frac{8\hat{A}_2}{Re} i\xi Z_4(\tau, \xi, 1) d\tau &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

из которых, очевидно, следует, что

$$Z_4(t, \xi, 0) = Z_5(t, \xi, 0) = 0, \quad Z_4(t, \xi, 1) = Z_5(t, \xi, 1) = 0.$$

Таким образом, все компоненты неизвестной вектор-функции $U(t, \xi, y)$ найдены, при этом ξ — произвольный вещественный параметр. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Выполнение соотношений (3.15) не является необходимым условием однозначной разрешимости задачи (3.4)–(3.6). Они приняты для простоты изложения. В общем случае переход к граничным значениям в уравнении (3.14) приводит к системе интегральных уравнений Вольтерра первого рода, которая однозначно разрешима [9].

4. Доказательство теоремы 2

Выпишем представление для Z_3 :

$$\begin{aligned} & Z_{3t} - i\xi\hat{u}Z_3 - i\xi\frac{2\hat{A}_2}{Re}Z_4 - i\xi\frac{2\hat{A}_2}{Re}Z_5 - 2\hat{A}_2 \left(\frac{\xi \operatorname{sh}(\xi(y-1))}{\operatorname{sh} \xi} \int_0^y \left\{ \operatorname{ch}(\xi\eta) \frac{\xi}{Re} \right. \right. \\ & \times \left[- (P_1 + L_1) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} + (P_2 + L_2) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)} \right] - \frac{\xi}{Re} \left(\operatorname{ch}(\xi\eta) \right. \\ & \times \left\{ \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) \frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{K_1}{\sqrt{D}} \right] \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} - \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) \frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{K_2}{\sqrt{D}} \right] \right. \\ & \left. \left. \times \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)} \right] \right\} \left. \right) \left. \right) Z_3(\tau, \xi, \eta) d\tau d\eta - \frac{\xi^2}{Re} \left\{ \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) \frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{K_1}{\sqrt{D}} \right] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} - \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) \frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{K_2}{\sqrt{D}} \right] \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)} \Bigg\} Z_3(\tau, \xi, y) d\tau \\
& \quad + \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi(y-1))}{\operatorname{sh} \xi} \int_0^y \operatorname{ch}(\xi\eta) \frac{i\omega}{\hat{A}_2} Z_3 d\eta + \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi(y-1))}{\operatorname{sh} \xi} \left[\int_0^y \left\{ \operatorname{ch}(\xi\eta) \frac{\xi}{Re} \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left. \left[(M_1 + G_1) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} - (M_2 + G_2) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)} \right] \right\} Z_4(\tau, \xi, \eta) d\tau d\eta \right. \\
& \quad \left. + \int_0^y \left\{ \operatorname{ch}(\xi\eta) \frac{\xi}{Re} \left[(K_1 + E_1) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} - (K_2 + E_2) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)} \right] \right\} \right. \\
& \quad \left. \times Z_5(\tau, \xi, \eta) d\tau d\eta \right] - \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi(y-1))}{\operatorname{sh} \xi} \left\{ \int_0^y \left\{ \operatorname{ch}(\xi\eta) \frac{\xi}{Re} \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) \frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{K_1}{\sqrt{D}} \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)t} - \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) \frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{K_2}{\sqrt{D}} \right] e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)t} \right\} Z_{20}(\xi, \eta) d\eta \right\} + \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi(y-1))}{\operatorname{sh} \xi} \\
& \quad \times \int_0^y \left\{ \operatorname{ch}(\xi\eta) \frac{\xi}{Re} \left\{ \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) R_{53} \frac{1}{K_1 \sqrt{D}} + \frac{1}{\sqrt{D}} \right] e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)t} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) R_{53} \frac{1}{K_2 \sqrt{D}} + \frac{1}{\sqrt{D}} \right] e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)t} \right\} Z_{10}(\xi, \eta) \right\} d\eta + \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi(y-1))}{\operatorname{sh} \xi} \\
& \quad \times \int_0^y \operatorname{ch}(\xi\eta) \left(2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} Z_4 + 2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} Z_5 \right) d\eta + \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi y)}{\operatorname{sh} \xi} \int_y^1 \left\{ \operatorname{ch}(\xi(\eta-1)) \frac{\xi}{Re} \left[-(P_1 + L_1) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} + (P_2 + L_2) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)} \right] - \frac{\xi}{Re} \left(\operatorname{ch}(\xi(\eta-1)) \right) \right. \\
& \quad \left. \times \left\{ \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) \frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{K_1}{\sqrt{D}} \right] \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} - \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) \frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{K_2}{\sqrt{D}} \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)} \right\} \right\} Z_3(\tau, \xi, \eta) d\tau d\eta + \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi y)}{\operatorname{sh} \xi} \int_y^1 \operatorname{ch}(\xi(\eta-1)) \frac{i\hat{\omega}}{\hat{A}_2} Z_3(t, \xi, \eta) d\eta \\
& \quad + \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi y)}{\operatorname{sh} \xi} \left[\int_0^y \left\{ \operatorname{ch}(\xi(\eta-1)) \frac{\xi}{Re} \left[(M_1 + G_1) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} - (M_2 + G_2) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)} \right] \right\} Z_4(\tau, \xi, \eta) d\tau d\eta + \int_y^1 \left\{ \operatorname{ch}(\xi(\eta-1)) \frac{\xi}{Re} \left[(K_1 + E_1) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (K_2 + E_2) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)} \right] \right\} Z_5(\tau, \xi, \eta) d\tau d\eta \right] - \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi y)}{\operatorname{sh} \xi} \int_y^1 \operatorname{ch}(\xi(\eta-1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) \frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{K_1}{\sqrt{D}} \right] e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)t} - \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) \frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{K_2}{\sqrt{D}} \right] \right. \\
 & \quad \times e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)t} \left. \right\} Z_{20}(\xi, \eta) d\eta + \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi y)}{\operatorname{sh} \xi} \int_y^1 \operatorname{ch}(\xi(\eta-1)) \frac{\xi}{\operatorname{Re}} \left\{ \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) \right. \right. \\
 & \times R_{53} \frac{1}{K_1 \sqrt{D}} + \frac{1}{\sqrt{D}} \left. \right] e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)t} - \left[\left(R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{45} \right) R_{53} \frac{1}{K_2 \sqrt{D}} + \frac{1}{\sqrt{D}} \right] e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)t} \left. \right\} \\
 & \quad \times Z_{10}(\xi, \eta) d\eta + \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi y)}{\operatorname{sh} \xi} \int_0^y \operatorname{ch}(\xi(\eta-1)) \left(2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} Z_4 + 2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} Z_5 \right) d\eta. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Здесь $P_1, P_2, M_1, M_2, G_1, G_2, E_1, E_2, K_1, K_2, L_1, L_2$ — коэффициенты, зависящие только от стационарного решения. Рассмотрим часть интегралов, связанных с компонентой $Z_3(t, \xi, y)$. А именно,

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi(y-1))}{\operatorname{sh} \xi} \int_0^y \left\{ \operatorname{ch}(\xi\eta) \frac{\xi}{\operatorname{Re}} \left[- (P_1 + L_1) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} \right. \right. \\
 & \left. \left. + (P_2 + L_2) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} \right] \right\} Z_3(\tau, \xi, \eta) d\tau d\eta + \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi y)}{\operatorname{sh} \xi} \int_y^1 \left\{ \operatorname{ch}(\xi(\eta-1)) \frac{\xi}{\operatorname{Re}} \right. \\
 & \left. \times \left[- (P_1 + L_1) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} + (P_2 + L_2) \int_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} \right] \right\} Z_3(\tau, \xi, \eta) d\tau d\eta. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Используем формулу Тейлора, разлагая подынтегральные функции в точке y . Тогда получим

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \int_0^t \left\{ \Gamma'(y, t-\tau) \frac{\operatorname{sh} \xi - \operatorname{sh}(\xi y) - \operatorname{sh}(\xi(1-y))}{\operatorname{sh} \xi} \right. \\
 & \quad \left. + \Gamma'''(y, t-\tau) \frac{\operatorname{sh} \xi - \operatorname{sh}(\xi y) - \operatorname{sh}(\xi(1-y))}{\operatorname{sh} \xi} \frac{1}{\xi^2} \right. \\
 & \quad \left. + \Gamma^V(y, t-\tau) \frac{\operatorname{sh} \xi - \operatorname{sh}(\xi y) - \operatorname{sh}(\xi(1-y))}{\operatorname{sh} \xi} \frac{1}{\xi^4} + \dots \right\} Z_3(\tau, \xi, y) d\tau \\
 & \quad + \int_0^t \left\{ \Gamma(y, t-\tau) \frac{\operatorname{sh} \xi - \operatorname{sh}(\xi y) - \operatorname{sh}(\xi(1-y))}{\operatorname{sh} \xi} \right. \\
 & \quad \left. + \Gamma''(y, t-\tau) \frac{\operatorname{sh} \xi - \operatorname{sh}(\xi y) - \operatorname{sh}(\xi(1-y))}{\operatorname{sh} \xi} \frac{1}{\xi^2} \right. \\
 & \quad \left. + \Gamma^{IV}(y, t-\tau) \frac{\operatorname{sh} \xi - \operatorname{sh}(\xi y) - \operatorname{sh}(\xi(1-y))}{\operatorname{sh} \xi} \frac{1}{\xi^4} + \dots \right\} Z_{3y}(\tau, \xi, y) d\tau \\
 & \quad + \int_0^t \left\{ \Gamma'(y, t-\tau) \frac{\operatorname{sh} \xi - \operatorname{sh}(\xi y) - \operatorname{sh}(\xi(1-y))}{\operatorname{sh} \xi} \frac{1}{\xi^2} + \dots \right\} Z_{3yy}(\tau, \xi, y) d\tau + \dots, \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

где

$$\Gamma(y, t-\tau) = \frac{1}{\operatorname{Re}} \left[- (P_1 + L_1) e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} + (P_2 + L_2) e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)} \right], \quad (4.4)$$

а производные от этой функции берутся по переменной y .

Заметим, что в (4.4) опущены слагаемые, которые экспоненциально убывают при $|\xi| \rightarrow \infty$, т. е. слагаемые вида

$$\frac{\operatorname{sh}(\xi(y-1))}{\operatorname{sh} \xi} y + \frac{\operatorname{sh}(\xi y)}{\operatorname{sh} \xi} (1-y), \quad 0 < y < 1.$$

Действуя аналогичным образом с остальными интегралами, получим следующее спектральное уравнение:

$$\begin{aligned} & s - i\xi\hat{u} - 2\hat{A}_2 \left\{ \left\{ \left[- (P_1 + L_1)' \frac{1}{s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_1} + (P_2 + L_2)' \frac{1}{s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_2} \right. \right. \right. \\ & - (P_1 + L_1) \frac{i\xi\hat{u}'(y) + \lambda_1'}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_1)^2} + (P_2 + L_2) \frac{i\xi\hat{u}'(y) + \lambda_2'}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_2)^2} \left. \left. \left. + \frac{1}{\xi^2} \left[- \frac{(P_1 + L_1)'''}{s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_1} \right. \right. \right. \\ & + \frac{(P_2 + L_2)'''}{s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_2} - 3(P_1 + L_1)'' \frac{i\xi\hat{u}'(y) + \lambda_1'}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_1)^2} + 3(P_2 + L_2)'' \frac{i\xi\hat{u}'(y) + \lambda_2'}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_2)^2} \right. \\ & - 3(P_1 + L_1)' \frac{i\xi\hat{u}''(y) + \lambda_1''}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_1)^2} + 3(P_2 + L_2)' \frac{i\xi\hat{u}''(y) + \lambda_2''}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_2)^2} \\ & - \frac{(P_1 + L_1)(i\xi\hat{u}'''' + \lambda_1''''')}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_1)^2} + \frac{(P_2 + L_2)(i\xi\hat{u}'''' + \lambda_2''''')}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_2)^2} - 6 \frac{(P_1 + L_1)(i\xi\hat{u}' + \lambda_1')(i\xi\hat{u}'' + \lambda_1'')}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_1)^3} \\ & + 6 \frac{(P_2 + L_2)(i\xi\hat{u}' + \lambda_2')(i\xi\hat{u}'' + \lambda_2'')}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_2)^3} - 6 \frac{(P_1 + L_1)'(i\xi\hat{u}' + \lambda_1')^2}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_1)^3} \\ & \left. \left. \left. + 6 \frac{(P_2 + L_2)'(i\xi\hat{u}' + \lambda_2')^2}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_2)^3} - 6 \frac{(P_1 + L_1)(i\xi\hat{u}' + \lambda_1')^3}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_1)^4} + 6 \frac{(P_2 + L_2)(i\xi\hat{u}' + \lambda_2')^3}{(s - i\xi\hat{u}(y) - \lambda_2)^4} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\xi^4} [\hat{\Gamma}^V(y, s) + \dots] + i \left[\left(\frac{\hat{\omega}}{\hat{A}_2} \right)' \frac{1}{\xi} + \left(\frac{\hat{\omega}}{\hat{A}_2} \right)''' \frac{1}{\xi^3} + \dots \right] \right\} \right\} = 0. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Разлагая дроби $1/(s - i\xi\hat{u} - \lambda_1)^k$, $1/(s - i\xi\hat{u} - \lambda_2)^k$, $k = 1, 2, \dots$, при $|\xi| \rightarrow \infty$ по степеням дроби $1/(s - i\xi\hat{u})$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, можно получить формальное асимптотическое разложение для корней уравнений (4.5).

Метод неопределенных коэффициентов позволяет получить разложение корней уравнения (3.14) по степеням $\xi^{\frac{1}{3}}$ при $|\xi| \rightarrow \infty$:

$$s = i\xi\hat{u} + \sqrt[3]{Q(y)}\xi^{\frac{2}{3}} + R(y)\xi^{\frac{1}{3}} + \dots \quad (4.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Основной момент, связанный с разложением (4.6), в следующем: при $|\xi| \rightarrow \infty$ для хотя бы одного из корней выполнено свойство $\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty$.

Теперь, дифференцируя выражения для функции Z_3 по переменной y , получаем интегральное уравнение для нахождения функции $Z_{3y}(t, \xi, y)$ через производные более высокого порядка Z_{3yy}, Z_{3yuy}, \dots , через компоненты $Z_4(t, \xi, y)$, $Z_5(t, \xi, y)$ и их первые производные, через начальные данные $Z_{10}(\xi, y)$, $Z_{20}(\xi, y)$, $Z_{30}(\xi, y)$. Действуя по аналогии, для Z_{3y} также можно получить спектральное уравнение. Формальные асимптотические разложения корней этого уравнения находятся при помощи известной диаграммы Ньютона [15–17].

Таким образом, производная $Z_{zy}(t, \xi, y)$ будет определена через производные более высокого порядка: $Z_{zyy}(t, \xi, y), Z_{zyyy}(t, \xi, y), \dots$ и через упомянутые выше данные.

Рассуждая по индукции и подставляя найденные значения производных компоненты $Z_3(t, \xi, y)$ в правую часть представления (4.1), получаем решение задачи Коши для интегродифференциального уравнения (4.2) в виде формального асимптотического ряда при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алтухов Ю. А., Головичева И. Э., Пышнограй Г. В. Молекулярный подход в динамике линейных полимеров: теория и численный эксперимент // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 1. С. 3–13.
2. Пышнограй Г. В., Покровский В. Н., Яновский Ю. Г., Образцов И. Ф., Карнет Ю. Н. Определяющее уравнение нелинейных вязкоупругих (полимерных) сред в нулевом приближении по параметрам молекулярной теории и следствия для сдвига и растяжения // Докл. АН. 1994. Т. 355, № 9. С. 612–615.
3. Volkov V. S., Vinogradov G. V. Molecular theories of nonlinear viscoelasticity of polymers // Rheol. Acta. 1984. V. 23, N 3. P. 231–237.
4. Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Макарова М. А., Пышнограй Г. В. Обобщение закона Пуазейля для плоскопараллельного течения вязкоупругих сред // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13, № 4. С. 581–590.
5. Алтухов Ю. А., Пышнограй Г. В. Входные течения в канале 4:1 текучих линейных полимеров // Механика композиционных материалов и конструкций. 2001. Т. 7, № 1. С. 16–23.
6. Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Пышнограй Г. В. Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем. Барнаул: АлтГПА, 2012.
7. Блохин А. М., Бамбаева Н. В. Нахождение решений типа Пуазейля и Куэтта для уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, № 2. С. 3–14.
8. Wassner E., Schmidt M., Münstedt H. Entry flow of a low-density-polyethylene melt into a slit die: An experimental study by Laser Doppler Velocimetry // J. Rheol. 1999. V. 43, N 6. P. 1339–1353.
9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
10. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
11. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
12. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
14. Федорюк М. В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
15. Ньютон И. Математические работы. М.; Л.: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1937.
16. Puiseux V. J. Recherches sur les fonctions algébriques // J. Math. Pures Appl. 1850. V. 15. P. 365–480.
17. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

Статья поступила 30 августа 2015 г.

Блохин Александр Михайлович, Ткачев Дмитрий Леонидович,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
уд. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
blokhin@math.nsc.ru, tkachev@math.nsc.ru,

Егитов Алексей Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
eav15@mail.ru

УДК 517.518.87

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УЗЛОВ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ С ВЕСОМ

Е. Н. Булгатова, Е. Б. Павлова

Аннотация. Рассматриваются весовые квадратурные формулы. Показан способ нахождения асимптотически оптимального распределения узлов таких формул.

Ключевые слова: квадратурная весовая формула, оптимальное распределение узлов.

E. N. Bulgatova and E. B. Pavlova. Optimal distribution of nodes of the quadrature formula with weight.

Abstract: This article considers the quadrature formulas with weight. Shows how to find the asymptotically optimal distribution of nodes of these formulas.

Keywords: quadrature weighting formula, the optimal distribution of nodes.

Рассмотрим распределение узлов весовой квадратурной формулы в зависимости от свойств конкретной весовой функции и от поведения подынтегральной функции, принадлежащей определенному функциональному пространству.

Пусть $g(x) \in L_{p'}$ — вес, $1 < p \leq \infty$, $f \in W_p^m$ и вычисляется интеграл

$$If = \int_0^1 g(x)f(x) dx.$$

Разобьем отрезок интегрирования $[0, 1]$ на части $[x_{\beta-1}, x_{\beta}]$, $\beta = 1, 2, \dots, N$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$, и рассмотрим на каждой части интерполяционную формулу Лагранжа

$$L_m(x - x_{\beta-1}) = \sum_{\gamma=0}^m \frac{\omega_m(x - x_{\beta-1})}{\omega'_m(x_{\beta-1+\gamma})(x - x_{\beta-1+\gamma})} f(x_{\beta-1+\gamma})$$

с произвольным расположением узлов $x_{\beta-1} < x_{\beta} < x_{\beta+1} < \dots < x_{\beta-1+m}$, $\beta = 1, 2, \dots, N$, и $\omega_m(x - x_{\beta-1}) = (x - x_{\beta-1})(x - x_{\beta})(x - x_{\beta+1}) \dots (x - x_{\beta-1+m})$.

Интеграл If представим в виде суммы

$$If = \sum_{\beta=1}^N \int_{x_{\beta-1}}^{x_{\beta}} g(x)f(x) dx.$$

Интеграл по каждой части вычислим по формуле

$$\int_{x_{\beta-1}}^{x_{\beta}} g(x)f(x) dx \approx \int_{x_{\beta-1}}^{x_{\beta}} g(x)L_m(x - x_{\beta-1}) dx = h^* \sum_{\gamma=0}^m C_{\gamma}(\beta)f(x_{\beta-1+\gamma}),$$

где коэффициенты определяются следующим образом:

$$C_\gamma(\beta) = \int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} \frac{\omega_m(x - x_{\beta-1})g(x)}{\omega'_m(x_{\beta-1+\gamma})(x - x_{\beta-1+\gamma})} dx.$$

Используя погрешность интерполяционной формулы Лагранжа, имеем

$$f(x) - L_m(x - x_{\beta-1}) = \frac{(x - x_{\beta-1})(x - x_\beta)(x - x_{\beta+1}) \dots (x - x_{\beta-1+m})}{(m+1)!} f^{m+1}(\xi),$$

где $\xi \in (x_{\beta-1}, x_{\beta-1+m})$.

Отмечая, что $g(x + x_\beta) = g(x_\beta) + o(1)$, $\max_{x \in [x_{\beta-1+\gamma}, x_{\beta+\gamma}]} |x - x_{\beta+\gamma}| = |x_{\beta+\gamma} - x_{\beta-1+\gamma}| + o(1)$, $\gamma = 0, 1, 2, \dots, m-1$, при $N \rightarrow \infty$ и $x \in [x_{\beta-1}, x_\beta]$, оценим погрешность:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} g(x)f(x) dx - h^* \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma(\beta)f(x_{\beta-1+\gamma}) \\ & \leq g(x_\beta) \frac{|x_{\beta+\gamma} - x_{\beta-1+\gamma}|^{m+1}}{(m+1)!} \max_{x \in [x_{\beta-1+\gamma}, x_{\beta+\gamma}]} |f^{(m+1)}(x)|(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Пусть $f(x) \in W_\infty^m$ и $\max_{x \in [0,1]} |f^{(m+1)}(x)| \leq M$. Тогда суммарная погрешность равна

$$R = \sum_{\beta=1}^N g(x_\beta) |x_\beta - x_{\beta-1}|^{m+1} \frac{M}{(m+1)!} (1 + o(1)). \quad (1)$$

Рассмотрим две возрастающие последовательности чисел

$$\begin{aligned} x_0 = 0 &< x_1 < x_2 < \dots < x_\gamma < \dots < x_N = 1, \\ 0 &< h < 2h < \dots < \gamma h < \dots < Nh = 1. \end{aligned}$$

С помощью этих последовательностей можно построить дифференцируемую функцию $x = \varphi(t)$ по значениям $x_\gamma = \varphi(h\gamma)$, $\gamma = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющую условиям $x(0) = 0$ и $x(1) = 1$.

Теорема. Пусть $f \in W_\infty^m$, $\max_{x \in [0,1]} |f^{(m+1)}(x)| \leq M$, $g(x) \in L_1(0, 1)$ и

$$\int_0^1 g(x)f(x) dx \approx \sum_{\beta=1}^N \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma(\beta)f(x_{\beta-1+\gamma})$$

есть весовая формула. Тогда асимптотически оптимальное распределение узлов x_β , $\beta = 1, 2, \dots, N$, определяется функцией $x = \varphi(t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}(g(\varphi(t))(\varphi'(t))^{m+1}) = 0,$$

начальным условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ и в неявной форме выражается интегралом

$$\int_0^x (g(x))^{\frac{1}{m+1}} dx = \int_0^1 (g(x))^{\frac{1}{m+1}} dx \cdot t$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве x_β возьмем значения $\varphi\left(\frac{\beta}{N}\right)$ непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.

По свойству непрерывной функции $\varphi(t)$ имеем

$$x_\beta - x_{\beta-1} = \varphi\left(\frac{\beta}{N}\right) - \varphi\left(\frac{\beta-1}{N}\right) = \varphi'\left(\frac{\beta}{N}\right) \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right).$$

Формула (1) принимает вид

$$R = \frac{1}{N^{m+1}} \sum_{\beta=0}^{N-1} \left[\left(\varphi'\left(\frac{\beta}{N}\right) \right)^{m+1} g(x_\beta) \frac{M}{(m+1)!} \right] + o\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right).$$

Выражение в скобках является квадратурной суммой Римана для интеграла

$$\int_0^1 (\varphi'(t))^{m+1} g(\varphi(t)) \frac{M}{(m+1)!} dt. \quad (2)$$

Из (2) находим

$$R = \frac{1}{N^m} \int_0^1 (\varphi'(t))^{m+1} g(\varphi(t)) \frac{M}{(m+1)!} dt + o\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right). \quad (3)$$

Для определения оптимального расположения узлов минимизируем главный член в (3):

$$A = \int_0^1 (\varphi'(t))^{m+1} g(\varphi(t)) dt.$$

Примем за независимую переменную в интеграле A функцию φ и запишем в виде

$$A = \int_0^1 (t'(\varphi))^{-m} g(\varphi) d\varphi.$$

Составим функцию Лагранжа

$$F(t(\varphi) + \lambda\tau(\varphi)) = \int_0^1 (t'(\varphi) + \lambda\tau'(\varphi))^{-m} g(\varphi) d\varphi,$$

где $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 0$. Вычислим производную при $\lambda = 0$ и приравняем ее к нулю:

$$F'(t(\varphi)) = \int_0^1 \left(\frac{-m}{(t'(\varphi))^{m+1}} g(\varphi) \tau'(\varphi) + (t'(\varphi))^{-m} \frac{dg(\varphi)}{d\lambda} \right) d\varphi = 0. \quad (4)$$

Отметим, что $g(\varphi)$ не зависит от λ , поэтому $\frac{dg(\varphi)}{d\lambda} = 0$.

Интегрируя (4) по частям, имеем

$$\frac{d}{d\varphi} \left[\frac{1}{(t'(\varphi))^{m+1}} g(\varphi) \right] = 0 \quad (5)$$

или $g(\varphi)(\varphi'(t))^{m+1} = C_0$.

Из начальных условий находим

$$\int_0^x (g(x))^{\frac{1}{m+1}} dx = \int_0^1 (g(x))^{\frac{1}{m+1}} dx \cdot t$$

Теорема доказана.

Далее рассмотрим простейшую весовую функцию $g(x) = |x|^s$, $-1 < s < 1$. В этом случае уравнение (5) примет вид

$$\frac{d}{d\varphi} \left[\frac{1}{(t'(\varphi))^{m+1}} \varphi^s \right] = 0.$$

Интегрируя уравнение и используя начальные условия, находим $x = t^{\frac{m+1}{m+s+1}}$. Тогда асимптотически оптимальное расположение узлов соответствует точкам

$$x_\beta = \left(\frac{\beta}{N} \right)^{\frac{m+1}{m+s+1}}, \quad \beta = 0, 1, \dots, N-1.$$

Пусть вычисляется интеграл $\int_0^1 x^s \varphi(x) dx$, $-1 < s < 1$, и $\varphi(0) \neq 0$. Отрезок интегрирования разобьем на части $[x_{\beta-1}, x_\beta]$, $\beta = 1, 2, \dots, N$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$. Тогда

$$\int_0^1 x^s \varphi(x) dx = \sum_{\beta=1}^N \int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} x^s \varphi(x) dx.$$

Каждый из интегралов вычисляем по формуле

$$\int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} x^s \varphi(x) dx \approx h^* \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma(\beta) \varphi(x_{\beta-1+\gamma}),$$

где $h^* = x_\beta - x_{\beta-1}$ и коэффициенты определяются из систем

$$\int_0^1 (x_{\beta-1} + h^* x)^s x^\alpha dx = \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma(\beta) (x_{\beta-1+\gamma})^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, m, \quad \beta = 1, 2, \dots, N.$$

Интеграл по всему отрезку $[0, 1]$ равен

$$\int_0^1 x^s \varphi(x) dx \approx \sum_{\beta=1}^N (x_\beta - x_{\beta-1}) \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma(\beta) \varphi(x_{\beta-1+\gamma}).$$

Составим весовую формулу для $s = -\frac{1}{2}$ и $m = 2$. Коэффициенты $C_\gamma(\beta)$ находятся из систем

$$\int_0^1 (x_{\beta-1} + h^* x)^{-\frac{1}{2}} x^\alpha dx = \sum_{\gamma=0}^2 C_\gamma(\beta) (x_{\beta-1+\gamma})^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 1, 2, \dots, N.$$

Пусть $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция на $[0, 1]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $x_\beta = \left(\frac{\beta}{N}\right)^{\frac{6}{5}} = (h\beta)^{\frac{6}{5}}$, $\max_{x \in [0,1]} |\varphi^m(x)| \leq M$. Система для определения коэффициентов имеет вид

$$\int_0^1 \left(((\beta-1)h)^{\frac{6}{5}} + ((\beta h)^{\frac{6}{5}} - ((\beta-1)h)^{\frac{6}{5}}) x \right)^{-\frac{1}{2}} x^\alpha dx = \sum_{\gamma=0}^2 C_\gamma(\beta) ((\beta-1+\gamma)h)^{\frac{6\alpha}{5}},$$

$\alpha = 0, 1, 2$, $\beta = 1, 2, \dots, N$, $h = \frac{1}{N}$.

Интеграл приближенно равен

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} \varphi(x) dx \approx \sum_{\beta=1}^N \left((\beta h)^{\frac{6}{5}} - ((\beta-1)h)^{\frac{6}{5}} \right) \sum_{\gamma=0}^2 C_\gamma(\beta) \varphi \left(\left(\frac{\beta-1+\gamma}{N} \right)^{\frac{6}{5}} \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
2. Шойнжуров Ц. Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005.

Статья поступила 14 августа 2015 г.

Булгадова Елена Николаевна, Павлова Елена Бадмаевна
 Восточно-Сибирский гос. университет технологий и управления
 ул. Ключевская, 40в, строение 1, 670013 Улан-Удэ, Республика Бурятия
 belena77@mail.ru, pavlova2607@mail.ru

ОЦЕНКА СВЕРХУ ФУНКЦИОНАЛА
ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ
С СИММЕТРИЧНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Е. Г. Васильева, Н. Б. Цыренжапов

Аннотация. Получена оценка сверху функционала погрешности квадратурных формул с симметричным пограничным слоем. В явном виде выделена константа, входящая в эту оценку.

Ключевые слова: оценка, функционал погрешности, квадратурная формула.

E. G. Vasilyeva, N. B. Tsyrenzhapov. An upper estimate of error functional of the quadrature formulas with a symmetric boundary layer.

Abstract: In the article we obtain an upper estimate of error functional of the quadrature formulas with a symmetric boundary layer. We singled the constant in this estimate in an explicit form.

Keywords: estimate, error functional, quadrature formula.

В [1] определены кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем для области Ω и соответствующие им функционалы погрешности кубатурных формул с регулярным пограничным слоем.

Сначала выделим из множеств функционалов погрешности с регулярным пограничным слоем конкретный функционал погрешности квадратурной формулы для области $(0, 1)$ и оценим сверху норму этого функционала в пространстве $L_p^m(E_1)$.

Пусть

$$l(x) = \varepsilon_{(0,1)}(x) - \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma \delta(x - \gamma), \quad \langle l, x^\alpha \rangle = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m,$$

$$\|l\|_{C^*} = 1 + \sum_{\gamma=0}^m |C_\gamma| < \infty,$$

$$l_1(x) = \varepsilon_{(0,m)}(x) - \sum_{\gamma=0}^m F_\gamma \delta(x - \gamma), \quad \langle l_1, x^\alpha \rangle = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m,$$

$$\|l_1\|_{C^*} = m + \sum_{\gamma=0}^m |F_\gamma| < \infty, \quad (a, b) = [0, 1), \quad \frac{1}{N} = h.$$

Суммируя элементарные функционалы $l\left(\frac{x}{h} - \beta\right)$, $\beta = 0, 1, \dots, N - m - 1$, и $l_1\left(\frac{x}{h} - N + m\right)$, построим конкретный функционал погрешности квадратурной формулы с регулярным пограничным слоем для полуинтервала $[0, 1)$:

$$l_{(0,1)}^h(x) = \sum_{\beta=0}^{N-m-1} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) + l_1\left(\frac{x}{h} - N + m\right).$$

По построению $l_{(0,1)}^h(x) \in L_p^{m*}$.

Теорема. Пусть $l_{(0,1)}^h(x)$ — функционал погрешности квадратурной формулы с регулярным пограничным слоем для интервала $(0, 1)$, $\text{supp } l_{(0,1)}^h(x) \subseteq [0, 1]$ и $l_{(0,1)}^h(x) \in L_p^{m*}$. Тогда при $h \rightarrow 0$ норма функционала погрешности $l_{(0,1)}^h(x)$ удовлетворяет оценке

$$\|l_{(0,1)}^h(x)\|_{L_p^{m*}} \leq h^m \left[\int_0^1 \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i \beta x}}{(2\pi i \beta)^m} \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} + h^m \left[\frac{(m+2) + \sum_{\gamma=0}^m (|F_\gamma| + 2|C_\gamma|)}{2(m-1)!} \right] m^{m+1-\frac{1}{p}} h^{1-\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Преобразуем периодический функционал погрешности $\tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right)$:

$$\begin{aligned} \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right) &= \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) \\ &= \sum_{\beta=-\infty}^{-1} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) + \sum_{\beta=0}^{N-m-1} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) + \sum_{\beta=N-m}^{\infty} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) \\ &= \sum_{\beta=0}^{N-m-1} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) + l_{(0,1)*}^h(x), \quad (1) \end{aligned}$$

где

$$l_{(0,1)*}^h(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{-1} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) + \sum_{\beta=N-m}^{\infty} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right).$$

Из (1) следует, что функционал погрешности с регулярным пограничным слоем имеет представление

$$l_{(0,1)}^h(x) = \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right) + l_1\left(\frac{x}{h} - N + m\right) - l_{(0,1)*}^h(x). \quad (2)$$

По построению носитель функционала погрешности с регулярным пограничным слоем $l_{(0,1)}^h(x)$ равен $\text{supp } l_{(0,1)}^h(x) = [0, 1]$. Норма функционала погрешности в явном виде выражается формулой [2]:

$$\|l_{(0,1)}^h(x)\|_{L_p^{m*}} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l_{(0,1)}^h(x)|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}},$$

Если $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ и $y \in \text{supp } l_{(0,1)}^h(x)$, то $(x - y)$ сохраняет знак. Следовательно, $\varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l_{(0,1)}^h(x) = 0$ для всех $h, \beta \in [0, 1)$. Отсюда

$$\|l_{(0,1)}^h(x)\|_{L_p^{m*}} = \left[\int_0^1 |\varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l_{(0,1)}^h(x)|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Учитывая представление функционала $l_{(0,1)}^h(x)$ в виде (2) и то, что $\text{supp } l_1\left(\frac{x}{h} - N + m\right) \subset [hN - hm, hN]$, а также применяя неравенство Минковского, имеем

$$\begin{aligned} & \|l_{(0,1)}^h(x)\|_{L_p^{m*}} \\ & \leq \left[\int_0^1 \left| \varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right) \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} + \left[\int_{hN-hm}^{hN} \left| \varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l_1\left(\frac{x}{h} - N + m\right) \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ & + \left[\int_0^1 \left| \sum_{\beta=-\infty}^{-1} \varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} + \left[\int_0^1 \left| \sum_{\beta=N-m}^{\infty} \varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ & = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (3) \end{aligned}$$

Оценим I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 & = \left[\sum_{h\gamma \in [0,1] \Delta_{h\gamma}} \int \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i h^{-1} \beta x}}{(2\pi i h^{-1} \beta)^m} \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} = \left\langle \begin{array}{l} x \rightarrow h\gamma + x \\ x \rightarrow hx \\ dx \rightarrow hdx \end{array} \right\rangle \\ & = h^m \left[\int_0^1 \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i \beta x}}{(2\pi i \beta)^m} \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} = h^m J_m, \quad (4) \end{aligned}$$

где $\Delta_{h\gamma} = \{x \in E_1, h\bar{\gamma} \leq x < h\gamma + h\}$.

Преобразуем свертку:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l_1\left(\frac{x}{h} - N + m\right) & = \left\langle \frac{y}{h} \rightarrow y \right\rangle \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - hy)^{m-1} \text{sgn}(x - hy)}{2(m-1)!} l_1(y - N + m) h dy = \langle y - N + m \rightarrow y \rangle \\ & = \int_0^m \frac{(x - hy + hN - hm)^{m-1}}{2(m-1)!} \text{sgn}(x - hy + hN - hm) h l_1(y) dy. \quad (5) \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством (5), оценим I_2 в (3):

$$\begin{aligned} I_2 & = \left[\int_{hN-hm}^{hN} \left| \int_0^m \frac{(x - hy + hN - hm)^{m-1}}{2(m-1)!} \text{sgn}(x - hy + hN - hm) l_1(y) h dy \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ & = \langle x \rightarrow hx + hN - hm \rangle = h^{m+\frac{1}{p'}} \left[\int_0^m \left| \int_0^m \frac{(x-y)^{m-1} \text{sgn}(x-y)}{2(m-1)!} l_1(y) dy \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ & \leq h^{m+1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^m \left| \max_{x,y \in [0,m]} |x-y|^{m-1} \|l_1\|_{C^*} \frac{1}{2(m-1)!} \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ & \leq h^{m+1-\frac{1}{p}} m^{m+1-\frac{1}{p}} \frac{m + \sum_{\gamma=0}^m |F_\gamma|}{2(m-1)!}. \quad (6) \end{aligned}$$

Используя равенство

$$\sum_{\beta=-\infty}^{-m} \varepsilon_{2m}^{(m)} * l\left(\frac{x}{h} + \beta\right) = 0 \text{ для } x \in [0, h(m-1)],$$

преобразуем свертку:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=-m+1}^{-1} \int \frac{(x-y)^{m-1} \operatorname{sgn}(x-y)}{2(m-1)!} l\left(\frac{x}{h} + \beta\right) dy &= \left\langle \frac{y}{h} \rightarrow y, y - \beta \rightarrow y \right\rangle \\ &= \sum_{\beta=-m+1}^{-1} \int \frac{(x-hy+h\beta)^{m-1} \operatorname{sgn}(x-hy+h\beta)}{2(m-1)!} l(y) h dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Для оценки выражения I_3 на основании равенства (7) находим

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[\int_0^{h(m-1)} \left| \sum_{\beta=-m+1}^{-1} \int_{h\beta}^{h\beta+hm} \frac{(x-hy+h\beta)^{m-1}}{2(m-1)!} \operatorname{sgn}(x-hy+h\beta) l(y) h dy \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left\langle x \rightarrow hx, x - \beta \rightarrow x \right\rangle \\ &= h^{m+\frac{1}{p'}} \left[\int_0^{h(m-1)} \left| \sum_{\beta=-m+1}^{-1} \int_0^m \frac{(x-y)^{m-1} \operatorname{sgn}(x-y)}{2(m-1)!} l(y) dy \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq h^{m+1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^{m-1} \left| \sum_{\beta=-m+1}^{-1} \max_{x,y \in [0,m]} |x-y| \frac{\|l\|_{C^*}}{2(m-1)!} \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq h^{m+1-\frac{1}{p}} m^{m+1-\frac{1}{p}} \frac{1 + \sum_{\gamma=0}^m |C_\gamma|}{2(m-1)!}. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что $x \in [0, 1+h(m-1)]$ и $\varepsilon_{2m}^{(m)} * l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) = 0$ для всех $\beta > N+m-1$, и проводя аналогичные рассуждения, получим

$$I_4 \leq h^{m+1-\frac{1}{p}} m^{m+1-\frac{1}{p}} \frac{1 + \sum_{\gamma=0}^m |C_\gamma|}{2(m-1)!}. \quad (9)$$

Собирая оценки (3), (4), (6), (8) и (9), имеем

$$\|l_{(0,1)}^h\|_{L_p^{m*}} \leq h^m J_m + \frac{(m+2) + \sum_{\gamma=0}^m (|F_\gamma| + 2|C_\gamma|)}{2(m-1)!} m^{m+1-\frac{1}{p}} h^m h^{1-\frac{1}{p}}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

2. Шойжуров Ц. Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005.

Статья поступила 25 августа 2015 г.

Васильева Евгения Геннадьевна
Восточно-Сибирский гос. университет технологий и управления,
ул. Ключевская, 40в, строение 1, Улан-Удэ 670013
vasil_eg@mail.ru

Цыренжапов Нима Булатович
Восточно-Сибирский гос. институт культуры,
ул. Терешковой, 1, Улан-Удэ 670031
nimac@mail.ru

О $\bar{\partial}\partial$ -УРАВНЕНИИ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ

Т. Н. Никитина

Аннотация. Изучается индуцированное $\bar{\partial}\partial$ -уравнение на положительном потоке на комплексном многообразии. Показывается, что L^2 -оценки выполняются для $\bar{\partial}\partial$ -уравнения на замкнутом потоке бистепени $(1, 1)$ в псевдотупой области из \mathbb{C}^n . Рассматриваются также потоки высшей бистепени.

Ключевые слова: $\bar{\partial}\partial$ -уравнение, положительный поток, дифференциальная форма, комплексное многообразие, примитивная форма, определенные квадратичные формы, дифференциальные операторы на потоке, теоремы существования для $\bar{\partial}\partial$ на замкнутых потоках, потоки высшей бистепени,

T. N. Nikitina. $\bar{\partial}\partial$ -Equation on a positive current.

Abstract: We study the induced $\bar{\partial}\partial$ -equation on a positive current in a complex manifold. We show that L^2 -estimates are satisfied for $\bar{\partial}\partial$ -equation on a positive closed current of bidegree $(1, 1)$ on a pseudoconvex domain in \mathbb{C}^n . We also discuss a currents of higher bidegree.

Keywords: $\bar{\partial}\partial$ -equation, positive current, differentiation form, complex manifold, primitive form, definite quadratic forms, differentiation operators on current, existence theorems for $\bar{\partial}\partial$ on closed current, currents of higher bidegree.

1. Введение

Пусть M — комплексное многообразие и T — положительный поток на M . Если u и f — гладкие дифференциальные формы на M , говорят, что

$$\bar{\partial}\partial u = f \text{ на } T, \text{ если } \bar{\partial}\partial u \wedge T = f \wedge T.$$

Первоначально $\bar{\partial}\partial$ -оператор, таким образом, определен только на гладких формах, но позже может быть продолжен (различными способами) на формы, которые определены только на T . В этой статье изучается вопрос: можно ли разрешить $\bar{\partial}\partial$ -уравнение на T , и если это так, какого рода оценки можно найти для решения?

Разрешимость $\bar{\partial}\partial$ -уравнений является классической (см. [1–8]). Аналогично можно также рассматривать гладкие $(1, 1)$ -потоки, которые строго положительны в подобласти D из M и обращаются в нуль вне D , что означает, что мы изучаем наше уравнение в D .

Пусть V — комплексное векторное пространство размерности n . (q, q) -Форма v строго положительна, если она принадлежит конусу, порожденному формами $i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge i\alpha_q \wedge \bar{\alpha}_q$, где $\alpha_j \in \Lambda^{1,0}(V^*)$.

Форма $u \in \Lambda^{p,p}(V^*)$ положительна тогда и только тогда, когда $u \wedge v$ положительна для каждой строго положительной формы v бистепени (q, q) с $q + p = n$.

На комплексном многообразии M дифференциальная форма $u \in C_{p,p}^\infty(M)$ строго положительна (соответственно положительно), если $u(z)$ для каждой $z \in M$ строго положительна (соответственно положительно) как элемент $\Lambda^{p,p}(T^*M)$.

Пространство $\mathcal{D}'_{(r,s)}(M)$ потоков биразмерности (r, s) на M по определению дуально пространству $\mathcal{D}_{(r,s)}(M)$ основных форм на M бистепени (r, s) относительно обычной топологии индуктивного предела на пространстве основных форм.

Поток T биразмерности (p, p) положителен (строго положителен), если $\langle T, u \rangle \geq 0$ для всех основных форм $u \in \mathcal{D}_{(p,p)}(M)$, которые строго положительны (положительны).

Пусть $c_q = (-1)^{q(q+1)/2} i^q = (-i)^{q^2}$.

Операторы ∂ и $\bar{\partial}$ действуют на потоках. Поток T замкнутый, если $dT = 0$.

2. Линейная алгебра и L^2 -пространства на потоках бистепени $(1, 1)$

Для $\bar{\partial}\partial$ -задачи на потоках высшей биразмерности сначала более детально обсудим линейную алгебру форм на потоке. Это нужно, чтобы развить версию тождеств Кэлера на потоке, которая будет позже использована в доказательстве априорной оценки Кодаиры — Накано — Хермандера.

Начнем с обсуждения форм и потоков в фиксированной точке, т. е. рассмотрим T — неотрицательный элемент в $\Lambda^{1,1}(\mathbb{C}^{n+1})$, и формы $f \in \Lambda^{*,*}(\mathbb{C}^{n+1})$. Пространство (p, q) -форм на T , обозначаемое через $\Lambda_T^{p,q}$, определяется как пространство всех $f \in \Lambda^{p,q}(\mathbb{C}^{n+1})$ по модулю подпространства форм таких, что $f \wedge T = 0$. Чтобы избежать слишком обременительного обозначения, используем тот же самый символ для обозначения элемента из $\Lambda^{p,q}(\mathbb{C}^{n+1})$ и соответствующего элемента из $\Lambda_T^{p,q}$.

На многообразии пространство $(0, q)$ -форм есть внешняя алгебра пространства $(0, 1)$ -форм, но важно ясно понимать, что это не так в нашем случае [9].

В любом случае, чтобы определить нормы на Λ_T также нужна вспомогательная $(1, 1)$ -форма $\omega > 0$, которая будет определять метрику на T . Пусть $\omega_k = \omega^k/k!$.

Пусть σ_T — след T относительно ω , рассматриваемый как форма максимальной степени, т. е. $\sigma_T = T \wedge \omega_n$. Это означает, что $\sigma_T = \text{tr}(T)\omega_{n+1}$, где $\text{tr}(T)$ есть след, рассматриваемый как число.

Можно доказать (см., например, [10, с. 170]), что k -форма f на n -мерном многообразии примитивна тогда и только тогда, когда $k \leq n$ и $f \wedge \omega_{n-k+1} = 0$. Это условие имеет смысл на Λ_T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [9]. k -Форма f примитивна на T , если $k \leq n$ и $f \wedge \omega_{n-k+1} \wedge T = 0$.

Следующее предложение является решающим в доказательстве априорного неравенства для $\bar{\partial}\partial$ -оператора.

Пусть e_1, \dots, e_{n+1} — базис для пространства $(1, 0)$ -форм в \mathbb{C}^{n+1} . Запишем $\gamma = \sum \gamma_{JK} e_J \wedge \bar{e}_K$ и разобьем γ на сумму $\tau + \sigma$, зависящую от того, J принад-

лежит K (τ -часть) или нет:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{j_1 \in K} e_{j_1} \cdots \sum_{j_p \in K} \gamma_{JK} e_{j_p} \wedge \bar{e}_K \\ &+ \left(\sum_{r=1}^{p-1} \sum_{|M|=r} \sum_{j_1 \notin K} e_{j_1} \cdots \sum_{j_{m_1-1} \notin K} e_{j_{m_1-1}} \sum_{j_{m_1} \in K} e_{j_{m_1}} \sum_{j_{m_1+1} \notin K} e_{j_{m_1+1}} \right. \\ &\cdots \sum_{j_{m_r-1} \notin K} e_{j_{m_r-1}} \sum_{j_{m_r} \in K} e_{j_{m_r}} \sum_{j_{m_r+1} \notin K} e_{j_{m_r+1}} \cdots \sum_{j_p \notin K} \gamma_{JK} e_{j_p} \wedge \bar{e}_K \\ &\left. + \sum_{j_1 \notin K} e_{j_1} \cdots \sum_{j_p \notin K} \gamma_{JK} e_{j_p} \wedge \bar{e}_K \right) = \tau + \left(\sum_{r=1}^{p-1} \sigma_r + \sigma_0 \right) = \tau + \sigma. \end{aligned}$$

Предложение 1. Квадратичная форма

$$[\gamma, \gamma] \sigma_T = c_{q+p} \gamma \wedge \bar{\gamma} \wedge \omega_{n-q-p} \wedge T, \quad (1)$$

определенная на пространстве примитивных форм из $\Lambda_T^{p,q}$, разлагается на положительно определенные $[\sigma_r, \sigma_r] \sigma_T$, если $(-1)^{p+r} = -1$, и отрицательно определенные $[\tau, \tau] \sigma_T$, $[\sigma_r, \sigma_r] \sigma_T$, если $(-1)^{p+r} = 1$, формы, $1 \leq r \leq p-1$. (В случае $p=0$ форма $[\tau, \tau] \sigma_T$ является положительно определенной, при $p=2k+1$ форма $[\sigma_0, \sigma_0] \sigma_T$ является отрицательно, а при $p=2k$ — положительно определенной.)

Доказательство. Во-первых, выберем базис e_1, \dots, e_{n+1} для пространства $(1,0)$ -форм в \mathbb{C}^{n+1} , который диагонализует обе ω и T . Пусть $dV_j = ie_j \wedge \bar{e}_j$ и $dV_J = \bigwedge_J dV_j$. Тогда $\omega = \sum dV_j$, $T = \sum \lambda_j dV_j$ и

$$T \wedge \omega_{n-q-p+1} = \sum_{|K|=n-q-p+2} \lambda_K dV_K,$$

если положим $\lambda_J = \sum_J \lambda_j$.

Легко проверить, что

$$[\sigma, \sigma] = \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{t=0}^{p-1} [\sigma_r, \sigma_t] = \sum_{r=0}^{p-1} [\sigma_r, \sigma_r],$$

поскольку $[\sigma_r, \sigma_t] \sigma_T = 0$ при $r \neq t$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} [\sigma_r, \sigma_r] \sigma_T &= c_{q+p} \sum_{|K|=q-r} \sum_{|M|=r} \sum_{j_1 \notin K} e_{j_1} \cdots \sum_{j_p \notin K} \sigma_{JK}^r e_{j_p} [M] \wedge dV_{J_M} \wedge \bar{e}_K \\ &\wedge \sum_{|L|=q-r} \sum_{|P|=r} \sum_{s_1 \notin L} \bar{e}_{s_1} \cdots \sum_{s_p \notin L} \overline{\sigma_{SL}^r} \bar{e}_{s_p} [P] \wedge dV_{S_P} \wedge e_L \wedge \omega_{n-q-p} \wedge T \\ &= (-1)^{p+r} \sum_{|K|=q-r} \sum_{|M|=r} \sum_{|P|=r} \sum_{J_M \cap S_P = \emptyset} \sigma_{JK}^r \\ &\times \overline{\sigma_{(j_1, \dots, j_{m_1-1}, j_{m_1+1}, \dots, s_{p_1}, \dots, s_{p_r}, \dots, j_{m_r-1}, j_{m_r+1}, \dots, j_p)K}^r}} \sum_{|L|=n-q-p+1} \lambda_L dV_{L \cup J \cup S_P \cup K}, \\ &1 \leq r \leq p-1, \end{aligned}$$

$$[\sigma_0, \sigma_0] \sigma_T = (-1)^p \sum_{|L|=n-q-p+1} |\gamma_{JK}|^2 \lambda_L dV_{L \cup J \cup K}.$$

Здесь запись $(j_1, \dots, j_{m_1-1}, j_{m_1+1}, \dots, s_{p_1}, \dots, s_{p_r}, \dots, j_{m_r-1}, j_{m_r+1}, \dots, j_p)$ означает, что в индексе S выражение $S[P] = (s_1, \dots, s_{p_1-1}, s_{p_1+1}, \dots, s_{p_r-1}, s_{p_r+1}, \dots, s_p)$ заменено на $J[M]$.

Условие, что σ_r , $r \geq 1$, примитивна (σ_0 всегда примитивна, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{j_1 \notin K} e_{j_1} \dots \sum_{j_p \notin K} \gamma_{JK} e_{j_p} \wedge \bar{e}_K \wedge \omega_{n-q-p+1} \wedge T \\ = \sum_{j_1 \notin K} e_{j_1} \dots \sum_{j_p \notin K} \gamma_{JK} e_{j_p} \wedge \bar{e}_K \wedge \sum_{|L|=n-q-p+2} \lambda_L dV_L = 0) \end{aligned}$$

означает, что

$$\begin{aligned} \sigma_r \wedge \omega_{n-q-p+1} \wedge T = \sum_{|K|=q-r} \sum_{|M|=r} \sum_{|L|=n-q-p+2} \sum_{j_1 \notin K} e_{j_1} \dots \sum_{j_p \notin K} \sigma_{JK}^r \\ \times \lambda_L e_{j_p}[M] \wedge dV_{J_M \cup L} \wedge \bar{e}_K = 0. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} [\sigma_r, \sigma_r] = (-1)^{p+r} \sum_{|K|=q-r} \sum_{|M|=r} \sum_{|P|=r} \sum_{J_M \cap L_P = \emptyset} \sigma_{JK}^r \\ \times \sigma_{(j_1, \dots, j_{m_1-1}, j_{m_1+1}, \dots, l_{p_1}, \dots, l_{p_r}, \dots, j_{m_r-1}, j_{m_r+1}, \dots, j_p)K}^r \lambda_{(J \cup L_P \cup K)^c}, \quad 1 \leq r \leq p-1, \\ [\sigma_0, \sigma_0] = (-1)^p \sum |\gamma_{JK}|^2 \lambda_{(J \cup K)^c}. \end{aligned}$$

Фиксируем K , $j_1, \dots, j_{m_1-1}, j_{m_1+1}, \dots, j_{m_r-1}, j_{m_r+1}, \dots, j_p$ и переименуем оставшиеся индексы $1, \dots, N$. Положим

$$\hat{\lambda}_{J_M} = \sum_1^N \lambda_i - (\lambda_{j_{m_1}} + \dots + \lambda_{j_{m_r}}) = \sum_1^N \lambda_i - \lambda_{J_M}$$

и

$$\hat{\lambda}_{J_M L_P} = \sum_1^N \lambda_i - \lambda_{J_M} - \lambda_{L_P}.$$

Можно доказать, что

$$\text{если } \sum \sigma_{J_M}^r \hat{\lambda}_{J_M} = 0, \text{ то } \sum_{J_M \cap L_P = \emptyset} \sigma_{J_M}^r \sigma_{L_P}^r \hat{\lambda}_{J_M L_P} \leq 0.$$

Имеем

$$[\tau, \sigma] = \sum_{r=0}^{p-1} [\tau, \sigma_r] = 0,$$

поскольку

$$\begin{aligned} [\tau, \sigma_r] \sigma_T = c_{q+p} \sum_{|K|=q-p} \tau_{JK} dV_J \wedge \bar{e}_K \\ \wedge \sum_{|P|=r} \sum_{s_1 \notin L} \bar{e}_{s_1} \dots \sum_{s_{p_1-1} \notin L} \bar{e}_{s_{p_1-1}} \sum_{s_{p_1} \in L} \bar{e}_{s_{p_1}} \sum_{s_{p_1+1} \notin L} \bar{e}_{s_{p_1+1}} \\ \dots \sum_{s_{p_r-1} \notin L} \bar{e}_{s_{p_r-1}} \sum_{s_{p_r} \in L} \bar{e}_{s_{p_r}} \sum_{s_{p_r+1} \notin L} \bar{e}_{s_{p_r+1}} \dots \sum_{s_p \notin L} \bar{\gamma}_{SL} \bar{e}_{s_p} \wedge e_L \wedge \omega_{n-q-p} \wedge T = 0. \end{aligned}$$

Условие примитивности τ означает, что

$$\tau \wedge \omega_{n-q-p+1} \wedge T = \sum_{|K|=q-p} \sum_{|L|=n-q-p+2} \tau_{JK} \lambda_L dV_{J \cup L} \wedge \bar{e}_K = 0,$$

и

$$[\tau, \tau] \sigma_T = \sum_{|K|=q-p} \sum_{J \cap S = \emptyset} \tau_{JK} \bar{\tau}_{SK} \sum_{|L|=n-q-p+1} \lambda_L dV_{L \cup J \cup S \cup K}.$$

Отсюда

$$[\tau, \tau] = \sum_{|K|=q-p} \sum_{J \cap L = \emptyset} \tau_{JK} \bar{\tau}_{LK} \lambda_{(J \cup L \cup K)^c}.$$

Фиксируем K и переименуем оставшиеся индексы $1, \dots, N$. Положим

$$\hat{\lambda}_J = \sum_1^N \lambda_i - (\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_p}) = \sum_1^N \lambda_i - \lambda_J$$

и

$$\hat{\lambda}_{JL} = \sum_1^N \lambda_i - \lambda_J - \lambda_L.$$

Можно доказать, что если $\sum \tau_J \hat{\lambda}_J = 0$, то $\sum_{J \cap L = \emptyset} \tau_J \bar{\tau}_L \hat{\lambda}_{JL} \leq 0$. \square

Предложение 5.7 в [9] является частным случаем предложения 1 при $p = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $f \in \Lambda^{p,q}(\mathbb{C}^{n+1})$. Норма f на T определяется как

$$|f|_{\omega, T}^2 \sigma_T = c_{q+p} f \wedge \bar{f} \wedge \omega_{n-q-p} \wedge T, \quad (2)$$

где

$$\hat{f} = f_0 \wedge \omega^p + \sum_{k=1}^p \hat{f}_k \wedge \omega^{p-k},$$

а $f_k \in \Lambda_T^{k, q-p+k}$ — примитивные формы,

$$\hat{f}_k = -\tau^k - \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{k+r} \sigma_r^k + (-1)^k \sigma_0^k.$$

Напомним, что норма f в \mathbb{C}^{n+1} , измеримая в ω -метрике, определяется как

$$|f|_{\omega}^2 \omega_{n+1} = c_{q+p} f \wedge \bar{f} \wedge \omega_{n-q-p+1},$$

поэтому $(n+1)|f|_{\omega, \omega}^2 = (n-q-p+1)|f|_{\omega}^2$ в случае $T = \omega$. В общем, поскольку $T \leq \text{tr}(T)\omega$, получим $|f|_{\omega, T}^2 \leq (n-q-p+1)|f|_{\omega}^2$. Наконец, поляризацией получим скалярное произведение такое, что

$$(f, f)_{\omega, T} = |f|_{\omega, T}^2,$$

и будем в дальнейшем не упоминать зависимость от ω и T .

Нормы и скалярные произведения на $\Lambda_T^{q,p}$ определяются, конечно, аналогичным способом, так что $(f, g) = \overline{(f, \bar{g})}$. В частности, если $f, g \in \Lambda_T^{q,p}$, то

$$(f, g) \sigma_T = \bar{c}_{q+p} f \wedge \hat{g} \wedge \omega_{n-q-p} \wedge T.$$

Далее определим нормы на $\Lambda_T^{n-p,q}$. Для этого заметим, что любая $f \in \Lambda_T^{n-p,q}$ определяет линейную форму $L_f(g)\sigma_T = g \wedge f \wedge T$ на $\Lambda_T^{p,n-q}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если $f \in \Lambda_T^{n-p,q}$

$$|f|_{\omega,T} = \|L_f\| = \sup_{|g|_{\omega,T} \leq 1} |L_f(g)|.$$

Эквивалентно L_f можно представить как скалярное произведение с элементом $f' \in \Lambda_T^{p,n-q}$, так что

$$g \wedge f \wedge T = L_f(g)\sigma_T = (g, f')\sigma_T = c_{n-q+p}g \wedge \overline{f'} \wedge \omega_{q-p} \wedge T. \quad (3)$$

Тогда $|f|_{\omega,T} = |f'|_{\omega,T}$.

Напомним, что на кэлеровом (или римановом) многообразии $*$ -оператор Ходжа определяется так: $h \wedge \overline{*g} = (h, g)dV$, если h и g являются k -формами и dV — элемент объема. Аналогично определим $*$ -оператор $*$: $\Lambda_T^{n-q,p} \rightarrow \Lambda_T^{n-p,q}$, полагая

$$h \wedge \overline{*g} \wedge T = (h, g)\sigma_T. \quad (4)$$

Поскольку

$$(h, g)\sigma_T = \overline{c_{n-q+p}}h \wedge \widehat{g} \wedge \omega_{q-p} \wedge T,$$

это означает, что $*g = c_{n-q+p}\widehat{g} \wedge \omega_{q-p}$ на $\Lambda_T^{n-q,p}$.

Точно таким же образом (4) определяет $*$: $\Lambda_T^{n-p,q} \rightarrow \Lambda_T^{n-q,p}$. Поскольку тогда скалярное произведение определяется как $(h, g) = (\tilde{h}, \tilde{g})$, найдем

$$h \wedge \overline{*g} \wedge T = \overline{c_{n-q+p}}\tilde{h} \wedge \widehat{\tilde{g}} \wedge \omega_{q-p} \wedge T = \overline{c_{n-q+p}}h \wedge \widehat{\tilde{g}} \wedge T,$$

поэтому $*g = c_{n-q+p}\widehat{\tilde{g}}$ на $\Lambda_T^{n-p,q}$.

Следующее предложение связано с изоморфизмом Лефшеца в \mathbb{C}^{n+1} и будет иметь решающее значение, когда мы позже аппроксимируем общие потоки гладкими формами.

Предложение 2. Пусть $T \in \Lambda^{1,1}(\mathbb{C}^{n+1})$ является строго положительным и пусть $F \in \Lambda^{n-p+1,q+1}(\mathbb{C}^{n+1})$, $0 \leq p \leq q \leq n$. Тогда существует единственная форма $\tilde{F} \in \Lambda^{n-q,p}(\mathbb{C}^{n+1})$ такая, что

$$F = \tilde{F} \wedge \omega_{q-p} \wedge T.$$

В частности, F может быть записана в виде $F = f \wedge T$ с $f \in \Lambda^{n-p,q}(\mathbb{C}^{n+1})$.

Предложение 5.4 из [9] есть частный случай предложения 2 при $p = 0$.

Предложение 3. Пусть $f \in \Lambda_T^{q,p}$. Тогда существуют однозначно определенные примитивные формы $f_0 \in \Lambda_T^{q-p,0}$, $f_1 \in \Lambda_T^{q-p+1,1}$, ..., $f_p \in \Lambda_T^{q,p}$ такие, что

$$f = \sum_{k=0}^p f_k \wedge \omega^{p-k}. \quad (5)$$

Доказательство проводится методом математической индукции по p . \square

Предложение 5.6 из [9] есть частный случай предложения 3 при $p = 1$.

Аналогично, конечно, имеем примитивное разложение (p, q) -форм.

Следующее предложение говорит, что на самом деле получена норма форм на T .

Предложение 4. Предположим, что $\gamma \in \Lambda^{p,q}(\mathbb{C}^{n+1})$ и $|\gamma|_{\omega,T}^2 = 0$. Тогда $\gamma \wedge T = 0$.

Предложение 5.2 из [9] есть частный случай предложения 4 при $p = 0$.

Пусть теперь $T \geq 0$ — $(1,1)$ -поток в \mathbb{C}^{n+1} . Такой поток может быть записан в виде

$$T = i \sum T_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

где коэффициенты являются мерами, абсолютно непрерывными относительно меры следа $\sigma_T = T \wedge \omega_n$. Пусть $\text{tr}(T)$ есть $(0,0)$ -поток определенный как $\text{tr}(T)\omega_{n+1} = \sigma_T$. Тогда T может быть записан в виде $T = \tilde{T} \text{tr}(T)$, где \tilde{T} — форма с коэффициентами, определенными почти всюду относительно σ_T . Так как коэффициенты \tilde{T} образуют полуопределенную матрицу со следом равным единице по неравенству Коши следует, что

$$T = i \sum \tilde{T}_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k \text{tr}(T),$$

где $|\tilde{T}_{j\bar{k}}| \leq 1$.

Если f — гладкая или только непрерывная (p,q) -форма в \mathbb{C}^{n+1} , определим L^2 -норму f на T :

$$\|f\|_{\omega,T}^2 = \int |f|_{\omega,\tilde{T}}^2 \sigma_T. \quad (6)$$

Равенство (6) означает, что

$$\|f\|_{\omega,T}^2 = c_{p+q} \int f \wedge \bar{f} \wedge \omega_{n-p-q} \wedge T,$$

так как

$$c_{p+q} f \wedge \bar{f} \wedge \omega_{n-p-q} \wedge T = c_{p+q} f \wedge \bar{f} \wedge \omega_{n-p-q} \wedge \tilde{T} \text{tr}(T) = |f|_{\omega,\tilde{T}}^2 \sigma_T,$$

и $\text{tr}(\tilde{T}) = 1$.

Определим L^2 -пространства (p,q) -форм на T , обозначаемое через $L_{p,q}^2(T)$, как пополнение гладких (p,q) -форм относительно L^2 -норм. Таким образом, гладкие формы по определению плотны в L^2 -пространствах.

Если, наконец, φ — борелевская весовая функция, определим $L_{p,q}^2(T, e^{-\varphi})$ как пространство тех $f \in L_{p,q,\text{loc}}^2$, которые удовлетворяют

$$\|f\|_{\omega,T,\varphi}^2 = \int |f|_{\omega,\tilde{T}}^2 e^{-\varphi} \sigma_T < \infty.$$

3. Дифференциальные операторы на T

Предположим, что T является замкнутым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для $u \in L_{p,q,\text{loc}}^2(T)$ говорят, что $\bar{\partial}\bar{\partial}_w u = f$ на T , если $f \in L_{p+1,q+1,\text{loc}}^2(T)$ и $\bar{\partial}\bar{\partial}(u \wedge T) = f \wedge T$ в смысле потоков.

Сильное продолжение оператора $\bar{\partial}\bar{\partial}$ определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если $u \in L_{p,q,\text{loc}}^2(T)$ и $f \in L_{p+1,q+1,\text{loc}}^2(T)$, говорят, что $\bar{\partial}\bar{\partial}_s u = f$, если существует последовательность гладких (класса C^2) (p,q) -форм u_n такая, что $u_n \rightarrow u$ в $L_{\text{loc}}^2(T)$ и $\bar{\partial}\bar{\partial}u_n \rightarrow f$ в $L_{\text{loc}}^2(T)$.

Пусть теперь φ — борелевская измеримая весовая функция. Тогда получим замкнутые плотно определенные операторы $\bar{\partial}\partial_w$ и $\bar{\partial}\partial_s$ на $L^2_{p,q}(T, e^{-\varphi})$ с областями, состоящими из всех u таких, что $\|\bar{\partial}\partial u\|_{T,\varphi} < \infty$ с $\bar{\partial}\partial = \bar{\partial}\partial_w$ или $\bar{\partial}\partial_s$.

Далее определим формальные сопряженные. Если f — (p, q) -форма такая, что $*f$ является гладкой, положим $\vartheta f = \varepsilon_{p,q} * \partial * f$, где $\varepsilon_{p,q}$ выбрано так, что

$$(g, \vartheta f)_{\omega, T} = (\bar{\partial}_w g, f)_{\omega, T}, \quad (7)$$

если f имеет компактный носитель. Если φ — весовая функция, положим $\vartheta_\varphi = e^\varphi \vartheta e^{-\varphi}$, так что $(g, \vartheta_\varphi f)_{\omega, T, \varphi} = (\bar{\partial}_w g, f)_{\omega, T, \varphi}$.

4. Априорные оценки для оператора $\bar{\partial}\partial$

Основной технический результат этого параграфа — следующее обобщение тождества Кодаиры — Накано — Хермандера. В формулировке результата используем обозначение $\partial_{-\varphi} = e^{-\varphi} \partial e^\varphi$ для искривленного $\bar{\partial}$ -оператора.

Теорема 1. Пусть $T \geq 0$ — $(1, 1)$ -поток в области D из \mathbb{C}^{n+1} такой, что $i\bar{\partial}\partial T$ имеет измеримые коэффициенты. Пусть ω — кэлерава форма в D . Пусть, наконец, g — основная форма бистепени (p, q) с носителем в D , и предположим, что $\varphi \in C^2(D)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int c_{p+q+1} \partial g \wedge \overline{\partial g} \wedge i\bar{\partial}\partial\varphi \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge T e^\varphi \\ & - \int c_{p+q+1} \partial g \wedge \overline{\partial g} \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge i\bar{\partial}\partial T e^\varphi \\ & + c_{p+q+2} \int \bar{\partial}\partial g \wedge \overline{\bar{\partial}\partial g} \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge T e^\varphi \\ & - c_{p+q+2} \int (\partial_{-\varphi} \partial g)_{p+2} \wedge \overline{(\partial_{-\varphi} \partial g)_{p+2}} \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge T e^\varphi \\ & - c_{p+q} \int \widehat{\vartheta_{-\varphi} \partial g} \wedge \overline{\widehat{\vartheta_{-\varphi} \partial g}} \wedge \omega_{n-p-q} \wedge T e^\varphi \\ & = (\vartheta_{-\varphi} \widehat{\bar{\partial}\partial g}, \widehat{\partial g})_{\omega, T, -\varphi} + \overline{(\vartheta_{-\varphi} \widehat{\bar{\partial}\partial g}, \partial g)_{\omega, T, -\varphi}}. \quad (8) \end{aligned}$$

В частности, если $i\bar{\partial}\partial T$ — строго отрицательный и $i\bar{\partial}\partial\varphi \geq \omega$, имеем

$$\begin{aligned} & (n-p-q-1)\|\partial g\|^2 + c_{p+q+2} \int \bar{\partial}\partial g \wedge \overline{\bar{\partial}\partial g} \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge T e^\varphi \\ & - c_{p+q+2} \int (\partial_{-\varphi} \partial g)_{p+2} \wedge \overline{(\partial_{-\varphi} \partial g)_{p+2}} \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge T e^\varphi \\ & - c_{p+q} \int \widehat{\vartheta_{-\varphi} \partial g} \wedge \overline{\widehat{\vartheta_{-\varphi} \partial g}} \wedge \omega_{n-p-q} \wedge T e^\varphi \\ & \leq (\vartheta_{-\varphi} \widehat{\bar{\partial}\partial g}, \widehat{\partial g}) + \overline{(\vartheta_{-\varphi} \widehat{\bar{\partial}\partial g}, \partial g)}. \quad (9) \end{aligned}$$

Если, более того, $dT = 0$, то

$$\begin{aligned} & (n-p-q-1)\|\partial g\|^2 - c_{p+q+2} \int (\partial_{-\varphi} \partial g)_{p+2} \wedge \overline{(\partial_{-\varphi} \partial g)_{p+2}} \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge T e^\varphi \\ & - c_{p+q} \int \widehat{\vartheta_{-\varphi} \partial g} \wedge \overline{\widehat{\vartheta_{-\varphi} \partial g}} \wedge \omega_{n-p-q} \wedge T e^\varphi \leq (\widehat{\bar{\partial}\partial g}, \widehat{\partial g}). \quad (10) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что (9) и (10) следуют из (8), поскольку

$$(\bar{\partial}\partial g, \widehat{\bar{\partial}\partial g}) = \overline{(\widehat{\bar{\partial}\partial g}, \bar{\partial}\partial g)}.$$

Чтобы доказать (8), следуем методу Бохнера — Кодаиры [11]. \square

Теорема 1 имеет дубликат для форм бистепени $(n-p, q)$.

Теорема 2. *С обозначением и предположениями, как в теореме 1, пусть f — основная форма бистепени $(n-p, q)$ с носителем в D такая, что $*f$ гладкая (класса C^2). Если $i\bar{\partial}\partial T \leq 0$ и $i\bar{\partial}\partial\varphi \geq \omega$ и $dT = 0$, то*

$$(q-p-1)\|\partial_\varphi \overline{*f}\|^2 - c_{n-q+p+2} \int (\partial\partial_\varphi \overline{*f})_{p+2} \wedge \overline{(\partial\partial_\varphi \overline{*f})_{p+2}} \wedge \omega_{q-p-2} \wedge Te^{-\varphi} \\ - c_{n-q+p} \int \widehat{\vartheta\partial_\varphi \overline{*f}} \wedge \overline{\widehat{\vartheta\partial_\varphi \overline{*f}}} \wedge \omega_{q-p} \wedge Te^{-\varphi} \leq (\bar{\partial}_\varphi \widehat{\partial_\varphi \overline{*f}}, \bar{\partial}_\varphi \widehat{\partial_\varphi \overline{*f}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно применить теорему 1 к $g = \overline{*f}e^{-\varphi}$. \square

5. Теоремы существования для $\bar{\partial}\partial$ на замкнутых потоках бистепени $(1, 1)$

Теорема 3. *Пусть $T \geq 0$ — замкнутый $(1, 1)$ -поток в \mathbb{C}^{n+1} , и пусть $\omega = i\bar{\partial}\partial|z|^2$ — кэлерава форма евклидовой метрики в \mathbb{C}^{n+1} . Пусть φ — плюрисубгармоническая функция в \mathbb{C}^{n+1} , удовлетворяющая $i\bar{\partial}\partial\varphi \geq \omega$. Тогда для любой $\bar{\partial}_w$ -замкнутой $(n-p, q)$ -формы f на T с $q-p-1 \geq 1$ существует $(n-p-1, q-1)$ -форма u на T такая, что $\bar{\partial}\partial_w u = f$ на T и*

$$\int |\partial u|_{\omega, T}^2 \sigma_T e^{-\varphi} \leq \frac{1}{q-p-1} \int |f|_{\omega, T}^2 \sigma_T e^{-\varphi}.$$

Сначала докажем теорему, предполагая, что T — гладкий и строго положительный, а затем получим общую теорему из аппроксимации T такими потоками $T_{(\varepsilon)}$. После этого нужно аппроксимировать нашу форму f , определенную только на T , глобальными формами, которые являются замкнутыми на $T_{(\varepsilon)}$. Это оказывается удивительно легко: вместо регуляризации T и f отдельно регуляризируем произведение $f \wedge T$ и затем используем предложение 2, чтобы записать $(f \wedge T)_\varepsilon = f_{(\varepsilon)} \wedge T_{(\varepsilon)}$.

Для этого выберем неотрицательную основную функцию χ , сосредоточенную в единичном шаре, такую, что $\int \chi = 1$, и пусть $\chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2n} \chi(z/\varepsilon)$. Для любой формы или потока α обозначим через α_ε свертку $\alpha * \chi_\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Предположим сначала, что T — строго положительный и T, φ гладкие. Для доказательства теоремы нужно показать, что

$$|(f, \bar{\vartheta}_\varphi \alpha)|^2 \leq \frac{1}{q-p-1} \|\partial_\varphi \bar{\partial}_\varphi * \alpha\|^2 = \frac{1}{q-p-1} \|\vartheta_\varphi \bar{\vartheta}_\varphi \alpha\|^2, \quad (11)$$

если α — основная форма бистепени $(n-p+1, q)$ и нормируем так, что $\|f\|^2 = 1$. (Если (11) выполнено, из теоремы о представлении Рисса следует, что можно найти форму u на T такую, что

$$(f, \bar{\vartheta}_\varphi \alpha) = (\partial_w u, \vartheta_\varphi \bar{\vartheta}_\varphi \alpha) \text{ и } \|\partial_w u\| \leq \frac{1}{q-p-1}.$$

Тогда $\bar{\partial}\partial_w u = f$ и все доказано.)

Доказательство (11) проводится стандартным способом.

Также имеем версии теоремы 3 для псевдовыпуклой области в \mathbb{C}^{n+1} и общих кэлеровых метрик. Далее имеем версии этих теорем для некоторых компактных кэлеровых многообразий.

6. Потоки высшей бистепени

Решающую часть в доказательствах играло предложение 1, согласно которому квадратичная форма, определенная как

$$[\gamma, \hat{\gamma}]_{\sigma_T} = c_{q+p} \gamma \wedge \bar{\hat{\gamma}} \wedge T \wedge \omega_{n-q-p},$$

является определенной на пространстве (q, p) -форм на T , удовлетворяющих $\gamma \wedge \omega_{n-p-q+1} \wedge T = 0$ (т. е. «примитивных» форм).

Это неверно для $(2, 2)$ -потоков, даже если они являются строго положительными [9].

Пусть T — (s, s) -форма

$$T = \sum_{l=0}^1 dV_{sl+1, sl+2, \dots, s(l+1)}$$

в \mathbb{C}^{2s} (где $dV_{jk} = dV_j \wedge dV_k$, $dV_j = idz_j \wedge d\bar{z}_j$).

Легко заметить, что локальная разрешимость для $\bar{\partial}\partial u$ на $(s, s-1)$ -формах не имеет места при таком выборе T . Возьмем

$$f = \sum_j \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_{s-1}} f_j^{k_1 k_2 \dots k_{s-1}} dz_j \wedge dV_{k_1 k_2 \dots k_{s-1}},$$

так что

$$f \wedge T = \sum_j \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_{s-1}} \sum_{l=0}^1 f_j^{k_1 k_2 \dots k_{s-1}} dz_j \wedge dV_{k_1 k_2 \dots k_{s-1}, sl+1, sl+2, \dots, s(l+1)}.$$

Тогда $\bar{\partial}f \wedge T = 0$ означает, что

$$\sum \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad (12)$$

где $f_j = \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_{s-1}} f_j^{k_1 k_2 \dots k_{s-1}}$.

Если $f \wedge T = \bar{\partial}\partial u \wedge T$, для $(s-1, s-2)$ -формы u можно записать

$$u = \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} u_j^{k_1 \dots k_{s-2}} dz_j \wedge dV_{k_1 \dots k_{s-2}}.$$

Тогда

$$u \wedge T = \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{l=0}^1 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}} dz_j \wedge dV_{k_1 \dots k_{s-2}, sl+1, sl+2, \dots, s(l+1)},$$

и можно показать, что

$$\bar{\partial}\partial u \wedge T = \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_{s-1}}^1 \sum_{l=0}^1 i \left(\frac{\partial^2 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}}} - \frac{\partial^2 u_{k_{s-1}}^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j} \right) \times dz_j \wedge dV_{k_1 \dots k_{s-1}, s(l+1), \dots, s(l+1)},$$

поэтому уравнение $\bar{\partial}\partial u \wedge T = f \wedge T$ разлагается на

$$\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_{s-1} \leq s} \sum_{k_{s-1}=1}^s i \left(\frac{\partial^2 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}}} - \frac{\partial^2 u_{k_{s-1}}^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j} \right) = f_j, \quad 1 \leq j \leq s,$$

и аналогичную систему для $u_{s+1}^{k_1 \dots k_{s-2}}, u_{s+2}^{k_1 \dots k_{s-2}}, \dots, u_{2s}^{k_1 \dots k_{s-2}}, s+1 \leq k_1 < \dots < k_{s-2} \leq 2s, s+1 \leq k_{s-1} \leq 2s$. Она разрешима, только если

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}_2} + \dots + \frac{\partial f_s}{\partial \bar{z}_s} = 0, \quad (13)$$

что не предполагается (12).

Пусть T — (s, s) -форма

$$T = \sum_{k_s < k_{s+1} < \dots < k_{2s-1}} dV_{k_s k_{s+1} \dots k_{2s-1}}$$

в \mathbb{C}^{2s} . Легко заметить, что локальная разрешимость для $\bar{\partial}\partial u$ на $(s, s-1)$ -формах имеет место для этого выбора T . Имеем

$$f \wedge T = \sum f_j dz_j \wedge d\widehat{V}_j,$$

где $f_j = \sum_{k_1 < \dots < k_{s-1}} f_j^{k_1 \dots k_{s-1}}$. Тогда $\bar{\partial}f \wedge T = 0$ означает, что

$$\sum \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_j} = 0. \quad (14)$$

Если $f \wedge T = \bar{\partial}\partial u \wedge T$, то

$$u \wedge T = \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_s < \dots < k_{2s-1}} u_j^{k_1 \dots k_{s-2}} dz_j \wedge dV_{k_1 \dots k_{s-2} k_s \dots k_{2s-1}},$$

и можно показать, что

$$\bar{\partial}\partial u \wedge T = \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_{s-1}} \sum_{k_s < \dots < k_{2s-1}} i \left(\frac{\partial^2 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}}} - \frac{\partial^2 u_{k_{s-1}}^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j} \right) dz_j \wedge dV_{k_1 \dots k_{2s-1}},$$

поэтому уравнение $\bar{\partial}\partial u \wedge T = f \wedge T$ разлагается в систему

$$\sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_{s-1}} \sum_{k_s < \dots < k_{2s-1}} i \left(\frac{\partial^2 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}}} - \frac{\partial^2 u_{k_{s-1}}^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j} \right) = f_j, \quad 1 \leq j \leq 2s.$$

Она разрешима, только если

$$\sum \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_j} = \sum_j \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_{s-1}} \sum_{k_s < \dots < k_{2s-1}} i \left(\frac{\partial^3 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}} \partial \bar{z}_j} - \frac{\partial^3 u_{k_{s-1}}^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) = 0, \quad (15)$$

что предполагается (14).

Пусть T — (s, s) -форма $\sum_{j=0}^1 dV_{s j+1, s j+2, \dots, s(j+1)}$ в \mathbb{C}^{2s} . Раз T биразмерности (s, s) , примитивная 2-форма должна удовлетворять

$$\gamma \wedge \omega^{s-1} \wedge T = 0. \quad (16)$$

Возьмем, в частности, $\gamma = \sum_{j=1}^{2s} \gamma_j dV_j$. Тогда

$$\gamma \wedge \omega = \sum_{j < k} \gamma_{jk} dV_{jk}, \text{ где } \gamma_{jk} = \gamma_j + \gamma_k,$$

\vdots

$$\gamma \wedge \omega^{s-1} = (s-1)! \sum_{j < k_1 < \dots < k_{s-1}} \gamma_{j k_1 \dots k_{s-1}} dV_{j k_1 \dots k_{s-1}},$$

где $\gamma_{j k_1 \dots k_{s-1}} = \gamma_j + \gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{s-1}}$, (доказывается методом математической индукции), поэтому равенство (16) точно означает, что $(s-1)! \sum_1^{2s} \gamma_j = 0$.

С другой стороны

$$\gamma \wedge \bar{\gamma} = 2 \operatorname{Re} \sum_{j < k} \gamma_j \bar{\gamma}_k dV_{jk},$$

поэтому

$$\gamma \wedge \bar{\gamma} \wedge \omega = 2 \operatorname{Re} \sum_{j < k_1 < k_2} (\gamma_j (\bar{\gamma}_{k_1} + \bar{\gamma}_{k_2}) + \gamma_{k_1} \bar{\gamma}_{k_2}) dV_{j k_1 k_2},$$

\vdots

$$\begin{aligned} \gamma \wedge \bar{\gamma} \wedge \omega^{s-2} &= (s-2)! 2 \operatorname{Re} \sum_{j < k_1 < k_2 < \dots < k_{s-1}} (\gamma_j (\bar{\gamma}_{k_1} + \dots + \bar{\gamma}_{k_{s-1}}) \\ &+ \gamma_{k_1} (\bar{\gamma}_{k_2} + \dots + \bar{\gamma}_{k_{s-1}}) + \dots + \gamma_{k_{s-3}} (\bar{\gamma}_{k_{s-2}} + \bar{\gamma}_{k_{s-1}}) + \gamma_{k_{s-2}} \bar{\gamma}_{k_{s-1}}) dV_{j k_1 k_2 \dots k_{s-1}} \end{aligned}$$

(доказывается методом математической индукции),

$$\begin{aligned} \gamma \wedge \bar{\gamma} \wedge \omega^{s-2} \wedge T &= (s-2)! 2 \operatorname{Re} [\gamma_1 (\bar{\gamma}_2 + \dots + \bar{\gamma}_s) + \gamma_2 (\bar{\gamma}_3 + \dots + \bar{\gamma}_s) + \\ &\dots + \gamma_{s-1} \bar{\gamma}_s + \gamma_{s+1} (\bar{\gamma}_{s+2} + \dots + \bar{\gamma}_{2s}) + \dots + \gamma_{2s-2} (\bar{\gamma}_{2s-1} + \bar{\gamma}_{2s}) + \gamma_{2s-1} \bar{\gamma}_{2s}] dV_{1 \dots 2s}. \end{aligned}$$

Эта форма является, очевидно, неопределенной, поскольку получим разные знаки для $\gamma = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ и $\gamma = (1, -1, \dots, 1, -1)$.

Пусть T — (s, s) -форма $\sum_{j_1 < \dots < j_s} dV_{j_1, \dots, j_s}$ в \mathbb{C}^{2s} , тогда равенство (16) означает, что

$$(s-1)! \binom{2s-1}{s-1} \sum_1^{2s} \gamma_j = 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \gamma \wedge \bar{\gamma} \wedge \omega^{s-2} \wedge T &= (s-2)! \binom{2s-2}{s-2} 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{2s-1} \gamma_j (\bar{\gamma}_{j+1} + \dots + \bar{\gamma}_{2s}) \right] dV_{1\dots 2s} \\ &= (s-2)! \binom{2s-2}{s-2} 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{2s-1} -|\gamma_j|^2 - \gamma_j (\bar{\gamma}_1 + \dots + \bar{\gamma}_{j-1}) \right] dV_{1\dots 2s} \leq 0. \end{aligned}$$

Доказательство проводится методом математической индукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белошанка В. К. Функции, плюригармонические на многообразии // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42, № 3. С. 475–483.
2. Чирка Е. М. Потoki и некоторые их применения // Харви Р. Голоморфные цепи и их границы. М.: Мир, 1979. С. 122–158.
3. Никитина Т. Н. Устранимые особенности на границе и $\bar{\partial}$ -замкнутое продолжение CR -форм с особенностями на порождающем многообразии. Новосибирск: Наука, 2008.
4. Nikitina T. N. The $\bar{\partial}\bar{\partial}$ -equation on a positive current // The 14th General Meeting of European Women in Mathematics. Book of Abstracts Part II. University of Novi Sad (Serbia), 2009. P. 15–16.
5. Никитина Т. Н. $\bar{\partial}$ и $\bar{\partial}\bar{\partial}$ -уравнение на положительном потоке // Тез. докл. международной конференции «Современные проблемы анализа и геометрии». Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 2009. С. 81.
6. Никитина Т. Н. Уравнение Монжа – Ампера на положительном потоке // Тез. докл. международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 2013. С. 402.
7. Никитина Т. Н. $\bar{\partial}$ - и $\bar{\partial}\bar{\partial}$ -замкнутое продолжение форм. Saarbrucken, Germany: LAP, 2014.
8. Никитина Т. Н. Об уравнении Монжа – Ампера на положительном потоке // Тез. докл. международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», Улан-Удэ. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 2015. С. 209–211.
9. Berndtsson B., Sibony N. The $\bar{\partial}$ -equation on a positive current // Invent. math. 2002. V. 147. P. 371–428.
10. Wells R. O. Differential analysis on complex manifolds. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1967.
11. Siu Y-T. Complex-analiticity of harmonic maps, vanishing and Lefschets theorems // J. Diff. Geom. 1982. V. 17. P. 55–138.

Статья поступила 10 августа 2015 г.

Никитина Татьяна Николаевна
Сибирский федеральный университет,
Институт математики и фундаментальной информатики,
пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041
AANick@yandex.ru

УДК 519.632.4+550.832.7

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КАРОТАЖА НА ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРАХ

И. В. Суродина

Аннотация. Рассматриваются прямые задачи электрического каротажа. Приводятся описания полностью параллельных алгоритмов, эффективных для графических процессоров.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, каротаж, моделирование, методы пространств Крылова, предобуславливатель.

I. V. Surodina. Parallel GPU solvers for the solution of direct electric logging problems.

Abstract: The paper concerns the direct problems of electrical logging. The article contains the description of full parallel algorithms for GPU architecture.

Keywords: Poisson equation, logging, simulation, Krylov subspace methods, preconditioner.

Введение

Быстрые решения прямых задач могут служить основой для инверсии некоторых геофизических задач. Одним из современных и перспективных направлений ускорения такого рода задач является использование параллельных вычислений на графических процессорах (GPU). Для получения максимального выигрыша при использовании GPU необходимо организовать вычисления полностью параллельно, учитывая GPU архитектуру. Решение прямых задач электрического каротажа с помощью конечно-разностного или конечно-элементного методов приводит к большим разреженным системам линейных уравнений, которые достаточно часто решают методами сопряженных направлений. Без подходящего предобуславливателя решение таких систем имеет медленную сходимость. Эффективность реализации метода решения во многом будет зависеть от степени параллелизации предобуславливателя. В работе реализован алгоритм, предложенный нами в [1] для построения параллельного предобуславливателя, аппроксимирующего обратную матрицу. Следует отметить, что данный алгоритм требует небольших затрат (или не требует их совсем) на построение предобуславливающей матрицы и организован полностью параллельно. Программы реализованы с использованием библиотеки функций линейной алгебры CUBLAS NVIDIA. В результате получен выигрыш от 10 до 50 раз по времени относительно последовательных вариантов программ в зависимости от размерности сеток и геофизических свойств реальных моделей.

1. Прямая двумерная задача электрического каротажа

Рассмотрим задачу электрического каротажа на примере задачи бокового каротажного зондирования (БКЗ). Пусть в цилиндрической системе координат задано осесимметричное распределение удельной электрической проводимости (УЭП) $\sigma = \sigma(r, z)$. Задача моделирования показаний зондов БКЗ сводится к решению уравнения Пуассона для аномального электрического потенциала $U^a = U - U^0$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma r \frac{\partial U^a}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial U^a}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left((\sigma_0 - \sigma) r \frac{\partial U^0}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\sigma_0 - \sigma) \frac{\partial U^0}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где U — полный искомый электрический потенциал, U^0 — электрический потенциал точечного источника, расположенного в однородной среде с УЭП в начале координат, $U^0 = \frac{I}{4\pi\sigma_0 L}$, I — сила тока, $L = \sqrt{r^2 + z^2}$. При удалении от источника потенциал затухает как $1/L$, поэтому для функции U^a вдали от источников ($r = R$, $z = \pm Z$) можно поставить нулевые граничные условия: $U^a|_{r=R} = 0$, $U^a|_{z=\pm Z} = 0$. Условия на оси скважины определяются из осевой симметрии источника и среды: $\frac{\partial U}{\partial r} = 0$.

В силу осевой симметрии рассмотрим полуплоскость $[0, R] \times [-Z, Z]$, где введем прямоугольную неравномерную координатную сетку [2]:

$$\hat{\omega}_h = \{(r_i, z_j), i = 0, \dots, N_r, j = -N_z, \dots, N_z\}. \quad (2)$$

Рассмотрим на сетке (2) линейное конечномерное пространство H^0 сеточных функций, равных нулю на границе, со скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{i=0}^{N_r} \sum_{j=-N_z}^{N_z} u_{ij} v_{ij} \hat{h}_i^{(r)} \hat{h}_j^{(z)} r_i, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{h}_i^{(r)} &= (h_i^{(r)} + h_{i+1}^{(r)})/2, & h_i^{(r)} &= r_i - r_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N_r, \\ \hat{h}_j^{(z)} &= (h_j^{(z)} + h_{j+1}^{(z)})/2, & h_j^{(z)} &= z_j - z_{j-1}, \quad j = -N_z + 1, \dots, N_z. \end{aligned}$$

На пространстве H^0 определим разностный оператор A :

$$AV = -\frac{1}{r} (\bar{r} a V_{\bar{r}})_{\bar{r}} - (b V_{\bar{z}})_{\bar{z}}, \quad (4)$$

где $V, a, b \in H^0$,

$$\begin{aligned} a(i, j) &= \sigma(r_i - h_i^{(r)}/2, z_j + h_j^{(z)}/2), & b(i, j) &= \sigma(r_i + h_i^{(r)}/2, z_j - h_j^{(z)}/2), \\ (V)_{\bar{r}}(i, j) &= (V_{i,j} - V_{i-1,j})/h_i^{(r)}, & (V)_{\bar{r}}(i, j) &= (V_{i+1,j} - V_{i,j})/h_i^{(r)}, \\ (V)_{\bar{z}}(i, j) &= (V_{i,j} - V_{i,j-1})/h_i^{(z)}, & (V)_{\bar{z}}(i, j) &= (V_{i,j+1} - V_{i,j})/h_i^{(z)}. \end{aligned}$$

С помощью этой дискретизации дифференциальное уравнение (1) заменим разностным уравнением

$$AV = F, \quad (5)$$

где

$$F = \frac{1}{r} (\bar{r} (a - \sigma_0) U_{\bar{r}}^0)_{\bar{r}} + ((b - \sigma_0) U_{\bar{z}}^0)_{\bar{z}}.$$

2. Подготовка системы линейных уравнений к виду, удобному для применения метода сопряженных градиентов

Если упорядочить двумерные векторы V и F , например, по столбцам, вытянув их в одномерные массивы, то уравнение (5) будет представлять систему линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей A и векторами V и F порядка n . Заметим, что в пространстве H^0 оператор A самосопряженный, но решать систему уравнений в таком пространстве неэкономично из-за скалярного произведения (4). Перейдем в пространство \mathbb{R}^n со скалярным произведением $(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$. В пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$ матрица A уже не симметричная.

Для решения системы с такими разреженными матрицами обычно используются методы, связанные с подпространствами Крылова, например стабилизационный метод бисопряженных градиентов Bicg-Stab [3, 4]. В данном случае есть возможность с помощью диагонального преобразования подобия симметризовать матрицу и использовать более экономичные алгоритмы. Для симметризации матрицы применим алгоритм из [5].

Пусть $l = 2N_z - 1$, $m = N_r - 1$. Необходимые и достаточные условия симметризуемости — это условия цикличности элементов матрицы A :

$$\begin{aligned} & a_{(j+1)m+i+1, jm+i+1} a_{jm+i+1, jm+i} a_{jm+i, (j+1)m+i} a_{(j+1)m+i, (j+1)m+i+1} \\ & = a_{jm+i+1, (j+1)m+i+1} a_{(j+1)m+i+1, (j+1)m+i} a_{(j+1)m+i, jm+i} a_{jm+i, jm+i+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

При аппроксимации (4) условия (6) выполняются. Тогда диагональное преобразование подобия $B^{-1/2} A B^{1/2}$, где $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ приводит к симметричной матрице \bar{A} с элементами \bar{a}_{ij} . Элементы матрицы B вычисляются рекуррентно:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_{jm+i+1} &= b_{jm+i} \frac{a_{jm+i+1, jm+i}}{a_{jm+i, (j+1)m+i}}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad j = 1, \dots, l-1, \\ b_{(j+1)m+i} &= b_{jm+1} \frac{a_{(j+1)m+1, jm+1}}{a_{jm+i, (j+1)m+1}}, \quad i = m, \quad j = 1, \dots, l-1. \end{aligned} \quad (7)$$

В итоге получим алгебраическую систему уравнений

$$\bar{A}X = \bar{F}, \quad (8)$$

где $X = B^{-1/2}V$, $\bar{F} = B^{-1/2}F$.

3. Прямая трехмерная задача электрического каротажа

Пусть в цилиндрической системе координат задано произвольное распределение удельной электрической проводимости $\sigma = \sigma(r, \varphi, z)$. Тогда задача моделирования показаний зондов БКЗ сведется к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона для аномального потенциала U^a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma r \frac{\partial U^a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sigma \frac{\partial U^a}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial U^a}{\partial z} \right) \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left((\sigma_0 - \sigma) r \frac{\partial U^0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left((\sigma_0 - \sigma) \frac{\partial U^0}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\sigma_0 - \sigma) \frac{\partial U^0}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

с граничными условиями $U^a|_{r=R} = 0$, $U^a|_{z=\pm Z} = 0$ и условием периодичности $U^a|_{\varphi=0} = U^a|_{\varphi=2\pi}$. Чтобы избежать особенностей, возникающих при $r \rightarrow 0$, воспользуемся сдвинутой по r сеткой, не содержащей $r = 0$, как это предложено в [6]. Рассмотрим цилиндр

$$G = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -Z \leq z \leq Z\}$$

и в нем введем произвольную неравномерную прямоугольную по r , z и равномерную по φ сетку [6]:

$$\hat{\omega}_h = \{(r_i, \phi_k, z_j), i = 0, \dots, N_r, k = 0, \dots, N_k, j = -N_z, \dots, N_z\}. \quad (10)$$

Рассмотрим на сетке (10) линейное конечномерное пространство H^0 сеточных функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{i=0}^{N_r} \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{j=-N_z}^{N_z} u_{ikj} v_{ikj} \bar{h}_i^{(r)} \bar{h}_k^{(\varphi)} \bar{h}_j^{(z)} r_i,$$

$$\bar{h}_i^{(r)} = (h_i^{(r)} + h_{i+1}^{(r)})/2, \quad h_i^{(r)} = r_i - r_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N_r,$$

$$\bar{h}_k^{(\varphi)} = (h_k^{(\varphi)} + h_{k+1}^{(\varphi)})/2, \quad h_k^{(\varphi)} = \varphi_k - \varphi_{k-1}, \quad k = 1, \dots, N_\varphi,$$

$$\bar{h}_j^{(z)} = (h_j^{(z)} + h_{j+1}^{(z)})/2, \quad h_j^{(z)} = z_j - z_{j-1}, \quad j = -N_z + 1, \dots, N_z.$$

На пространстве сеточных функций H^0 определим разностный оператор A :

$$AV = -\frac{1}{r}(\bar{r}aV_{\bar{r}})_{\bar{r}} - \frac{1}{r^2}(cV_{\bar{\varphi}})_{\bar{\varphi}} - (bV_{\bar{z}})_{\bar{z}}, \quad (11)$$

где $V, a, b, c \in H^0$,

$$a(i, k, j) = \sigma(r_i - h_i^{(r)}/2, \varphi_k + h_k^{(\varphi)}/2, z_j + h_j^{(z)}/2),$$

$$b(i, j, k) = \sigma(r_i + h_i^{(r)}/2, \varphi_k + h_k^{(\varphi)}/2, z_j - h_j^{(z)}/2),$$

$$c(i, j, k) = \sigma(r_i + h_i^{(r)}/2, \varphi_k - h_k^{(\varphi)}/2, z_j + h_j^{(z)}/2).$$

Операторы $(V)_{\bar{r}}$, $(V)_{\bar{\varphi}}$, $(V)_{\bar{z}}$, $(V)_{\hat{r}}$, $(V)_{\hat{\varphi}}$, $(V)_{\hat{z}}$ определяются аналогично двумерному случаю. В итоге получим уравнение

$$AV = F, \quad (12)$$

где

$$F = \frac{1}{r}(\bar{r}(a - \sigma_0)U_{\bar{r}}^0)_{\bar{r}} + \frac{1}{r^2}((c - \sigma_0)U_{\bar{\varphi}}^0)_{\bar{\varphi}} + ((b - \sigma_0)U_{\bar{z}}^0)_{\bar{z}}.$$

Алгоритм симметризации естественным образом обобщается на трехмерный случай, так что система (11) может быть также симметризована с помощью диагонального преобразования подобия $\bar{A} = B^{-1/2}AB^{1/2}$. В итоге аналогично (8) получим

$$\bar{A}X = \bar{F}, \quad (13)$$

где $X = B^{1/2}V$, $\bar{F} = B^{1/2}F$.

4. Метод решения

Для решения систем линейных уравнений (8) и (13) был выбран метод сопряженных градиентов (Conjugate Gradient (CG)), поскольку матрицы данных систем симметричны и положительно определены. Пусть x_n — приближенное решение системы $Ax = b$ на n -м шаге. Тогда n -й соответствующий вектор невязки r_n ($:= b - Ax_n$) и вспомогательный вектор p_n могут быть вычислены по следующим формулам:

$$r_0 = b - Ax_0, \quad p_0 = r_0, \quad (14)$$

$$r_n = r_{n-1} - \alpha_{n-1}AP_{n-1}, \quad (15)$$

$$p_n = r_n + \beta_{n-1}AP_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

$$\alpha_n = \frac{r_n^T r_n}{p_n^T Ap_n}, \quad \beta_n = \frac{r_{n+1}^T r_{n+1}}{r_n^T r_n}. \quad (17)$$

Заметим, что все операции в формулах (14)–(17) матрично-векторные и хорошо распараллеливаются на GPU. Операции сложения векторов, умножения их на константу и скалярного умножения векторов можно выполнить, используя стандартную библиотеку функций CUBLAS NVIDIA. Для эффективного умножения матрицы на вектор была написана специальная процедура. Можно, конечно, воспользоваться аналогичной процедурой из библиотеки CUSPARSE NVIDIA, но хранить в нашем случае матрицу в CSR формате неэффективно. Удобно хранить лишь значения элементов матрицы в отдельных массивах, ведь мы знаем структуру матрицы и можем это использовать при умножении матрицы на вектор. Однако скорость сходимости в методе CG будет невысокой. Максимальное ускорение, которого можно достичь на GPU, составит лишь 5–6 раз. Поэтому данный метод нужно использовать с предобуславливателем.

Идея предобуславливания состоит в том, что система $Ax = b$ заменяется системой $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ или $AM^{-1}y = b$, $x = M^{-1}y$, где матрица $M^{-1}A$ или AM^{-1} имеет значительно меньшее число обусловленности, чем сама матрица A , и система

$$Mz = r \quad (18)$$

для вспомогательного вектора z должна быть легко разрешима.

АЛГОРИТМ ПРЕДОБУСЛОВЛЕННОГО МЕТОДА СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ (PCG) (Preconditioned Conjugate Gradient)

Initialization: $x_0, \quad r_0 = b - Ax_0, \quad Mz_0 = r_0, \quad p_0 = z_0;$

$$\begin{aligned} (1) \quad & q_i = Ap_i, \quad \alpha_i = \frac{z_i^T r_i}{p_i^T q_i}; \\ (2) \quad & x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i, \quad r_{i+1} = r_i - \alpha_i q_i; \\ (3) \quad & Mz_{i+1} = r_{i+1}; \\ (4) \quad & \beta_i = \frac{z_{i+1}^T r_{i+1}}{z_i^T r_i}, \quad p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i p_i. \end{aligned} \quad (19)$$

В случае реализации на GPU на матрицу M налагается еще и требование высокой параллелизации не только решения системы (18), но и построения

самой матрицы M . В работе использован оригинальный подход построения предобуславливающей матрицы на основе аппроксимации обратной матрицы, предложенный в [1]. Данный подход основан на алгоритме Хотеллинга — Шульца [7, 8] и отличается полной параллелизацией. Суть его состоит в следующем. Пусть матрица D_0 — начальное приближение к обратной матрице. Если

$$\|R_0\| \leq k < 1, \quad R_0 = E - AD_0, \quad (20)$$

то можно построить итерационный процесс приближения к обратной матрице:

$$D_1 = D_0 + D_0(E - AD_0), \quad (21)$$

$$D_2 = D_1 + D_1(E - AD_1) = 2D_1 - D_1AD_1D_{m+1} = D_m + D_m(E - AD_m). \quad (22)$$

Это процесс сходящийся, если выполнено условие (20) и скорость сходимости описывается формулой [9]

$$\|D_n - A^{-1}\| \leq \|D_0\| \frac{k^{2^n}}{1 - k}. \quad (23)$$

Важное свойство данного процесса [9] — сохранение симметрии всех матриц D_m : если $A = A^T$ и $D_0 = D_0^T$, то $D_m = D_m^T$.

В качестве стартового приближения к обратной матрице был взят предобуславливатель Якоби $D_0 = \text{diag}(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1})$. В нашем случае это возможно, так как в результате аппроксимаций уравнений (1) и (9) получаем матрицы со слабым диагональным преобладанием. Заметим, что матрицу D_1 легко вычислить:

$$d_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}, \quad d_{i,i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{a_{i+1,i+1}a_{ii}}, \quad d_{i,i+m} = \frac{a_{i,i+m}}{a_{i+m,i+m}a_{ii}}. \quad (24)$$

Структура матрицы D_1 будет такой же, как и сама исходная матрица. Этот факт очень полезен, так как можно использовать уже имеющуюся процедуру умножения матрицы на вектор. Чтобы уменьшить число арифметических действий в алгоритме PCG, можно предварительно масштабировать системы (8), (13) так, чтобы диагональные элементы матрицы A стали равными 1:

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot a_{ij} \cdot \frac{1}{a_{jj}}, \quad i, j, = 1, \dots, n.$$

Эта процедура предпочтительнее, чем использование предобуславливателя Якоби в методе сопряженных градиентов, поскольку при одинаковом числе итераций для достижения заданной точности требуется меньшее число арифметических действий. Симметрия матрицы при этом сохраняется. Формулы для вычисления предобуславливателя D_1 упростятся. Как легко заметить из (8), диагональные элементы матрицы D_1 станут равными 1, а внедиагональные элементы будут равны противоположным по знаку аналогичным элементам из масштабированной матрицы A . Для уменьшения числа итераций в PCG можно применить и более качественные (по мере приближения к обратной матрице) предобуславливатели D_2, D_3 . Отметим, что матрица D_2 для двумерного случая имеет 25 диагоналей, а D_3 — 113 диагоналей. Вычислять такие матрицы и тем более хранить их на GPU не следует. В методе сопряженных градиентов нас

не интересуют сами предобуславливающие матрицы, интересен лишь результат умножения матрицы на вектор. Поэтому воспользуемся формулой (22). Тогда на выполнение 3-го шага в методе PCG потребуется три умножения матрицы на вектор и одна операция сложения векторов с умножением на константу. Для D_3 напишем следующие выражения:

$$D_3 = D_2 + D_2(E - AD_2) = (2D_1 - D_1AD_1)(2E - A(2D_1 - D_1AD_1)) \\ = 2(2D_1 - D_1AD_1) - (2D_1 - D_1AD_1)A(2D_1 - D_1AD_1). \quad (25)$$

Из формул (25) следует, что для выполнения шага 3 в алгоритме PCG необходимо выполнить семь умножений матрицу на вектор и скалярные операции типа сложения векторов и умножения на константу. Все операции полностью параллельны, используем библиотеку CUBLAS CUDA NVIDIA и написанную ранее свою процедуру умножения матрицы на вектор. Какой же из предобуславливателей предпочтительнее? Для ответа на этот вопрос были проведены численные эксперименты. В качестве критерия выбора оптимального предобуславливателя взято минимальное количество времени, затраченное на решение задачи с заданной точностью.

5. Численные эксперименты

Для двумерной задачи были протестированы предобуславливатели Якоби (бралась масштабированная система), D_1 , D_2 , D_3 в методе CG.

Рассмотрим типичную модель с осесимметричным распределением электропроводности (рис. 1).

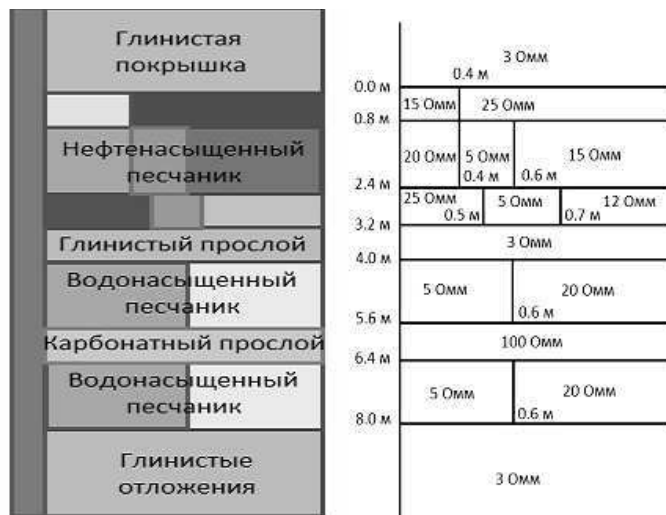


Рис. 1. Модель среды.

Среда разделена на латерально неоднородные слои системой плоско-параллельных границ. Имеется скважина радиуса 0.108 м с сопротивлением 2 Ом м. В некоторых слоях возможно наличие нескольких зон — зоны проникновения бурового раствора и окаймляющей зоны. Сопротивления пластов варьируются

от 3 до 100 Ом м. Для одного из положений зонда в скважине были рассчитаны числа обусловленности (табл. 1) исходной (симметризованной) матрицы A , AD_0 , AD_1 , AD_2 , AD_3 , $n = 17136$. Из табл. 1 видно, что числа обусловленности убывают. Следует ожидать и уменьшения количества итераций в методе PCG.

Таблица 1. Число обусловленности AM^{-1}

Матрица	Число обусловленности
A	$4.5377 * 10^7$
AD_0	$3.0542 * 10^5$
AD_1	$7.6542 * 10^4$
AD_2	$3.8271 * 10^4$
AD_3	$1.9135 * 10^4$

Таблица 2. Двумерная задача.

Результаты расчетов метода CG с различными предобуславливателями

Метод	$n = 17139$		$n = 37846$		$n = 76136$	
	итерации	время, с	итерации	время, с	итерации	время, с
CG (scal)	2063	0.22	3412	0.41	4427	0.65
D_1	1030	0.094	1706	0.20	2274	0.35
$D_2 (D_1)$	729	0.085	1205	0.18	1577	0.31
$D_3 (D_1)$	505	0.075	846	0.17	1112	0.33
IC (Cusp.)	96	0.7	160	1.92	212	4.46

Расчет показаний зондов БКЗ ведется для нескольких зондов (5–7) одновременно, на одной сетке. Иногда для интерпретации нужны не все зонды, поэтому используем несколько расчетных сеток. Расчеты, представленные в табл. 2, проведены для трех сеток. Поскольку задачу нужно решить с заданной точностью — погрешность не более 3% относительно точных решений, известных для радиально-слоистых сред в достаточно широком диапазоне изменения электропроводности, сетка строится достаточно густой около приемных точек. Первая сетка ($n = 17139$) не учитывает самого короткого (0.3 м) и самого длинного (8 м) зондов БКЗ. Вторая сетка ($n = 37846$) не учитывает длинного зонда, а в третьей ($n = 76136$) все зонды описываются хорошо. Все расчеты проведены на кластере НКС-30Т+GPU с использованием 1 процессора Xeon X5670 (2.93 ГГц) и 1 видеокарты NVIDIA Tesla M 2090 на архитектуре Fermi (compute capability 2.0).

Рассмотрим результаты расчетов для одного положения зонда в модели 1. В табл. 2 приведены расчеты для метода CG с различными предобуславливателями. Итерации проводились до тех пор, пока относительная норма невязки не достигала $1.d - 7$. Из табл. 2 видно, что при всех N с улучшением качества предобуславливания число итераций уменьшается. Время, затраченное на

решение системы, также уменьшается, но при $n = 76136$ для CG с D_3 увеличивается. Это связано с тем, что на шаге 3 необходимо выполнить семь умножений матрицы на вектор. Эти операции становятся более затратными по времени, чем использование предобуславливателя D_2 , дающего большее число итераций, но требующее на данном шаге три матрично-векторных умножения. В последней строке таблицы приведены расчеты с предобуславливателем IC (неполное разложение Холецкого) из библиотеки NVIDIA CUSPARSE. В этом варианте использовался CSR формат для хранения матрицы и процедура умножения матрицы на вектор из библиотеки CUSPARSE. Из таблицы видно, что качественно предобуславливатель IC лучше, чем все предыдущие: итераций в 5 раз меньше, чем с D_3 . Однако время расчетов на порядок больше, чем с предобуславливателем D_3 .

Практический интерес вызывает расчет во многих точках положения зонда в скважине относительно модели (при этом расчетная сетка сдвигается вместе с зондом). При расчете в каждой следующей точке по глубине разумно использовать в качестве стартового уже найденное решение, что позволит уменьшить число итераций на новом шаге. Как показал опыт расчетов, в большинстве случаев это эффективно, особенно если в модели присутствуют достаточно мощные слои. В табл. 3 представлены сравнительные расчеты 155 точек профиля для модели 1 методом CG (с предобуславливателем D_3), реализованном на GPU и прямым методом решения — программой PARDISO из библиотеки Intel MKL. PARDISO на сегодняшний день является одной из лучших программ по быстродействию и точности решения, но для сравнительно небольших по размерности задач.

Таблица 3. Двумерная задача. Расчеты для 155 точек профиля. Сравнение с PARDISO

Метод	$n = 17139$	$n = 37846$	$n = 76136$
CG (D_3)	13	22	39
Pardiso	13	29	66

В табл. 3 приведено общее время решения всей задачи (в секундах). Здесь необходимо учесть, что на инициализацию видеокарты на кластере НКС-30Т затрачивается 7–8 с. Поэтому реально время, затраченное на решение, меньше табличного. Если не учитывать время инициализации видеокарты, то версия на GPU для всех сеток быстрее в 2 раза, чем программа PARDISO на CPU. Заметим, что вычисления на GPU велись с простой точностью, на CPU — с двойной.

В табл. 4 представлены результаты расчета системы уравнений для трехмерной задачи при одном положении зонда для модели 1, но с наклонной скважиной. Расчеты проведены для двух сеток. Из табл. 4 видно, что с улучшением качества предобуславливателя число итераций снижается, но уже для предобуславливателя D_2 время решения начинает возрастать.

Таблица 4. Трехмерная задача.

Результаты расчетов метода CG с различными предобуславливателями

Метод	$n = 857480$		$n = 1458600$	
	итерации	время, с	итерации	время, с
CG (scal)	1816	1.45	2463	3.09
D_1	877	0.96	1203	2.09
$D_2 (D_1)$	606	1.07	846	2.39

По результатам численных экспериментов для двумерных задач был выбран предобуславливатель D_3 , для трехмерных — D_1 . Отметим, что когда система линейных уравнений предварительно масштабирована, построение D_1 не требует ни ресурсов по памяти, ни по времени. В результате полной параллелизации даже при достаточно большом количестве итераций удалось получить эффективные алгоритмы. Отметим также их простоту и надежность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Созданы алгоритмы и программы для быстрого расчета на GPU показаний зондов бокового каротажного зондирования. В итоге получен выигрыш от 10 до 50 раз по времени относительно последовательных вариантов программ (для CPU) [10, 11] в зависимости от размерности сеток и геофизических свойств реальных моделей. На основе двумерной программы создана программа инверсии [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Labutin I. B., Surodina I. V.* Algorithm for sparse approximate inverse preconditioners in Conjugate Gradient Method // *Reliable Computing*. 2013. V. 19, N 1. P. 120–126.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1979.
3. *Barret R., Berry M., Chan T. F., et al.* Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
4. *Van der Vorst H. A.* Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1992. V. 13. P. 631–644.
5. *Кузнецов Ю. И., Агапитова Н. С.* Математические основы моделирования на ЭВМ. Ю.-Сахалинск: Изд-во ЮСИЭПИ, 2003.
6. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. *Hotelling H.* Analysis of a complex of statistical variables into principal components // *J. Educ. Psych.* 1933. P. 417–441.
8. *Schulz G.* Iterative Berechnung der reziproken Matrix // *Z. Angew. Math. Mech.* 1933. Bd 13. S. 57–59.
9. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л.: Физматгиз, 1963.
10. *Дашевский Ю. А., Суродина И. В., Эпов М. И.* Трехмерное математическое моделирование системы мониторинга электрических свойств скважинного флюида // *Междунар. конф. «Математические методы в геофизике»*. Новосибирск, 2003. Ч. 1. С. 268–272.
11. *Дашевский Ю. А., Суродина И. В., Эпов М. И.* Квазитрехмерное математическое моделирование диаграмм неосесимметричных зондов постоянного тока в анизотропных разрезах // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2002. Т. 5, № 3. С. 76–91.
12. *Nikitenko M. N., Surodina I. V., Mikhaylov I. V., Glinskikh V. N., Suhorukova C. V.* Formation evaluation via 2D processing of induction and galvanic logging data using high-performance computing // *Abstr. 77th EAGE Conf. Exhibition 2015 (Madrid, Spain, June 1–4, 2015)*.

Madrid, 2015. P. 1–5.

Статья поступила 4 сентября 2015 г.

Суродина Ирина Владимировна
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
sur@ommfao1.sccc.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ
НАПРЯЖЕННО–ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ В СЛОИСТЫХ
ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ
Ю. М. Волчков, Е. Н. Полтавская

Аннотация. С использованием модифицированных уравнений упругого слоя построены уравнения слоистых ортотропных пластин. Выполнено численное моделирование напряженно-деформированного состояния в однослойной, двухслойной и трехслойной пластинах. Проведено сравнение полученных в работе численных решений с аналитическими решениями.

Ключевые слова: слоистые ортотропные пластины, модифицированные уравнения упругого слоя.

Yu. M. Volchkov, E. N. Poltavskaja. Simulation of stress-strain state in layered orthotropic plates.

Abstract: In this paper, using the modified equations of elastic layer equations of orthotropic layered plates are constructed. The numerical simulation of stress-strain state in a single-layer, two-layer and three-layer plates are fulfilled. A comparison of the numerical solutions with analytical solutions is presented.

Keywords: layered orthotropic plates, modified equations of the elastic layer.

Введение. При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной (теории оболочек) либо используются гипотезы кинематического и силового характера [1], либо применяются разложения решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций [2–6]. Гипотезы кинематического и силового характера накладывают достаточно сильные ограничения на напряженно-деформированное состояние и поэтому, как правило, с использованием таких гипотез уравнения теории оболочек строятся для случая, когда на лицевых поверхностях оболочки заданы напряжения. Решение контактных задач на основе таких уравнений зачастую приводит к эффектам нефизического характера. Применение разложений решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций позволяет построить уравнения оболочек в различных приближениях. При этом одним из основных вопросов является следующий: на основе каких дополнительных предположений строится то или иное приближение; а именно, сколько членов в разложениях нужно удерживать при построении данного приближения? Поскольку полиномы Лежандра образуют полную систему функций в пространстве $L_2[-1, 1]$, именно эта система функций обычно используется при построении уравнений теории оболочек.

В данной работе на основе подходов, изложенных в работах [4–13], построены дифференциальные уравнения ортотропных слоистых оболочек.

1. Уравнения плоской задачи теории упругости. При записи уравнений задачи будем использовать прямоугольную декартову систему координат x_1, x_2, x_3 . В дальнейшем индексы 1, 2, 3 соответствуют координатам x_1, x_2, x_3 .

В плоской задаче искомыми функциями являются: компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$, компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$, компоненты вектора перемещений u_1, u_2 . Компоненты тензора напряжений σ_{13}, σ_{23} и компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ полагаются равными нулю. Все искомые величины являются функциями независимых переменных x_1, x_2 . В задаче о плоском напряженном состоянии компонента тензора напряжений σ_{33} полагается равной нулю, а компонента тензора деформаций ε_{33} может быть найдена после решения задачи. Выпишем уравнения плоской задачи теории упругости.

Уравнения равновесия бесконечно малого элемента записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_{11}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2} + f_1(x_1, x_2) = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}(x_1, x_2)}{\partial x_2} + f_2(x_1, x_2) = 0. \quad (1b)$$

Компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты вектора перемещений по соотношениям Коши:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \quad (2)$$

В данной работе исследуется напряженно-деформированное состояние пластин из ортотропного материала. Материал, у которого имеются три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, называется *ортотропно анизотропным* или *ортотропным*. Ортотропными материалами, используемыми в промышленности, являются, например, натуральная древесина, прокатный листовой бетон, металл и др. [14]. Ортотропными являются некоторые типы композитных материалов. В частности, углепластик является ортотропным материалом. Углепластики — это полимерные композиционные материалы из углеродных волокон, симметрично расположенных в матрице из полимерных, например, эпоксидных смол. Такие материалы имеют высокую прочность, жесткость и малую массу. Они прочнее стали, но намного легче ее. Благодаря таким свойствам углепластики широко используются во многих отраслях промышленности.

В случае плоского напряженного состояния соотношения закона Гука для ортотропного материала записываются в следующем виде [14]:

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) - \alpha_1 \left(\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (3a)$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) - \alpha_2 \left(\frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \gamma_1 \frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) = 0, \quad (3b)$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2) - g_{12} \left(\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right), \quad (3c)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \alpha_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \gamma_1 = \nu_{12}, \quad \gamma_2 = \nu_{21}.$$

В соотношения (3а)–(3с) входят следующие независимые постоянные материала: E_1 — модуль упругости в направлении 1, E_2 — модуль упругости в направлении 2, ν_{12} — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие при растяжении в направлении 1. Еще две постоянные входят в выражение для деформации ε_{33} , если ее определять после решения задачи о плоском напряженном состоянии. Краевую задачу будем решать в прямоугольной области (слое) $\Omega : [0 \leq x_1 \leq l, -h \leq x_2 \leq +h]$.

На границе области ставятся следующие краевые условия.

На боковых поверхностях слоя:

$$a_1 u_1(0, x_2) + b_1 \sigma_{11}(0, x_2) = \varphi_0(x_2), \quad a_2 u_2(l, x_2) + b_2 \sigma_{21}(l, x_2) = \varphi_l(x_2). \quad (4)$$

На лицевых поверхностях слоя:

$$c_1 u_1(x_1, \pm h) + d_1 \sigma_{12}(x_1, \pm h) = \varphi_{\pm h}(x_1), \quad c_2 u_2(x_1, \pm h) + d_2 \sigma_{22}(x_1, \pm h) = \varphi_{\pm h}(x_1) \quad (5)$$

Таким образом, ставится следующая задача: найти функции σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} , ε_{11} , ε_{12} , ε_{22} , u_1 , u_2 , удовлетворяющие в области Ω уравнениям (1а), (1б), (2), (3а)–(3с) и краевым условиям (4), (5).

2. Переход к безразмерным величинам. Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x_1}{l}, \quad \zeta = \frac{x_2}{h}, \quad (\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{12}, \hat{\sigma}_{22}) = \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_0}, \frac{\sigma_{12}}{\sigma_0}, \frac{\sigma_{22}}{\sigma_0} \right), \\ \hat{u}_1 &= \frac{u_1}{h}, \quad \hat{u}_2 = \frac{u_2}{h}, \quad \hat{f}_1 = \frac{f_1 h}{\sigma_0}, \quad \hat{f}_2 = \frac{f_2 h}{\sigma_0}, \quad \eta = \frac{h}{l}, \end{aligned} \quad (6)$$

где σ_0 — некоторое характерное напряжение.

Запишем уравнения задачи в безразмерных переменных. Для простоты записи уравнений в безразмерных переменных символ « $\hat{}$ » опущен.

Уравнения равновесия в безразмерных переменных:

$$\eta \frac{\partial \sigma_{11}(\xi, \zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + f_1(\xi, \zeta) = 0, \quad (7a)$$

$$\eta \frac{\partial \sigma_{21}(\xi, \zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + f_2(\xi, \zeta) = 0. \quad (7b)$$

Соотношения закона Гука в безразмерных переменных:

$$\sigma_{11}(\xi, \zeta) - \alpha_1 \left(\eta \frac{\partial u_1(\xi, \zeta)}{\partial \xi} + \gamma_2 \frac{\partial u_2(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \right) = 0, \quad (8a)$$

$$\sigma_{22}(\xi, \zeta) - \alpha_2 \left(\frac{\partial u_2(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + \gamma_1 \eta \frac{\partial u_1(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (8b)$$

$$\sigma_{12}(\xi, \zeta) - g_{12} \left(\frac{\partial u_1(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + \eta \frac{\partial u_2(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (8c)$$

$$\sigma_{21}(\xi, \zeta) - g_{12} \left(\frac{\partial u_1(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + \eta \frac{\partial u_2(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \right) = 0. \quad (8d)$$

Соотношения (8с) и (8d) в силу симметричности тензора напряжений представляют собой одно и то же соотношение. Однако такая запись целесообразна для дальнейшего изложения.

Соотношения Коши:

$$\varepsilon_{11} = \eta \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \eta \frac{\partial u_2}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial \zeta}. \quad (9)$$

3. Аппроксимация напряжений и смещений отрезками полиномов Лежандра. При построении уравнений плоского слоя уравнения равновесия элемента, бесконечно малого в направлениях x_1, x_2 и единичной ширины в направлении x_3 (7a)–(7b), заменим уравнениями равновесия элемента, бесконечно малого в направлении x_1 , конечной ширины $2h$ в направлении x_2 и единичной ширины в направлении x_3 :

$$\int_{-1}^1 \left(\eta \frac{\partial \sigma_{11}(\xi, \zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + f_1(\xi, \zeta) \right) d\zeta = 0, \quad (10)$$

$$\int_{-1}^1 \left(\eta \frac{\partial \sigma_{11}(\xi, \zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + f_1(\xi, \zeta) \right) \zeta d\zeta = 0, \quad (11)$$

$$\int_{-1}^1 \left(\eta \frac{\partial \sigma_{21}(\xi, \zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + f_2(\xi, \zeta) \right) d\zeta = 0. \quad (12)$$

Напряжения и смещения будем аппроксимировать отрезками полиномов Лежандра. В соответствии с уравнениями (10)–(12) напряжения и массовые силы аппроксимируются следующими отрезками полиномов Лежандра:

$$\sigma_{11}(\xi, \zeta) = t_1(\xi) + m_1(\xi)P_1(\zeta), \quad (13)$$

$$\sigma_{22}(\xi, \zeta) = t_2(\xi) + m_2(\xi)P_1(\zeta), \quad (14)$$

$$\sigma_{12}(\xi, \zeta) = t_{12}(\xi) + m_{12}(\xi)P_1(\zeta) + r_{12}(\xi)P_2(\zeta), \quad (15)$$

$$\sigma_{21}(\xi, \zeta) = t_{12}(\xi), \quad (16)$$

$$f_1(\xi, \zeta) = q_{10}(\xi) + q_{11}(\xi)P_1, \quad f_2(\xi, \zeta) = q_{20}(\xi). \quad (18)$$

В (13)–(18) $P_1(\zeta), P_2(\zeta)$ — полиномы Лежандра, образующие полную ортонормированную систему функций на отрезке $[-1, 1]$.

Напряжения σ_{12} и σ_{21} аппроксимируются различными отрезками полиномов, так как в уравнения равновесия входят производные от этих функций по различным координатам. Такая аппроксимация учитывает различную изменчивость напряженно-деформированного состояния по пространственным координатам в тонкостенных конструкциях.

Аппроксимации для смещений выбираются так, чтобы выражения, содержащиеся в круглых скобках в соотношениях (8a)–(8d) имели тот же порядок

аппроксимации по ζ , что и напряжения. Поэтому аппроксимируем соотношения (9) следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = \eta \frac{\partial u'_1(\xi, \zeta)}{\partial \xi}, \quad 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u''_1(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + \eta \frac{\partial u'_2(\xi, \zeta)}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u''_2(\xi, \zeta)}{\partial \zeta}, \quad (19)$$

где

$$u'_1(\xi, \zeta) = u_1^0(\xi) + u_1^1(\xi)P_1(\zeta), \quad (20)$$

$$u''_1(\xi, \zeta) = u_1^0(\xi) + u_1^1(\xi)P_1(\zeta) + u_1^2(\xi)P_2(\zeta) + u_1^3(\xi)P_3(\zeta), \quad (21)$$

$$u'_2(\xi, \zeta) = u_2^0(\xi), \quad (22)$$

$$u''_2(\xi, \zeta) = u_2^0(\xi) + u_2^1(\xi)P_1(\zeta) + u_2^2(\xi)P_2(\zeta). \quad (23)$$

Для смещений u_1 u_2 используются по две аппроксимации. Это обусловлено тем, что в соотношения Коши входят производные от этих функций как по ξ , так и по ζ .

С учетом введенных аппроксимаций для напряжений и смещений соотношения (8a)–(8d) заменяются следующими соотношениями:

$$\int_{-1}^1 \left(\sigma_{11}(\xi, \zeta) - \alpha_1 \left(\eta \frac{\partial u_1(\xi, \zeta)}{\partial \xi} + \gamma_2 \frac{\partial u_2(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \right) \right) P_0(\zeta) d\zeta = 0, \quad (24a)$$

$$\int_{-1}^1 \left(\sigma_{11}(\xi, \zeta) - \alpha_1 \left(\eta \frac{\partial u_1(\xi, \zeta)}{\partial \xi} + \gamma_2 \frac{\partial u_2(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \right) \right) P_1(\zeta) d\zeta = 0, \quad (24b)$$

$$\int_{-1}^1 \left(\sigma_{22}(\xi, \zeta) - \alpha_2 \left(\frac{\partial u_2(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + \gamma_1 \eta \frac{\partial u_1(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \right) \right) P_0(\zeta) d\zeta = 0, \quad (24c)$$

$$\int_{-1}^1 \left(\sigma_{22}(\xi, \zeta) - \alpha_2 \left(\frac{\partial u_2(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + \gamma_1 \eta \frac{\partial u_1(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \right) \right) P_1(\zeta) d\zeta = 0, \quad (24d)$$

$$\int_{-1}^1 \left(\sigma_{12}(\xi, \zeta) - g_{12} \left(\frac{\partial u_1(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + \eta \frac{\partial u_2(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \right) \right) P_0(\zeta) d\zeta = 0, \quad (24e)$$

$$\int_{-1}^1 \left(\sigma_{12}(\xi, \zeta) - g_{12} \left(\frac{\partial u_1(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + \eta \frac{\partial u_2(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \right) \right) P_1(\zeta) d\zeta = 0, \quad (24f)$$

$$\int_{-1}^1 \left(\sigma_{21}(\xi, \zeta) - g_{12} \left(\frac{\partial u_1(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} + \eta \frac{\partial u_2(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \right) \right) P_2(\zeta) d\zeta = 0. \quad (24g)$$

Краевые условия на лицевых поверхностях (5) для коэффициентов отрезков полиномов Лежандра принимают следующий вид:

$$c_1 (u_1^0(\xi) \pm u_1^1(\xi) + u_1^2(\xi) \pm u_1^3(\xi)) + d_1 (t_{12}(\xi) \pm m_{12}(\xi) + r_{12}(\xi)) = \varphi_{\pm h}(\xi), \quad (25)$$

$$c_2 (u_2^0(\xi) \pm u_2^1(\xi) + u_2^2(\xi)) + d_2 (t_2(\xi) \pm m_2(\xi)) = \varphi_{\pm h}(\xi). \quad (26)$$

Уравнения (10)–(12), (24a)–(24g), (25), (26) представляют собой систему дифференциальных и конечных уравнений относительно коэффициентов отрезков полиномов Лежандра для напряжений и смещений:

$$\eta t'_1 + m_{12} + q_{10} = 0, \quad (27a)$$

$$\eta m'_1 + 3r_{12} + q_{11} = 0, \quad (27b)$$

$$\eta t'_{12} + m_2 + q_{20} = 0, \quad (27c)$$

$$\alpha_1(\gamma_2 v_1 + \eta u'_0) - t_1 = 0, \quad (27d)$$

$$\alpha_1(3\gamma_2 v_2 + \eta u'_1) - m_1 = 0, \quad (27e)$$

$$\alpha_2(v_1 + \gamma_1 \eta u'_0) - t_2 = 0, \quad (27f)$$

$$\alpha_2(3v_2 + \gamma_1 \eta u'_1) - m_2 = 0, \quad (27g)$$

$$g_{12}(u_1 + u_3 + \eta v'_0) - t_{12} = 0, \quad (27h)$$

$$m_{12} - 3g_{12}u_2 = 0, \quad (27i)$$

$$r_{12} - 5g_{12}u_3 = 0, \quad (27j)$$

$$\sigma_{22}^{\pm} = t_2 \pm m_2, \quad u_2^{\pm} = u_2^0 \pm u_2^1 + u_2^2, \quad (27k)$$

$$\sigma_{12}^{\pm} = t_{12} \pm m_{12} + r_{12}, \quad u_1^{\pm} = u_1^0 \pm u_1^1 + u_1^2 \pm u_1^3, \quad (27l)$$

где $\sigma_{22}^{\pm}, u_2^{\pm}, \sigma_{12}^{\pm}, u_1^{\pm}$ — заданные функции; штрих обозначает производную по переменной ξ .

Уравнения (27a)–(27l) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $u_0(\xi), u_1(\xi), v_0(\xi), t_{11}(\xi), m_{11}(\xi), t_{12}(\xi)$.

Если ввести вектор

$$\mathbf{Z} = [u_0, u_1, v_0, t_{11}, m_{11}, t_{12}]^T,$$

то систему дифференциальных уравнений ортотропного слоя можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{H}\mathbf{Z} + \mathbf{F}, \quad (28)$$

где $\mathbf{Z} = [u_0, u_1, v_0, t_{11}, m_{11}, t_{12}]^T$, \mathbf{H} — квадратная матрица 6×6 , \mathbf{F} — вектор из шести компонент.

Из краевых условий на торцах поверхностей слоя (4) следуют краевые условия при $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_1$ для системы (28), которые можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{C}, \quad (29)$$

где

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} t_{11} \\ m_{11} \\ t_{12} \end{Bmatrix},$$

\mathbf{A}, \mathbf{B} — заданные матрицы порядка 3×3 и \mathbf{C} — заданный вектор с тремя компонентами. Матрица \mathbf{H} и вектор \mathbf{F} зависят от вида краевых условий на лицевых поверхностях слоя. Компоненты вектора \mathbf{Z} имеют следующий физический

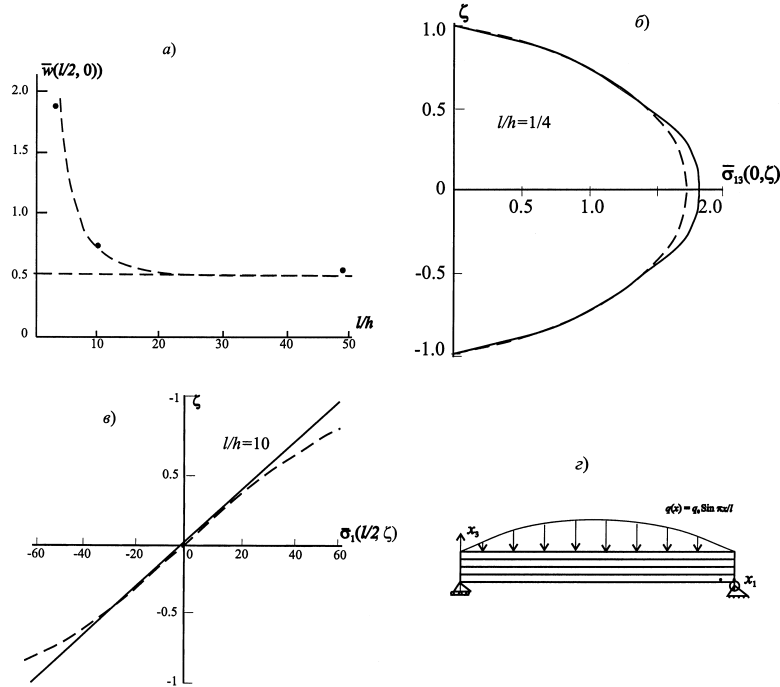


Рис. 1. а) зависимость прогиба в середине балки от параметра l/h ;
 б) распределение касательных напряжений в торцевом сечении балки;
 в) распределение нормальных напряжений в среднем сечении балки;
 г) однослойная балка; сплошные линии и точки — решение по уравнениям слоя, штриховые линии — аналитическое решение.

смысл: u_0 — осредненное по толщине слоя продольное перемещение, u_1 — поворот поперечного сечения, v_0 — осредненное по толщине слоя поперечное перемещение, t_1 — продольная сила, t_{12} — перерезающая сила, m_1 — изгибающий момент.

4. Алгоритм вычисления напряженно-деформированных состояний в слоистых пластинах. Основным преимуществом построенных уравнений упругого ортотропного слоя является то, что они допускают постановку условий на лицевых поверхностях как в смещениях, так и в напряжениях, при этом порядок системы дифференциальных уравнений не меняется. Это позволяет построить уравнения слоистых пластин. В каждом слое используется система уравнений (28). На границах между слоями ставятся условия сопряжения — условия непрерывности нормальных напряжений и смещений на границах между слоями.

Так, например, для трехслойной пластины получим систему дифференциальных уравнений 18-го порядка. Матрицы \mathbf{H} в каждом слое будут различными, так как условия на лицевых поверхностях слоев будут различных типов. Для решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений 18-го порядка в данной работе использовался метод ортогональной прогонки.

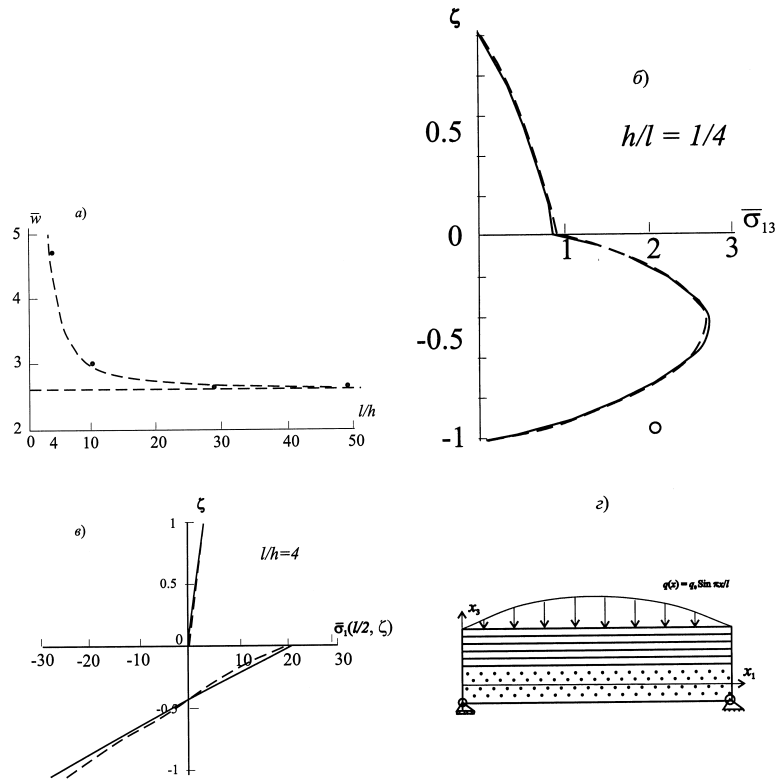


Рис. 2. а) зависимость прогиба в середине балки от параметра l/h ;
 б) распределение касательных напряжений в торцевом сечении балки;
 в) распределение нормальных напряжений в среднем сечении балки;
 г) двухслойная балка; сплошные линии и точки - решение по уравнениям слоя,
 штриховые линии — аналитическое решение.

5. Сравнение численного решения задачи о напряженно-деформированном состоянии слоистых ортотропных пластин с аналитическими решениями. В работах [15–17] построены аналитические решения задач о цилиндрическом изгибе многослойных балок, состоящих из ортотропных слоев. Рассмотрим задачу о цилиндрическом изгибе балки с шарнирно закрепленными торцами, на которую действует внешняя нагрузка $q(x) = q_0 \sin(\pi x/l)$, где q_0 — интенсивность нагрузки, L — длина балки.

Балка состоит углепластиковых монослоев со следующими характеристиками (ось x совпадает с направлением армирования): $E_{11} = 1,724 \cdot 10^5$ МПа; $E_{22} = 6895$ МПа; $G_{12} = 3448$ МПа; $G_{23} = 1379$ МПа; $\nu_{12} = 0,25$ МПа.

На рис. 1 представлены результаты расчетов для однослойной балки (направление армирования слоя совпадает с осью балки x).

На рис. 2 представлены результаты расчетов для двухслойной балки (направление армирования первого слоя совпадает с осью балки x , а направление армирования второго слоя перпендикулярно оси балки: $E_x^1 = E_{11}$, $G_{xz}^1 = G_{12}$,

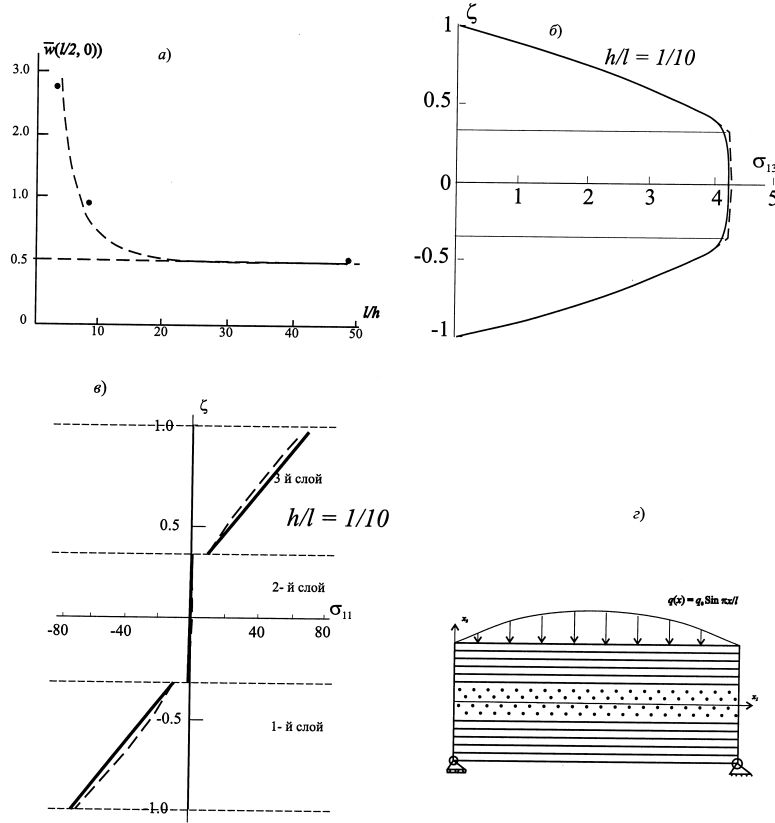


Рис. 3. а) зависимость прогиба в середине балки от параметра l/h ;
 б) распределение касательных напряжений в торцевом сечении балки;
 в) распределение нормальных напряжений в среднем сечении балки;
 г) трехслойная балка; сплошные линии и точки - решение по уравнениям слоя,
 штриховые линии — аналитическое решение.

$$E_x^2 = E_{22}, G_{xz}^2 = G_{23}).$$

На рис. 3 представлены результаты расчетов для трехслойной балки (направление армирования первого и третьего слоев совпадает с осью балки x , а направление армирования второго слоя перпендикулярно оси балки: $E_x^k = E_{11}$, $G_{xz}^k = G_{12}$ ($k = 1, 3$); $E_x^2 = E_{22}$, $G_{xz}^2 = G_{23}$).

Интенсивность нагрузки $q_0 = 0,6895$ МПа. На рисунках результаты представлены в следующих безразмерных переменных:

$$\hat{w}(l/2, 0) = \frac{100E_{22}h^3\bar{w}(l/2, 0)}{q_0l^4}, \quad \hat{u} = \frac{E_{22}\bar{u}(0, z)}{q_0l^4}, \quad \hat{\sigma}_{13} = \frac{\hat{\tau}_{xz}(0, z)}{q_0}, \quad \hat{\sigma}_3 = \frac{\hat{\sigma}_z(l/2, z)}{q_0}.$$

Для различных значений параметра h/l (h — толщина балки, l — ее длина) на рисунках приведены распределения смещений и напряжений в некоторых характерных точках и сечениях балки. Максимальная погрешность при вычислении напряжений с использованием построенных уравнений не превышает 3%.

Заключение. С использованием модифицированных уравнений упругого слоя построены дифференциальные уравнения слоистых ортотропных пластин. Проведено сравнение численных решений о напряженно-деформированном состоянии однослойной, двухслойной и трехслойной ортотропных балок с аналитическими решениями соответствующих задач. Из результатов сравнения следует, что с использованием модифицированных уравнений упругого слоя можно построить уравнения слоистых пластин, позволяющие определить напряженно-деформированное состояние в слоистых пластинах с достаточной для технических приложений точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966.
2. Солер А. Теории высшего порядка анализа конструкций, основанные на разложениях по полиномам Лежандра // Тр. Америк. о-ва инженеров механиков. сер. Е. Прикл. механика. 1969. Т. 36, № 4. С. 107–112.
3. Иванов Г. В. Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра // Прикл. механика техн. физика. 1976. № 6. С. 126–137.
4. Иванов Г. В. Теория пластин и оболочек. Новосибирск: НГУ, 1980.
5. Пелех Б. Л., Лазько В. А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. Киев: Наук. думка, 1982.
6. Волчков Ю. М., Дергилева Л. А. Решение задач упругого слоя по приближенным уравнениям и сравнение с решениями теории упругости // Динамика сплошной среды. 1977. № 28. С. 43–54.
7. Vajeva D. V., Volchkov Yu. M. The equations for determination of stress-deformed state of multilayered shells // Proc. 9th Russian–Korean Intern. Symp. on Sci. and Technol. Novosibirsk, 26 June–2 July 2005. Novosibirsk: Novosib. State Univ., 2005. P. 547–550.
8. Волчков Ю. М. Конечные элементы с условиями сопряжения на их гранях // Динамика сплошной среды. 2000. № 116. С. 175–180.
9. Волчков Ю. М., Дергилева Л. А., Иванов Г. В. Численное моделирование напряженных состояний в плоских задачах упругости методом слоев // Прикл. механика техн. физика. 1994. Т. 35, № 6. С. 129–135.
10. Волчков Ю. М., Дергилева Л. А. Краевые эффекты в напряженном состоянии тонкой упругой прослойки // Прикл. механика техн. физика. 1999. Т. 40, № 2. С. 189–195.
11. Алексеев А. Е., Алехин В. В., Аннин Б. Д. Плоская задача теории упругости для неоднородного слоистого тела // Прикл. механика техн. физика. 2001. Т. 42, № 6. С. 136–141.
12. Алексеев А. Е., Аннин Б. Д. Уравнения деформирования упругого неоднородного слоистого тела вращения // Прикл. механика техн. физика. 2003. Т. 44, № 3. С. 157–163.
13. Волчков Ю. М., Дергилева Л. А. Уравнения упругого анизотропного слоя // Прикл. механика техн. физика. 2004. Т. 45, № 2. С. 188–198.
14. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961.
15. Pagano N. J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending // J. Composite Materials. 1969. V. 3, N 4. P. 398–409.
16. Pagano N. J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // J. Composite Materials. 1970. V. 4, N 1. P. 20–34.
17. Pagano N. J. Elastic behavior of multilayered bidirectional composites // J. Composite Materials. 1972. V. 10, N 7. P. 931–933.

Статья поступила 2 сентября 2015 г.

Волчков Юрий Матвеевич, Полтавская Екатерина Николаевна
 Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
 пр. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
 volk@hydro.nsc.ru

УДК 519.622

СРАВНЕНИЕ ГРАДИЕНТНОГО И СИМПЛЕКС
МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕЙ
МОДЕЛИ ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ

С. И. Кабанихин, О. И. Криворотько,
Д. В. Ермоленко, Д. А. Воронов

Аннотация. При заражении организм человека выделяет антитела, которые позволяют справляться с болезнями. Индивидуальные особенности иммунитета и заболевания, отвечающие за рост числа антигенов (например, вирусов или бактерий) и антител, сопротивляемость организма и т. д. различны, а следовательно, реакция каждого отдельного организма будет различной при одном и том же заболевании. Несмотря на это врачи, как правило, составляют пациентам стандартный план лечения, что не всегда оптимально. Поэтому важно уметь определять индивидуальные особенности иммунитета (скорость иммунного ответа, скорость выработки специфических антител) и заболевания (скорость распространения вирусов, бактерий и др.) для каждого пациента в отдельности по анализам крови, урины и т. п.

В работе численно исследована задача определения параметров инфекционного заболевания для простейшей математической модели «антиген-антитело» по измерениям концентраций антигенов и антител в фиксированные моменты времени. Исследован целевой функционал, описывающий отклонение экспериментальных данных от модельных. Получено явное выражение градиента целевого функционала, в котором используется решение соответствующей сопряженной задачи. Проведен сравнительный анализ численного решения обратной задачи, полученного градиентным методом (итерации Ландвебера) и симплекс-методом (методом Нелдера — Мида). Показано, что метод Нелдера — Мида в исследуемой математической модели определяет множество локальных приближенных значений скоростей распространения антигена, иммунного ответа и выработки специфических антител с заданной точностью. Метод итерации Ландвебера находит ближайший к начальному приближению аргумент минимума целевого функционала за достаточное большое число итераций.

Ключевые слова: обратная задача, оптимизационный подход, метод итерации Ландвебера, метод Нелдера — Мида, моделирование в иммунологии.

S. I. Kabanikhin, O. I. Krivorotko, D. V. Yermolenko, D. A. Voronov.
Comparison of gradient and simplex methods of the numerical solution of the inverse problem for the simplest model of infectious disease.

Abstract: The organism releases antibodies after antigens are recognized. This antibodies help to cope with disease. Individual characteristics of immunity and disease are different. Therefore the reaction of different people to the disease is not similar. In spite of this doctors often make a standard treatment plan for patients. Therefore it is important to be able to identify individual parameters of immunity and disease for each patient by blood, urine tests and so on. In this paper the problem for determining

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00382).

© 2015 Кабанихин С. И., Криворотько О. И., Ермоленко Д. В., Воронов Д. А.

of the immune and disease parameters by measurements of the antigen and antibody concentrations in fixed times is numerically investigated. We use the misfit functional that describes the deviation between experimental and model data. The explicit expression of the gradient of the misfit functional based on the adjoint problem solution is obtained. The results of numerical calculations of inverse problem is discussed. The results obtained using the methods of Landweber's iterations and Nelder-Mead. Comparative analysis of these methods is discussed. It was demonstrated that Nelder-Mead method is more sensitive to the choice of the initial guess than the method of Landweber iteration. If the initial guess has been chosen "good enough" than it needs less steps than Landweber iteration method. But there are some set of possible initial guesses when Landweber iteration method converges but the Nelder-Mead method gives no results.

Keywords: inverse problem, optimization approach, Landweber iterations, Nelder-Mead method, modeling in immunology.

Введение

При заражении организм человека выделяет антитела, которые позволяют справляться с болезнями. В каждом конкретном случае индивидуальные особенности иммунитета и заболевания, отвечающие за рост числа антигенов и антител, сопротивляемость организма и т. п., различны, а следовательно, реакция каждого отдельного организма будет разной при одном и том же заболевании. Несмотря на это, врачи, как правило, составляют пациентам стандартный план лечения, что не всегда оптимально. Поэтому важно уметь определять индивидуальные параметры иммунитета и заболевания для каждого пациента в отдельности по анализам крови, мочи и т. п. Одним из способов решения данной проблемы является математическое моделирование и численное решение обратной задачи.

В последнее время активно развивается математическое моделирование иммунологических систем, основанное на численном решении систем обыкновенных (в общем случае нелинейных) дифференциальных уравнений. Иммунологические модели характеризуются своими параметрами, которые являются коэффициентами дифференциальных уравнений и характеризуют особенности иммунитета заболеваемого, заболевания и т. п.

Математические модели иммунологии, включая численное решение прямых и обратных задач, исследовали Г. И. Марчук [1], А. А. Романюха [2], S. M. Andrew [3], Н. W. Engl [4], С. Molina-Paris, G. Lythe [5] и др. Н. Т. Banks, S. Hu [6] использовали прямые методы численного решения задачи наименьших квадратов со случайным распределением данных. Г. П. Кузнецова [7] в своей работе использовала метод численного интегрирования обратной задачи для простейшей модели инфекционного заболевания Г. И. Марчука. В [8] численно исследована обратная задача для простейшей математической модели взаимодействия антител и антигенов градиентным методом. Обоснованы оценки сходимости алгоритма, доказана теорема единственности и локальной устойчивости. Основная цель работы — анализ двух алгоритмов идентификации параметров простейшей математической модели для получения информации о характере заболевания и об иммунном ответе по данным анализа крови. Зада-

чу идентификации параметров в дальнейшем будем называть *обратной задачей для простейшей модели иммунологии*.

В работе исследовано численное решение обратной задачи для простейшей модели инфекционного заболевания (так называемой модели «антиген-антитело»), состоящей из двух нелинейных дифференциальных уравнений. Данная модель позволяет качественно описать взаимодействие антигенов и антител в организме. В работе численное решение обратной задачи получено с помощью методов итерации Ландвебера и Нелдера — Мида. Статья организована следующим образом. В разд. 1 представлена постановка обратной задачи для простейшей модели инфекционного заболевания. В разд. 2, 3 исследованы два метода решения обратной задачи. В частности, в разд. 2 описан градиентный метод (метод итерации Ландвебера) и представлены численные результаты, полученные с помощью данного метода, а в разд. 3 изучен метод Нелдера — Мида и приведено численное решение обратной задачи. В разд. 4 проведен сравнительный анализ методов итерации Ландвебера и Нелдера — Мида.

1. Постановка обратной задачи

Исследована задача Коши для простейшей модели инфекционного заболевания «антиген-антитело» [8, 9]:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = N_1(t)(\beta_{11} - \beta_{12}N_2(t)), & t \in (0, T), \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = \beta_{21}N_1(t)N_2(t), & t \in (0, T), \\ N_1(0) = N_{10}, \quad N_2(0) = N_{20}, \end{cases} \quad (1)$$

которая может быть записана в векторном виде:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = P(N(t), \beta), & t \in (0, T), \\ N(0) = N^0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $N(t) = (N_1(t), N_2(t))^T$ — переменные системы (концентрации антигенов и антител в организме), $\beta = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21})^T$ — вектор параметров, характеризующий особенности иммунитета: β_{11} отражает рост числа антигенов в организме, β_{12} — скорость иммунного ответа, β_{21} — скорость выработки специфичных антител, P — заданная вектор-функция. Задача моделирования (2) при заданных β и N^0 называется *прямой задачей*.

Пусть в фиксированные моменты времени t_k , $k = 1, \dots, K$, измерены концентрации антигенов $N_1(t)$ и антител $N_2(t)$ (обозначим $N_i(t) = N_i(t; \beta)$, $i = 1, 2$):

$$N_i(t_k; \beta) = \Phi_i(t_k), \quad i = 1, 2; \quad k = 1, \dots, K. \quad (3)$$

Обратная задача (2), (3) заключается в определении вектора параметров β по заданной функции P , начальным данным N^0 и дополнительной информации вида (3). Определим оператор обратной задачи (2), (3):

$$A : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^K,$$

где $\mathcal{P} := \{\beta \in \mathbb{R}^3 : \beta_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2\}$ — пространство рассматриваемых параметров.

Запишем обратную задачу (2), (3) в операторном виде:

$$A(\beta) = \Phi, \quad \Phi = (\Phi_1(t_1), \dots, \Phi_1(t_K), \Phi_2(t_1), \dots, \Phi_2(t_K))^T. \quad (4)$$

Вектор Φ определяется, например, по данным анализа крови и мочи в моменты времени t_k , $k = 1, \dots, K$. Решение обратной задачи (4) будем искать, минимизируя целевой функционал $J(\beta) = \|A(\beta) - \Phi\|^2$, определенный следующим образом:

$$J(\beta) = \sum_{k=0}^K |N(t_k; \beta) - \Phi(t_k)|^2. \quad (5)$$

Это означает, что решение прямой задачи (2) при оптимальном β в моменты времени t_k , $k = 1, \dots, K$, будет максимально близко к измерениям состояний системы (концентраций антигенов $N_1(t)$ и антител $N_2(t)$) в те же моменты времени t_k .

2. Численное решение обратной задачи методом итерации Ландвебера

Используем метод итерации Ландвебера для решения задачи $\min_{\beta \in \mathcal{P}} J(\beta)$, который заключается в определении приближенного решения [10, 11]:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \alpha J'(\beta_n), \quad \alpha > 0, \beta_0 \in \mathcal{P}, \quad (6)$$

где α — параметр спуска, $J'(\beta) \in \mathbb{R}^3$ — градиент целевого функционала (5), явное выражение которого определяется следующим образом [12]:

$$J'(\beta) = - \int_0^T \Psi(t)^T P_\beta(N(t), \beta) dt. \quad (7)$$

Здесь $\Psi(t)$ — решение сопряженной задачи

$$\begin{cases} \frac{d\Psi(t)}{dt} = -P_N^T(N(t), \beta)\Psi(t), & t \in \bigcup_{k=0}^K (t_k, t_{k+1}), \quad t_0 = 0, \quad t_{K+1} = T, \\ \Psi(T) = 0, \\ [\Psi]_{t=t_k} = 2(N(t_k; \beta) - \Phi(t_k)), & k = 1, \dots, K, \end{cases} \quad (8)$$

где $P_N(N(t), \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ и $P_\beta(N(t), \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ — соответствующие матрицы Якоби:

$$P_N = \begin{pmatrix} \beta_{11} - \beta_{12}N_2(t) & -\beta_{12}N_1(t) \\ \beta_{21}N_2(t) & \beta_{21}N_1(t) \end{pmatrix}, \quad P_\beta = \begin{pmatrix} N_1(t) & -N_1(t)N_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(t)N_2(t) \end{pmatrix},$$

$[\Psi]_{t=t_k} := \Psi(t_k + \varepsilon) - \Psi(t_k - \varepsilon)$ — разрыв функции Ψ в точке t_k , где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Для численного решения прямой (2) и сопряженной (8) задач используем метод Рунге — Кутты четвертого порядка аппроксимации. Построим равномерную сетку $\omega := \{t_j = jh_t, \quad h_t = T/N_t, \quad j \in \overline{0, N_t}\}$. Пусть время моделирования T составляет 4 недели, $N_t = 100$ — количество точек сетки ω , $\alpha = 0.001$, $\varepsilon_s = 10^{-6}$ — параметр остановки итерационного процесса, $N_0 = (1.8, 1.8)^T$ —

начальные данные. Выберем вектор параметров $\beta = (0.5, 0.5, 0.6)^T$, описывающий иммунитет среднестатистического человека, который будем в дальнейшем называть *точным решением обратной задачи* (2), (3). Используем равномерно распределенные по сетке ω синтетические данные $N_1(t_k, \beta)$ и $N_2(t_k, \beta)$ в моменты времени $t_k, k = 1, \dots, K$, в качестве вектора данных Φ .

Алгоритм численного решения обратной задачи (2), (3) методом итерации Ландвебера состоит в следующем.

1. Задаем начальное приближение $\beta_0 = (0.1, 0.1, 0.2)^T$, описывающее легкую форму инфекции. Решаем прямую задачу (2) при заданном β_0 . Строим вектор $N(t_k; \beta_0), k = 1, \dots, K$.

2. С помощью принципа математической индукции показываем, как вычислить приближение β_{n+1} , зная β_n .

3. Решаем прямую задачу (2) для набора параметров β_n , т. е. находим $N(t_k; \beta), k = 1, \dots, K$.

4. Если $J(\beta_n) < \varepsilon_s$, то β_n можно считать приближенным решением.

5. Если $J(\beta_n) > \varepsilon_s$, то решаем сопряженную задачу (8), полагая $\beta = \beta_n$.

6. Определяем $J'(\beta_n)$ по формуле (7).

7. Определяем β_{n+1} согласно соотношению (6).

Исследуем отклонение $|N_i(t; \beta_n) - N_i(t; \beta)|$ расчетных кривых $N_i(t; \beta_n)$ от «экспериментальных» $N_i(t; \beta)$ в зависимости от числа измерений $K, i = 1, 2$. Рис. 1 показывает, что при увеличении количества измерений отклонение расчетных кривых $N_i(t; \beta_n)$ от «экспериментальных» $N_i(t; \beta)$ уменьшается. Однако сделать 35 измерений за 4 недели (т. е. 35 раз взять анализы) проблематично. Согласно [2] выберем максимальную меру такого отклонения, равную $7 \cdot 10^{-4}$, т. е. $|N_i(t; \beta_n) - N_i(t; \beta)| < 7 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, в дальнейшем для всех расчетов будем использовать 20 измерений за 4 недели.

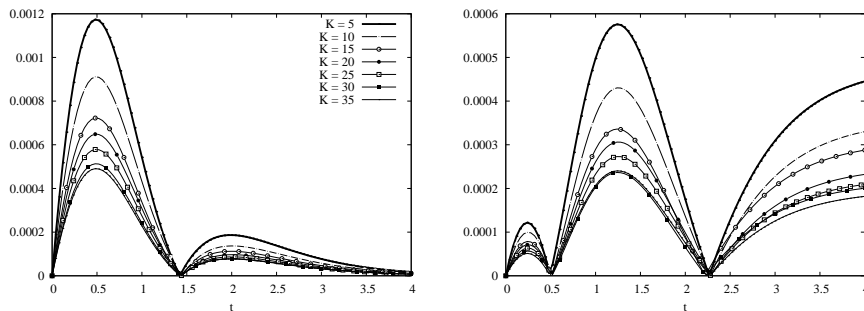


Рис. 1. Графики $|N_i(t; \beta_n) - N_i(t; \beta)|$ в зависимости от числа измерений K : слева $i = 1$, справа $i = 2$.

Исследуем теперь относительную погрешность вычисления решения обратной задачи $|\beta_n - \beta|/|\beta|$, которая является безразмерной величиной и равна

отношению абсолютной погрешности решения обратной задачи к точному решению обратной задачи. Рис. 2 показывает, что при увеличении числа измерений значение относительной погрешности уменьшается, т. е. приближенное решение обратной задачи становится ближе к точному. Отметим связь между выбранными мерами качества решения обратной задачи, а именно между отклонением расчетных кривых от «экспериментальных» $|N_i(t; \beta_n) - N_i(t; \beta)|$ (см. рис. 1), и относительной погрешностью $|\beta_n - \beta|/|\beta|$ (см. рис. 2). В дальнейшем в качестве критерия выбора оптимального количества измерений для численного решения обратной задачи (2), (3) будем использовать зависимость относительной погрешности от количества измерений K .

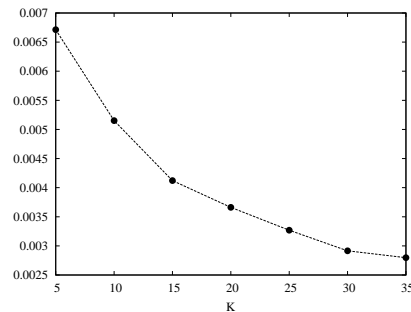


Рис. 2. График зависимости относительной погрешности $|\beta_n - \beta|/|\beta|$ от числа измерений K .

На рис. 3 изображены графики зависимости целевого функционала $J(\beta_n)$ от числа итераций n и от абсолютной погрешности $|\beta_n - \beta|$. На рис. 3 слева видно, что на первых двух итерациях функционал резко возрастает (ввиду слабой устойчивости обратной задачи (2), (3)), а начиная с третьей итерации монотонно убывает со скоростью $1/n$, что свидетельствует о сходимости метода. Отметим, что при этом абсолютные погрешности $|\beta_n - \beta|$ монотонно убывают. На рис. 3 справа показано, что чем больше абсолютная погрешность $|\beta_n - \beta|$ (на первых итерациях), тем больше отклонение модельных данных от «экспериментальных» $J(\beta_n)$.

На рис. 4 приведены результаты численного решения обратной задачи (2), (3) при $K = 20$. Можно заметить, что в этом случае получаем приближенное решение: $\beta_{11}^n = 0.49675$, $\beta_{12}^n = 0.49903$ и $\beta_{21}^n = 0.60017$ за 26836 итераций.

Отметим, что для любого начального приближения метод итерации Ландвебера сходится к нормальному решению обратной задачи (2), (3) [13]. В случаях $\alpha = 10^{-4}$ и $\alpha = 10^{-5}$ численное решение обратной задачи (2), (3) незначительно отличается от приведенных результатов, а время выполнения алгоритма на ЭВМ значительно больше, чем для случая $\alpha = 10^{-3}$.

3. Численное решение обратной задачи методом Нелдера — Мида

Метод Нелдера — Мида (симплекс-метод) [14] — метод безусловной оптимизации функционала, не использующий градиента. Ввиду этого метод Нелдера —

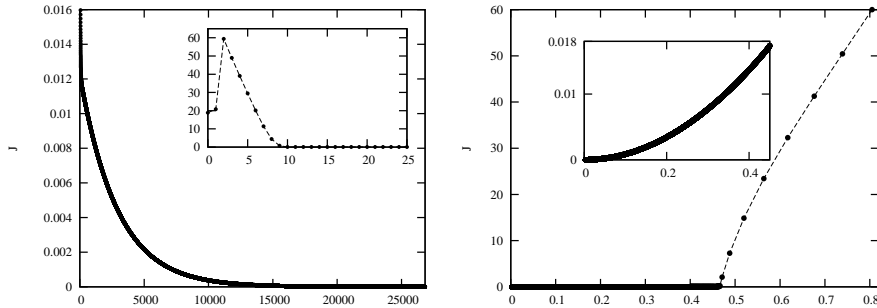
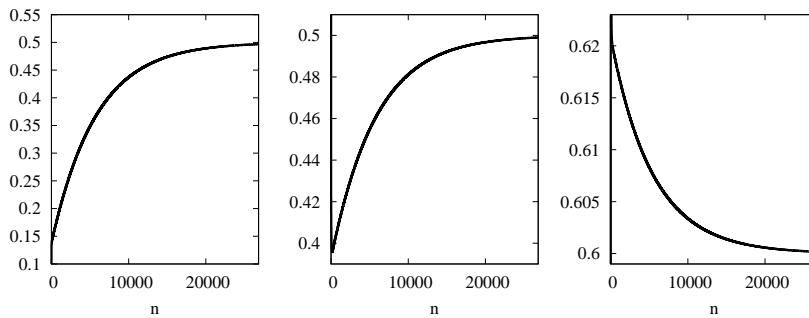
Рис. 3. График $J(\beta_n)$ при общем числе итераций $n = 26836$, $K = 20$ (слева).

График зависимости $J(\beta_n)$ от абсолютной погрешности $|\beta_n - \beta|$
при общем числе итераций $n = 26836$, $K = 20$ (справа).

Рис. 4. Графики изменения параметров β_{11}^n (слева), β_{12}^n (в центре), β_{21}^n (справа)
в зависимости от числа итераций, $n = 26836$.

Мида легко применим к негладким и зашумленным функциям. Суть метода заключается в последовательном перемещении и деформировании начального приближения (симплекса) вокруг точки экстремума. Метод Нелдера — Мида широко используется для уточнения параметров в задачах фармакокинетики и иммунологии. Основная проблема данного метода заключается в том, что он находит локальный экстремум и чувствителен к выбору начального приближения.

Решение обратной задачи, как и в случае градиентного метода, будем искать, минимизируя целевой функционал (5). Тем самым требуется найти безусловный минимум функции трех переменных $J(\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21})$.

В данном разделе представлены результаты численных расчетов, полученные с помощью метода Нелдера — Мида при таких же параметрах моделирования, как и в случае метода итерации Ландвебера (выбор сетки ω , начальных условий прямой задачи (2), точного вектора параметров β и параметра остановки ε_s).

В случае выбора начального симплекса

$$\beta_1 = (0.1, 0.1, 0.2)^T, \beta_2 = (0.4, 0.7, 0.8)^T, \beta_3 = (0.2, 0.3, 0.4)^T, \beta_4 = (0.9, 0.7, 0.1)^T$$

численное решение обратной задачи (2), (3) методом Нелдера — Мида при 10 измерениях (случай наименьшей относительной погрешности) следующее: β_{11}^n сходится к 0.17, β_{12}^n к 0.4, β_{21}^n к 0.62. Можно заметить, что разность полученного решения обратной задачи и точного достаточна велика. Следовательно, метод Нелдера — Мида для данного начального симплекса определил локальный минимум.

Теперь проведем подобные вычисления для начального симплекса: $\beta_1 = (0.15, 0.2, 0.35)^T$, $\beta_2 = (0.05, 0.1, 0.3)^T$, $\beta_3 = (0.05, 0.1, 0.3)^T$, $\beta_4 = (0.3, 0.3, 0.2)^T$.

На рис. 5 слева изображен график зависимости относительной погрешности $|\beta_n - \beta|/|\beta|$ от числа измерений K . По данному графику можно проследить, что при 25 измерениях относительная ошибка наименьшая, но сделать 25 измерений за 4 недели проблематично. Поэтому возьмем $K = 20$, как в разд. 2, и для дальнейших вычислений будем использовать это число измерений. Метод Нелдера — Мида сходится для данного набора параметров, т. е. функционал $J(\beta_n)$ стремится к нулю (см. рис. 5 справа).

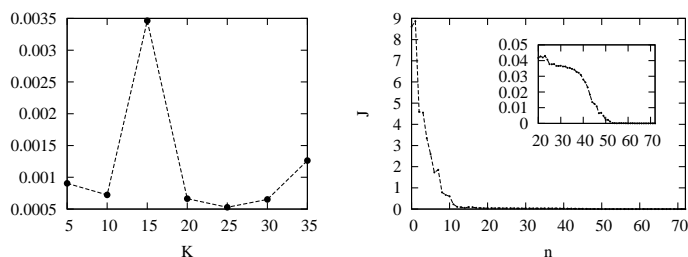


Рис. 5. График зависимости относительной погрешности $|\beta_n - \beta|/|\beta|$ от числа измерений K (слева).

График $J(\beta_n)$ при общем числе итераций $n = 72$ (справа).

На рис. 6 представлено решение обратной задачи в зависимости от числа итераций n . Отметим, что полученные результаты близки к точному решению $\beta = (0.5, 0.5, 0.6)^T$. Следовательно, используя начальный симплекс $\beta_1 = (0.15, 0.2, 0.35)^T$, $\beta_2 = (0.05, 0.1, 0.3)^T$, $\beta_3 = (0.05, 0.1, 0.3)^T$, $\beta_4 = (0.3, 0.3, 0.2)^T$, мы нашли минимум функционала J .

Представленные примеры показывают, что результаты, полученные с помощью метода Нелдера — Мида, зависят от выбора начального приближения. В зависимости от начального симплекса можно попасть как в локальный минимум, так и в глобальный. Это основная проблема данного метода. При работе с реальными данными метод Нелдера — Мида не гарантирует нахождения глобального минимума целевого функционала. Данную проблему помогают решить стохастические методы, такие как метод Монте-Карло [15], генетический алгоритм [16] и др.

4. Сравнительный анализ метода Нелдера — Мида с методом итерации Ландвебера

В табл. 1 представлен анализ численного решения обратной задачи (2),

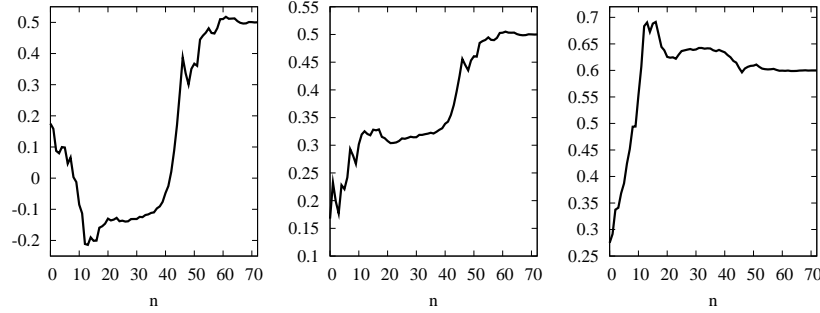


Рис. 6. Графики изменения параметров β_{11}^n (слева), β_{12}^n (в центре), β_{21}^n (справа) в зависимости от числа итераций $n = 72$.

(3), полученный методами Нелдера — Мида и итерации Ландвебера для 20 измерений. Можно заметить, что метод Нелдера — Мида получает ответ гораздо быстрее, чем градиентный метод. Относительная ошибка для метода Нелдера — Мида на порядок ниже, чем для метода итерации Ландвебера. Метод итерации Ландвебера сходится к нормальному относительно начального приближения решению обратной задачи (2), (3) для любого начального приближения [13]. Однако вычислительное время метода итерации Ландвебера в несколько раз превышает время, требуемое для метода Нелдера — Мида ввиду сложности алгоритма (вычисление градиента целевого функционала).

Таблица 1. Анализ методов Нелдера — Мида и итерации Ландвебера решения обратной задачи (2), (3)

	Метод Нелдера — Мида	Метод итерации Ландвебера
K , число измерений	20	20
Начальное приближение	$\beta^{(1)} = (0.15, 0.2, 0.35)^T$, $\beta^{(2)} = (0.05, 0.1, 0.3)^T$, $\beta^{(3)} = (0.2, 0.07, 0.25)^T$, $\beta^{(4)} = (0.3, 0.3, 0.2)^T$	$\beta_0 = (0.1, 0.1, 0.2)^T$
ε_s , параметр остановки	10^{-6}	10^{-6}
β_{11}^n	0.50059584	0.49675121
β_{12}^n	0.50013173	0.49902571
β_{21}^n	0.59992131	0.60017153
$ \beta_n - \beta / \beta $, относительная погрешность	0.00066348	0.00366208
n , общее число итераций	72	26836
Время выполнения алгоритма (сек)	0.013	4.882

5. Заключение

В работе исследовано численное решение обратной задачи для простейшей математической модели «антиген-антитело», полученное с помощью двух итерационных методов: итерации Ландвекера и Нелдера — Мида. В рассмотренных численных экспериментах показано, что метод Нелдера — Мида определяет множество локальных приближенных значений скоростей распространения антигена, иммунного ответа и выработки специфичных антител с заданной точностью. Метод итерации Ландвекера находит ближайший к начальному приближению аргумент минимума целевого функционала. Таким образом, построен численный алгоритм, позволяющий уточнять параметры простейшей математической модели (скорости распространения антигенов, иммунного ответа и выработки специфичных антител) по 20 измерениям концентраций антигенов и антител в течение 4 недель за 5 с на персональном компьютере с процессором Intel (R) Core (TM) i3 2.13GHz и оперативной памятью 4 Гб.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1980.
2. Ромашоха А. А., Руднев С. Г., Зуев С. М. Анализ данных и моделирование инфекционных заболеваний // Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Т. 2. Математическое моделирование (под ред. В. П. Дымникова). М.: Наука, 2005. С. 352–404.
3. Andrew S. M., Baker C. T. H., Bocharov G. A. Rival approaches to mathematical modeling in immunology // J. Comput. Appl. Math. 2007. V. 205. P. 669–686.
4. Engl H. W., Flamm C., Kügler P., Lu J., Müller S., Schuster P. Inverse problems in systems biology // Inverse Probl. 2009. V. 25. P. 123014.
5. Molina-Paris C., Lythe G. Mathematical models and immune cell biology. New York; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer-Verl., 2011.
6. Banks H. T., Hu Sh., Clayton Thompson W. Modeling and inverse problems in the presence of uncertainty. Boca Raton; London; New York; Washington, DC: CRC Press, 2014. (Monogr. Res. Notes Math.).
7. Kuznetsova G. P. The inverse problem for the Marchuk immunologic “simplest model” // Дальневост. мат. журн. 2003. Т. 4, № 1. С. 134–140.
8. Afrites L., Atlas A. Parameters identification in the mathematical model of immune competition cells // J. Inverse Ill-posed Probl. 2015. V. 23, N 4. P. 323–337.
9. Bellouquid A., Delitala M. Modeling complex biological systems: A kinetic theory approach. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2006.
10. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
11. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
12. Ильин А. И., Кабанихин С. И., Криворотько О. И. Об определении параметров моделей, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 1–14.
13. Васин В. В. О сходимости методов градиентного типа для нелинейных уравнений // Докл. РАН. 1998. Т. 359, № 1. С. 7–9.
14. Nelder J., Mead R. A simplex method for function minimization // Comput. J. 1965. V. 7. P. 308–313.
15. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Академия, 2006.
16. Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М. Генетические алгоритмы. М.: Физматлит,

2006.

Статья поступила 28 августа 2015 г.

Кабанихин Сергей Игоревич, Криворотько Ольга Игоревна,
Ермоленко Дарья Владимировна, Воронов Дмитрий Андреевич
Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
проспект Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
ksi52@mail.ru, krivorotko.olya@mail.ru,
ermolenko.dasha@mail.ru, dmitriy.voronov@gmail.com

УДК 51.7

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ МОДЕЛИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ АКТИВНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ПОТОК

А. Е. Луцкий, Я. В. Ханхасаева

Аннотация. В рамках математической модели осредненных 3D уравнений Навье — Стокса для вязкого сжимаемого газа (URANS) с моделью турбулентности Спаларта — Аллмараса (SA) проведено численное исследование влияния вложения энергии в поток при обтекании под углом атаки модели летательного аппарата (ЛА). Для рассмотренных режимов показано, что вложение энергии перед носовой частью приводит к существенному снижению волнового сопротивления и к увеличению подъемной силы. Исследован эффект вложения энергии перед крыльями. Показана высокая эффективность вложения энергии, как средства увеличения аэродинамического качества ЛА.

Ключевые слова: вычислительная газовая динамика, вложение энергии в поток, снижение сопротивления.

Lutsky A. E., Khankhasaeva Ya. V. 3D problem of the flow around aircraft model with active influence on the flow.

Abstract: In the frame of the 3D URANS equations with Spalart–Allmaras (SA) turbulence model the numerical simulation of the energy input into the stream in front of the aircraft model with an angle of attack has been performed. For the regimes considered it has been shown that the energy input before the bow results in a significant reduction of wave resistance and an increase in lift. This ensures high efficiency of energy input as a mean of increasing the aerodynamic quality of an aircraft. The effect of the energy input in front of the wings has been studied.

Keywords: computational fluid dynamics, energy input, drag reduction.

Введение

Одним из способов улучшения аэродинамических характеристик перспективных летательных аппаратов (ЛА) является управляемое воздействие на набегающий поток, которое может быть осуществлено различными способами, в частности, при помощи локализованного в небольшом замкнутом объеме подвода энергии. Возможность дистанционного подвода энергии к сверхзвуковому потоку подтверждена во многих экспериментах [1–6]. За энергоисточником формируется высокотемпературный след с пониженными значениями чисел Маха, полного давления и скоростного напора, что позволяет изменять режим обтекания. Если размеры энергоисточника и тела сравнимы, осуществляется квазиравномерное обтекание тела и сопротивление снижается за счет непосредственного изменения параметров набегающего потока. Такой подход сопряжен

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 13-01-12043, 14-08-00624).

© 2015 Луцкий А. Е., Ханхасаева Я. В.

с большими затратами энергии и практического значения не имеет. Однако подвод энергии даже в сравнительно небольшой области пространства может привести к перестройке головных ударно-волновых структур перед телом. Возможность управления обтеканием тел при помощи сравнительно небольшого воздействия на набегающий поток базируется, в частности, на известном факте неединственности решения задачи об обтекании тела в классической газовой динамике [7]. Для любого затупленного тела наряду с решением с отошедшей ударной волной формально возможно бесконечное количество решений с передним конусом, заполненным покоящимся газом, имеющим постоянное давление. В экспериментах и расчетах, как правило, реализуется решение с отошедшей волной. Однако известно [8], что наличие тонкой иглы, выступающей перед носовой точкой затупленного тела, приводит к формированию области возвратного течения конической формы. Вложение энергии в набегающий поток перед носовой частью может вызывать аналогичный эффект.

К настоящему времени выполнен большой объем теоретических и экспериментальных работ (см., например, [9–13]) по снижению волнового сопротивления тел, главным образом, в осесимметричной постановке. Показано, что вложение энергии в поток перед носовой частью ЛА позволяет снизить сопротивление в десятки и более раз за счет формирования конусообразной отрывной области перед носовой частью. Такой способ снижения сопротивления весьма эффективен. Затраты мощности на энергетическое воздействие существенно меньше той экономии мощности двигателя, которая обеспечивается снижением сопротивления. Трехмерные эффекты вложения энергии, в частности, влияние угла атаки, исследованы в значительно меньшей степени [14, 15].

В представленной работе основное внимание уделено исследованию влияния вложения энергии при решении задачи обтекания модели ЛА в трехмерной постановке.

Постановка задачи и результаты

Вопросы перестройки течения в результате энергетического воздействия на поток рассматриваются на примере обтекания идеализированной модели ЛА (рис. 1).

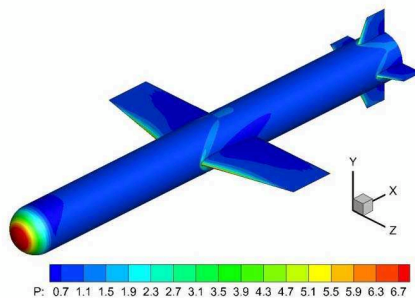


Рис. 1. Модель ЛА. Распределение давления при обтекании невозмущенным потоком.

Представленные ниже результаты получены в рамках математической модели осредненных уравнений Навье — Стокса для вязкого сжимаемого газа с моделью турбулентности Спаларта — Аллмараса, дополненных источником членом в уравнении сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} &= S, \quad S = (0, 0, 0, 0, q)^T, \quad q = q(x, y, z, t), \\ U &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T, \quad F = F^i + F^v, \quad G = G^i + G^v, \quad H = H^i + H^v, \\ F^i &= (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (e + p)u)^T, \\ F^v &= (0, -\tau_{xx}, -\tau_{xy}, -\tau_{xz}, -u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} - q_x)^T, \\ G^i &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vw, (e + p)v)^T, \\ G^v &= (0, -\tau_{xy}, -\tau_{yy}, -\tau_{zy}, -u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - w\tau_{zy} - q_y)^T, \\ H^i &= (\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + p, (e + p)w)^T, \\ H^v &= (0, -\tau_{xz}, -\tau_{yz}, -\tau_{zz}, -u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} - q_z)^T, \\ e &= \rho\varepsilon + \frac{\rho(u^2 + v^2 + w^2)}{2} = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho(u^2 + v^2 + w^2)}{2}. \end{aligned}$$

Компоненты тензора вязких напряжений задаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3}(\mu + \mu_t)(2u_x - v_y - w_z), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3}(\mu + \mu_t)(2v_y - u_x - w_z), \\ \tau_{zz} &= \frac{2}{3}(\mu + \mu_t)(2w_z - u_x - v_y), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = (\mu + \mu_t)(u_y + v_x), \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = (\mu + \mu_t)(u_z + w_x), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = (\mu + \mu_t)(v_z + w_y). \end{aligned}$$

Вначале рассматривался вариант с вложением энергии перед головной частью модели. Приведем некоторые результаты расчетов для числа Маха набегающего потока $M = 2.5$ под углом $\alpha = 3^\circ$. Давление и плотность отнесены к величинам в набегающем потоке, за единицу длины принят диаметр модели. Общая мощность энерговложения Q отнесена к мощности $N = F_x U$, необходимой для преодоления сопротивления при обтекании невозмущенным потоком. Предполагается, что энергия вкладывается стационарно и однородно по пространству в некоторой области на оси симметрии корпуса модели.

Таблица 1. Рассмотренные варианты

Варианты	1	2	3	4	5	6
Q	0	6.3%N	6.3%N	6.3%N	12.6%N	12.6%N
Поперечный размер		0.2	0.1	0.1	0.2	0.1
Продольный размер		0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
Расстояние от модели		1.2	1.2	0.5	1.2	0.5

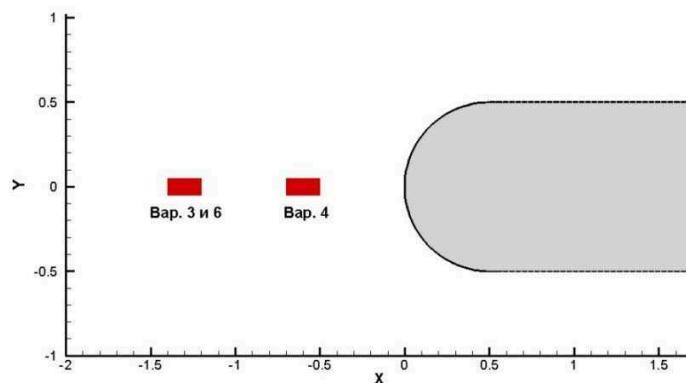


Рис. 2. Расположение области энерговложения.

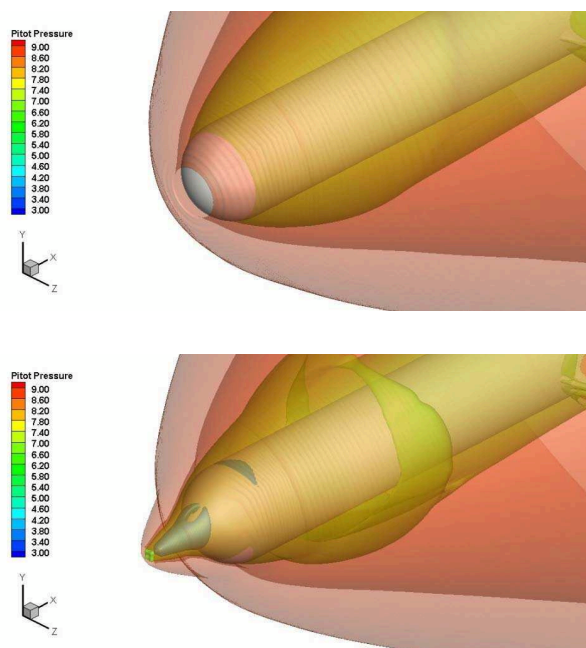


Рис. 3. Изоповерхности полного давления за ударной волной без вложения энергии (слева) и для варианта 4 (справа).

Были рассмотрены следующие варианты размеров, расположения области энерговклада и количества вкладываемой энергии (табл. 1): вариант 1 — вложение энергии отсутствует, варианты 3, 4 и 6 имеют меньшую в 4 раза площадь в поперечнике, чем варианты 2 и 5, вариант 4 находится в 2 раза ближе к телу, чем все остальные варианты. В вариантах 5 и 6 количество вкладываемой энергии в 2 раза больше.

Рассмотрим некоторые результаты расчетов для числа Маха набегающего

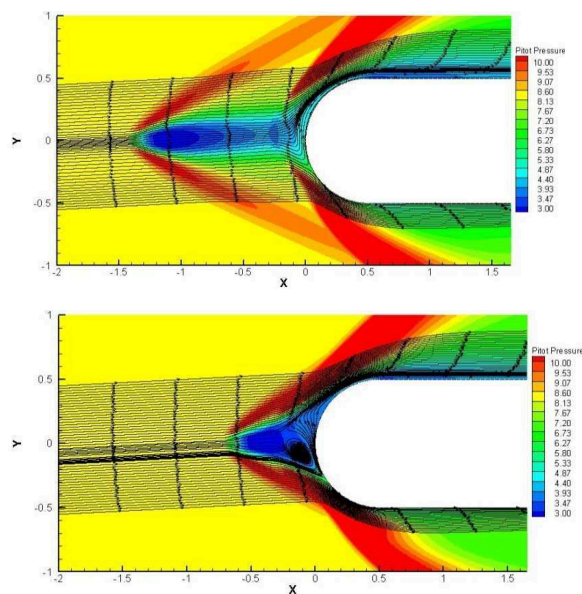


Рис. 4. Распределение полного давления за ударной волной для вариантов 3 (слева) и 4 (справа) при угле атаки $\alpha = 3^\circ$ в срезе $z = 0$.

потока $M = 2.5$ под углом $\alpha = 3^\circ$. При вложении энергии перед телом структура течения существенно изменяется. От области энерговложения образуются отходящие от нее ударные волны. Фронт головной ударной волны разрушается следом, образующимся за областью вложения энергии. В пространстве между областью вложения энергии и головной частью тела образуется область с пониженным по сравнению с набегающим потоком давлением. Это проиллюстрировано на рис. 3 и 4.

Имеет место интересный эффект. Сопротивление при варианте 4 меньше, чем в варианте 3. Отличает их только расстояние между областью энерговклада и моделью. Этот эффект, возможно, обусловлен тем, что при ближнем расположении области ударные волны, отходящие от области вложения энергии, взаимодействуют с остатками головной ударной волны, создавая область, в которой концентрируется след (рис. 4). Также отличия состоят в формировании области возвратного течения (о.в.т.).

Формирование о.в.т. перед телом является важной особенностью течения. Такая область наблюдается лишь для тех вариантов (рис. 4, вар. 4), в которых под воздействием теплового следа вблизи тела образуется зона с положительным градиентом давления. При наличии угла атаки тепловой след располагается вдоль вектора скорости набегающего потока. При определенном удалении области энерговложения от модели след не попадает в область торможения и давление вдоль линий тока, выходящих из точки торможения, монотонно убывает. На рис. 5 показано, что положительный градиент давления наблюдается именно для вариантов с о.в.т. Видно также, что на подветренной стороне ($y > 0$) давление в случае энерговложения меньше, чем при обтекании невозмущенным

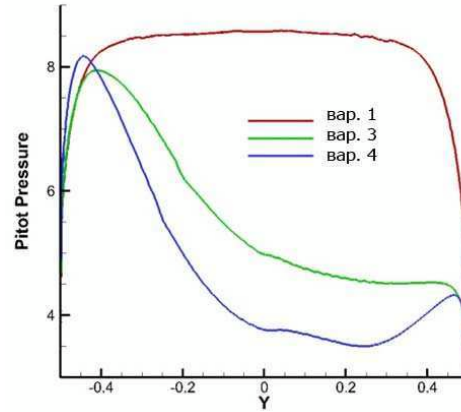


Рис. 5. График полного давления за ударной волной для вариантов 1 (красная линия), 3 (зеленая) и 4 (синяя).

поток. Этот факт объясняет увеличение подъемной силы.

Полученные результаты по снижению лобового сопротивления и увеличению

подъемной силы представлены в табл. 2, где Eff — эффективность энерговложения: $\text{Eff} = (N(0) - N(Q))/Q$, $N = F_x U$.

Таблица 2. Лобовое сопротивление, подъемная сила и коэффициент энергоэффективности для различных вариантов

Варианты	1	2	3	4	5	6
Eff		1.82592	2.16932	2.75823	1.50756	1.81972
$\Delta C_x/C_{x0}$		-10.70%	-12.72%	-16.17%	-17.67%	-21.33%
$\Delta C_y/C_{y0}$		+1.66%	+2.41%	+3.93%	+2.49%	+3.44%

С вложением энергии перед телом наблюдается уменьшение лобового сопротивления (строка 3 табл. 2) и увеличение подъемной силы (строка 4). Несмотря на то, что лобовое сопротивление в 5 и 6 вариантах снижается на большую величину при вдвое большей мощности вкладываемой энергии, вариант 4 с более близким относительно других расположением области энерговложения более выгоден как с точки зрения энергоэффективности, так и подъемной силы.

В табл. 3 представлены результаты при различных углах атаки. Как можно заметить, с увеличением угла атаки (при фиксированном числе Маха) наблюдается некоторое снижение эффективности энерговложения. Кроме того, чем больше угол атаки, тем больше подъемная сила. При этом чем больше угол атаки, тем меньше влияние энерговложения (величины, на которые уменьшается лобовое сопротивление и увеличивается подъемная сила, с ростом угла атаки уменьшаются).

Также были проведены расчеты с вложением энергии в поток перед крыльями, которые у рассмотренной модели имели затупленную переднюю кромку.

Таблица 3. Лобовое сопротивление, подъемная сила и коэффициент энергоэффективности для различных углов атаки

	Варианты	1	3	4
$\alpha = 1.5^\circ$	C_x	1.750284	-14.23%	-17.81%
	C_y	0.636395	+3.46%	+4.90%
	Eff		2.43158	3.04412
$\alpha = 3^\circ$	C_x	1.749550	-12.72%	-16.17%
	C_y	1.333832	+2.41%	+3.93%
	Eff		2.16932	2.75823
$\alpha = 5^\circ$	C_x	1.747118	-10.86%	-13.59%
	C_y	2.272646	+1.62%	+2.85%
	Eff		1.85207	2.31777

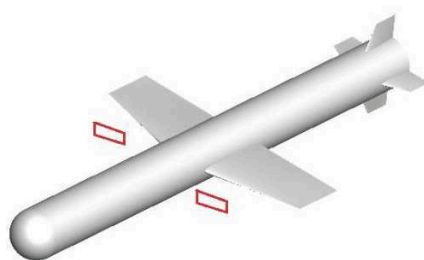


Рис. 6. Схема расположения источников энергии перед крыльями.

Размеры области $Lx = 0.1$, $Ly = 0.02$, $Lz = 0.5$; варианты расположения:

- 1) расстояние до крыла 0.28, в плоскости крыла;
- 2) расстояние до крыла 0.28, выше плоскости крыла на 0.005;
- 3) расстояние до крыла 0.18, в плоскости крыла.

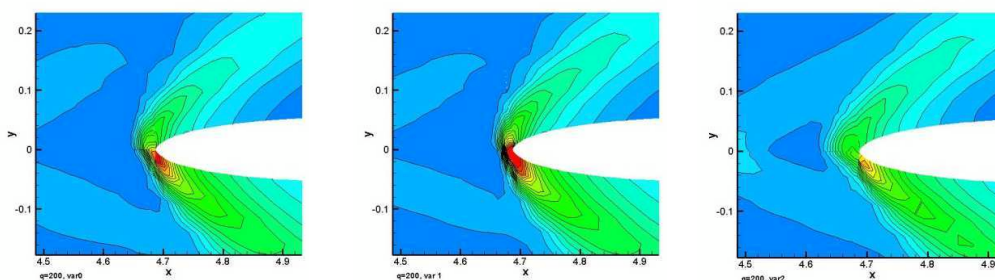


Рис. 7. Давление перед передней кромкой крыла. Сечение $z = 1.25$.

Варианты 1–3 слева направо.

Получено некоторое увеличение подъемной силы при небольшом уменьшении суммарного сопротивления модели. Вариант 3 с наиболее близким к

крыльям расположением источников энергии является самым эффективным среди рассмотренных, что не удивительно, ведь механизм воздействия аналогичен случаю с вложением энергии перед носом, поскольку крылья имеют затупленную переднюю кромку. Снижение сопротивления и увеличение подъемной силы здесь не столь велики, так как относительно фюзеляжа размер крыльев довольно мал и сам корпус генерирует подъемную силу.

Таблица 4. Лобовое сопротивление, подъемная сила аэродинамическое качество и коэффициент энергоэффективности для различных вариантов расположения

Вариант	ΔC_x , %	ΔC_y , %	ΔK , %	Eff
1	-1.81	+1.22	+2.81	0.38
2	-1.17	+1.03	+2.03	0.24
3	-2.32	+0.80	+2.89	0.48

Заключение

Проведено исследование влияния вложения энергии на аэродинамические характеристики модели летательного аппарата при различных углах атаки.

1. Показано, что вложение энергии перед носовой частью модели ведет к существенному снижению лобового сопротивления и повышению подъемной силы.

2. Среди рассмотренных вариантов определены размеры и расположение области, обеспечивающие наиболее эффективное энерговложение в отношении снижения лобового сопротивления и увеличения подъемной силы. Показано, в частности, что эффективность энерговложения возрастает с приближением области к модели и уменьшением ее поперечного размера.

3. С увеличением угла атаки (при фиксированном числе Маха) наблюдается некоторое снижение эффективности энерговложения.

4. Вложение энергии перед крыльями в случае рассмотренной модели ведет к незначительному снижению лобового сопротивления и повышению подъемной силы.

Выполненные исследования показывают, что при пространственном обтекании летательных аппаратов существенно возрастает набор эффектов, вызываемых энергетическим воздействием на поток. Комплексное изучение этих эффектов с целью повышения аэродинамических характеристик летательных аппаратов должно стать предметом дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мишин Г. И., Климов А. И., Гридин А. Ю. Продольный электрический разряд в сверхзвуковом потоке газа // Письма в журн. техн. физики. 1992. Т. 18, № 15. С. 86–92.
2. Фомин В. М., Лебедев А. В., Иванченко А. И. Пространственные энергетические характеристики электрического разряда в сверхзвуковом газовом потоке // Докл. АН. 1998. Т. 361, № 1. С. 58–60.
3. Грачев Л. П., Есаков И. И., Ходатаев К. В. Стримерный СВЧ разряд в сверхзвуковом потоке воздуха // Журн. техн. физики. 1999. Т. 69, № 11. С. 14–18.

4. Kolesnichenko Yu. F., Brovkin V. G., Azarova O. A., Grudnitsky V. G., Lashkov V. A., Mashek I. Ch. MW energy deposition for aerodynamic application // 41st Aerospace Sci. Meeting and Exhibit (Reno, NV, Jan. 6–9, 2003). : AIAA, 2003. P. 1–11.
5. Третьяков П. К., Гаранин А. Ф., Грачев Г. Н., Крайнев В. Л., Пономаренко А. Г., Иванченко А. И., Яковлев В. И. Управление сверхзвуковым обтеканием тел с использованием мощного оптического пульсирующего разряда // Докл. АН. 1996. Т. 351, № 3. С. 339–340.
6. Leonov S. B., Biturin V. A., Yuriev A., Pirogov S., Zhukov B. Problems in energetic method of drag reduction and flow/flight control // 41st Aerospace Sci. Meeting and Exhibit (Reno, NV, Jan. 6–9, 2003). : AIAA, 2003. P. 1–8.
7. Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
8. Чжен П. Управление отрывом потока. Экономичность, эффективность, безопасность. М.: Мир, 1979.
9. Георгиевский П. Ю., Левин В. А. Сверхзвуковое обтекание тел при наличии внешних источников тепловыделения // Письма в журн. техн. физики. 1988. Т. 14, № 8. С. 684–687.
10. Георгиевский П. Ю., Левин В. А. Управление обтеканием различных тел с помощью локализованного подвода энергии в сверхзвуковой набегающий поток // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 5. С. 154–167.
11. Зудов В. Н., Третьяков П. К., Тушкин А. В., Яковлев В. И. Обтекание сверхзвукового источника сверхзвуковым потоком // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 5. С. 140–153.
12. Гордеев В. П., Красильников А. В., Лагутин В. И., Отменников В. Н. Экспериментальное исследование возможности снижения аэродинамического сопротивления при сверхзвуковых скоростях с использованием плазменной технологии // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 2. С. 177–182.
13. Левин В. А., Громов В. Г., Афонина Н. Е. Численное исследование влияния локального энергоподвода на аэродинамическое сопротивление и теплообмен сферического затупления в сверхзвуковом потоке воздуха // Прикл. механика и техн. физика. 2000. Т. 41, № 5. С. 171–179.
14. Коротаева Т. А., Фомин В. М., Шашкин А. П. Пространственное сверхзвуковое обтекание заостренного тела при подводе энергии перед ним // Прикл. математика и техн. физика. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1998. С. 116–121.
15. Fomin V. M., Maslov A. A., Korotaeva T. A., Shashkin A. P. Numerical simulation of a supersonic spatial nonuniform flow // Int. J. Comput. Fluid Dyn. Special Issue. 2003. V. 12, N 2. P. 367–382.

Статья поступила 28 августа 2015 г.

Луцкий Александр Евгеньевич, Ханхасаева Яна Владиславовна
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4, Москва 125047
allutsky@yandex.ru, hanhyana@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ
АКУСТИКО–ГРАВИТАЦИОННЫХ
И СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН
В НЕОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ «ЗЕМЛЯ —
АТМОСФЕРА» ПРИ НАЛИЧИИ
СТРАТИФИКАЦИИ ВЕТРА В АТМОСФЕРЕ
А. А. Михайлов, В. Н. Мартынов

Аннотация. Рассматривается численный алгоритм и приводятся результаты математического моделирования распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для совмещенной математической модели «Земля — Атмосфера» при наличии стратификации ветра в атмосфере. Распространение сейсмических волн в упругой среде записывается системой уравнений первого порядка теории упругости через взаимосвязь компонент вектора скорости смещений и компонент тензора напряжений. Система уравнений, описывающая распространение акусто-гравитационных волн в изотермической неионизированной атмосфере, записывается на основе уравнений Навье — Стокса через взаимосвязь компонент вектора скорости смещений, давления и изменения плотности воздуха при наличии стратификации ветра. Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексирования интегральных преобразований Лагерра и Фурье с конечно-разностным методом.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, конечно-разностный метод, преобразование Лагерра, акусто-гравитационные волны, сейсмические волны.

Mikhailov A. A., Martynov V. N. Mathematical modeling of acoustic-gravity and seismic waves propagation for a heterogeneous Earth-Atmosphere model in a wind-stratified atmosphere.

Abstract: A numerical-analytical algorithm for seismic and acoustic-gravity waves propagation is applied to a heterogeneous "Earth-Atmosphere" model. Seismic wave propagation in an elastic half-space is described by a system of first-order dynamic equations of elasticity theory. The propagation of acoustic-gravity waves in the atmosphere is described by the linearized Navier-Stokes equations with the wind. The algorithm is based on the integral Laguerre transform with respect to time, the finite integral Fourier transform with respect to a spatial coordinate combined with a finite difference method for the reduced problem. The algorithm is numerically tested for the heterogeneous Earth-Atmosphere model for different source locations.

Keywords: Navier-Stokes equations, Laguerre transform, finite difference method, seismic waves, acoustic-gravity waves.

Введение

При математическом моделировании сейсмических волновых полей в упругой среде обычно полагают, что поверхность среды граничит с вакуумом и задают граничные условия на свободной поверхности. Тем самым полагают, что на границе сейсмические волны абсолютно отражаются, пренебрегая эффектом генерации упругими волнами акусто-гравитационных волн в атмосфере и их взаимодействием при распространении вдоль границы.

В последнее десятилетие появились теоретические и экспериментальные исследования, в которых показана высокая степень взаимосвязи между волнами в литосфере и атмосфере. В работе [1] описан эффект акусто-сейсмической индукции, при которой акустическая волна от вибратора благодаря явлению рефракции в атмосфере возбуждает интенсивные поверхностные сейсмические волны на расстоянии десятков километров. В свою очередь литосферные сейсмические волны от землетрясений и взрывов генерируют атмосферные акусто-гравитационные волны, которые особенно интенсивны в верхних слоях атмосферы с малой плотностью и ионосфере. Теоретическим исследованиям волновых процессов на границе упругого полупространства с изотермической однородной атмосферой посвящено большое количество работ, отметим только работы [2, 3]. В них установлены и исследуются свойства поверхностной волны Стоунли — Шолтэ и модифицированной волны Лэмба.

В данной статье с помощью численного моделирования мы продолжаем изучение распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для пространственно-неоднородной модели «Атмосфера — Земля» на основе идей, впервые предложенных Б. Г. Михайленко, который инициировал, принимал непосредственное участие и поддерживал данные исследования. В статье рассматривается численный алгоритм для решения совмещенной задачи распространения акусто-гравитационных волн в стратифицированной атмосфере и сейсмических волн в неоднородной упругой среде для декартовой системы координат. Решение подобной задачи для вертикально-неоднородной модели в цилиндрической системе координат без учета ветра в атмосфере было рассмотрено в [4]. Алгоритм решения поставленной задачи основан на применении преобразования Лагерра по времени, впервые предложенного в работе [5]. Распространение акусто-гравитационных волн в изотермической Атмосфере описывается линеаризованной системой уравнений Навье — Стокса. Предполагается что плотность Атмосферы и скорость ветра зависят от высоты. Распространение сейсмических волн в упругой среде описывается гиперболической системой первого порядка в терминах скоростей вектора смещения и компонент тензора напряжений.

Описываемый в статье алгоритм построен на комплексировании интегральных преобразований и конечно-разностного метода. При этом предполагается, что параметры среды (плотность и скорости продольных и поперечных волн) имеют зависимость только по двум координатам, а по третьей координате среда однородна. Данную постановку задачи принято называть 2.5-D задачей. Применение преобразования Лагерра по временной координате для численной реализации решения задачи можно рассматривать как аналог известного спек-

трального метода на основе преобразования Фурье, где вместо частоты ω мы имеем параметр p — степень полиномов Лагерра. Однако в отличие от преобразования Фурье применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые рассмотрен в работах [5, 6], а затем развит для задач вязкоупругости [7, 8] и теории пористых сред [9]. В указанных работах рассмотрены отличительные особенности данного метода от принятых подходов и обсуждаются преимущества применения интегрального преобразования Лагерра в отличие от разностного метода и преобразования Фурье по времени.

1. Постановка задачи

Система уравнений, описывающая распространение акусто-гравитационных волн в неоднородной неионизированной изотермической атмосфере в декартовой системе координат (x, y, z) при наличии ветра, направленного вдоль горизонтальной оси x , и с вертикальной стратификацией по оси z , имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} - u_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\rho g}{\rho_0}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_x \frac{\partial P}{\partial x} = c_0^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right] - u_z \frac{\partial P_0}{\partial z} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0 \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] - u_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + F(x, y, z, t). \quad (5)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, $\rho_0(z)$ — плотность невозмущенной атмосферы, $c_0(z)$ — скорость звука, $v_x(z)$ — скорость ветра вдоль оси x , $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ — вектор скорости смещения частиц воздуха, P и ρ — соответственно возмущения давления и плотности под действием распространения волны от источника массы $F(x, y, z, t) = \delta(r-r_0)f(t)$, где $f(t)$ — заданный временной сигнал в источнике. Полагаем, что ось z направлена вверх. Нулевые подиндексы для физических параметров среды означают, что их значения задаются для невозмущенного состояния атмосферы. Зависимость атмосферного давления P_0 и плотности ρ_0 для невозмущенного состояния атмосферы в однородном гравитационном поле можно определить как

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = -\rho_0 g, \quad \rho_0(z) = \rho_1 \exp(-z/H),$$

где H — высота изотермической однородной атмосферы, а ρ_1 — плотность атмосферы возле поверхности Земли, т. е. при $z = 0$.

Распространение сейсмических волн в упругой среде записывается известной системой уравнений первого порядка теории упругости через взаимосвязь компонент вектора скорости смещений и компонент тензора напряжений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + F_i f(t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \lambda \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{u}. \quad (7)$$

Здесь $\lambda(x_1, x_2, x_3)$, $\mu(x_1, x_2, x_3)$ — упругие параметры среды, $\rho_0(x_1, x_2, x_3)$ — плотность среды, δ_{ij} — символ Кронекера, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости смещений, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений. $\vec{F}(x, y, z) = F_1 \vec{e}_x + F_2 \vec{e}_y + F_3 \vec{e}_z$ описывает распределение локализованного в пространстве источника, а $f(t)$ — заданный временной сигнал в источнике.

Тогда совмещенную систему уравнений для описания распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн в декартовой системе координат $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ можно записать так:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + F_i f(t) - K_a \left[v_x \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\rho g}{\rho_0} e_z - u_z \frac{\partial v_x}{\partial x_3} e_x \right], \quad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \lambda \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{u} - \delta_{ik} K_a \left[v_x \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_1} + \rho_0 g u_z \right], \quad (9)$$

$$K_a \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0 \operatorname{div} \vec{u} - u_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right]. \quad (10)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, $\rho_0(x, z)$ — плотность среды, $\lambda(x, z)$, $\mu(x, z)$ — упругие параметры среды, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости смещений, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений. $\vec{F}(x, y, z) = F_1 \vec{e}_x + F_2 \vec{e}_y + F_3 \vec{e}_z$ описывает распределение локализованного в пространстве источника, а $f(t)$ — заданный временной сигнал в источнике. Полагаем, что по оси Y среда однородна.

Система (1)–(5) для атмосферы получается из системы (8)–(10), если взять $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -P$, $\mu = 0$, $\lambda = c_0^2 \rho_0$, $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, $K_a = 1$. Полагая в системе (8)–(10) $K_a = 0$, получим систему уравнений (6), (7) для распространения сейсмических волн в упругой среде.

В нашей задаче считаем, что граница раздела сред атмосфера и упругое полупространство проходит по плоскости $z = x_3 = 0$. В этом случае условие контакта двух сред при $z = 0$ записывается так:

$$u_z|_{z=-0} = u_z|_{z=+0}; \quad \left. \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \right|_{z=-0} = \left. \left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} + \rho_0 g u_z \right) \right|_{z=+0}; \quad (11)$$

$$\sigma_{xz}|_{z=-0} = \sigma_{yz}|_{z=-0} = 0.$$

Задача решается при нулевых начальных данных

$$u_i|_{t=0} = \sigma_{ij}|_{t=0} = P|_{t=0} = \rho|_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Полагаем, что все функции компонент волнового поля обладают достаточной гладкостью для применения последующих преобразований.

2. Численный метод решения

На первом этапе решения воспользуемся конечным косинус-синус преобразованием Фурье по пространственной координате y , в направлении которой среда считается однородной. Для каждой компоненты системы введем соответствующее косинус или синус преобразование:

$$\vec{W}(x, z, n, t) = \int_0^a \vec{W}(x, y, z, t) \begin{cases} \cos(k_n y) \\ \sin(k_n y) \end{cases} d(y), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

с соответствующей формулой обращения

$$\vec{W}(x, y, z, t) = \frac{1}{\pi} \vec{W}(x, 0, z, t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \vec{W}(x, n, z, t) \cos(k_n y) \quad (14)$$

или

$$\vec{W}(x, y, z, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \vec{W}(x, n, z, t) \sin(k_n y), \quad (15)$$

где $k_n = \frac{n\pi}{a}$.

Выберем расстояние a достаточно большим и будем рассматривать волновое поле до момента времени $t < T$, где T — минимальное время распространения продольной волны до границы $r = a$. В результате данного преобразования получим $N + 1$ независимых двумерных по пространству нестационарных задач.

На втором этапе решения к полученным таким образом $N + 1$ независимым задачам применим интегральное преобразование Лагерра по времени вида

$$\vec{W}_p(x, n, z) = \int_0^\infty \vec{W}(x, n, z, t) (ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_p^\alpha(ht) d(ht), \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

с формулой обращения

$$\vec{W}(x, n, z, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{p=0}^\infty \frac{p!}{(p + \alpha)!} \vec{W}_p(x, n, z) l_p^\alpha(ht), \quad (17)$$

где $l_p^\alpha(ht)$ — ортогональные функции Лагерра.

Функции Лагерра $l_p^\alpha(ht)$ выражаются через классические ортонормированные полиномы Лагерра $L_p^\alpha(ht)$ [10]. Здесь мы выбираем α (порядок функций Лагерра) целым и положительным, тогда имеет место представление

$$l_p^\alpha(ht) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{ht}{2}} L_p^\alpha(ht).$$

Для удовлетворения начальных условий (12) необходимо и достаточно положить

$\alpha \geq 1$. Кроме того, введен параметр сдвига $h > 0$, смысл и эффективность применения которого обсуждается в работах [6–8].

В результате этих преобразований решение исходной задачи (8)–(12) сводится к решению $N + 1$ независимых двумерных дифференциальных задач в спектральной области вида

$$\frac{h}{2} u_x^p - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}^p}{\partial x} + k_n \sigma_{xy}^p \right) + K_a \left[v_x \frac{\partial u_x^p}{\partial x} - u_z^p \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = F_x(n) f^p - h \sum_{j=0}^{p-1} u_x^j, \quad (18)$$

$$\frac{h}{2}u_y^p - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \sigma_{yz}^p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xy}^p}{\partial x} - k_n \sigma_{yy}^p \right) + K_a v_x \frac{\partial u_y^p}{\partial x} = F_y(n) f^p - h \sum_{j=0}^{p-1} u_y^j, \quad (19)$$

$$\frac{h}{2}u_z^p - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \sigma_{zz}^p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}^p}{\partial x} + k_n \sigma_{yz}^p \right) + K_a \left[v_x \frac{\partial u_z^p}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0} \rho^p \right] = F_z(n) f^p - h \sum_{j=0}^{p-1} u_z^j, \quad (20)$$

$$\frac{h}{2}\sigma_{xx}^p - \lambda \left(\frac{\partial u_z^p}{\partial z} + k_n u_y^p \right) - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x^p}{\partial x} + K_a \left[v_x \frac{\partial \sigma_{xx}^p}{\partial x} + \rho_0 g u_z^p \right] = -h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{xx}^j, \quad (21)$$

$$\frac{h}{2}\sigma_{yy}^p - \lambda \left(\frac{\partial u_z^p}{\partial z} + \frac{\partial u_x^p}{\partial x} \right) - (\lambda + 2\mu) k_n u_y^p + K_a \left[v_x \frac{\partial \sigma_{yy}^p}{\partial x} + \rho_0 g u_z^p \right] = -h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{yy}^j, \quad (22)$$

$$\frac{h}{2}\sigma_{zz}^p - \lambda \left(\frac{\partial u_x^p}{\partial x} + k_n u_y^p \right) - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z^p}{\partial z} + K_a \left[v_x \frac{\partial \sigma_{zz}^p}{\partial x} + \rho_0 g u_z^p \right] = -h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{zz}^j, \quad (23)$$

$$\frac{h}{2}\sigma_{xy}^p - \mu \left(\frac{\partial u_y^p}{\partial x} + k_n u_x^p \right) = -h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{xy}^j, \quad (24)$$

$$\frac{h}{2}\sigma_{xz}^p - \mu \left(\frac{\partial u_x^p}{\partial z} - \frac{\partial u_z^p}{\partial x} \right) = -h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{xz}^j, \quad (25)$$

$$\frac{h}{2}\sigma_{yz}^p - \mu \left(\frac{\partial u_y^p}{\partial z} + k_n u_z^p \right) = -h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{yz}^j, \quad (26)$$

$$K_a \left[\frac{h}{2} \rho^p + v_x \frac{\partial \rho^p}{\partial x} + \rho_0 \left(\frac{\partial u_x^p}{\partial x} + k_n u_y^p + \frac{\partial u_z^p}{\partial z} \right) + u_z^p \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right] = -h \sum_{j=0}^{p-1} \rho^j, \quad (27)$$

где f^p — коэффициенты Лагерра функции источника $f(t)$. Коэффициенты u_x^p , u_y^p , u_z^p , σ_{xx}^p , σ_{yy}^p , σ_{zz}^p , σ_{xy}^p , σ_{xz}^p , σ_{yz}^p , ρ^p в формулах (18)–(27) являются функциями от переменных (n, x, z) .

Легко заметить, что параметр преобразования Лагерра p присутствует только в правой части уравнений и спектральные гармоники для всех компонент поля имеют рекуррентную зависимость.

Условие контакта двух сред при $z = 0$ записывается как

$$\left. \frac{h}{2} \sigma_{zz}^p + h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{zz}^j \right|_{z=-0} = \left. \left(\frac{h}{2} \sigma_{zz}^p + h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{zz}^j + \rho_0 g u_z^p \right) \right|_{z=+0}; \quad (28)$$

$$u_z^p|_{z=-0} = u_z^p|_{z=+0}; \quad \sigma_{xz}^p|_{z=-0} = \sigma_{yz}^p|_{z=-0} = 0.$$

Для решения задачи (18)–(28) воспользуемся конечным косинус-синус преобразованием Фурье по пространственной координате x и конечно-разностной аппроксимацией производных по координате z со вторым порядком точности [11].

Для этого в расчетной области введем в направлении координаты z сетки ωz_i и $\omega z_{i+1/2}$ с шагом дискретизации Δz , сдвинутые относительно друг друга на $\Delta z/2$:

$$\omega z_i = \{z_i = i\Delta z; i = 0, \dots, K\}, \quad \omega z_{i+1/2} = \{z_{i+1/2} = (i + \frac{1}{2})\Delta z; i = 0, \dots, K-1\}.$$

На данных сетках введем оператор дифференцирования D_z , аппроксимирующий производную $\frac{\partial}{\partial z}$ со вторым порядком точности по координате z вида

$$D_z u(x, z) = \frac{1}{\Delta z} \left[u \left(x, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - u \left(x, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \right].$$

Определим искомые компоненты вектора решения в следующих узлах сеток:

$$\begin{aligned} \rho^p, u_x^p(x, z), u_y^p(x, z), \sigma_{xx}^p(x, z), \sigma_{yy}^p(x, z), \sigma_{zz}^p(x, z), \sigma_{xy}^p(x, z) &\in \omega z_i, \\ u_z^p(x, z), \sigma_{xz}^p(x, z), \sigma_{yz}^p(x, z) &\in \omega z_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Выбор расположения компонент в целых и полуцелых узлах сетки осуществляется на основе разностной аппроксимации уравнений (18)–(27) и удовлетворения граничному условию (28). Для верхней и нижней границ задаются граничные условия 1-го или 2-го рода для соответствующих компонент.

По координате x воспользуемся конечным косинус-синус преобразованием Фурье аналогично сделанному ранее преобразованию по координате y с соответствующими формулами обращения:

$$\vec{W}_p(x, n, z_i, p) = \frac{1}{\pi} \vec{W}_0(n, z_i, p) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^M \vec{W}(m, n, z_i, p) \cos(k_m x) \quad (29)$$

или

$$\vec{W}(x, n, z_i, p) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^M \vec{W}(m, n, z_i, p) \sin(k_m x), \quad (30)$$

где $k_m = \frac{m\pi}{b}$. Следует учитывать, что среда в данном направлении неоднородна.

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений, которая для i и $i + \frac{1}{2}$ узлов разностной сетки записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \bar{u}_x^p - \sum_{s=0}^M q_1 (D_z \bar{\sigma}_{xz}^p - k_s \bar{\sigma}_{xx}^p + k_n \bar{\sigma}_{xy}^p) + K_a \sum_{s=0}^M r_1 (v_x k_s \bar{u}_x^p - \bar{u}_z^p D_z v_x) \\ = F_x f^p - h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{u}_x^j, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\frac{h}{2} \bar{u}_y^p - \sum_{s=0}^M q_2 (D_z \bar{\sigma}_{yz}^p + k_s \bar{\sigma}_{xy}^p - k_n \bar{\sigma}_{yy}^p) - K_a \sum_{s=0}^M r_2 v_x k_s \bar{u}_y^p = F_y f^p - h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{u}_y^j, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \bar{u}_z^p - \sum_{s=0}^M q_3 (D_z \bar{\sigma}_{zz}^p + k_s \bar{\sigma}_{xz}^p + k_n \bar{\sigma}_{yz}^p) + K_a \left[\frac{g}{\rho_0} \bar{\rho}^p - \sum_{s=0}^M r_2 v_x k_s \bar{u}_z^p \right] \\ = F_z f^p - h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{u}_z^j, \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \bar{\sigma}_{xx}^p - \sum_{s=0}^M q_4 (D_z \bar{u}_z^p + k_n \bar{u}_y^p) - \sum_{s=0}^M q_5 k_s \bar{u}_x^p + K_a \left[\rho_0 g \bar{u}_z^p - \sum_{s=0}^M r_2 v_x k_s \bar{\sigma}_{xx}^p \right] \\ = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\sigma}_{xx}^j, \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \bar{\sigma}_{yy}^p - \sum_{s=0}^M q_4 (D_z \bar{u}_z^p + k_s \bar{u}_x^p) - \sum_{s=0}^M q_5 k_n \bar{u}_y^p + K_a \left[\rho_0 g \bar{u}_z^p - \sum_{s=0}^M r_2 v_x k_s \bar{\sigma}_{yy}^p \right] \\ = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\sigma}_{yy}^j, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \bar{\sigma}_{zz}^p - \sum_{s=0}^M q_4 (k_s \bar{u}_x^p + k_n \bar{u}_y^p) - \sum_{s=0}^M q_5 D_z \bar{u}_z^p + K_a \left[\rho_0 g \bar{u}_z^p - \sum_{s=0}^M r_2 v_x k_s \bar{\sigma}_{zz}^p \right] \\ = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\sigma}_{zz}^j, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\frac{h}{2} \bar{\sigma}_{xy}^p - \sum_{s=0}^M q_6 (k_s \bar{u}_y^p + k_n \bar{u}_x^p) = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\sigma}_{xy}^j, \quad (37)$$

$$\frac{h}{2} \bar{\sigma}_{xz}^p - \sum_{s=0}^M q_7 (D_z \bar{u}_x^p + k_s \bar{u}_z^p) = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\sigma}_{xz}^j, \quad (38)$$

$$\frac{h}{2} \bar{\sigma}_{yz}^p - \sum_{s=0}^M q_8 (D_z \bar{u}_y^p + k_n \bar{u}_z^p) = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\sigma}_{yz}^j, \quad (39)$$

$$K_a \left[\frac{h}{2} \bar{\rho}^p - \sum_{s=0}^M r_2 v_x k_s \bar{\rho}^p + \sum_{s=0}^M q_9 (k_s \bar{u}_x^p + k_n \bar{u}_y^p + D_z \bar{u}_z^p) + \bar{u}_z^p D_z \rho_0 = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\rho}^j \right], \quad (40)$$

где

$$r_1 = \int_0^b \cos(k_s x) \sin(k_m x) dx, \quad r_2 = \int_0^b \sin(k_s x) \cos(k_m x) dx,$$

$$q_1 = \int_0^b \frac{1}{\rho_0(x, z_i)} \sin(k_s x) \sin(k_m x) dx, \quad q_2 = \int_0^b \frac{1}{\rho_0(x, z_i)} \cos(k_s x) \cos(k_m x) dx,$$

$$q_3 = \int_0^b \frac{1}{\rho_0(x, z_{i+1/2})} \cos(k_s x) \cos(k_m x) dx,$$

$$q_4 = \int_0^b \lambda(x, z_i) \cos(k_s x) \cos(k_m x) dx,$$

$$q_5 = \int_0^b [\lambda(x, z_i) + 2\mu(x, z_i)] \cos(k_s x) \cos(k_m x) dx,$$

$$q_6 = \int_0^b \mu(x, z_i) \sin(k_s x) \sin(k_m x) dx,$$

$$q_7 = \int_0^b \mu(x, z_{i+1/2}) \sin(k_s x) \sin(k_m x) dx,$$

$$q_8 = \int_0^b \mu(x, z_{i+1/2}) \cos(k_s x) \cos(k_m x) dx,$$

$$q_9 = \int_0^b \rho_0(x, z_i) \cos(k_s x) \cos(k_m x) dx, \quad k_m = \frac{m\pi}{b}, \quad k_s = \frac{s\pi}{b}.$$

В формулах (31)–(40) приняты обозначения $\bar{u}_x^p = \bar{u}_x^p(m, n, z_j)$. Для других компонент аналогично. Черта над символом каждой компоненты поля означает, что рассматриваются коэффициенты преобразования Фурье по координате x .

В результате всех сделанных преобразований получим $N + 1$ систем линейных алгебраических уравнений, где N — количество гармоник преобразования Фурье по координате y . Представим искомый вектор решения \vec{W} в следующем виде:

$$\vec{W}(p) = (\vec{V}_0(p), \vec{V}_1(p), \dots, \vec{V}_K(p))^T,$$

$$\vec{V}_i = (\bar{\rho}^p(m = 0, \dots, M; z_i), \bar{\sigma}_{xx}^p(m = 0, \dots, M; z_i), \bar{u}_x^p(m = 0, \dots, M; z_i), \dots)^T.$$

Тогда для каждой n -й гармоники ($n = 0, \dots, N$) система линейных алгебраических уравнений в векторной форме может быть записана так:

$$\left(A + \frac{h}{2} E \right) \vec{W}(p) = \vec{F}(p-1). \quad (41)$$

Последовательность компонент волнового поля в векторе решения \vec{V} выбирается с учетом минимизации количества диагоналей в матрице A . При этом на главной диагонали матрицы решаемой системы уравнений специально располагаются компоненты, входящие в уравнения системы как слагаемые, имеющие в качестве множителя параметр h (параметр преобразования по Лагерру). За счет выбора значения параметра h имеется возможность существенно улучшать обусловленность матрицы системы. Решив систему линейных алгебраических уравнений (41) можно определить спектральные значения для всех компонент волнового поля $\vec{W}(m, n, p)$. Затем, воспользовавшись формулами обращения для преобразования Фурье (14), (15), (29), (30) и преобразования Лагерра (17), получим решение исходной задачи (8)–(12).

3. Аспекты численной реализации

В аналитических преобразованиях Фурье и Лагерра при определении значений функций по их спектру используются формулы обращения в виде сумм с бесконечным пределом. При численной реализации необходимым условием является определение требуемого количества членов суммируемого ряда для построения решения с заданной точностью. Так, например, количество гармоник в формулах обращения преобразования Фурье (14), (15), (29), (30) зависит от минимальной пространственной длины волны в моделируемой среде и размеров

расчетной пространственной области восстанавливаемого поля, которая задается конечными пределами интегрального преобразования. Кроме того, скорость сходимости суммируемого ряда зависит от гладкости функций моделируемого волнового поля.

Количество членов ряда в разложении по функциям Лагерра, необходимых для определения компонент поля по формуле (17), зависит от задаваемого сигнала в источнике $f(t)$, выбора параметра h и значения временного интервала моделируемого волнового поля. Как можно определить требуемое количество гармоник и выбрать оптимальное значение параметра h , подробно рассмотрено в работах [6–8].

Анализ численных расчетов показывает, что основная погрешность вычислений в представленном алгоритме решения поставленной задачи связана с численной аппроксимацией пространственных производных. Поэтому для более точной аппроксимации производных вблизи границ раздела сильноконтрастных слоев среды, а также более точного учета условия на границе раздела Земля — Атмосфера (11) лучше использовать разностную сетку с переменным шагом дискретизации. Таким образом можно уменьшать шаг разбиения сетки при аппроксимации производных на определенных участках среды, что позволяет получить решение с требуемой точностью при меньшем количестве узлов разностной сетки.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (41) наиболее эффективным оказалось использование итерационного метода сопряженных градиентов [12, 13]. В этом случае для матриц систем большой размерности не требуется хранение всей матрицы в машинной памяти. Преимуществом этого метода является также быстрая сходимость к решению задачи при условии хорошей обусловленности матрицы системы. Наша матрица как раз обладает этим свойством за счет введенного параметра h . Задав нужное значение h , можно существенно ускорить сходимость итерационного процесса. Выбор оптимального значения h в этом случае осуществляется исходя из минимизации количества гармоник Лагерра в формуле обращения (17) и уменьшения количества итераций, требуемых для нахождения решения для каждой гармоники.

Использование преобразования Фурье по пространственной координате, в направлении которой среда считается однородной, позволяет реализовать эффективное распараллеливание решения. В этом случае на каждом процессоре будет решаться независимая задача для каждой гармоники преобразования Фурье. Дополнительно при проведении расчетов на кластерных вычислительных комплексах с малым объемом оперативной памяти, доступной одному процессору, для решения больших пространственных задач (более 100 длин волн) было осуществлено распараллеливание решения двумерной пространственной задачи. На этом этапе расчетов была реализована распараллеленная версия метода сопряженных градиентов для решения системы алгебраических уравнений для каждой гармоники Фурье. На уровне входных данных, при задании модели среды, это равносильно декомпозиции исходной области на несколько подобластей двумерной задачи по координате z . Такой подход дает возможность распределения памяти как при задании входных параметров модели, так и при

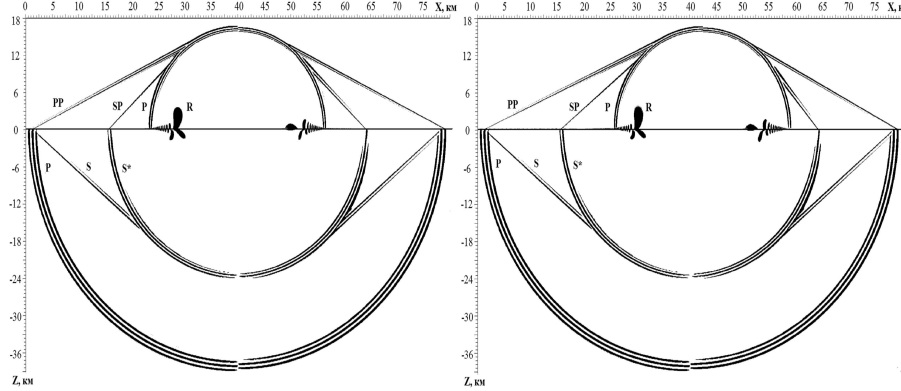


Рис. 1.

дальнейшей численной реализации алгоритма в подобластях.

4. Численные результаты

В данной статье мы рассматриваем результаты численного моделирования для двух вариантов распространения волн в среде Земля — Атмосфера при наличии ветра. Первый вариант рассматривает случай, когда скорость ветра в атмосфере постоянная и не зависит от высоты. Во втором варианте скорость ветра в атмосфере является функцией высоты. Результаты численных расчетов волнового поля даны в виде мгновенных снимков в фиксированный момент времени на рис. 1, 2.

На рис. 1 представлен результат расчета волнового поля для случая, когда скорость ветра в атмосфере постоянная и равна 50 м/с. Данная скорость ветра была задана для того, чтобы получить основные физические эффекты распространения волн, не проводя расчеты на очень большие расстояния. Заданная модель среды состоит из однородного упругого слоя и слоя атмосферы, разделенных плоской границей. Физические характеристики слоев были заданы следующими:

1) атмосфера — скорость звука $c_0 = 340$ м/сек, плотность в зависимости от координаты z рассчитывалась по формуле $\rho_0(z) = \rho_1 \exp(-z/H)$, где $\rho_1 = 1.225 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $H = 6700$ м;

2) упругий слой — скорость продольной волны $c_p = 800$ м/сек, скорость поперечной волны $c_s = 500$ м/сек, плотность $\rho_0 = 1.5$ г/см³.

Для расчетов использовалась ограниченная область среды размером $(x, y, z) = (80 \text{ км}, 80 \text{ км}, 60 \text{ км})$. Моделировалось волновое поле от точечного источника типа центр давления, расположенного в упругой среде на глубине $1/4$ длины продольной волны с координатами $(x_0, y_0, z_0) = (40 \text{ км}, 40 \text{ км}, -0.2 \text{ км})$. Временной сигнал в источниках задавался в виде импульса Пузырева:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t-t_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t-t_0)), \quad (42)$$

где $\gamma = 4$, $f_0 = 1$ Гц, $t_0 = 1.5$ сек.

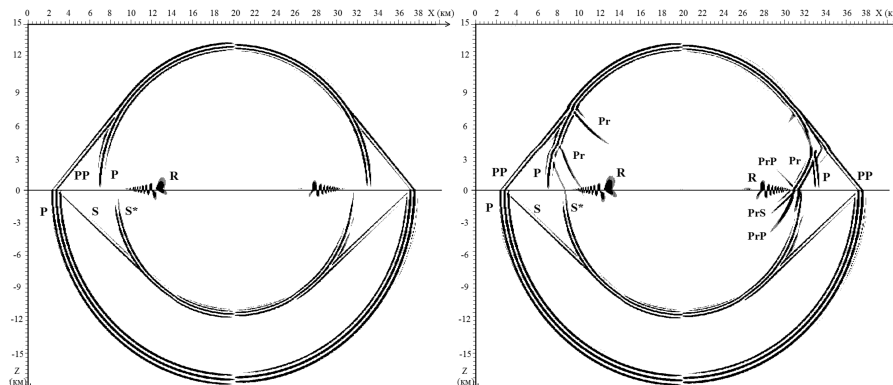


Рис. 2.

На рис. 1 изображены мгновенные снимки волнового поля в момент времени $t = 5$ сек. для компоненты $u_x(x, y, z)$ в плоскости XZ при $y = y_0 = 40$ км. Левый — без ветра, правый — скорость ветра в атмосфере 50 м/с. Граница раздела упругой среды и атмосферы показана сплошной линией. Из представленных на рисунке снимков видно, что в упругой среде вместе со сферической продольной волной P и конической поперечной волной S распространяется «нелучевая» сферическая волна S^* , а далее следует поверхностная волна Стоунли R . В атмосфере кроме преломленных на границе конических акусто-гравитационных волн PP и SP распространяется сферическая волна P , а далее следует поверхностная волна Стоунли. Из представленных на рис. 1 снимков волнового поля заметно влияние ветра на распространение акусто-гравитационных волн в атмосфере и поверхностной волны Стоунли, а также на волновую картину в целом. Исследования результатов расчетов волнового поля и влияние на него ветра в случае, когда скорость ветра в атмосфере постоянная, приведены в работе [14]. В том числе в [14] описан открытый в результате этих исследований эффект влияния ветра на распространение поверхностной волны Стоунли. Ранее было известно лишь про влияние ветра на распространение акусто-гравитационных волн в атмосфере. Установлено, что при наличии ветра в атмосфере скорость и амплитуда сферической волны в атмосфере и поверхностной волны Стоунли зависит от направления распространения этих волн относительно направленности вектора скорости ветра.

На рис. 2 представлен результат расчетов волнового поля в случае, когда скорость ветра в атмосфере является функцией высоты. В данной модели физические характеристики упругой среды и атмосферы были заданы следующими:

1) атмосфера — скорость звука $c_0 = 340$ м/сек, плотность в зависимости от координаты z рассчитывалась по формуле $\rho_0(z) = \rho_1 \exp(-z/H)$, где $\rho_1 = 1.225 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $H = 6700$ м;

2) упругий слой — скорость продольной волны $c_p = 450$ м/сек, скорость поперечной волны $c_s = 300$ м/сек, плотность $\rho_0 = 1.5$ г/см³.

Для расчетов использовалась ограниченная область среды размером $(x, y, z) = (40 \text{ км}, 40 \text{ км}, 33 \text{ км})$. Моделировалось волновое поле от точечного источника

типа центр давления, расположенного в упругой среде на глубине $1/4$ длины продольной волны с координатами $(x_0, y_0, z_0) = (20 \text{ км}, 20 \text{ км}, -0.12 \text{ км})$. Временной сигнал в источнике задавался по формуле (42). Скорость ветра в атмосфере была задана в виде функции

$$V(z) = 50 \cdot \exp(-10 \cdot (z - 3800)^2) - 50 \cdot \exp(-10 \cdot (z - 7500)^2) \text{ м/сек.}$$

На рис. 2 изображены мгновенные снимки волнового поля в момент времени $t = 40$ сек для горизонтальной u_x компоненты скорости смещений в плоскости XZ при $y = y_0 = 20$ км. Левый — без ветра, правый — с ветром. Граница раздела упругой среды и атмосферы показана сплошной линией.

Из представленного на рис. 2 снимка волнового поля без ветра (левый снимок) видно, что в атмосфере распространяются акусто-гравитационные коническая PP и сферическая P волны, а далее следует поверхностная волна Стоунли R . На снимке волнового поля с ветром (правый снимок) видно, что в атмосфере возникают рефрагированные акусто-гравитационные волны Pr . Их возникновение обусловлено изменением скорости ветра с высотой. Падая на границу раздела атмосфера — литосфера, эти волны генерируют соответствующие продольную PrP и поперечную PrS волны в литосфере и отраженную акусто-гравитационную волну в атмосфере. Это явление известно как эффект акустосейсмической индукции и описано, например, в работе [1].

В ходе анализа полученных численных результатов моделирования были выявлены новые особенности распространения акусто-гравитационных волн при наличии ветра в атмосфере. В результате этих исследований установлено, что распределение энергии в проходящей и рефрагированной акусто-гравитационных волнах в случае эффекта «загибания» волны зависит от величины градиента скорости ветра. В случае малого значения этой величины «загибание» волны не происходит. Также имеет значение направление вектора скорости ветра по отношению к вектору распространения волны.

Заключение

Предлагаемый подход к постановке и решению рассмотренной задачи позволяет моделировать эффекты распространения волнового поля для единой математической модели среды «Земля — Атмосфера» и исследовать процессы возникновения обменных волн на их границе. Численное моделирование таких процессов позволяет также исследовать особенности влияния ветра на распространение акусто-гравитационных волн в атмосфере и поверхностных волн Стоунли. Анализ тестовых расчетов показывает устойчивость представленного алгоритма даже для моделей сред, имеющих резкоконтрастные границы раздела слоев или содержащих тонкие слои, сравнимые с пространственной длиной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А. С., Глинский Б. М., Дряхлов С. И. и др. Эффект акустосейсмической индукции при вибросейсмическом зондировании // Докл. АН. 1996. Т. 346. № 5. С. 664–667.

2. Гасилова Л. А., Петухов Ю. В. К теории поверхностных волн, распространяющихся вдоль разных границ раздела в атмосфере // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35. № 1. С. 14–23.
3. Разин А. В. Распространение сферического акустического дельта-импульса вдоль границы газ — твердое тело // Изв. РАН. Физика Земли. 1993. № 2. С. 73–77.
4. Михайленко Б. Г., Решетова Г. В. Математическое моделирование распространения сейсмических и акустогравитационных волн для неоднородной модели Земля — Атмосфера // Геология и геофизика. 2006. Т. 47. № 5. С. 547–556.
5. Mikhailenko B. G. Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Appl. Math. Let. 1999. N 12. P. 105–110.
6. Konyukh G. V., Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A. Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // J. Comput. Acoustics. 2001. V. 9, N 4. P. 1523–1541.
7. Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., Reshetova G. V. Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // Pure Appl. Geophys. 2003. N 160. P. 1207–1224.
8. Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., Reshetova G. V. Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophys. Prospecting. 2003. N 51. P. 37–48.
9. Имомназаров Х. Х., Михайлов А. А. Использование спектрального метода Лагерра для решения линейной двумерной динамической задачи для пористых сред // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11. № 2. С. 86–95.
10. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.
11. Virieux J. P., SV-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method // Geophysics. 1986. N 51. P. 889–901.
12. Saad Y., Van der Vorst H. A. Iterative solution of linear systems in the 20th century // J. Comput. Appl. Math. 2000. N 123. P. 1–33.
13. Sonneveld P. CGS, a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear system // J. Sci. Statist. Comput. 1989. N 10. P. 36–52.
14. Михайленко Б. Г., Михайлов А. А. Численное моделирование распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для модели «Земля — Атмосфера» при наличии ветра в атмосфере // Сиб. журн. вычисл. математики. 2014. Т. 17. № 2. С. 149–162.

Статья поступила 10 сентября 2015 г.

Михайлов Александр Анатольевич, Мартынов Валерий Николаевич
 Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
 пр. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
 alex_mikh@omzg.sccc.ru, vnm@nmsf.sccc.ru

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья может быть представлена в виде файла в формате pdf или распечатки, подготовленной с использованием какой-либо компьютерной системы подготовки математических текстов.

5. В начале статьи указывается индекс УДК. Статья сопровождается краткой аннотацией, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках. Подготовленная с использованием компьютера графика должна быть высококачественной, не ниже 600 DPI, и не использующей шрифты Adobe, отсутствующие в пакете MikTeX.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках.

Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних трех лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в издательстве и в редакции издания в течение пяти лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство образования и науки Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. Если статья принимается к опубликованию после доработки, то автор направляет в редакцию файл ее последней версии. При подготовке файла следует использовать, как правило, макропакет AMS-TEX со стилевым файлом `amsrpt`.

11. Предоставление файлов в форматах TEX или LaTeX возможно только при согласовании с редакцией. Автор не должен использовать необязательные авторские командные последовательности, введенные для облегчения набора. Запрещается переопределять греческие буквы, стандартные команды и т. п.

12. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

13. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

14. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.