

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 22, № 3 (87)

Июль—сентябрь, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- Егоров И. Е.** Применение модифицированного метода Галёркина
к первой краевой задаче для уравнения смешанного типа 3
- Кулагина М. Ф., Микишанина Е. А.** Построение
почти-периодических решений некоторых систем
дифференциальных уравнений 11
- Николаев Н. Н., Попов С. В.** Разрешимость обратной
коэффициентной задачи для неклассического уравнения третьего
порядка 20
- Павлов С. С.** Коэффициентные обратные задачи
для квазигиперболических уравнений высокого порядка
с интегральным переопределением 35
- Телешева Л. А.** Восстановление параметров в краевых задачах
для линейных параболических уравнений четвертого порядка 48
- Экаль Ж. Р.** Резургентные функции и сингулярные ОДУ 57
- Юмова Ц. Ж.** Асимптотически оптимальные функционалы
погрешности решетчатых кубатурных формул 70

Математическое моделирование

- Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.** О влиянии
нелинейных эффектов на стабильность общества 78
- Глинский Б. М., Мартынов В. Н., Сапетина А. Ф.**
3D-моделирование сейсмических волновых полей в средах,
характерных для вулканических структур 84

Фатьянов А. Г. Аналитическое моделирование волновых полей для сред сложного строения и структуры на сверхдальние расстояния	99
--	-----------

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

[http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/
instituty/niim/mzsvfu/](http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/)

e-mail: prokopezav85@gmail.com; madu@ysu.ru;

ivanegorov51@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА
ГАЛЁРКИНА К ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

И. Е. Егоров

Аннотация. Рассматривается первая краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка, когда уравнение принадлежит эллиптическому или гиперболическому типу вблизи оснований цилиндрической области пространства \mathbb{R}^{n+1} . Для исследования первой краевой задачи используется модифицированный метод Галёркина с привлечением метода регуляризации. Для решения первой краевой задачи строится приближенное решение с помощью соответствующей краевой задачи для системы ОДУ третьего порядка. Далее устанавливается оценка погрешности модифицированного метода Галёркина через параметр регуляризации и собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа по пространственным переменным.

Ключевые слова: метод Галёркина, уравнение смешанного типа, первая краевая задача, априорная оценка, оценка погрешности, регуляризация.

I. E. Egorov. Application of the modified Galerkin method for the first boundary problem for mixed type equation.

Abstract: Considers the first boundary problem for mixed type equation of the second order, when the equation belongs to an elliptic or hyperbolic type near the bases of the cylindrical region of space R^{n+1} . To study the first boundary value problem used a modified Galerkin method with the use of the method of regularization. For solving the first boundary value problem is an approximate solution using the appropriate boundary value problem for system of odes of third order. Next, set the error estimate of the modified Galerkin method using the regularization parameter and eigenvalues of the Dirichle problem for the operator Laplasa on the space variables.

Keywords: Galerkin method, the equation of mixed type, the first boundary value problem, a priori estimate, error estimate, regularization.

Изучению краевых задач для уравнения смешанного типа посвящено довольно много работ [1–12]. Краткий обзор этих и более современных работ в этой области был проведен в [13]. Отметим, что метод Галёркина является универсальным и широко применяется к решению краевых задач для линейных (нелинейных) уравнений математической физики [14–16]. При этом в работах [15, 16] получены оценки погрешности метода Галёркина для эллиптических и параболических уравнений. С другой стороны, метод Галёркина в сочетании с методом регуляризации давно применяется к решению краевых задач для уравнений смешанного типа [8, 9, 11]. В [17] применен стационарный метод Галёркина к решению первой краевой задачи для уравнения смешанного типа,

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки России в рамках базовой части государственного задания (проект № 3047).

когда уравнение принадлежит эллиптическому типу вблизи оснований цилиндрической области. В [18] получены оценки погрешности стационарного метода Галёркина через собственные значения оператора Лапласа по пространственным переменным и времени. В [13, 19] рассмотрены частные случаи краевой задачи В. Н. Врагова [10]. При этом для исследования краевой задачи использован модифицированный (нестационарный) метод Галёркина [20] с привлечением метода регуляризации. Для данных случаев получены оценки погрешности модифицированного метода Галёркина через параметр регуляризации и собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа по пространственным переменным.

В данной работе рассматривается первая краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка [12], когда уравнение принадлежит эллиптическому или гиперболическому типу вблизи оснований цилиндрической области. Для исследования первой краевой задачи будем использовать модифицированный метод Галёркина [13, 19, 20] с привлечением метода регуляризации. Для первой краевой задачи строим приближенное решение с помощью решения соответствующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Далее устанавливается оценка погрешности модифицированного метода Галёркина через параметр регуляризации и собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа по пространственным переменным.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $S \in C^2$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $S_T = S \times (0, T)$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$, $0 \leq t \leq T$.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv k(x, t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t), \quad (1)$$

где коэффициенты уравнения (1) являются достаточно гладкими функциями. Введем множества

$$P_0^\pm = \{(x, 0) : k(x, 0) \geq 0, x \in \Omega\}, \quad P_T^\pm = \{(x, T) : k(x, T) \geq 0, x \in \Omega\}.$$

I краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{P_0^+} = 0, \quad u|_{P_T^-} = 0. \quad (2)$$

Отметим, что первая краевая задача (1), (2) впервые была изучена А. Н. Тереховым [12] с помощью метода регуляризации.

Пусть C_L — класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (2).

Лемма 1 (см. [9, 12]). Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой и выполнены условия

$$k(x, T) < 0, \quad a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные бесконечно дифференцируемые функции

$\varphi(t), \psi(t)$ такие, что имеет место неравенство

$$(Lu, \varphi u_t + \psi u) \geq C_1 \|u\|_1^2, \quad C_1 > 0,$$

для всех функций $u \in C_L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется положительное число $T_0 < T$ такое, что

$$k(x, t) \leq -\delta_1, \quad t \in [T_0, T].$$

Выберем функции $\varphi(t), \psi(t) \in C^\infty[0, T]$ такие, что

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \mu, \quad t \in [0, T_0], \quad \varphi'(t) \leq 0, \quad \varphi(T) = 0, \\ \psi(t) &= 1 - \frac{1}{2}\varphi'(t). \end{aligned}$$

Для $u(x, t)$ из C_L после интегрирования по частям получаем соотношение

$$\begin{aligned} (Lu, \varphi u_t + \psi u) &= \int_Q \left\{ \left[\left(a - \frac{1}{2}k_t \right) \varphi - k \left(\psi + \frac{1}{2}\varphi_t \right) \right] u_t^2 + \left(\psi - \frac{1}{2}\varphi_t \right) \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right. \\ &\quad \left. + c \left(\psi - \frac{1}{2}\varphi_t \right) u^2 + [a\psi - (k\psi)_t] u_t u \right\} dQ + I, \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$I = -\frac{\mu}{2} \int_{\overline{F_0^-}} k u_t^2 dx \geq 0.$$

Теперь выберем $\mu > 0$ так, что

$$\delta\mu - \max_Q |k| \geq \delta_2 > 0.$$

Тогда

$$\left(a - \frac{1}{2}k_t \right) \varphi - k \left(\psi + \frac{1}{2}\varphi_t \right) \geq \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Из соотношения (3), используя неравенство Коши и условия леммы 1, получаем априорную оценку леммы 1.

Для $\varepsilon > 0$ имеем $L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon D_t^3 u + Lu$. В качестве базисных функций берем $\varphi_k(x)$, которые являются решением спектральной задачи

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad x \in \Omega, \quad \varphi|_S = 0.$$

При этом функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, а соответствующие собственные числа λ_k таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ и $\lambda_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$ [14].

В дальнейшем будем считать, что $k(x, T) < 0$. Приближенное решение $u^{N,\varepsilon}(x, t)$ краевой задачи (1), (2) ищем в виде

$$u^{N,\varepsilon}(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^{N,\varepsilon}(t) \varphi_k(x) \equiv v(x, t),$$

в котором $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решение следующей краевой задачи для системы ОДУ третьего порядка:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \quad (4)$$

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0, \quad D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \quad c_l^{N,\varepsilon}(T) = 0, \quad l = \overline{1, N}, \quad (5)$$

при $k(x, 0) < 0$ или

$$c_l^{N,\varepsilon}(0) = 0, \quad D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \quad c_l^{N,\varepsilon}(T) = 0, \quad l = \overline{1, N}, \quad (5)$$

при $k(x, 0) > 0$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1 и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x, 0) < 0$, либо $k(x, 0) > 0$.

Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для приближенных решений краевой задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\varepsilon \int_Q \varphi v_{tt}^2 dQ + \|v\|_1^2 \leq C_2 \|f\|^2, \quad C_2 > 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (6)$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi'(T) = 0$. Тогда из (4), (5) имеем

$$\begin{aligned} (f, \varphi v_t + \psi v) &= \varepsilon \int_Q \varphi v_{tt}^2 dQ - \frac{\varepsilon}{2} \int_Q [(\varphi_{tt} + 3\psi_t)v_t^2 + \psi_{ttt}v^2] dQ \\ &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon \int_{\Omega} \psi v_t^2 dx \Big|_{t=0}^{t=T} + (Lv, \varphi v_t + \psi v). \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что для функций v справедливо равенство (3).

Достаточно рассмотреть только случай $k(x, 0) \leq -\delta_3 < 0$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, что $\varepsilon_0 \leq \delta_3\mu$. Тогда

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon \int_{\Omega_0} \psi v_t^2 dx \geq 0.$$

Теперь, при необходимости уменьшая ε_0 , с учетом (3) из соотношения (7) получаем априорную оценку (6). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, выполнены условия

$$a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad a + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x, 0) < 0$, $k(x, T) < 0$, либо $k(x, 0) > 0$, $k(x, T) < 0$, $f(x, 0) = 0$.

Тогда существуют число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для приближенных решений краевой задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\int_Q \left[v_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 \right] dQ \leq C_3 [\|f\|^2 + \|f_t\|^2], \quad C_3 > 0, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (8)$$

Доказательство. Для неотрицательных бесконечно дифференцируемых функций $\xi(t), \eta(t)$ из (4), (5) получаем соотношение

$$\begin{aligned} - (f, \xi v_{ttt} + \eta v_{tt}) &= \varepsilon \int_Q \xi v_{ttt}^2 dQ - \frac{\varepsilon}{2} \int_Q \eta_t v_{tt}^2 dQ \\ &+ \int_Q \left\{ \left[\left(a + \frac{1}{2}k_t \right) \xi - k \left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t \right) \right] v_{tt}^2 + \left(\eta - \frac{3}{2}\xi_t \right) \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 + [(a\xi)_t - a\eta + c\xi] v_{tt} v_t \right. \\ &\quad \left. + c(\xi_t - \eta) v v_{tt} - (\eta_t - \xi_{tt}) \sum_{i=1}^n v_{tx_i} v_{x_i} \right\} dQ + J, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$J \equiv \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}(\varepsilon\eta - k\xi)v_{tt}^2 - a\xi v_{tt}v_t + \frac{1}{2}\xi \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 \right] dx \Big|_{t=0}^{t=T}.$$

Сначала рассмотрим случай $k(x, 0) < 0$, $k(x, T) < 0$. Тогда найдутся положительные числа t_0 , T_0 такие, что $t_0 < T_0 < T$ и $k(x, t) \leq -\delta_1 < 0$, $t \in [0, t_0] \cup [T_0, T]$.

Выберем функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ такие, что

$$\xi(0) = \xi(T) = 0, \quad \xi'(t) \geq 0, \quad t \in [0, t_0], \quad \xi(t) = \mu, \quad t \in [t_0, T_0], \quad \xi'(t) \leq 0, \quad t \in [T_0, T],$$

$$\eta(t) = 1 + \frac{1}{2}\xi_t, \quad t \in [0, t_0], \quad \eta(t) = 1, \quad t \in [t_0, T_0], \quad \eta(t) = 1 - \frac{1}{2}\xi_t, \quad t \in [T_0, T].$$

Сначала выбираем $\mu > 0$ так, что

$$\delta\mu - \max_{\bar{Q}} |k| \geq \delta_2 > 0.$$

Тогда

$$\left(a + \frac{1}{2}k_t \right) \xi - k \left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t \right) \geq \min\{\delta_1, \delta_2\}. \quad (10)$$

В силу неотрицательности

$$J = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_T} \eta v_{tt}^2 dx,$$

используя неравенство Коши и неравенства (6), (10), из соотношения (9) получаем априорную оценку (8).

Теперь рассмотрим случай $k(x, 0) > 0$, $k(x, T) < 0$. Будем считать, что $k(x, t) \leq -\delta_1$, $t \in [T_0, T]$, и $k(x, 0) \geq \delta_3 > 0$. Выбирая $\mu > 0$, как выше, получаем справедливость неравенства (10).

В силу неравенства

$$J \geq \frac{1}{2}(\delta_3\mu - \varepsilon) \int_{\Omega_0} v_{tt}^2 dx,$$

используя неравенство Коши и при необходимости уменьшая ε_0 , из соотношения (9) снова получаем оценку (8). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть выполнены все условия леммы 3. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для приближенных решений краевой задачи (1), (2) имеет место оценка

$$\|\Delta v\|^2 \leq C_4(\|f\|^2 + \|f_t\|^2), \quad C_4 > 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем функцию $\varphi(t)$ из $C^\infty[0, T]$ такую, что $\varphi(0) = \mu > 0$, $\varphi'(t) \leq 0$, $\varphi(T) = \varphi'(0) = \varphi'(T) = 0$. Из (4), (5), используя свойства

функций $\varphi_k(x)$ и проведя интегрирование по частям, получаем соотношение

$$\begin{aligned} - (f, \varphi \Delta v_t + \Delta v) &= \varepsilon \int_Q \left[\varphi \sum_{i=1}^n v_{ttx_i}^2 - \frac{1}{2} \varphi_{tt} \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 \right] dQ \\ + \int_Q \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \varphi_t\right) (\Delta v)^2 + \left[a\varphi - \frac{1}{2} (k\varphi)_t \right] \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 + \varphi \sum_{i=1}^n [k_{x_i} v_{tt} + a_{x_i} v_t + (cv)_{x_i}] v_{tx_i} \right. \\ &\quad \left. - (kv_{tt} + av_t + cv) \Delta v \right\} dQ + K, \quad (12) \end{aligned}$$

где

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[(k\varphi + \varepsilon) \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 \right] dx \Big|_{t=0}^{t=T}.$$

Рассмотрим случай $k(x, 0) \leq -\delta_1 < 0$. Выберем $\mu > 0$ так, чтобы $\varepsilon_0 \leq \delta_1 \mu$. Тогда в силу неотрицательности K , используя неравенств Коши и априорные оценки (6), (8), из соотношения (12) получаем оценку (11).

При $k(x, 0) > 0$ имеем $v_t(x, 0) = 0$, следовательно, снова $K \geq 0$. Стало быть, снова будет справедлива оценка (11). Лемма 4 доказана.

Теорема 1. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, выполнены условия

$$a - \frac{1}{2} |k_t| \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x, 0) < 0$, $k(x, T) < 0$, либо $k(x, 0) > 0$, $k(x, T) < 0$, $f(x, 0) = 0$.

Тогда первая краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $u(x, t)$ из $W_2^2(Q)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_2 \leq C_5 (\|f\| + \|f_t\|), \quad C_5 > 0.$$

Доказательство. Из неравенств (6), (8), (11) и второго основного неравенства для оператора Лапласа [14, 21] для приближенных решений первой краевой задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\|u^{N, \varepsilon}\|_2 \leq C_5 (\|f\| + \|f_t\|), \quad C_5 > 0. \quad (13)$$

Из данной оценки следует существование искомого решения краевой задачи (1), (2), а единственность решения краевой задачи (1), (2) обеспечивается леммой 1. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для погрешности модифицированного метода Галёркина справедлива оценка

$$\|u - u^{N, \varepsilon}\|_1 \leq C_6 (\|f\| + \|f_t\|) (\varepsilon^{1/2} + \lambda_{N+1}^{-1/4}), \quad C_6 > 0, \quad (14)$$

где $u(x, t)$ — точное решение краевой задачи (1), (2).

Доказательство. Рассмотрим функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, построенные в ходе доказательства леммы 1. Введем в пространстве $L_2(Q)$ линейное многообразие

$$H_N = \left\{ \eta(x, t) = \sum_{l=1}^N a_l(t) \varphi_l(x) : a_l \in W_2^2(0, T), a_l(0) = a_l(T) = 0, l = \overline{1, N} \right\}$$

при $k(x, 0) < 0$ или

$$H_N = \left\{ \eta(x, t) = \sum_{l=1}^N a_l(t) \varphi_l(x) : a_l \in W_2^2(0, T), a_l(0) = a_l'(0) = a_l(T) = 0, l = \overline{1, N} \right\}$$

при $k(x, 0) > 0$.

Из уравнения (1) и равенств (4) с учетом определения H_N нетрудно получить соотношения

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi \eta_t + \psi \eta) = (f, \varphi \eta_t + \psi \eta), \quad (Lu, \varphi \eta_t + \psi \eta) = (f, \varphi \eta_t + \psi \eta), \quad \eta \in H_N,$$

где $u(x, t)$ — точное решение краевой задачи (1), (2), гарантированное теоремой 1.

Отсюда получим равенство

$$(L(u - u^{N,\varepsilon}), \varphi \eta_t + \psi \eta) = -\varepsilon (u_{ttt}^{N,\varepsilon}, \varphi \eta_t + \psi \eta), \quad \eta \in H_N.$$

Последнее равенство при $\eta = \omega - u^{N,\varepsilon}$ с произвольной функцией ω из H_N принимает вид

$$(L(u - u^{N,\varepsilon}), \varphi(u_t - u_t^{N,\varepsilon}) + \psi(u - u^{N,\varepsilon})) = \varepsilon (u_{ttt}^{N,\varepsilon}, (\varphi(\omega_t - u_t^{N,\varepsilon}))_t + (\psi(\omega - u^{N,\varepsilon}))_t) + (f - Lu^{N,\varepsilon}, \varphi(u_t - \omega_t) + \psi(u - \omega)). \quad (15)$$

Рассмотрим ряд Фурье

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \varphi_k(x), \quad c_k(t) = (u, \varphi_k)_0.$$

При

$$\omega = \sum_{k=1}^N c_k(t) \varphi_k(x)$$

аналогично [20] устанавливаются оценки

$$\|u - \omega\|^2 \leq C_7 \lambda_{N+1}^{-2} (\|f\|^2 + \|f_t\|^2), \quad C_7 > 0, \quad (16)$$

$$\|u_t - \omega_t\|^2 \leq C_8 \lambda_{N+1}^{-1} (\|f\|^2 + \|f_t\|^2), \quad C_8 > 0. \quad (17)$$

Используя лемму 1, с учетом неравенств (13), (16), (17) из равенства (15) получим оценку (14) погрешности метода Галёркина. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $k(x, 0) > 0$, $k(x, T) \geq 0$ или $k(x, 0) < 0$, $k(x, T) \geq 0$ краевая задача (1), (2) совпадает с краевой задачей В. Н. Врагова [10] и для нее справедливы результаты, аналогичные [13, 19].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В уравнении (1) вместо оператора Лапласа можно рассмотреть эллиптический оператор второго порядка более общего вида [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.
2. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte. Uppsala: These, 1935.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
4. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
5. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
6. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974.
7. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во МГУ, 1988.
8. Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.
9. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
10. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
11. Ларькин Н. А. Об одном классе нелинейных уравнений смешанного типа // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 6. С. 1308–1314.
12. Терехов А. Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН СССР, 1979. С. 128–136.
13. Егоров И. Е., Тихонова И. М. Применение модифицированного метода Галёркина к уравнению смешанного типа // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 14–19.
14. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
15. Джишкарини А. В. О скорости сходимости метода Бубнова — Галёркина // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 2. С. 343–348.
16. Виногоградова П. В., Зарубин А. Г. Оценка погрешности метода Галёркина для нестационарных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 9. С. 1643–1651.
17. Егоров И. Е., Тихонова И. М. О стационарном методе Галёркина для уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, № 2. С. 41–47.
18. Егоров И. Е., Тихонова И. М. Применение стационарного метода Галёркина для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 2. С. 20–28.
19. Тихонова И. М., Егоров И. Е. О модифицированном методе Галёркина для уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. семинара молодых ученых «Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа». Улан-Удэ, 2015. С. 96–99.
20. Егоров И. Е. О модифицированном методе Галёркина для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Узб. мат. журн. 2013. № 3. С. 33–40.
21. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

Статья поступила 8 сентября 2015 г.

Егоров Иван Егорович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Научно-исследовательский институт математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
IvanEgorov51@mail.ru

ПОСТРОЕНИЕ ПОЧТИ–ПЕРИОДИЧЕСКИХ
РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Ф. Кулагина, Е. А. Микишанина

Аннотация. Указан метод построения почти-периодических в смысле Бора решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных, которые возникают при решении некоторых задач для гетерогенных сред.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, краевая задача, обобщенное дискретное преобразование Фурье, ряды Фурье.

M. F. Kulagina, E. A. Mikishanina Constructing almost periodic solutions for some systems of differential equations.

Abstract: A method for constructing almost periodic Bohr solutions of boundary value problems for systems of differential equations in partial derivatives that arise in the solution of certain problems for heterogeneous environments .

Keywords: differential equations, boundary value problem, generalized discrete Fourier transform, Fourier series .

Рассматриваются краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, которые получаются при решении плоских задач теории гетерогенных сред в теории упругости, теории фильтрации, теории диффузии, теплопроводности, электро- и магнитодинамике в случае, когда область представляет собой двухслойную (или l -слойную) полосу. Граничные условия задаются как на границе полосы, так и на линии склейки.

В общем случае задача выглядит следующим образом: найти функции $u_{km}(x, y)$ такие, что в каждой из m полос, $-\infty < x < +\infty$, $a_m < y < b_m$, они удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^n \left(a_{kj}^{(m)} \frac{\partial^2 u_{km}(x, y)}{\partial x^2} + b_{kj}^{(m)} \frac{\partial^2 u_{km}(x, y)}{\partial y^2} + c_{kj}^{(m)} \frac{\partial u_{km}(x, y)}{\partial x} + d_{kj}^{(m)} \frac{\partial u_{km}(x, y)}{\partial y} + e_{kj}^{(m)} u_{km}(x, y) \right) = F_{jm}(x, y), \quad j = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l}. \quad (1)$$

Граничные условия задаются на границе полосы, а на линиях раздела задаются условия склейки. Например, для двухслойной полосы $-\infty < x < +\infty$, $-1 < y < 0$, $0 < y < 1$ эти условия могут выглядеть так ($k = \overline{1, n}$, $m = \overline{1, 2}$):

$$u_{km}(x, 1) = \Phi_{km}(x),$$

$$u_{km}(x, -1) = \Psi_{km}(x),$$

$$u_{k1}(x, 0) = u_{k2}(x, 0),$$

$$\frac{\partial u_{k1}(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u_{k2}(x, 0)}{\partial y},$$

Количество условий зависит от порядка системы (максимальный порядок системы $2n$).

Будем искать почти-периодические в смысле Бора решения на каждой прямой $y = \text{const}$. Эти решения будем строить с помощью обобщенного дискретного преобразования Фурье, введенного и изученного в работах [1–3].

Напомним основные понятия, относящиеся к почти-периодическим функциям. *Почти-периодическим* (п.-п.) *полиномом* называется функция $p(t)$, $-\infty < t < \infty$, являющаяся линейной комбинацией функций вида $e^{i\lambda t}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим через Π_C замыкание по норме $L_\infty(-\infty, +\infty)$ множества всех п.-п. полиномов. Множество Π_C является подалгеброй $L_\infty(-\infty, +\infty)$, состоящей из всех п.-п. функций по Бору. Через Π_W обозначим множество Π_C , состоящее из функций $A(t)$ вида

$$A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}, \quad (1.1)$$

удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Множество Π_W является банаховой алгеброй.

Каждой функции $A(t)$ из Π_W поставим в соответствие функцию

$$a(\lambda) = M \{A(t)e^{-i\lambda t}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A(t)e^{-i\lambda t} dt. \quad (1.2)$$

Такая функция существует и может быть отличной от нуля не более чем для счетного множества ограничений λ : λ_1, λ_2, K : $a(\lambda_n) = a_n \neq 0$. Таким образом, каждой функции из Π_W поставим в соответствие функцию $a(\lambda)$ или последовательность пар $a(\lambda) = \{(a_1, \lambda_1), (a_2, \lambda_2), K\}$, где $a_n \in C$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Если $A(t) \in \Pi_W$, то соответствующая этой функции последовательность $\{a_n\}$ принадлежит l_1 (будем говорить, что $a(\lambda)$ принадлежит l_1). Обратно, для каждой функции $a(\lambda) \in l_1$ существует функция $A(t)$, для которой выполнено (1.2), и $A(t)$ имеет вид (1.1). Ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно при $-\infty < t < \infty$. Следовательно, установлено взаимно однозначное соответствие между функциями из Π_W и двумерными последовательностями $a(\lambda) \in l_1$.

Равенство (1.1), согласно которому последовательности $a(\lambda) \in l_1$ поставлена в соответствие функция $A(t) \in \Pi_W$, назовем *обобщенным дискретным преобразованием Фурье* (ОДФ). Равенство (1.2) определяет обратное преобразование. Последовательность $a(\lambda)$ — оригинал, функция $A(t)$ — изображение. ОДФ будем обозначать символами $A(t) = W_0 a(\lambda)$, $a(\lambda) = W_0^{-1} A(t)$. Показано, что если $A(t)$ дифференцируема и $A^{(j)}(t) \in \Pi_W$, $j = 0, K, p$, то

$$W_0^{-1} \frac{d^p A(t)}{dt^p} = (i\lambda)^p a(\lambda).$$

Коэффициенты последовательности $a(\lambda)$ могут зависеть от параметра y :

$$a(\lambda, y) = \{(a_1, \lambda_1), (a_2, \lambda_2), K\}, \quad y \in [a, b].$$

Если существует последовательность положительных чисел $\{a_n\} \in l_1$ такая, что $|a_n(y)| \leq \alpha_n$, то функции $A(t, y) = W_0 a(\lambda, y)$ принадлежат Π_W на каждой горизонтальной прямой полосе $a \leq \text{Im } z \leq b$ ($z = t + iy$). Будем говорить, что функция $A(t, y)$ принадлежит Π_W^y в полосе $[a, b]$. Если функция $A(t, y)$ дифференцируема p раз по y и $\frac{\partial^j A(t, y)}{\partial y^j} \in \Pi_W^y$, $j = 0, \dots, p$, то

$$W_0^{-1} \frac{\partial^p A(t, y)}{\partial y^p} = \frac{\partial^p a(\lambda, y)}{\partial y^p}.$$

Будем считать, что функции в граничных условиях принадлежат Π_W , т. е. представимы в виде абсолютно сходящихся рядов

$$\Phi_{km}(x) = \sum_{\lambda} \varphi_{km}(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad \Psi_{km}(x) = \sum_{\lambda} \psi_{km}(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l},$$

все функции $F_{jm}(x, y)$ принадлежат Π_W^y , т. е. представимы в виде рядов

$$F_{jm}(x, y) = \sum_{\lambda} f_{jm}(\lambda, y) e^{i\lambda x}, \quad j = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l}.$$

Решение системы $u_{km}(x, y)$ будем искать в классе Π_W^y , т. е. в виде

$$u_{km}(x, y) = \sum_{\lambda} A_{km}(\lambda, y) e^{i\lambda x}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l},$$

где $A_{km}(\lambda, y)$ — неизвестные функции, которые находятся из граничных условий и условий склейки следующим образом.

Поддействуем оператором W_0^{-1} на уравнения системы (1) и получим систему

$$\sum_{k=1}^n \left(-\lambda^2 a_{kj}^{(m)} A_{km}(\lambda, y) + b_{kj}^{(m)} \frac{d^2 A_{km}(\lambda, y)}{dy^2} + c_{kj}^{(m)} \cdot i\lambda \cdot A_{km}(\lambda, y) + d_{kj}^{(m)} \frac{d A_{km}(\lambda, y)}{dy} + e_{kj}^{(m)} A_{km}(\lambda, y) \right) = f_{jm}(\lambda, y), \quad j = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l}, \quad (2)$$

обыкновенных линейных дифференциальных уравнений при каждом фиксированном m порядка не выше $2n$ (λ — параметр). Решая эту систему, получим

$$A_{km}(\lambda, y) = \sum_{q=1}^{2n} p_{qkm}(\lambda) \xi_{qkm}(\lambda, y) + \tilde{\xi}_{km}(\lambda, y), \quad k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l},$$

где $p_{qkm}(\lambda)$ при фиксированных q, k, m, λ — постоянные. Именно они и находятся из граничных условий и условий склейки. Для определения этих постоянных получается конечная система линейных алгебраических уравнений.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу теории фильтрации.

Постановка задачи. В однородно-изотропной пористой области, представляющей собой две полосы, $-\infty < x < +\infty$: первая ($m = 1$), $-1 \leq y \leq 0$; вторая ($m = 2$), $0 \leq y \leq 1$ — происходит стационарная фильтрация некоторой жидкости.

На внешних границах области $y = 1$, $y = -1$ известны значения нормального и касательного напряжений, а также значение потенциала скорости фильтрации:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(x, -1) &= F_1(x), & \sigma_y^{(2)}(x, 1) &= G_1(x), \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, -1) &= F_2(x), & \tau_{xy}^{(2)}(x, 1) &= G_2(x), \\ \varphi^{(1)}(x, -1) &= F_3(x), & \varphi^{(2)}(x, 1) &= G_3(x),\end{aligned}\quad (3)$$

где функции $F_j(x)$, $G_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, почти-периодические с абсолютно сходящимися рядами Фурье (принадлежат классу Π_W), т. е. имеют структуру

$$F_j(x) = \sum_{\lambda \neq 0} f_j(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad G_j(x) = \sum_{\lambda \neq 0} g_j(\lambda) e^{i\lambda x},$$

$\{\lambda\}$ — счетное множество действительных чисел, которое отделено от нуля. На общей границе раздела сред $y = 0$ имеют место условия жесткого сцепления:

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), \quad (4)$$

$$u^{(1)}(x, 0) = u^{(2)}(x, 0), \quad \nu^{(1)}(x, 0) = \nu^{(2)}(x, 0), \quad (5)$$

$$\frac{\varphi^{(1)}(x, 0)}{k_1} = \frac{\varphi^{(2)}(x, 0)}{k_2}, \quad \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial y}(x, 0), \quad (6)$$

где k_1 , k_2 — коэффициенты фильтрации сред. Функции $u^{(m)}(x, y)$, $\nu^{(m)}(x, y)$, $m = 1, 2$, известным образом выражаются через $\sigma_x^{(m)}(x, y)$, $\sigma_y^{(m)}(x, y)$, $\tau_{xy}^{(m)}(x, y)$.

Найти функции потенциала скорости фильтрации $\varphi^{(m)}(x, y)$ жидкости, действующей в каждой полосе пористой области $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq y \leq 0$, $-\infty < x < +\infty$, а также напряжения $\sigma_x^{(m)}(x, y)$, $\sigma_y^{(m)}(x, y)$, $\tau_{xy}^{(m)}(x, y)$, $m = 1, 2$.

Подобные задачи возникают при расчете напряжения и деформации дорожных одежд [4].

Эта задача сводится к решению системы уравнений относительно $\sigma_x^{(m)}(x, y)$, $\sigma_y^{(m)}(x, y)$, $\tau_{xy}^{(m)}(x, y)$, $\varphi^{(m)}(x, y)$, $m = 1, 2$ [5]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_x^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y^{(m)}}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_x^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(m)}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(m)}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial y} - k_0^{(m)} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial y^2} &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Решение будем искать в классе Π_W^y ($0 \leq y \leq 1$), т. е. в классе функций, представимых в виде рядов

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(1)}(x, y) &= \sum_{\lambda} A_{\lambda}^{(1)}(y) e^{i\lambda x}, & \sigma_x^{(2)}(x, y) &= \sum_{\lambda} A_{\lambda}^{(2)}(y) e^{i\lambda x}, \\ \sigma_y^{(1)}(x, y) &= \sum_{\lambda} B_{\lambda}^{(1)}(y) e^{i\lambda x}, & \sigma_y^{(2)}(x, y) &= \sum_{\lambda} B_{\lambda}^{(2)}(y) e^{i\lambda x}, \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, y) &= \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{(1)}(y) e^{i\lambda x}, & \tau_{xy}^{(2)}(x, y) &= \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{(2)}(y) e^{i\lambda x}, \\ \varphi^{(1)}(x, y) &= \sum_{\lambda} D_{\lambda}^{(1)}(y) e^{i\lambda x}, & \varphi^{(2)}(x, y) &= \sum_{\lambda} D_{\lambda}^{(2)}(y) e^{i\lambda x}.\end{aligned}\quad (8)$$

Поддействуем оператором W_0^{-1} на уравнения системы (7). Учитывая его свойства, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
 -\lambda^2 A_\lambda^{(m)}(y) + \frac{d^2 A_\lambda^{(m)}(y)}{dy^2} - \lambda^2 B_\lambda^{(m)}(y) + \frac{d^2 B_\lambda^{(m)}(y)}{dy^2} &= 0, \\
 i\lambda A_\lambda^{(m)}(y) + \frac{dC_\lambda^{(m)}(y)}{dy} - i\lambda D_\lambda^{(m)}(y) &= 0, \\
 i\lambda C_\lambda^{(m)}(y) + \frac{dB_\lambda^{(m)}(y)}{dy} - \frac{D_\lambda^{(m)}(y)}{dy} - k_0^{(m)} &= 0, \\
 -\lambda^2 D_\lambda^{(m)}(y) + \frac{d^2 D_\lambda^{(m)}(y)}{dy^2} &= 0, \quad m = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Решая систему дифференциальных уравнений (9), имеем

$$\begin{aligned}
 A_\lambda^{(m)}(y) &= \left(-b_1^{(m)}(\lambda) - \frac{2}{\lambda} b_3^{(m)}(\lambda) - b_3^{(m)}(\lambda)y + 2d_1^{(m)}(\lambda) \right) e^{\lambda y} \\
 &\quad + \left(-b_2^{(m)}(\lambda) + \frac{2}{\lambda} b_4^{(m)}(\lambda) - b_4^{(m)}(\lambda)y + 2d_2^{(m)}(\lambda) \right) e^{-\lambda y}, \\
 B_\lambda^{(m)}(y) &= \left(b_1^{(m)}(\lambda) + b_3^{(m)}(\lambda)y \right) e^{\lambda y} + \left(b_2^{(m)}(\lambda) + b_4^{(m)}(\lambda)y \right) e^{-\lambda y}, \\
 C_\lambda^{(m)}(y) &= -\frac{ik_0^{(m)}}{\lambda} + i \left(b_1^{(m)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_3^{(m)}(\lambda) + b_3^{(m)}(\lambda)y - d_1^{(m)}(\lambda) \right) e^{\lambda y} \\
 &\quad + i \left(-b_2^{(m)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_4^{(m)}(\lambda) - b_4^{(m)}(\lambda)y + d_2^{(m)}(\lambda) \right) e^{-\lambda y}, \\
 D_\lambda^{(m)}(y) &= d_1^{(m)}(\lambda)e^{\lambda y} + d_2^{(m)}(\lambda)e^{-\lambda y}, \quad m = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Используем граничные условия и условия сцепления для определения $b_1^{(m)}(\lambda)$, $b_2^{(m)}(\lambda)$, $b_3^{(m)}(\lambda)$, $b_4^{(m)}(\lambda)$, $d_1^{(m)}(\lambda)$, $d_2^{(m)}(\lambda)$, $m = 1, 2$. Из граничных условий (3) следует, что

$$\begin{aligned}
 b_1^{(1)}(\lambda)e^{-\lambda} + b_2^{(1)}(\lambda)e^\lambda - b_3^{(1)}(\lambda)e^{-\lambda} - b_4^{(1)}(\lambda)e^\lambda &= f_1(\lambda), \\
 -\frac{ik_0^{(1)}}{\lambda} + i \left(b_1^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_3^{(1)}(\lambda) - b_3^{(1)}(\lambda) - d_1^{(1)}(\lambda) \right) e^{-\lambda} \\
 + i \left(-b_2^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_4^{(1)}(\lambda) + b_4^{(1)}(\lambda) + d_2^{(1)}(\lambda) \right) e^\lambda &= f_2(\lambda), \\
 d_1^{(1)}(\lambda)e^{-\lambda} + d_2^{(1)}(\lambda)e^\lambda &= f_3(\lambda), \\
 b_1^{(2)}(\lambda)e^\lambda + b_2^{(2)}(\lambda)e^{-\lambda} + b_3^{(2)}(\lambda)e^\lambda + b_4^{(2)}(\lambda)e^{-\lambda} &= g_1(\lambda), \\
 -\frac{ik_0^{(2)}}{\lambda} + i \left(b_1^{(2)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_3^{(2)}(\lambda) + b_3^{(2)}(\lambda) - d_1^{(2)}(\lambda) \right) e^\lambda \\
 + i \left(-b_2^{(2)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_4^{(2)}(\lambda) - b_4^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda) \right) e^{-\lambda} &= g_2(\lambda),
 \end{aligned}$$

$$d_1^{(2)}(\lambda)e^\lambda + d_2^{(2)}(\lambda)e^{-\lambda} = g_3(\lambda).$$

Из условий (4) следует, что

$$b_1^{(1)}(\lambda) + b_2^{(1)}(\lambda) = b_1^{(2)}(\lambda) + b_2^{(2)}(\lambda),$$

$$\begin{aligned} & -\frac{k_0^{(1)}}{\lambda} + \left(b_1^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}b_3^{(1)}(\lambda) - d_1^{(1)}(\lambda) \right) + \left(-b_2^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}b_4^{(1)}(\lambda) + d_2^{(1)}(\lambda) \right) \\ &= -\frac{k_0^{(2)}}{\lambda} + \left(b_1^{(2)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}b_3^{(2)}(\lambda) - d_1^{(2)}(\lambda) \right) + \left(-b_2^{(2)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}b_4^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda) \right). \end{aligned}$$

Функции $u^{(m)}(x, y)$, $\nu^{(m)}(x, y)$, $m = 1, 2$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u^{(m)}(x, y) &= \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i}{E_m \lambda^2} \left((b_1^{(m)}\lambda + 2b_3^{(m)} + \lambda y b_3^{(m)} - 2\lambda d_1^{(m)} + \nu_m \lambda b_1^{(m)} + \nu_m \lambda b_3^{(m)} y) e^{\lambda y} \right. \\ &\quad \left. + (\lambda b_2^{(m)} - 2b_4^{(m)} + \lambda y b_4^{(m)} - 2\lambda d_2^{(m)} + \nu_m \lambda b_2^{(m)} - \nu_m \lambda b_4^{(m)} y) e^{-\lambda y} \right) e^{i\lambda x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu^{(m)}(x, y) &= \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i}{E_m \lambda^2} \left((b_1^{(m)}\lambda - b_3^{(m)} + \lambda y b_3^{(m)} - 2\nu_m \lambda d_1^{(m)} + \nu_m \lambda b_1^{(m)} \right. \\ &\quad \left. + \nu_m b_3^{(m)} + \nu_m \lambda b_3^{(m)} y) e^{\lambda y} + (-\lambda b_2^{(m)} - b_4^{(m)} - \lambda y b_4^{(m)} + 2\nu_m \lambda d_2^{(m)} \right. \\ &\quad \left. - \nu_m \lambda b_2^{(m)} + \nu_m b_4^{(m)} - \nu_m \lambda b_4^{(m)} y) e^{-\lambda y} \right) e^{i\lambda x} + \sum_{\lambda \neq 0} \frac{-2k_0^{(m)}(1 + \nu_m)}{\lambda^2 E_m} e^{i\lambda x}, \end{aligned}$$

где E_m, ν_m — некоторые заданные постоянные. Из условий (5) следует:

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i}{E_1 \lambda^2} \left((b_1^{(1)}\lambda + 2b_3^{(1)} - 2\lambda d_1^{(1)} + \nu_1 \lambda b_1^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. + (\lambda b_2^{(1)} - 2b_4^{(1)} - 2\lambda d_2^{(1)} + \nu_1 \lambda b_2^{(1)}) \right) e^{i\lambda x} \\ &= \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i}{E_2 \lambda^2} \left((b_1^{(2)}\lambda + 2b_3^{(2)} - 2\lambda d_1^{(2)} + \nu_2 \lambda b_1^{(2)}) \right. \\ &\quad \left. + (\lambda b_2^{(2)} - 2b_4^{(2)} - 2\lambda d_2^{(2)} + \nu_2 \lambda b_2^{(2)}) \right) e^{i\lambda x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i}{E_1 \lambda^2} \left((b_1^{(1)}\lambda - b_3^{(1)} - 2\nu_1 \lambda d_1^{(1)} + \nu_1 \lambda b_1^{(1)} + \nu_1 b_3^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. + (-\lambda b_2^{(1)} - b_4^{(1)} - 2\nu_1 \lambda d_2^{(1)} - \nu_1 \lambda b_2^{(1)} + \nu_1 b_4^{(1)}) - 2k_0^{(1)}(1 + \nu_1) \right) e^{i\lambda x} \\ &= \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i}{E_2 \lambda^2} \left((b_1^{(2)}\lambda - 2b_3^{(2)} - 2\nu_2 \lambda d_1^{(2)} + \nu_2 \lambda b_1^{(2)} + \nu_2 b_3^{(2)}) \right. \\ &\quad \left. + (-\lambda b_2^{(2)} - b_4^{(2)} + 2\nu_2 \lambda d_2^{(2)} - \nu_2 \lambda b_2^{(2)} + \nu_2 b_4^{(2)}) - 2k_0^{(2)}(1 + \nu_2) \right) e^{i\lambda x}, \end{aligned}$$

Из условий (6) следует, что

$$\frac{d_1^{(1)}(\lambda) + d_2^{(1)}(\lambda)}{k_1} = \frac{d_1^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda)}{k_2}, \quad d_1^{(1)}(\lambda) - d_2^{(1)}(\lambda) = d_1^{(2)}(\lambda) - d_2^{(2)}(\lambda).$$

Согласно вышеизложенному для определения коэффициентов $b_1^{(m)}(\lambda)$, $b_2^{(m)}(\lambda)$, $b_3^{(m)}(\lambda)$, $b_4^{(m)}(\lambda)$, $d_1^{(m)}(\lambda)$, $d_2^{(m)}(\lambda)$, $m = 1, 2$, необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} b_1^{(1)}(\lambda) + e^{\lambda} b_2^{(1)}(\lambda) - e^{-\lambda} b_3^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda} b_4^{(1)}(\lambda) &= f_1(\lambda), \\ e^{-\lambda} b_1^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda} b_2^{(1)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) e^{-\lambda} b_3^{(1)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) e^{\lambda} b_4^{(1)}(\lambda) \\ &\quad - e^{-\lambda} d_1^{(1)}(\lambda) + e^{\lambda} d_2^{(1)}(\lambda) = -i f_2(\lambda) + \frac{k_0^{(1)}}{\lambda}, \\ e^{-\lambda} d_1^{(1)}(\lambda) + e^{\lambda} d_2^{(1)}(\lambda) &= f_3(\lambda), \\ e^{\lambda} b_1^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda} b_2^{(2)}(\lambda) + e^{\lambda} b_3^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda} b_4^{(2)}(\lambda) &= g_1(\lambda), \\ e^{\lambda} b_1^{(2)}(\lambda) - e^{-\lambda} b_2^{(2)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) e^{\lambda} b_3^{(2)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) e^{-\lambda} b_4^{(2)}(\lambda) \\ &\quad - e^{\lambda} d_1^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda} d_2^{(2)}(\lambda) = -i g_2(\lambda) + \frac{k_0^{(2)}}{\lambda}, \\ e^{\lambda} d_1^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda} d_2^{(2)}(\lambda) &= g_3(\lambda), \\ b_1^{(1)}(\lambda) + b_2^{(1)}(\lambda) - b_1^{(2)}(\lambda) - b_2^{(2)}(\lambda) &= 0, \\ b_1^{(1)}(\lambda) - b_2^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_3^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_4^{(1)}(\lambda) - d_1^{(1)}(\lambda) + d_2^{(1)}(\lambda) - b_1^{(2)}(\lambda) \\ &\quad + b_2^{(2)}(\lambda) - \frac{1}{\lambda} b_3^{(2)}(\lambda) - \frac{1}{\lambda} b_4^{(2)}(\lambda) + d_1^{(2)}(\lambda) - d_2^{(2)}(\lambda) = \frac{k_0^{(1)}}{\lambda} - \frac{k_0^{(2)}}{\lambda}, \\ k_2 d_1^{(1)}(\lambda) + k_2 d_2^{(1)}(\lambda) - k_1 d_1^{(2)}(\lambda) - k_1 d_2^{(2)}(\lambda) &= 0, \\ d_1^{(1)}(\lambda) - d_2^{(1)}(\lambda) - d_1^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda) &= 0, \\ \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1} b_1^{(1)} + \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1} b_2^{(1)} + \frac{2}{E_1} b_3^{(1)}(\lambda) - \frac{2}{E_1} b_4^{(1)}(\lambda) - \frac{2\lambda}{E_1} d_1^{(1)} - \frac{2\lambda}{E_1} d_2^{(1)} \\ &\quad - \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2} b_1^{(2)} - \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2} b_2^{(2)} - \frac{2}{E_2} b_3^{(2)}(\lambda) \\ &\quad + \frac{2}{E_2} b_4^{(2)}(\lambda) + \frac{2\lambda}{E_2} d_1^{(2)} + \frac{2\lambda}{E_2} d_2^{(2)} = 0, \\ \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1} b_1^{(1)} - \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1} b_2^{(1)} + \frac{\nu_1-1}{E_1} b_3^{(1)}(\lambda) + \frac{\nu_1-1}{E_1} b_4^{(1)}(\lambda) - \frac{2\lambda\nu_1}{E_1} d_1^{(1)} \\ &\quad + \frac{2\lambda\nu_1}{E_1} d_2^{(1)} - \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2} b_1^{(2)} + \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2} b_2^{(2)} - \frac{(\nu_2-1)}{E_2} b_3^{(2)}(\lambda) \\ &\quad - \frac{(\nu_2-1)}{E_2} b_4^{(2)}(\lambda) + \frac{2\lambda\nu_2}{E_2} d_1^{(2)} - \frac{2\lambda\nu_2}{E_2} d_2^{(2)} \\ &= \frac{2k_0^{(1)}(1+\nu_1)}{E_1} - \frac{2k_0^{(2)}(1+\nu_2)}{E_2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Эта система распадается на две подсистемы:

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda}d_1^{(1)}(\lambda) + e^{\lambda}d_2^{(1)}(\lambda) &= f_3(\lambda), \\
e^{\lambda}d_1^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda}d_2^{(2)}(\lambda) &= g_3(\lambda), \\
k_2d_1^{(1)}(\lambda) + k_2d_2^{(1)}(\lambda) - k_1d_1^{(2)}(\lambda) - k_1d_2^{(2)}(\lambda) &= 0, \\
d_1^{(1)}(\lambda) - d_2^{(1)}(\lambda) - d_1^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda) &= 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

и

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda}b_1^{(1)}(\lambda) + e^{\lambda}b_2^{(1)}(\lambda) - e^{-\lambda}b_3^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda}b_4^{(1)}(\lambda) &= f_1(\lambda), \\
e^{-\lambda}b_1^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda}b_2^{(1)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)e^{-\lambda}b_3^{(1)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)e^{\lambda}b_4^{(1)}(\lambda) \\
&= -if_2(\lambda) + \frac{k_0^{(1)}}{\lambda} + e^{-\lambda}d_1^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda}d_2^{(1)}(\lambda), \\
e^{\lambda}b_1^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda}b_2^{(2)}(\lambda) + e^{\lambda}b_3^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda}b_4^{(2)}(\lambda) &= g_1(\lambda), \\
e^{\lambda}b_1^{(2)}(\lambda) - e^{-\lambda}b_2^{(2)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)e^{\lambda}b_3^{(2)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)e^{-\lambda}b_4^{(2)}(\lambda) \\
&= -ig_2(\lambda) + \frac{k_0^{(2)}}{\lambda} + e^{\lambda}d_1^{(2)}(\lambda) - e^{-\lambda}d_2^{(2)}(\lambda), \\
b_1^{(1)}(\lambda) + b_2^{(1)}(\lambda) - b_1^{(2)}(\lambda) - b_2^{(2)}(\lambda) &= 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
b_1^{(1)}(\lambda) - b_2^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}b_3^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}b_4^{(1)}(\lambda) - b_1^{(2)}(\lambda) + b_2^{(2)}(\lambda) \\
- \frac{1}{\lambda}b_3^{(2)}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}b_4^{(2)}(\lambda) = \frac{k_0^{(1)}}{\lambda} - \frac{k_0^{(2)}}{\lambda} + d_1^{(1)}(\lambda) - d_2^{(1)}(\lambda) - d_1^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1}b_1^{(1)} + \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1}b_2^{(1)} + \frac{2}{E_1}b_3^{(1)}(\lambda) - \frac{2}{E_1}b_4^{(1)}(\lambda) - \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2}b_1^{(2)} \\
- \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2}b_2^{(2)} - \frac{2}{E_2}b_3^{(2)}(\lambda) + \frac{2}{E_2}b_4^{(2)}(\lambda) = \frac{2\lambda}{E_1}d_1^{(1)} + \frac{2\lambda}{E_1}d_2^{(1)} - \frac{2\lambda}{E_2}d_1^{(2)} - \frac{2\lambda}{E_2}d_2^{(2)} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1}b_1^{(1)} - \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1}b_2^{(1)} + \frac{\nu_1-1}{E_1}b_3^{(1)}(\lambda) + \frac{\nu_1-1}{E_1}b_4^{(1)}(\lambda) \\
- \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2}b_1^{(2)} + \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2}b_2^{(2)} - \frac{(\nu_2-1)}{E_2}b_3^{(2)}(\lambda) - \frac{(\nu_2-1)}{E_2}b_4^{(2)}(\lambda) \\
= \frac{2k_0^{(1)}(1+\nu_1)}{E_1} - \frac{2k_0^{(2)}(1+\nu_2)}{E_2} + \frac{2\lambda\nu_1}{E_1}d_1^{(1)} - \frac{2\lambda\nu_1}{E_1}d_2^{(1)} - \frac{2\lambda\nu_2}{E_2}d_1^{(2)} + \frac{2\lambda\nu_2}{E_2}d_2^{(2)}.
\end{aligned}$$

Определитель каждой из них не обращается в 0 ни при каком $\lambda \neq 0$. Итак, справедлива

Теорема. Пусть функции $F_j, G_j, j = 1, 2, 3$, принадлежат классу Π_W , т. е. имеют вид

$$F_j = \sum_{\lambda \neq 0} f_j(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad G_j = \sum_{\lambda \neq 0} g_j(\lambda) e^{i\lambda x},$$

причем множество $\{\lambda\}$ отделено от нуля. Тогда краевая задача (3)–(7) в области, представляющей собой две полосы $0 \leq y \leq 1, -1 \leq y \leq 0, -\infty < x < +\infty$, имеет единственное решение, представленное рядами (8), где $A_\lambda^{(m)}(y), B_\lambda^{(m)}(y), C_\lambda^{(m)}(y), D_\lambda^{(m)}(y)$ находятся по формулам (10), а коэффициенты $b_1^{(m)}(\lambda), b_2^{(m)}(\lambda), b_3^{(m)}(\lambda), b_4^{(m)}(\lambda), d_1^{(m)}(\lambda), d_2^{(m)}(\lambda), m = 1, 2$, по формулам (12), (13). Все полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно относительно x при условии, что сходится ряд $\sum \frac{1}{|\lambda|}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулагина М. Ф. Построение почти-периодических решений линейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами // Изв. вузов. Математика. 2001. № 9. С. 38–42.
2. Кулагина М. Ф. О некоторых бесконечных системах с разностными индексами // Изв. вузов. Математика. 1992. № 3. С. 18–23.
3. Кулагина М. Ф. Об интегральных уравнениях в средних значениях в пространствах почти-периодических функций // Изв. вузов. Математика. 1993. № 8. С. 19–29.
4. Иванов Н. Н. Конструирование и расчет нежестких дорожных одежд. М.: Транспорт, 1973.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 21 августа 2015 г.

Кулагина Марина Фокеевна, Микишанина Евгения Арифжановна
 Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова,
 пр. Московский 15, Чебоксары 428000
 kulagina_mf@mail.ru, evaeva_84@mail.ru

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ
КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Н. Н. Николаев, С. В. Попов

Аннотация. Рассматривается обратная задача нахождения вместе с решением внешних источников воздействия по временной переменной для уравнения третьего порядка при задании точечных условий переопределения, в частности, рассматриваются случаи восстановления плотностей от одного, а также от двух источников. Доказано существование и единственность решения коэффициентной обратной задачи для уравнения третьего порядка с финальными условиями переопределения.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, уравнение третьего порядка, условия переопределения, существование решения, единственность, пространство Соболева, метод продолжения по параметру, метод регуляризации, априорные оценки.

Nikolaev N. N., Popov S. V. The solvability of the inverse problem for nonclassical equations of the third order.

Abstract: The inverse problem is considered of finding along with the decision of the external sources of exposure in a temporary variable for equations of the third order when setting point override conditions, in particular, deals with the recovery of densities from one and from two sources. We prove the existence and uniqueness of solution of inverse problems for equations of the third order with the final terms of the override.

Keywords: coefficient inverse problem, equation of the third order, the terms of the override, the existence of solutions, uniqueness, Sobolev space, method of continuation on a parameter, method of regularization, a priori estimates

1. Введение

Задачи определения коэффициентов уравнений и систем в частных производных по некоторой дополнительной информации об их решении имеют большое практическое значение [1–3]. Отметим, что обратные задачи для гиперболических уравнений зачастую относятся к некорректным задачам математической физики, теория которых была заложена в работах А. Н. Тихонова [4–6], В. К. Иванова [7], М. М. Лаврентьева [8, 9].

В теории обратных задач тепло- и массопереноса [10–12] часто возникают проблемы восстановления плотностей неизвестных внешних источников. При этом считают, что имеет место зависимость неизвестной правой части от временной переменной [13], и рассматриваемые обратные задачи формулируют как

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014–2016 гг. (проект № 3047).

проблемы управления [14]. Исследованию обратных задач для параболических уравнений высокого порядка посвящены работы [15, 16]. Заметим, что прямые пространственно нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка хорошо изучены (см., например, [17–19]), а обратные задачи для таких уравнений изучены сравнительно мало. Отметим работы, в которых неизвестный параметр зависит от временной переменной, рассматривались в случаях параболических [20, 21] и гиперболических [22–24] уравнений.

В настоящей работе устанавливается разрешимость обратной задачи нахождения вместе с решением внешних источников воздействия для уравнений третьего порядка по временной переменной при задании точечных условий переопределения, в частности, рассматриваются случаи восстановления плотностей от одного, а также от двух источников.

2. Постановка обратных краевых задач

Пусть Ω — интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q — прямоугольник $\Omega \times (0, T)$ при $0 < T < +\infty$.

Краевая задача 1. Найти функции $u(x, t)$, $q(t)$, являющиеся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{ttt} + u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t) \quad (1)$$

и такие, что для них выполняются начальные условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

краевые условия

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

а также условие переопределения

$$u(0, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

Краевая задача 2. Найти функции $u(x, t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$, являющиеся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{ttt} + u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) + q_1(t)h_1(x, t) + q_2(t)h_2(x, t), \quad (5)$$

и такие, что для нее выполняются начальные условия (2), краевые условия (3), а также два условия переопределения

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (6)$$

В работе [22] обратная задача восстановления плотностей источников для одномерного волнового уравнения с постоянными коэффициентами изучалась с помощью метода Фурье.

3. Разрешимость краевой задачи 1

Для простоты выкладок положим $c(x, t) = c(t)$ и введем следующие обозначения:

$$f_1(x, t) = f(x, t) - \frac{f(0, t)h(x, t)}{h(0, t)}, \quad h_1(x, t) = \frac{h(x, t)}{h(0, t)},$$

$$\alpha_0(t) = f_{1x}(0, t), \quad \alpha_1(t) = h_{1x}(0, t), \quad \beta_0(t) = f_{1x}(1, t), \quad \beta_1(t) = h_{1x}(1, t).$$

Введем обозначение

$$h_0 = \max_Q |h_{1xx}|. \quad (7)$$

Пусть $V_0 = W_{2,x,t}^{2,3}(Q)$ — линейное анизотропное пространство Соболева, а W_0, W_1 — линейные пространства

$$W_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in V_0, v_{xxttt} \in L_2(Q)\},$$

$$W_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_0, v_x \in W_0\}$$

с нормами

$$\|v\|_{W_0} = \|v\|_{V_0} + \|v_{xxttt}\|_{L_2(Q)}. \quad \|v\|_{W_1} = \|v\|_{W_0} + \|v_x\|_{W_0}.$$

Прежде чем доказывать разрешимость краевой задачи 1, заметим, что для функций $v(x, t)$ из пространства V_0 , для которых выполняется условие (2), имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} v^2(0, t) &\leq \delta_1 \int_0^1 v_x^2(x, t) dx + C_1(\delta_1) \int_0^1 v^2(x, t) dx, \\ v^2(1, t) &\leq \delta_1 \int_0^1 v_x^2(x, t) dx + C_1(\delta_1) \int_0^1 v^2(x, t) dx; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\int_0^T v_t^2(x, t) dt \leq \delta_2 \int_0^T v_{ttt}^2(x, t) dt + C_2(\delta_2, T) \int_0^T v^2(x, t) dt; \quad (9)$$

$$\int_0^T v_{tt}^2(x, t) dt \leq \delta_3 \int_0^T v_{ttt}^2(x, t) dt + C_3(\delta_3, T) \int_0^T v^2(x, t) dt, \quad (10)$$

в которых $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — произвольные положительные числа, C_1, C_2, C_3 вычисляются вполне определенным образом через $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ и T .

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$c(t) \in C^1[0, T], \quad -c(t) \geq c_0 \gg 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad (11)$$

$$h(x, t) \in C^3(\bar{Q}), \quad h_0 < \frac{1}{2T}, \quad h(0, t) \neq 0, \quad \alpha_1^2(t) + \beta_1^2(t) \leq \frac{1}{2} \quad \text{при } t \in [0, T], \quad (12)$$

$$\alpha_1(t)\xi_1^2 - \beta_1(t)\xi_1\xi_2 + \frac{1}{8}\xi_2^2 \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (13)$$

$$f(x, t) \in W_2^3(Q), \quad f_{xxttt}(x, t) \in L_2(Q), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
f_x(0,0) &= h_x(0,0) = f_x(1,0) = h_x(1,0) = 0, \\
f_x(0,T) &= h_x(0,T) = f_x(1,T) = h_x(1,T) = 0, \\
f_{xt}(0,0) &= h_{xt}(0,0) = f_{xt}(1,0) = h_{xt}(1,0) = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Тогда существует регулярное решение обратной краевой задачи (1)–(4) такое, что $u(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ принадлежат пространству $W_{2,x,t}^{2,3}(Q)$ и $q(t) \in L_2(0,T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную прямую краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{ttt} + u_{xx} + c(t)u = f_{1xx}(x,t) + \lambda h_{1xx}(x,t)u(0,t) \tag{16}$$

и такую, что для нее выполняются нелокальные условия

$$\begin{aligned}
u_x(0,t) &= \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_0(t), \quad 0 < t < T, \\
u_x(1,t) &= \beta_1(t)u(0,t) + \beta_0(t), \quad 0 < t < T,
\end{aligned} \tag{17}$$

а также начальные условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{18}$$

где λ — действительный параметр, который будет определен ниже.

Отметим, что пространственно нелокальные краевые задачи вида (16)–(18), но для ненагруженных уравнений (16) (без множителей $h_{1xx}(x,t)u(0,t)$), рассматривались в работах [25, 26].

Для $(x,t) \in \overline{Q}$ положим

$$\gamma(x,t) = \frac{x^2}{2}[\beta_0(t) - \alpha_0(t)] + x\alpha_0(t), \quad v(x,t) = u(x,t) - \gamma(x,t).$$

Тогда вместо краевой задачи (16)–(18) будем рассматривать краевую задачу: найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$v_{ttt} + v_{xx} + c(t)v = f_2(x,t) + \lambda h_{1xx}(x,t)v(0,t), \tag{19}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned}
v_x(0,t) &= \alpha_1(t)v(0,t), \quad 0 < t < T, \\
v_x(1,t) &= \beta_1(t)v(0,t), \quad 0 < t < T,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$v(x,0) = v_t(x,0) = v(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{21}$$

где

$$f_2(x,t) = f_{1xx}(x,t) + B_0(x,t), \quad B_0(x,t) = -\gamma_{ttt}(x,t) - \gamma_{xx}(x,t) - c(t)\gamma(x,t).$$

Без ограничения общности считаем, что

$$\beta_0(0) = \beta_0'(0) = 0, \quad \alpha_0(0) = \alpha_0'(0) = 0, \quad \alpha_0(T) = \beta_0(T) = 0.$$

Эти равенства выполняются, например, при выполнении условий согласования (15).

Для $(x,t) \in \overline{Q}$ положим

$$\delta(x,t,\lambda) = \frac{\lambda x^2}{2}[\beta_1(t) - \alpha_1(t)] + \lambda x\alpha_1(t), \quad w(x,t) = v(x,t) - \delta(x,t,\lambda)v(0,t).$$

Зависимость функции $w(x, t)$ от λ опущена для простоты.

Полагая в равенстве, определяющем функцию $w(x, t)$, поочередно $x = 0$, $x = 1$, получаем, что функции $w(0, t)$, $w(1, t)$ можно вычислить через функции $v(0, t)$, $v(1, t)$ по формулам

$$w(0, t) = v(0, t), \quad w(1, t) = -\delta(1, t, \lambda)v(0, t) + v(1, t).$$

Имеет место равенство

$$v(x, t) = w(x, t) + \delta(x, t, \lambda)w(0, t).$$

Пусть $v(x, t)$ есть решение уравнения (19). Тогда для функции $w(x, t)$ будет выполняться равенство

$$w_{ttt} + w_{xx} + c(t)w = f_2(x, t) + \Phi(x, t, \lambda, \bar{w}(t)),$$

где

$$\bar{w}(t) = (w_{ttt}(0, t), w_{tt}(0, t), w_t(0, t), w(0, t)),$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, \lambda, \bar{w}(t)) = & B_1(x, t, \lambda)w_{ttt}(0, t) + B_2(x, t, \lambda)w_{tt}(0, t) \\ & + B_3(x, t, \lambda)w_t(0, t) + B_4(x, t, \lambda)w(0, t), \end{aligned}$$

$$B_1(x, t, \lambda) = -\delta(x, t, \lambda), \quad B_2(x, t, \lambda) = -3\delta_t(x, t, \lambda), \quad B_3(x, t, \lambda) = -3\delta_{tt}(x, t, \lambda),$$

$$B_4(x, t, \lambda) = \lambda h_{1xx}(x, t) - \delta_{ttt}(x, t, \lambda) - \delta_{xx}(x, t, \lambda) - c(t)\delta(x, t, \lambda).$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$w_{ttt} + w_{xx} + c(t)w = f_2(x, t) + \Phi(x, t, \lambda, \bar{w}(t)) \quad (22)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = w(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Докажем, что данная задача разрешима в пространстве V_0 . Для этого воспользуемся методами регуляризации и продолжения по параметру.

Пусть ε — положительное число, без ограничения общности $0 < \varepsilon < 1$. Рассмотрим новую краевую задачу: *найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$L_\varepsilon(\lambda)w \equiv w_{ttt} + w_{xx} + c(t)w - \varepsilon w_{xxttt} = f_2(x, t) + \Phi(x, t, \lambda, \bar{w}(t)) \quad (24)$$

и такую, что выполняются условия (23).

Покажем, что краевая задача (24), (23) при фиксированном $\varepsilon > 0$ разрешима в пространстве W_1 для любой функции $f_2(x, t) \in L_2(Q)$ такой, что $f_{2x}(x, t) \in L_2(Q)$.

Согласно методу продолжения по параметру [27] для того, чтобы краевая задача (24), (23) была разрешима в пространстве W_1 при всех $\lambda \in [0, 1]$ и любой функции $f(x, t)$ из пространства $W_{2,x,t}^{1,0}(Q)$, достаточно установить

- 1) непрерывность семейства операторов $\{L_\varepsilon(\lambda)\}$ по λ ;

2) разрешимость краевой задачи (24), (23) при $\lambda = 0$;

3) априорную оценку в пространстве W_0 равномерную по λ всевозможных решений $v(x, t)$ краевой задачи (24), (23).

Непрерывность по λ семейства операторов $\{L_\varepsilon(\lambda)\}$ очевидна. При $\lambda = 0$ краевая задача (24), (23) при фиксированном ε и при выполнении всех условий теоремы 1 разрешима в пространстве W_1 (см. [28]). Покажем, что для всевозможных решений $w(x, t)$ краевой задачи (24), (23) имеет место равномерная по λ априорная оценка в пространстве W_1 .

Пусть $w(x, t)$ — решение краевой задачи (24), (23) из пространства W_1 . Положим $v(x, t) = w(x, t) + \delta(x, t, \lambda)w(0, t)$. Используя неравенство

$$\int_0^T v^2(0, t) dt \leq \int_0^T \int_0^1 v_x^2(x, t) dx dt + 2 \int_0^T \int_0^1 v^2(x, t) dx dt, \quad (25)$$

нетрудно показать, что функция $v(x, t)$, определенная выше, также будет принадлежать W_1 и являться решением краевой задачи

$$L_\varepsilon(\lambda)v \equiv v_{ttt} + v_{xx} + c(t)v - \varepsilon v_{xxtt} = f_2(x, t) + \lambda h_{1xx}(x, t)v(0, t), \quad (26)$$

$$v_x(0, t) = \lambda \alpha_1(t)v(0, t), \quad v_x(1, t) = \lambda \beta_1(t)v(0, t), \quad (27)$$

$$v(x, 0) = v_t(x, 0) = v(x, T) = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 L_\varepsilon(\lambda)v \cdot [-v + v_{ttt}](\lambda_0 - t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^1 [f_2(x, t) + \lambda h_{1xx}v(0, t)][-v + v_{ttt}](\lambda_0 - t) dx dt. \end{aligned} \quad (29)$$

Интегрируя по частям и используя указанные выше граничные и начальные условия (27), (28) для функции $v(x, t)$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 [v_x^2 - c(t)v^2](\lambda_0 - t) dx dt + \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^1 v_t^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 v_t^2(x, T)(\lambda_0 - T) dx \\ &+ \frac{3(1+\varepsilon)}{2} \int_0^T \int_0^1 v_{xt}^2 dx dt + \frac{1+\varepsilon}{2} \int_0^1 v_{xt}^2(x, T)(\lambda_0 - T) dx \\ &+ \int_0^T \int_0^1 v_{ttt}^2(\lambda_0 - t) dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 v_{xxtt}^2(\lambda_0 - t) dx dt \\ &+ \varepsilon \lambda \int_0^T [\alpha_1(t)v_{ttt}^2(0, t) - \beta_1(t)v_{ttt}(0, t)v_{ttt}(1, t)](\lambda_0 - t) dt \\ &= - \int_0^T \int_0^1 c(t)v v_{ttt}(\lambda_0 - t) dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \lambda \int_0^T \{ [3\beta_1'(t)v_{tt}(0,t) + 3\beta_1''(t)v_t(0,t) + \beta_1'''(t)v(0,t)]v_{ttt}(1,t) \\
& - [3\alpha_1'(t)v_{tt}(0,t) + 3\alpha_1''(t)v_t(0,t) + \alpha_1'''(t)v(0,t)]v_{ttt}(0,t) \} (\lambda_0 - t) dt \\
& + \varepsilon \int_0^T \{ [(v_{xtt}v_t)(1,t) - (v_{xtt}v_t)(0,t)](\lambda_0 - t) + (v_{xt}v_t)(1,t) - (v_{xt}v_t)(0,t) \} dt \\
& + \int_0^T \{ [(v_xv + v_{xt}v_{tt})(1,t) - (v_xv + v_{xt}v_{tt})(0,t)](\lambda_0 - t) + v_{xt}v_t(1,t) - v_{xt}v_t(0,t) \} dt \\
& + \int_0^T \int_0^1 [f_2(x,t) + \lambda h_{1xx}(x,t)v(0,t)](-v + v_{ttt})(\lambda_0 - t) dx dt.
\end{aligned}$$

Используя (12), (13) при $\lambda_0 = 2T$ с учетом неравенства Юнга и неравенств (8)–(10), нетрудно перейти к следующему неравенству:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 [v_x^2 - c(t)v^2] dx dt + \int_0^T \int_0^1 v_t^2 dx dt + \int_0^1 v_t^2(x, T) dx + \\
& + (1 + \varepsilon) \left[\int_0^T \int_0^1 v_{xt}^2 dx dt + \int_0^1 v_{xt}^2(x, T) dx \right] + \\
& + \int_0^T \int_0^1 v_{ttt}^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt \leq \\
& \leq \frac{\varepsilon \lambda T}{4} \int_0^T v^2(1, t) dt + 2T\delta_0 \int_0^T \int_0^1 (v^2 + v_{ttt}^2) dx dt + \frac{T}{\delta_0} \int_0^T \int_0^1 f_2^2 dx dt + \\
& + 2Th_0 \left[\int_0^T v^2(0, t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (v^2 + v_{ttt}^2) dx dt \right],
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 [v_x^2 - c(t)v^2] dx dt + \int_0^T \int_0^1 v_t^2 dx dt + \int_0^1 v_t^2(x, T) dx + \\
& + (1 + \varepsilon) \left[\int_0^T \int_0^1 v_{xt}^2 dx dt + \int_0^1 v_{xt}^2(x, T) dx \right] + \\
& + \int_0^T \int_0^1 v_{ttt}^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt \leq \\
& \leq 2T\delta_0 \int_0^T \int_0^1 (v^2 + v_{ttt}^2) dx dt + \frac{T}{\delta_0} \int_0^T \int_0^1 f_2^2 dx dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2T \left(\frac{1}{8} + h_0 \right) \left[\delta_1 \int_0^T \int_0^1 v_x^2 dx dt + C(\delta_1) \int_0^T \int_0^1 v^2 dx dt \right] \\
& \qquad \qquad \qquad + Th_0 \int_0^T \int_0^1 (v^2 + v_{ttt}^2) dx dt, \quad (30)
\end{aligned}$$

в котором δ_1 — произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$1 - 2T \left(\frac{1}{8} + h_0 \right) \delta_1 > 0.$$

При фиксированном δ_1 и $\delta_0 = \frac{1}{4T}$ по условию теоремы (11) существует достаточно большое $-c_0 > 0$, удовлетворяющее неравенству

$$-c_0 - 2T\delta_0 - T \left(\frac{1}{4} + 2h_0 \right) C(\delta_1) - Th_0 > 0.$$

Таким образом, получаем, что следствием неравенства (30) будет оценка

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 [v_x^2 - c(t)v^2] dx dt + \int_0^T \int_0^1 v_t^2 dx dt + \int_0^1 v_t^2(x, T) dx + \\
& \qquad \qquad \qquad + (1 + \varepsilon) \left[\int_0^T \int_0^1 v_{xt}^2 dx dt + \int_0^1 v_{xt}^2(x, T) dx \right] + \\
& \qquad \qquad \qquad + \int_0^T \int_0^1 v_{ttt}^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt \leq M_1 \int_0^T \int_0^1 f_2^2 dx dt, \quad (31)
\end{aligned}$$

с постоянной M_1 , определяющейся числом c_0 а также функциями $f(x, t)$ и $h(x, t)$.

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned}
& \int_0^T L_\varepsilon(\lambda)v \cdot \left[-v_{xxttt} + \left(x - \frac{1}{2} \right) v_{xttt} + v_{xx} + v_{ttt} \right] dx dt \\
& \qquad \qquad \qquad = \int_0^T \int_0^1 F \cdot \left[-v_{xxttt} + \left(x - \frac{1}{2} \right) v_{xttt} + v_{xx} + v_{ttt} \right] dx dt, \\
& \qquad \qquad \qquad F = f_2(x, t) + \lambda h_{1xx}(x, t)v(0, t).
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям и используя граничные и начальные условия (27), (28) для функции $v(x, t)$, от данного равенства переходим к следующему:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{3\varepsilon}{2} \right) \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 \left[v_{xx}^2 + \frac{1}{2} v_{ttt}^2 \right] dx dt + \int_0^1 v_{xt}^2(x, T) dx \\
& \qquad \qquad \qquad + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 v_{xxttt}^2 dx dt + \frac{1 + \varepsilon}{2} \int_0^1 v_{xxt}^2(x, T) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \left\{ \left[\lambda(1 + \varepsilon)\alpha_1(t) + \frac{1}{4} - \frac{\lambda\varepsilon}{4}(\alpha_1^2(t) + \beta_1^2(t)) \right] v_{ttt}^2(0, t) - \right. \\
& \quad \left. - \lambda(1 + \varepsilon)\beta_1(t)v_{ttt}(0, t)v_{ttt}(1, t) + \frac{1}{4}v_{ttt}^2(1, t) \right\} dt = \\
& = \frac{\lambda\varepsilon}{4} \int_0^T [(\alpha_1'''(t))^2 + (\beta_1'''(t))^2] v^2(0, t) + 9((\alpha_1''(t))^2 + (\beta_1''(t))^2) v_t^2(0, t) \\
& \quad + 9((\alpha_1'(t))^2 + (\beta_1'(t))^2) v_{tt}^2(0, t) + 6(\alpha_1'''(t)\alpha_1''(t) + \beta_1'''(t)\beta_1''(t))v(0, t)v_t(0, t) \\
& \quad + 6(\alpha_1'''(t)\alpha_1'(t) + \beta_1'''(t)\beta_1'(t))v(0, t)v_{tt}(0, t) + 2(\alpha_1'''(t)\alpha_1(t) + \beta_1'''(t)\beta_1(t))v(0, t)v_{ttt}(0, t) \\
& \quad + 18(\alpha_1''(t)\alpha_1'(t) + \beta_1''(t)\beta_1'(t))v_t(0, t)v_{tt}(0, t) + 6(\alpha_1''(t)\alpha_1(t) + \beta_1''(t)\beta_1(t))v_t(0, t)v_{ttt}(0, t) \\
& \quad + 6(\alpha_1'(t)\alpha_1(t) + \beta_1'(t)\beta_1(t))v_{tt}(0, t)v_{ttt}(0, t)] dt \\
& \quad + \int_0^T \int_0^1 \left[-c(t)v_x v_{xttt} - \left(x - \frac{1}{2}\right)v_{xx} v_{xttt} - \left(x - \frac{1}{2}\right)c(t)vv_{xttt} \right. \\
& \quad \left. - c(t)vv_{xx} - c(t)vv_{ttt} + F_x v_{xttt} + \left(x - \frac{1}{2}\right)Fv_{xttt} + Fv_{xx} + Fv_{ttt} \right] dx dt \\
& \quad - \lambda(1 + \varepsilon) \int_0^T \{ [3\alpha_1'(t)v_{tt}(0, t) + 3\alpha_1''(t)v_t(0, t) + \alpha_1'''(t)v(0, t)]v_{ttt}(0, t) \\
& \quad - [3\beta_1'(t)v_{tt}(0, t) + 3\beta_1''(t)v_t(0, t) + \beta_1'''(t)v(0, t)]v_{ttt}(1, t) \} dt \\
& \quad + \int_0^T [c(t)v(1, t)v_{xttt}(1, t) - c(t)v(0, t)v_{xttt}(0, t) - 2v_{xt}(0, t)v_{tt}(0, t) \\
& \quad + 2v_{xt}(1, t)v_{tt}(1, t) + F(0, t)v_{xttt}(0, t) - F(1, t)v_{xttt}(1, t)] dt.
\end{aligned}$$

Используя условия (11)–(14), заменяя $v_{xttt}(0, t)$, $v_{xttt}(1, t)$ из условия (27) и оценивая слагаемые правой части с помощью неравенства Юнга, неравенств (8) и оценки (31), получаем априорную оценку

$$\begin{aligned}
(1 + \varepsilon) & \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 [v_{xx}^2 + v_{ttt}^2] dx dt + \int_0^1 v_{xt}^2(x, T) dx \\
& + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt + (1 + \varepsilon) \int_0^1 v_{xtt}^2(x, T) dx \leq M_2 \int_0^T \int_0^1 [f_2^2 + f_{2x}^2] dx dt, \quad (32)
\end{aligned}$$

с постоянной M_2 , определяющейся числом c_0 , а также функциями $f(x, t)$ и $h(x, t)$.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^T L_\varepsilon(\lambda)v_x v_{xxx} dx dt = \int_0^T \int_0^1 [f_{2x}(x, t) + \lambda h_{1xxx}(x, t)v(0, t)]v_{xxx} dx dt.$$

Интегрируя по частям, используя неравенство Юнга, доказанные оценки (31) и

(32), с учетом начальных условий (28) для функции $v(x, t)$ переходим к следующему неравенству:

$$\int_0^T \int_0^1 v_{xxx}^2 dx dt + \varepsilon \int_0^1 v_{xxx}^2(x, T) dx \leq M_3 \int_0^T \int_0^1 f_{2x}^2 dx dt \quad (33)$$

с постоянной M_3 , определяющейся числом c_0 , а также функциями $f(x, t)$ и hx, t .

Из оценок (31)–(33) и уравнения (26) получим равномерную по λ априорную оценку

$$\|v\|_{W_1} \leq M_0. \quad (34)$$

Этих оценок достаточно для применения теоремы о методе продолжения по параметру. Следовательно, при выполнении условий теоремы краевая задача (26)–(28) имеет решение $v(x, t) = v_\varepsilon(x, t)$, принадлежащее пространству W_1 , при всех значениях λ , в том числе и при $\lambda = 1$. Покажем, что для полученного семейства решений $\{v_\varepsilon(x, t)\}$ имеется априорная оценка, равномерная по ε , с помощью которой можно осуществить предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для семейства $\{v_\varepsilon(x, t)\}$ решений краевой задачи (26)–(28) по-прежнему имеют место оценки (31)–(33). Выберем последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такую, что $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Используя теорему о слабой замкнутости ограниченного в пространстве $L_2(Q)$ множества, нетрудно показать существование последовательности $\{v_m(x, t)\}$ и функции $v(x, t)$ таких, что при $m \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned} v_m(x, t) &\rightarrow v(x, t) \text{ слабо в } W_{2,x,t}^{2,3}(Q), \\ v_{mx}(x, t) &\rightarrow v_x(x, t) \text{ слабо в } W_{2,x,t}^{2,3}(Q), \\ \varepsilon_m w_{mxxx}(x, t) &\rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2(Q). \end{aligned}$$

Очевидно, что для предельной функции $v(x, t)$ выполняется уравнение (19). Положим $w(x, t) = v(x, t) - \delta(x, t, 1)v(0, t)$. Функция $w(x, t)$ принадлежит пространству V_0 и является решением краевой задачи (19)–(21).

Остается показать, что с помощью построенной функции $v(x, t)$ можно найти решение $u(x, t)$, $q(t)$ краевой задачи (1)–(4). В самом деле, имеем

$$u_{xx}(x, t) = v(x, t), \quad (35)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0. \quad (36)$$

Из этих равенств найдем $u(x, t)$. Положим

$$w(x, t) = u_{ttt} + u_{xx} + c(t)u - f_1(x, t) - h_1(x, t)v(0, t). \quad (37)$$

Тогда из равенств (16)–(18) следует, что для функции $w(x, t)$ будут выполняться равенства

$$w_{xx}(x, t) = 0, \quad w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, \quad (38)$$

откуда $w(x, t) \equiv 0$ при любом $t \in [0, T]$.

Таким образом, для функции $u(x, t)$ выполняется уравнение

$$u_{ttt} + u_{xx} + c(t)u - f_1(x, t) - h_1(x, t)v(0, t) = 0. \quad (39)$$

Положив $x = 0$ в уравнении (39), получим

$$u_{ttt}(0, t) + u_{xx}(0, t) + c(t)u(0, t) - f_1(0, t) - h_1(0, t)v(0, t) = 0, \quad (40)$$

откуда имеем краевую задачу

$$u_{ttt}(0, t) + c(t)u(0, t) = 0, \quad (41)$$

$$u(0, 0) = u_t(0, 0) = u(0, T) = 0, \quad (42)$$

которая имеет решение, тождественно равное нулю $u(0, t) \equiv 0$.

При выполнении условия $u(0, t) = 0$ из уравнения (39) получим $u_{xx}(0, t) = v(0, t)$, т. е. для функции $u(x, t)$ выполняются условия (2)–(4). Значит, построенные функции

$$u(x, t), \quad q(t) = \frac{u_{xx}(0, t) - f(0, t)}{h(0, t)}$$

принадлежат требуемым классам, удовлетворяют уравнению (1) и дают решение обратной краевой задачи 1. Теорема доказана.

4. Разрешимость краевой задачи 2

Введем следующие обозначения:

$$\Delta(t) = h_1(0, t)h_2(1, t) - h_2(0, t)h_1(1, t),$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(x, t) = & \frac{h_1(x, t)}{\Delta(t)}(h_2(0, t)f(1, t) - h_2(1, t)f(0, t)) \\ & - \frac{h_2(x, t)}{\Delta(t)}(h_2(0, t)f(1, t) - h_2(1, t)f(0, t)) + f(x, t), \end{aligned}$$

$$\alpha_0(t) = \tilde{f}_{1x}(0, t), \quad \beta_0(t) = \tilde{f}_{1x}(1, t),$$

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\Delta(t)}(h_2(1, t)h_{1x}(0, t) - h_1(1, t)h_{2x}(0, t)),$$

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{\Delta(t)}(h_1(0, t)h_{2x}(0, t) - h_2(0, t)h_{1x}(0, t)),$$

$$\beta_1(t) = \frac{1}{\Delta(t)}(h_2(1, t)h_{1x}(1, t) - h_1(1, t)h_{2x}(1, t)),$$

$$\beta_2(t) = \frac{1}{\Delta(t)}(h_1(0, t)h_{2x}(1, t) - h_2(0, t)h_{1x}(1, t)),$$

$$\alpha(x, t) = \frac{1}{\Delta(t)}(h_2(1, t)h_{1xx}(x, t) - h_1(1, t)h_{2xx}(x, t)),$$

$$\beta(x, t) = \frac{1}{\Delta(t)}(h_1(0, t)h_{2xx}(x, t) - h_2(0, t)h_{1xx}(x, t)),$$

Будем предполагать выполнение условий

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1x}(0, t) + \tilde{f}_{1x}(1, t) &= 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \\ \tilde{f}_{1x}(0, 0) &= \tilde{f}_{1xt}(0, 0) = \tilde{f}_{1x}(0, T) = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned} c(t) \in C^1[0, T], \quad -c(t) \geq c_0 \gg 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \\ h(x, t) \in C^3(\overline{Q}), \quad h_0 < \frac{1}{2T}, \quad \Delta(t) \neq 0, \\ \alpha_1^2(t) + \beta_1^2(t) < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\frac{1}{2} + 2(\alpha_2(t)\beta_1(t) - \alpha_1(t)\beta_2(t)) \geq \alpha_1^2(t) + \beta_1^2(t) + \alpha_2^2(t) + \beta_2^2(t) \quad \text{при } t \in [0, T], \quad (45)$$

$$\alpha_1(t)\xi_1^2 + [-\beta_1(t) + \alpha_2(t)]\xi_1\xi_2 - \beta_2(t)\xi_2^2 \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (46)$$

$$f(x, t) \in W_2^3(Q), \quad f_{xxttt}(x, t) \in L_2(Q). \quad (47)$$

Тогда существует регулярное решение обратной краевой задачи (5), (2), (3), (6) такое, что $u(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ принадлежит пространству $W_{2,x,t}^{2,3}(Q)$ и $q_1(t), q_2(t) \in L_2(0, T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную прямую краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{ttt} + u_{xx} + c(t)u = \tilde{f}_{1xx}(x, t) + \lambda[\alpha(x, t)u(0, t) + \beta(x, t)u(1, t)] \quad (48)$$

и такую, что для нее выполняются нелокальные условия

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t) + \alpha_0(t), \quad 0 < t < T, \\ u_x(1, t) &= \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t) + \beta_0(t), \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (49)$$

а также начальные условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (50)$$

Вместо краевой задачи (48)–(50), как в п. 3, будем рассматривать краевую задачу: найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$v_{ttt} + v_{xx} + c(t)v = f_2(x, t) + \lambda[\alpha(x, t)v(0, t) + \beta(x, t)v(1, t)] \quad (51)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} v_x(0, t) &= \alpha_1(t)v(0, t) + \alpha_2(t)v(1, t), \quad 0 < t < T, \\ v_x(1, t) &= \beta_1(t)v(0, t) + \beta_2(t)v(1, t), \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (52)$$

$$v(x, 0) = v_t(x, 0) = v(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (53)$$

где

$$f_2(x, t) = \tilde{f}_{1xx}(x, t) + B_0(x, t),$$

$$B_0(x, t) = \frac{1}{2}\lambda\beta(x, t)(\alpha_0(t) + \beta_0(t)) - \gamma_{ttt}(x, t) - \gamma_{xx}(x, t) - c(t)\gamma(x, t).$$

Без ограничения общности, как в п. 3, рассматриваем однородные начальные условия (53). Для $(x, t) \in \overline{Q}$, $\lambda \in [0, 1]$ положим

$$\gamma_1(x, t, \lambda) = \frac{\lambda x^2}{2}[\beta_1(t) - \alpha_1(t)] + \lambda x \alpha_1(t), \quad \delta_1(x, t, \lambda) = \frac{\lambda x^2}{2}[\beta_2(t) - \alpha_2(t)] + \lambda x \alpha_2(t),$$

$$\begin{aligned}
w(x, t) &= v(x, t) - \gamma_1(x, t, \lambda)v(0, t) - \delta_1(x, t, \lambda)v(1, t), \\
\gamma_{11}(x, t, \lambda) &= \gamma_1(x, t, \lambda) + \frac{\delta_1(x, t, \lambda)\gamma_1(1, t, \lambda)}{1 - \delta_1(1, t, \lambda)}, \quad \delta_{11}(x, t, \lambda) = \frac{\delta_1(x, t, \lambda)}{1 - \delta_1(1, t, \lambda)}, \\
v(x, t) &= w(x, t) + \gamma_{11}(x, t, \lambda)w(0, t) + \delta_{11}(x, t, \lambda)w(1, t).
\end{aligned}$$

Пусть $v(x, t)$ — решение уравнения (51). Тогда для функции $w(x, t)$ будет выполняться равенство

$$w_{ttt} + w_{xx} + c(t)w = f_2(x, t) + \Phi(x, t, \lambda, \bar{w}(t)),$$

где

$$\bar{w}(t) = (w_{ttt}(0, t), w_{ttt}(1, t), w_{tt}(0, t), w_{tt}(1, t), w_t(0, t), w_t(1, t), w(0, t), w(1, t)),$$

$$\begin{aligned}
\Phi(x, t, \lambda, \bar{w}(t)) &= A_1(x, t, \lambda)w_{ttt}(0, t) + A_2(x, t, \lambda)w_{ttt}(1, t) + A_3(x, t, \lambda)w_{tt}(0, t) \\
&+ A_4(x, t, \lambda)w_{tt}(1, t) + A_5(x, t, \lambda)w_t(0, t) + A_6(x, t, \lambda)w_t(1, t) \\
&+ A_7(x, t, \lambda)w(0, t) + A_8(x, t, \lambda)w(1, t),
\end{aligned}$$

$$A_1(x, t, \lambda) = -\gamma_{11}(x, t, \lambda), \quad A_2(x, t, \lambda) = -\delta_{11}(x, t, \lambda),$$

$$A_3(x, t, \lambda) = -3\gamma_{11t}(x, t, \lambda), \quad A_4(x, t, \lambda) = -3\delta_{11t}(x, t, \lambda),$$

$$A_5(x, t, \lambda) = -3\gamma_{11tt}(x, t, \lambda), \quad A_6(x, t, \lambda) = -3\delta_{11tt}(x, t, \lambda),$$

$$A_7(x, t, \lambda) = \lambda\alpha - \gamma_{11ttt}(x, t, \lambda) - \gamma_{11xx}(x, t, \lambda) - c(t)\gamma_{11}(x, t, \lambda),$$

$$A_8(x, t, \lambda) = \lambda\beta - \delta_{11ttt}(x, t, \lambda) - \delta_{11xx}(x, t, \lambda) - c(t)\delta_{11}(x, t, \lambda).$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$w_{ttt} + w_{xx} + c(t)w = f_2(x, t) + \Phi(x, t, \lambda, \bar{w}(t)) \quad (54)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned}
w_x(0, t) &= w_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\
w(x, 0) &= w_t(x, 0) = w(x, T) = 0, \quad x \in \Omega.
\end{aligned} \quad (55)$$

Как в п. 3, данная задача разрешима в пространстве V_0 . Для обоснования этого надо воспользоваться методами регуляризации и продолжения по параметру. С помощью построенной функции $v(x, t)$ можно найти решение $u(x, t)$, $q(t)$ краевой задачи (5), (2), (3), (6). Теорема доказана.

5. Заключение

1. Условия (12) представляют собой некоторые условия малости обратной краевой задачи 1. Очевидно, что множество входных данных обратной краевой задачи $f(x, t)$, $h(x, t)$, для которых они выполняются, непусто. Аналогично условия малости (44), (45) для обратной задачи 2 также имеют смысл.

2. Отметим, что выполнение неравенств (45) достаточно для выполнения неотрицательной определенности квадратичной формы

$$\left[\frac{1}{2} - \alpha_1^2(t) - \beta_1^2(t) \right] \xi_1^2 - 2[\alpha_1(t)\alpha_2(t) + \beta_1(t)\beta_2(t)] \xi_1\xi_2 + \left[\frac{1}{2} - \alpha_2^2(t) - \beta_2^2(t) \right] \xi_2^2 \geq 0$$

при $t \in [0, T]$, $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В. Г., Кабанихин С. И., Пухначева Т. П. Обратные задачи электродинамики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.
2. Кабанихин С. И., Исакаев К. Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: НГУ, 2001.
3. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи: Учебник для студентов вузов. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
4. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
5. Тихонов А. Н. Регуляризация некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
7. Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах // Мат. сб. 1963. Т. 61, № 2. С. 211–223.
8. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1962.
9. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1999.
10. Кожанов А. И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения // Докл. АН. 2006. Т. 409, № 6. С. 740–743.
11. Кожанов А. И. Обратная задача определения коэффициента поглощения в одномерном уравнении нелинейной диффузии // Мат. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, вып. 2. С. 31–47.
12. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Васильев В. И. Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности // Мат. моделирование. 1997. Т. 9, № 5. С. 119–127.
13. Калинина Е. А. Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневост. мат. журн. 2004. Т. 5, № 1. С. 89–99.
14. Алексеев Г. В. Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Докл. АН. 2000. Т. 375, № 3. С. 315–319.
15. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York; Basel: Marcel Dekker, Inc. 1999.
16. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTL Publishers, 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).
17. Belov Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
18. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 722–744.
19. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 6. С. 840–853.
20. Телешева Л. А. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при производной по времени // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 180–201.
21. Телешева Л. А. О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 2. С. 186–196.
22. Павлов С. С. Исследование обратной задачи восстановления плотностей источников одномерного волнового уравнения // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 1. С. 93–99.
23. Павлов С. С. Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 81–93.
24. Павлов С. С. Нелинейные обратные задачи для многомерных гиперболических уравнений с интегральным переопределением // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 19, вып. 2. С. 128–154.
25. Лукина Г. А. О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для уравнения третьего порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 1. С. 35–46.
26. Лукина Г. А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями по времени для уравнений третьего порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 2. С. 75–97.
27. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

28. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: ЭЛМ, 1985.

Статья поступила 14 сентября 2015 г.

Николаев Николай Николаевич
Нюрбинский технический лицей имени А. Н. Чусовского
nuke1987@mail.ru

Попов Сергей Вячеславович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
кафедра математического анализа,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
madu@ysu.ru

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ

С. С. Павлов

Аннотация. Исследуется линейная коэффициентная обратная задача для квазигиперболических уравнений высокого порядка. Устанавливается разрешимость обратной задачи нахождения вместе с решением внешнего воздействия для уравнений высокого порядка по временной переменной при задании условия интегрального переопределения. Доказываются теоремы существования и единственности решения коэффициентных обратных задач.

Ключевые слова: обратная задача, интегральное условие переопределения, метод продолжения по параметру, априорные оценки, существование, единственность.

S. S. Pavlov. The inverse problem for a quasi-order hyperbolic equations with integral redefinition.

Abstract: We investigate the linear inverse problem for a quasi-order hyperbolic equations. The solvability of the inverse problem finding together with the decision of the external action of the high-order equations the time variable when setting the conditions of integral overdetermination. Taking of evidence vayutsya existence and uniqueness of the solution of inverse coefficient tasks.

Keywords: inverse problem, integral condition override, method parameter continuation, a priori estimates, existence, uniqueness.

Введение

В работе исследуется линейная коэффициентная обратная задача для квазигиперболических уравнений — задача нахождения функций $u(x, t)$ и $q(t)$, связанных уравнением

$$(-1)^{m-1} D_t^{2m} u - \Delta u + c(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t) \quad \left(D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right).$$

Впервые постановку корректной краевой задачи для квазигиперболических уравнений предложил В. Н. Врагов [1], ряд результатов о разрешимости краевых задач, о свойствах решений этих уравнений рассматривались в работах И. Е. Егорова, В. Е. Федорова [2, 3], А. Н. Терехова [4], А. И. Кожанова, Е. Ф. Шарина [5]. Обратные задачи для квазигиперболических уравнений ранее не рассматривались.

Линейные и нелинейные обратные задачи для гиперболических уравнений в различных постановках изучались в работах М. М. Лаврентьева [6], В. Г. Романова [7], Ю. Е. Аниконова [8–11], Ю. Я. Белова [12, 13], Б. А. Бубнова [14, 15],

С. И. Кабанихина [16], А. И. Прилепко [17] и др. Задачи определения коэффициентов гиперболических уравнений по некоторой дополнительной информации об их решении имеют большое практическое значение [18–20].

Исследованию разрешимости обратной задачи определения внешнего воздействия для гиперболического уравнения с интегральным условием переопределения посвящены работы [21, 22]. Подобные обратные задачи для гиперболических уравнений ранее изучались в работах [23–27]. Разрешимость обратной краевой задачи для гиперболического уравнения с несколькими неизвестными источниками была исследована в работах И. Р. Валитова, А. И. Кожанова [25].

1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R} с гладкой границей Γ , $Q = \Omega \times (0, T)$ — цилиндр с боковой границей $S = \Gamma \times (0, T)$, $f(x, t)$, $c(x, t)$, $h(x, t)$, $K(x, t)$ — заданные функции, m положительное целое число.

Обратная задача I. Найти функции $u(x, t)$, $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$(-1)^{m-1} D_t^{2m} u - \Delta u + c(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t), \quad (1)$$

при выполнении краевых условий

$$D_t^i u(x, 0) = 0, \quad i = \overline{0, m}, \quad (2)$$

$$D_t^j u(x, T) = 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad x \in \Omega,$$

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (3)$$

а также условия переопределения

$$\int_{\Omega} K(x, t)u(x, t) dx = 0 \quad \text{при } t \in (0, T). \quad (4)$$

Обратная задача II. Найти функции $u(x, t)$, $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (1), при выполнении краевых условий (2) и

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \right|_S = 0, \quad (5)$$

а также условия переопределения (4) (ν — вектор внутренней нормали к Γ).

Без ограничения общности будем рассматривать случай $m = 2$. В случае $m > 2$ все выкладки вполне аналогичны приведенным, но более громоздкие.

Введем обозначения

$$h_0(t) = \int_{\Omega} K(x, t)h(x, t) dx, \quad \alpha_0(t) = \frac{1}{h_0(t)} \int_{\Omega} K(x, t)f(x, t) dx,$$

$$f_1(x, t) = f(x, t) - \alpha_0(t)h(x, t), \quad H_1 = \max_Q |h(x, t)|,$$

$$c_1 = \max_{i=1, \dots, n} \max_Q |c_{x_i}(x, t)|, \quad H_2 = \max_{i=1, \dots, n} \max_Q |h_{x_i}(x, t)|,$$

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \max_{t \in [0, T]} \left(\frac{3}{h_0^2(t)} \int_Q \left(\int_{\Omega} (K^2(y, t) dy) \right) dx dt \right), \\
 M_2 &= \max_{t \in [0, T]} \left(\frac{3}{h_0^2(t)} \int_Q \left(\int_{\Omega} (K(y, t)c(y, t))^2 dy \right) dx dt \right), \\
 M_3 &= \max_{t \in [0, T]} \left(\frac{3}{h_0^2(t)} \int_Q \left(\int_{\Omega} K^2(y, t) dy \right) dx dt \right), \\
 M_0 &= \max\{M_1, M_2, M_3\}.
 \end{aligned}$$

Через V будем обозначать анизотропное пространство функций, имеющих обобщенные производные по пространственным переменным до второго порядка включительно и по переменной t до четвертого порядка включительно. Норму в пространстве V определим естественным образом:

$$\|u\|_V = \left(\int_Q \left[u^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 + (D_t^4 u)^2 \right] dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned}
 h(x, t) &\in C^1(\overline{Q}), \quad c(x, t) \in C^4(\overline{Q}), \quad K(x, t) \in C^4(\overline{Q}), \\
 f(x, t), f_{x_i}(x, t) &\in L_2(Q), \quad i = 1, \dots, n, \\
 h_0(t) &\neq 0, \quad t \in [0, T], \quad c(x, T) \geq 0 \text{ при } x \in \overline{\Omega}, \\
 f(x, t)|_S &= h(x, t)|_S = 0
 \end{aligned}$$

и существует λ_0 : $\lambda_0 > T$, $[(\lambda_0 - t)c(x, t)]_t \leq 0$ при $(x, t) \in \overline{Q}$,

$$M_0 \left(\lambda_0^2 T^2 \left(H_1^2 + \frac{H_2^2}{2(1 - \lambda_0^2 c_1^2 T^6)} \right) + 2H_1^2 \right) < 1.$$

Тогда существуют функция $u(x, t) \in V$ и функция $q(t) \in L_2(0, T)$, являющиеся решением обратной задачи (1)–(4).

Доказательство. Выполним вспомогательные построения. Для этого умножим уравнение (1) на функцию $K(x, t)$ и проинтегрируем по области Ω . Из полученного равенства вычислим $q(t)$:

$$q(t) = Z(t, u) - \alpha_0(t),$$

$$\begin{aligned}
 Z(t, u) &= \frac{1}{h_0(t)} \left[- \int_{\Omega} K(x, t) u_{tttt}(x, t) dx \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\Omega} K(x, t) \Delta u(x, t) dx + \int_{\Omega} K(x, t) c(x, t) u(x, t) dx \right].
 \end{aligned}$$

Рассмотрим **вспомогательную краевую задачу**: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$-u_{tttt} - \Delta u + c(x, t)u = f_1(x, t) + Z(t, u)h(x, t), \quad (6)$$

и такую, что выполняются условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) = 0, \quad u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$u|_S = 0. \quad (8)$$

Докажем, что данная задача разрешима в пространстве V . Для этого воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Пусть ε — положительное число. Рассмотрим новую краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$-u_{tttt} - \Delta u + c(x, t)u - \varepsilon \Delta u_t = f_1(x, t) + Z(t, u)h(x, t) \quad (9)$$

и такую, что выполняются условия (7) и (8).

Воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$-u_{tttt} - \Delta u + c(x, t)u - \varepsilon \Delta u_t = f_1(x, t) + \lambda Z(t, u)h(x, t) \quad (10)$$

и такую, что выполняются условия (7) и (8).

Покажем, что при фиксированном ε и при принадлежности функции $f_1(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ краевая задача $(10_{\varepsilon, \lambda})$, (7) и (8) разрешима в пространстве V .

Согласно теореме о методе продолжения по параметру [28, гл. 3, § 14] задача $(10_{\varepsilon, \lambda})$, (7), (8) будет разрешима в пространстве V , если она разрешима при $\lambda = 0$ и для всевозможных ее решений из пространства V имеет место равномерная по $\lambda \in [0, 1]$ априорная оценка в том же пространстве [3, 29].

Разрешимость краевой задачи $(10_{\varepsilon, 0})$, (7), (8) при фиксированном ε и при принадлежности функции $f_1(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ известна [3]. Покажем, что для всевозможных решений краевой задачи $(10_{\varepsilon, \lambda})$, (7), (8) из пространства V имеет место нужная априорная оценка.

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & \int_Q [-u_{tttt}(x, t) - \Delta u(x, t) + c(x, t)u(x, t) - \varepsilon \Delta u_t(x, t)] u_t(x, t) (\lambda_0 - t) dx dt \\ &= \int_Q [f_1(x, t) + \lambda Z(t, u)h(x, t)] u_t(x, t) (\lambda_0 - t) dx dt, \quad (11) \end{aligned}$$

являющееся следствием уравнения $(10_{\varepsilon, \lambda})$. Имеем

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \int_0^T u_{tttt}(x, t) u_t(x, t) (\lambda_0 - t) dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T \frac{\partial(u_{tt}^2(x, t)(\lambda_0 - t))}{\partial t} dx dt + \frac{3}{2} \int_{\Omega} \int_0^T u_{tt}^2(x, t) dx dt \\ &= \frac{(\lambda_0 - T)}{2} \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, T) dx + \frac{3}{2} \int_{\Omega} \int_0^T u_{tt}^2(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \int_0^T \Delta u(x, t) u_t(x, t) (\lambda_0 - t) \, dx dt \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \int_0^T \frac{\partial(u_{x_i}^2(x, t) (\lambda_0 - t))}{\partial t} \, dx dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \int_0^T u_{x_i}^2(x, t) \, dx dt \\
 & = \frac{(\lambda_0 - T)}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, T) \, dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \int_0^T u_{x_i}^2(x, t) \, dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \int_0^T c(x, t) u(x, t) u_t(x, t) (\lambda_0 - t) \, dx dt \\
 & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T \frac{\partial(u^2(x, t) c(x, t) (\lambda_0 - t))}{\partial t} \, dx dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T (c(x, t) - c_t(x, t) (\lambda_0 - t)) u^2(x, t) \, dx dt \\
 & = \frac{(\lambda_0 - T)}{2} \int_{\Omega} u^2(x, T) c(x, T) \, dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T (c(x, t) - c_t(x, t) (\lambda_0 - t)) u^2(x, t) \, dx dt,
 \end{aligned}$$

$$-\varepsilon \int_{\Omega} \int_0^T \Delta u_t(x, t) u_t(x, t) (\lambda_0 - t) \, dx dt = \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \int_0^T u_{x_i t}^2(x, t) (\lambda_0 - t) \, dx dt.$$

Интегрируя по частям и используя неравенство Юнга, из (11) нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{2} \int_Q u_{tt}^2(x, t) \, dx dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2(x, t) \, dx dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_Q (c(x, t) - c_t(x, t) (\lambda_0 - t)) u^2(x, t) \, dx dt \\
 & + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2(x, t) (\lambda_0 - t) \, dx dt + \frac{(\lambda_0 - T)}{2} \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, T) \, dx \\
 & + \frac{(\lambda_0 - T)}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, T) \, dx + \frac{(\lambda_0 - T)}{2} \int_{\Omega} c(x, T) u^2(x, T) \, dx \\
 & \leq \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{2} \int_Q u_t^2(x, t) \, dx dt + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_Q f_1^2(x, t) (\lambda_0 - t)^2 \, dx dt
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\delta_2^2} \int_Q (\lambda_0 - t)^2 Z^2(t, u) h^2(x, t) dx dt$$

(здесь δ_1 и δ_2 — произвольные положительные числа).

Имеет место неравенство

$$\int_Q u_t^2(x, t) dx dt \leq T^2 \int_Q u_{tt}^2(x, t) dx dt. \quad (12)$$

Положим $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{T}$. С учетом неравенства (12) и условий теоремы 1 получим

$$\begin{aligned} & \int_Q u_{tt}^2(x, t) dx dt + \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2(x, t) dx dt \\ & + \int_Q (c(x, t) - c_t(x, t)(\lambda_0 - t)) u^2(x, t) dx dt \\ & + 2\varepsilon \lambda_0 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2(x, t) dx dt + (\lambda_0 - T) \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, T) dx \\ & + (\lambda_0 - T) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, T) dx \leq \\ & \leq \lambda_0^2 T^2 \int_Q f_1^2(x, t) dx dt + \lambda_0^2 H_1^2 T^2 \int_Q Z^2(t, u) dx dt. \quad (13) \end{aligned}$$

Умножим уравнение (10) на функцию $(-\Delta u_t(x, t))(\lambda_0 - t)$. Интегрируя по частям в левой части и применяя неравенство Юнга в правой части, получим неравенство

$$\begin{aligned} & 3 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t t}^2(x, t) dx dt + \int_Q [\Delta u(x, t)]^2 dx dt \\ & + \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2(x, t) [c(x, t) - c_t(x, t)(\lambda_0 - t)] dx dt \\ & + (\lambda_0 - T) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t t}^2(x, T) dx + (\lambda_0 - T) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} c(x, T) u_{x_i}^2(x, T) dx \\ & + 2\varepsilon \int_Q [\Delta u_t(x, t)]^2 (\lambda_0 - t) dx dt \\ & \leq \delta_3^2 \int_Q [\Delta u_t(x, t)]^2 (\lambda_0 - t) dx dt + \frac{1}{\delta_3^2} \int_Q f_1^2(x, t) (\lambda_0 - t) dx dt \\ & + \delta_4^2 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2 dx dt + \frac{1}{\delta_4^2} \sum_{i=1}^n \int_Q h_{x_i}^2(x, t) (\lambda_0 - t)^2 Z^2(t, u) dx dt \\ & + \delta_5^2 \sum_{i=1}^n \int_Q (\lambda_0 - t)^2 c_{x_i}^2(x, t) u^2(x, t) dx dt + \frac{1}{\delta_5^2} \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Положим

$$\delta_3 = \sqrt{\varepsilon}, \quad \delta_4 = \frac{\sqrt{2(1 - \lambda_0^2 c_1^2 T^6)}}{T}, \quad \delta_5 = \frac{\sqrt{2}}{2\lambda_0 c_1 T^2}.$$

С учетом неравенства (12) и условий теоремы 1 получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t t}^2(x, t) dx dt + \int_Q [\Delta u(x, t)]^2 dx dt \\ & \quad + \sum_{i=1}^n \int_Q (c(x, t) - c_t(x, t)(\lambda_0 - t)) u_{x_i}^2(x, t) dx dt \\ & \quad + \varepsilon \int_Q [\Delta u_t(x, t)]^2 (\lambda_0 - t) dx dt + (\lambda_0 - T) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t t}^2(x, T) dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_Q u_{t t}^2(x, t) dx dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_Q f_1^2(x, t) (\lambda_0 - t) dx dt \\ & \quad + \frac{\lambda_0^2 H_2^2 T^2}{2(1 - \lambda_0^2 c_1^2 T^6)} \int_Q Z^2(t, u) dx dt. \quad (14) \end{aligned}$$

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & \int_Q (-u_{t t t t}(x, t) - \Delta u(x, t) + c(x, t)u(x, t) - \varepsilon \Delta u_t(x, t)) (-u_{t t t t}(x, t)) dx dt \\ & = \int_Q (f_1(x, t) + \lambda Z(t, u)h(x, t)) (-u_{t t t t}(x, t)) dx dt. \quad (15) \end{aligned}$$

Положим $\delta_7^2 = \delta_8^2 = \frac{1}{2}$. Интегрируя по частям и используя неравенство Юнга, из (15) получим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_Q u_{t t t t}^2(x, t) dx dt - 2 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t t}^2(x, t) dx dt - 2 \int_Q c(x, t) u_{t t}^2(x, t) dx dt \\ & \quad - \int_Q u^2(x, t) c_{t t t t}(x, t) dx dt + 4 \int_Q u_t^2(x, t) c_{t t}(x, t) dx dt \\ & \quad + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t t}^2(x, T) dx + \int_{\Omega} u^2(x, T) c_{t t t t}(x, T) dx \\ & = -2 \int_{\Omega} c_t(x, T) u(x, T) u_{t t}(x, T) dx - 2 \int_{\Omega} c(x, T) u(x, T) u_{t t t t}(x, T) dx \\ & \leq 2 \int_Q f_1^2(x, t) dx dt + 2H_1^2 \int_Q Z^2(t, u) dx dt. \quad (16) \end{aligned}$$

Из неравенств (13), (14), (16) вытекает неравенство

$$\int_Q u_{t t t t}^2(x, t) dx dt + \int_Q [\Delta u(x, t)]^2 dx dt + \varepsilon \lambda_0 \int_Q [\Delta u_t(x, t)]^2 dx dt$$

$$\begin{aligned}
& + + \sum_{i=1}^n \int_Q [1 + (c(x, t) - c_t(x, t)(\lambda_0 - t))] u_{x_i}^2(x, t) dx dt \\
& + \int_Q \left(\frac{1}{2} - 2c(x, t) \right) u_{tt}^2(x, t) dx dt + \int_Q (c(x, t) - c_t(x, t)(\lambda_0 - t) \\
& \quad - c_{ttt}(x, t)) u^2(x, t) dx dt - \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i tt}^2(x, t) dx dt \\
& + 2\varepsilon \lambda_0 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2(x, t) dx dt + (\lambda_0 - T) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, T) dx \\
& + 4 \int_Q c_{tt}(x, t) u_t^2(x, t) dx dt + (\varepsilon + (\lambda_0 - T)) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i tt}^2(x, T) dx \\
& + (\lambda_0 - T) \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, T) dx \leq \left(\lambda_0^2 T^2 + \frac{\lambda_0}{\varepsilon} + 2 \right) \int_Q f_1^2(x, t) dx dt \\
& \quad + \left(\lambda_0^2 T^2 \left(H_1^2 + \frac{H_2^2}{2(1 - \lambda_0^2 c_1^2 T^6)} \right) + 2H_1^2 \right) \int_Q Z^2(t, u) dx dt. \quad (17)
\end{aligned}$$

Числовое неравенство

$$(a_1 + \dots + a_p)^2 \leq p(a_1^2 + \dots + a_p^2),$$

и неравенство Гёльдера дают неравенство

$$\begin{aligned}
Z^2(t, u) \leq \frac{3}{h_0^2(t)} \left[\left(\int_{\Omega} K(y, t) u_{tttt}(y, t) dy \right)^2 + \left(\int_{\Omega} K(y, t) \Delta u(y, t) dy \right)^2 \right. \\
\left. + \left(\int_{\Omega} K(y, t) c(x, t) u(y, t) dy \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Имеют место неравенства

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{h_0^2(t)} \left(\int_Q K(y, t) u_{tttt}(y, t) dy \right)^2 \\
& \leq \frac{3}{h_0^2(t)} \int_Q \left(\int_{\Omega} K^2(y, t) dy \right) \left(\int_{\Omega} u_{tttt}^2(y, t) dy \right) dx dt \\
& \leq \frac{3}{h_0^2(t)} \int_Q \left(\int_{\Omega} (K^2(y, t) dy) dx dt \int_Q \left(\int_{\Omega} u_{tttt}^2(y, t) dy \right) dx dt \right. \\
& \leq \max_T \left(\frac{3}{h_0^2(t)} \int_Q \left(\int_{\Omega} (K^2(y, t) dy) dx dt \right) \int_Q u_{tttt}^2(x, t) dx dt \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \leq M_1 \int_Q u_{tttt}^2(x, t) dx dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{h_0^2(t)} \left(\int_Q K(y, t) c(y, t) u(y, t) dy \right)^2 \\
 & \leq \frac{3}{h_0^2(t)} \int_Q \left(\int_\Omega (K(y, t) c(y, t))^2 dy \right) \left(\int_\Omega u^2(y, t) dy \right) dx dt \\
 & \leq \frac{3}{h_0^2(t)} \int_Q \left(\int_\Omega (K(y, t) c(y, t))^2 dy \right) dx dt \int_Q \left(\int_\Omega u^2(y, t) dy \right) dx dt \\
 & \leq \max_T \left(\frac{3}{h_0^2(t)} \int_Q \left(\int_\Omega (K(y, t) c(y, t))^2 dy \right) dx dt \right) \int_Q u^2(x, t) dx dt \\
 & \leq M_2 \int_Q u^2(x, t) dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{h_0^2(t)} \left(\int_Q K(y, t) \Delta u(y, t) dy \right)^2 \\
 & \leq \frac{3}{h_0^2(t)} \int_Q \left(\int_\Omega K^2(y, t) dy \right) \left(\int_\Omega [\Delta u(y, t)]^2 dy \right) dx dt \\
 & \leq \frac{3}{h_0^2(t)} \int_Q \left(\int_\Omega K^2(y, t) dy \right) dx dt \int_Q \left(\int_\Omega [\Delta u(y, t)]^2 dy \right) dx dt \\
 & \leq \max_T \left(\frac{3}{h_0^2(t)} \int_Q \left(\int_\Omega K^2(y, t) dy \right) dx dt \right) \int_Q [\Delta u(x, t)]^2 dx dt \\
 & \leq M_3 \int_Q [\Delta u(x, t)]^2 dx dt,
 \end{aligned}$$

постоянные M_1 , M_2 , M_3 здесь определяются $h(x, t)$, $K(x, t)$ и областью Ω ,

$$\begin{aligned}
 & \left(\lambda_0^2 T^2 \left(H_1^2 + \frac{H_2^2}{2(1 - \lambda_0^2 c_1^2 T^6)} \right) + 2H_1^2 \right) \int_Q Z^2(t, u) dx dt \\
 & \leq M_0 \left(\lambda_0^2 T^2 \left(H_1^2 + \frac{H_2^2}{2(1 - \lambda_0^2 c_1^2 T^6)} \right) + 2H_1^2 \right) \\
 & \quad \times \int_Q \left(\int_\Omega u^2(y, t) dy + \int_\Omega u_{tttt}^2(y, t) dy + \int_\Omega [\Delta u(y, t)]^2 dy \right) dx dt \\
 & \leq M_0 \left(\lambda_0^2 T^2 \left(H_1^2 + \frac{H_2^2}{2(1 - \lambda_0^2 c_1^2 T^6)} \right) + 2H_1^2 \right) \\
 & \quad \times \int_Q \left(u^2(x, t) + u_{tttt}^2(x, t) + [\Delta u(x, t)]^2 \right) dx dt. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Неравенства (18), (17) и условия теоремы 1 дают априорную оценку

$$\left(1 - M_0 \left(\lambda_0^2 T^2 \left(H_1^2 + \frac{H_2^2}{2(1 - \lambda_0^2 c_1^2 T^6)} \right) + 2H_1^2 \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_Q u_{tttt}^2(x, t) dxdt + \int_Q [\Delta u(x, t)]^2 dxdt \right) \\
& + \varepsilon \lambda_0 \int_Q [\Delta u_t(x, t)]^2 dxdt + \sum_{i=1}^n \int_Q [1 + (c(x, t) - c_t(x, t)(\lambda_0 - t))] u_{x_i}^2(x, t) dxdt \\
& + \int_Q \left(\frac{1}{2} - 2c(x, t) \right) u_{tt}^2(x, t) dxdt + \int_Q \left(c(x, t) - c_t(x, t)(\lambda_0 - t) - c_{ttt}(x, t) \right. \\
& \quad \left. - M_0 \left(\lambda_0^2 T^2 \left(H_1^2 + \frac{H_2^2}{2(1 - \lambda_0^2 c_1^2 T^6)} \right) + 2H_1^2 \right) \right) u^2(x, t) dxdt \\
& \quad - \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i tt}^2(x, t) dxdt + 2\varepsilon \lambda_0 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2(x, t) dxdt \\
& \quad + (\lambda_0 - T) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, T) dx + 4 \int_Q c_{tt}(x, t) u_t^2(x, t) dxdt \\
& \quad + (\varepsilon + (\lambda_0 - T)) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i tt}^2(x, T) dx + (\lambda_0 - T) \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, T) dx \\
& \leq \left(\lambda_0^2 T^2 + \frac{\lambda_0}{\varepsilon} + 2 \right) \int_Q f_1^2(x, t) dxdt + M_4, \quad (19)
\end{aligned}$$

где M_4 определяется функциями $h(x, t)$, $f(x, t)$, $K(x, t)$ и числами ε , T , λ_0 , H_1 .

Из оценки (19) и теоремы о методе продолжения по параметру [28, гл. 3, § 14] следует, что при фиксированном ε краевая задача $(10_{\varepsilon, \lambda})$, (7), (8) разрешима в пространстве V для всех чисел λ из отрезка $[0, 1]$. Другими словами, краевая задача $(10_{\varepsilon, \lambda})$, (7), (8) имеет решение $u_\varepsilon(x, t)$, принадлежащее V .

Далее получим равномерные по ε оценки и обоснуем предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Действуя так же, как при получении оценки (19), но интегрируя по переменным x_i в слагаемых с функциями $f_1(x, t)$, покажем, что для семейства функций $\{u_\varepsilon(x, t)\}$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned}
& \int_Q u_{tttt}^2(x, t) dxdt + \int_Q [\Delta u(x, t)]^2 dxdt + \varepsilon \lambda_0 \int_Q [\Delta u_t(x, t)]^2 dxdt \\
& \quad + \sum_{i=1}^n \int_Q [1 + (c(x, t) - c_t(x, t)(\lambda_0 - t))] u_{x_i}^2(x, t) dxdt \\
& \quad \quad + \int_Q \left(\frac{1}{2} - 2c(x, t) \right) u_{tt}^2(x, t) dxdt \\
& \quad + \int_Q (c(x, t) - c_t(x, t)(\lambda_0 - t) - c_{ttt}(x, t)) u^2(x, t) dxdt \\
& \quad - \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i tt}^2(x, t) dxdt + 2\varepsilon \lambda_0 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2(x, t) dxdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (\lambda_0 - T) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, T) dx + 4 \int_Q c_{tt}(x, t) u_t^2(x, t) dx dt \\
 & + (\varepsilon + (\lambda_0 - T)) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i, tt}^2(x, T) dx + (\lambda_0 - T) \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, T) dx \\
 \leq & (2 + \lambda_0^2 T^2) \int_Q f_1^2(x, t) dx dt + \frac{1}{2(H_2^2 \lambda_0^2 + 2\lambda_0^2 c_1^2 T^4 + \frac{1}{T^2})} \sum_{i=1}^n \int_Q f_{1x_i}^2(x, t) dx dt \\
 & + \left(\frac{1}{2} + \lambda_0^2 H_1^2 T^2 + 2H_1^2 \right) \int_Q Z^2(t, u) dx dt. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Из (20) получаем априорную оценку

$$\begin{aligned}
 & (1 - M_5) \left(\int_Q u_{tttt}^2(x, t) dx dt + \int_Q [\Delta u(x, t)]^2 dx dt \right) + \varepsilon \lambda_0 \int_Q [\Delta u_t(x, t)]^2 dx dt \\
 & + \sum_{i=1}^n \int_Q [1 + (c(x, t) - c_t(x, t)(\lambda_0 - t))] u_{x_i}^2(x, t) dx dt + \int_Q \left(\frac{1}{2} - 2c(x, t) \right) u_{tt}^2(x, t) dx dt \\
 & + \int_Q (c(x, t) - c_t(x, t)(\lambda_0 - t) - c_{ttt}(x, t) - M_6) u^2(x, t) dx dt \\
 & - \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i, tt}^2(x, t) dx dt + 2\varepsilon \lambda_0 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2(x, t) dx dt \\
 & + (\lambda_0 - T) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, T) dx + 4 \int_Q c_{tt}(x, t) u_t^2(x, t) dx dt \\
 & + (\varepsilon + (\lambda_0 - T)) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i, tt}^2(x, T) dx + (\lambda_0 - T) \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, T) dx \\
 \leq & (2 + \lambda_0^2 T^2) \int_Q f_1^2(x, t) dx dt + \frac{1}{2(H_2^2 \lambda_0^2 + 2\lambda_0^2 c_1^2 T^4 + \frac{1}{T^2})} \sum_{i=1}^n \int_Q f_{1x_i}^2(x, t) dx dt + M_6, \quad (21)
 \end{aligned}$$

постоянная M_6 в которой определяется функциями $h(x, t)$, $K(x, t)$, $c(x, t)$, областью Ω , числами λ_0 , T и

$$M_5 = M_0 \left(\frac{1}{2} + \lambda_0^2 H_1^2 T^2 + 2H_1^2 \right).$$

Из оценки (21) следует, что в семействе $\{u_\varepsilon(x, t)\}$ решений краевых задач (10 $_\varepsilon$), (7), (8) можно переходить к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предельная функция будет принадлежать пространству V и представлять собой решение краевой задачи (6)–(8).

Покажем, что решение $u(x, t)$ и функция $q(t)$ дадут искомого решение обратной задачи I. Для этого умножим уравнение (1) на функцию $K(x, t)$ и проинтегрируем по Ω . Получим равенство

$$\psi_{tttt}(t) \equiv \frac{\partial^4}{\partial t^4} \left(\int_{\Omega} K(x, t) u(x, t) dx \right) = 0. \quad (22)$$

Из однородных начальных условий обратной задачи I следует, что имеет место равенство $\psi(t) = 0$ при $t \in (0, T)$. Это означает, что для решения $u(x, t)$ краевой задачи (6)–(8) будет выполняться условие переопределения (4). Вместе с принадлежностью функций $u(x, t)$ и $q(t)$ требуемым классам все это и означает, что функция дает искомое решение обратной задачи I.

Теорема доказана.

В случае обратной задачи 2 можно установить аналогичный теореме 1 результат.

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$h(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad c(x, t) \in C^4(\bar{Q}), \quad K(x, t) \in C^4(\bar{Q}),$$

$$f(x, t), f_{x_i}(x, t) \in L_2(Q), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$h_0(t) \neq 0, \quad t \in [0, T], \quad c(x, T) \geq 0$$

и существует λ_0 такое, что $\lambda_0 > T$, $[(\lambda_0 - t)c(x, t)]_t \leq 0$ при $(x, t) \in \bar{Q}$,

$$M_0 \left(\lambda_0^2 T^2 \left(H_1^2 + \frac{H_2^2}{2(1 - \lambda_0^2 c_1^2 T^6)} \right) + 2H_1^2 \right) < 1,$$

Тогда существуют функция $u(x, t) \in V$ и функция $q(t)$ из пространства $L_2[0, T]$, являющиеся решением обратной задачи II.

Доказательство теоремы 2 проводится вполне аналогично доказательству теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. В заданном уравнении (1) вместо оператора Лапласа можно рассмотреть общий эллиптический оператор 2-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Врагов В. Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1987. С. 5–13.
2. Егоров И. Е. О фредгольмовой разрешимости первой краевой задачи для уравнения смешанного типа четного порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 2. С. 48–56.
3. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.
4. Терехов А. Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к решению задач математической физики и вычислительной математики: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-е, Ин-т математики. Новосибирск, 1979. С. 128–137.
5. Кожанов А. И., Шарин Е. Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Укр. мат. вісник. 2014. Т. 11, № 2. С. 181–202.
6. Lavrentiev M. M. Inverse problems of mathematical physics. Utrecht: VSP, 2003.
7. Romanov V. G. Investigation methods for inverse problems. Utrecht: VSP, 2002.
8. Anikonov Yu. E. Formulas in inverse and ill-posed problems. Utrecht: VSP, 1997.
9. Anikonov Yu. E. Inverse and ill-posed sources problems. Utrecht: VSP, 1997.
10. Anikonov Yu. E. Inverse problems for kinetic and other evolution equations. Utrecht: VSP, 2001.
11. Anikonov Yu. E. Multidimensional inverse and ill-posed problems for differential equations. Utrecht: VSP, 1995.
12. Belov Yu. Ya. Inverse problems for parabolic equations // J. Inverse Ill-posed Problems, 1993. V. 1, N 4. P. 283–305.

13. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
14. Бубнов Б. А. О корректных краевых и обратных задачах для некоторых классов эволюционных уравнений: Дис. . . . докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. Новосибирск, 1988.
15. Бубнов Б. А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. Новосибирск, 1987. (Препринт / ВЦ СО АН СССР; № 713).
16. Кабанихин С. И. О нелинейной регуляризации многомерных обратных задач для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1989. Т. ??????, № 4. С. 791–795.
17. Прилепко А. И. Обратные задачи теории потенциала (эллиптические, параболические и гиперболические уравнения и уравнения переноса) // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 5. С. 755–767.
18. Обратные задачи электродинамики / Кабанихин С. И., Романов В. Г. и др. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.
19. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
20. Калинина Е. А. Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневост. мат. журн. 2004. Т. 5, № 1. С. 89–99.
21. Павлов С. С. Исследование обратной задачи восстановления плотностей источников одномерного волнового уравнения // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 1. С. 93–99.
22. Павлов С. С. Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 81–93.
23. Валитов И. Р. О разрешимости двух обратных задач для гиперболических уравнений // Труды Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан. Серия «Физико-математические и технические науки». Вып.3 / Отв. ред. К. Б. Сабитов. Уфа: Гилем, 2006. С. 64–73.
24. Валитов И. Р. Обратные задачи для гиперболических уравнений: Автореф. дис. . . . к. ф.-м. н. / Стерлитамакская гос. пед. академия, 2009.
25. Валитов И. Р., Кожанов А. И. Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени. Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, вып. 1. С. 3–18.
26. Kozhanov A. I., Safullova R. R. Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations // Inverse and Ill-Posed Problems, 2010, V. 18, N. 1. С. 1–24.
27. Сафуллова Р. Р. О разрешимости линейной обратной задачи нахождения правой части составного вида в гиперболическом уравнении // Вестн. ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование». 2009. Т. 37, вып. 4. С. 93–105.
28. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
29. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: ЭЛМ, 1985.

Статья поступила 28 августа 2015 г.

Павлов Степан Степанович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
кафедра математической экономики и прикладной информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
ststepmath@mail.ru

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Л. А. Телешева

Аннотация. Доказываются теоремы существования регулярных решений краевых задач для параболических уравнений четвертого порядка в случаях, когда либо граничные данные, либо правая часть содержат неизвестные параметры, зависящие лишь от временной переменной. Условиями переопределения в рассматриваемых случаях являются условия интегрального переопределения по пространственной области или же условия интегрального переопределения по границе пространственной области.

Ключевые слова: параболические уравнения, обратная задача, интегральные условия переопределения, ряд Фурье, регулярное решение, разрешимость.

L. A. Telesheva. The recovery of parameters in boundary value problems for linear parabolic equations of fourth order.

Abstract: Existence of regular solutions of boundary value problems for parabolic equations of fourth order theorems are proved in this paper. For these problems are considered special cases, when either boundary conditions or the right-hand side contain the unknown parameters that only depends on a time variable. The overdetermination in the cases under consideration are conditions override integrated in the spatial domain or the conditions for the integral rewrite on the boundary of the spatial domain.

Keywords: parabolic equations, inverse problems, integral overdetermination, Fourier series, regular solutions, solvability.

1. Введение

В работе изучаются задачи нахождения решений параболических уравнений четвертого порядка в ситуации, когда либо граничные данные, либо правая часть уравнения являются неизвестными. Подобные задачи можно трактовать как обратные задачи — задачи, в которых вместе с решением требуется найти те или иные параметры (коэффициенты) самой задачи. Как правило, в подобных задачах предполагается, что неизвестные параметры имеют некоторый специальный вид и что помимо естественных краевых условий задаются также некоторые дополнительные условия — условия переопределения.

В настоящей работе предполагается, что неизвестные параметры являются функциями лишь от временной переменной. В качестве условий переопределения в настоящей работе предлагается использовать условия интегрального переопределения. Более точно, дополнительные условия в настоящей работе задаются как условия равенства нулю некоторых интегралов от решения по пространственной области или же по границе пространственной области.

Работа состоит из двух частей и дополнения. В первой части работы изучаются обратные задачи нахождения неизвестных граничных данных, во второй — обратные задачи нахождения неизвестной правой части. Объединяет две эти части единый метод исследования.

В дополнении указываются возможные обобщения полученных результатов.

2. Восстановление граничных данных

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой (бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T , $S = \Gamma \times (0, T)$ — боковая граница Q . Далее, пусть $c(x)$, $f(x, t)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, $K(x)$ и $N(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$. Пусть (l_1, l_2) — одна из пар граничных операторов $l_1 u = u$, $l_2 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, либо $l_1 u = u$, $l_2 u = \Delta u$, либо $l_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, $l_2 u = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}$ (здесь и далее $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке x , Δ — оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_n).

Обратная задача I. Найти функции $u(x, t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ такие, что для функции $u(x, t)$ в цилиндре Q выполняется уравнение

$$u_t + \Delta^2 u + c(x)u = f(x, t), \quad (1)$$

а также условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (2)$$

$$l_1 u(x, t)|_{(x,t) \in S} = q_1(t)h_1(x)|_{(x,t) \in S}, \quad l_2 u(x, t)|_{(x,t) \in S} = q_2(t)h_2(x)|_{(x,t) \in S}; \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} K(x)u(x, t) dx = 0, \quad \int_{\Omega} N(x)u(x, t) dx = 0, \quad 0 < t < T. \quad (4)$$

Обратные задачи нахождения вместе с решением также неизвестных граничных данных изучались ранее в различных постановках — различных прежде всего по виду неизвестных данных и по типу условий переопределения. Ряд результатов о разрешимости таких задач можно найти в монографиях [1–3] и статьях [4–9].

С другой стороны, задачи для различных классов нестационарных дифференциальных уравнений с условиями в виде интегралов от решения (с весом) по пространственной области активно изучаются в последнее время, см. работы [10–19]. В основном эти работы (а также другие, близкие к ним) относятся к параболическим и гиперболическим уравнениям второго порядка и одномерному случаю. Вместе с тем заметим, что в работах [8, 11, 19, 20] задачи с интегральными условиями трактовались именно как обратные задачи, но при этом рассматривались лишь некоторые специальные случаи обратной задачи I.

И еще одно замечание. По постановке изучаемая обратная задача I близка к задаче работы [8], по используемым методам — к работе [20].

Перейдем к содержательной части.

Проведем некоторые формальные построения. Определим функцию $v_0(x, t)$ как решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), а также условиям

$$l_1 u(x, t)|_{(x,t) \in S} = l_2 u(x, t)|_{(x,t) \in S} = 0; \quad (3')$$

Определим функции $\tilde{h}_j(x)$, $j = 1, 2$, как решения задач

$$\Delta^2 \tilde{h}_j + c(x)\tilde{h}_j = 0,$$

$$l_k \tilde{h}_j(x)|_{x \in \Gamma} = \delta_k^j h_j(x)|_{x \in \Gamma}, \quad j, k = 1, 2$$

(δ_k^j — символ Кронекера).

Решение $u(x, t)$ обратной задачи I представим следующим образом:

$$u(x, t) = v_0(x, t) + V(x, t) + w(x, t)$$

с функцией $V(x, t)$, имеющей вид

$$V(x, t) = q_1(t)\tilde{h}_1(x) + q_2(t)\tilde{h}_2(x),$$

и с функцией $w(x, t)$, являющейся решением задачи

$$w_t + \Delta^2 w + c(x)w = -q_1'(t)\tilde{h}_1(x) - q_2'(t)\tilde{h}_2(x),$$

$$l_1 w(x, t)|_{(x,t) \in S} = l_2 w(x, t)|_{(x,t) \in S} = 0.$$

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированная в пространстве $L_2(\Omega)$ система собственных функций задачи

$$\Delta^2 w + c(x)w = \lambda w, \quad x \in \Omega, \quad l_1 w(x)|_{x \in \Gamma} = l_2 w(x)|_{x \in \Gamma} = 0,$$

λ_k , $k = 1, \dots$, — соответственно собственные числа.

Представим функции $\tilde{h}_j(x)$, $j = 1, 2$, рядами Фурье по системе $\{w_k(x)\}_{k=1}^\infty$:

$$\tilde{h}_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} w_k(x).$$

Функцию $w(x, t)$ также представим рядом Фурье:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k(x); \quad (6)$$

неизвестные функции $c_k(t)$ здесь являются решениями задачи Коши

$$c_k'(t) + \lambda_k c_k(t) = -a_{1k} q_1'(t) - a_{2k} q_2'(t), \quad c_k(0) = 0.$$

Положим

$$d_k(t) = c_k(t) + a_{1k} q_1(t) + a_{2k} q_2(t).$$

Потребуем, чтобы для функций $q_j(t)$, $j = 1, 2$, выполнялось условие

$$q_j(0) = 0$$

(заметим, что это условие соответствует естественному условию согласования для решений обратной задачи I). Тогда функции $d_k(t)$ должны быть решением задачи Коши

$$d_k'(t) + \lambda_k d_k(t) = \lambda_k (a_{1k} q_1(t) + a_{2k} q_2(t)), \quad d_k(0) = 0.$$

Найдя функции $d_k(t)$, найдем далее функции $c_k(t)$:

$$c_k(t) = \lambda_k \left[a_{1k} \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} q_1(\tau) d\tau + a_{2k} \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} q_2(\tau) d\tau \right] - a_{1k} q_1(t) - a_{2k} q_2(t).$$

Зная функции $c_k(t)$, получаем представление функции $u(x, t)$ через известные величины и неизвестные коэффициенты $q_1(t)$ и $q_2(t)$:

$$u(x, t) = v_0(x, t) + q_1(t) \tilde{h}_1(x) + q_2(t) \tilde{h}_2(x) - \sum_{k=1}^{\infty} [a_{1k} q_1(t) + a_{2k} q_2(t)] w_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left[a_{1k} \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} q_1(\tau) d\tau + a_{2k} \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} q_2(\tau) d\tau \right] w_k(x). \quad (7)$$

Введем обозначения

$$\psi_1(t) = \int_{\Omega} K(x) v_0(x, t) dx, \quad \psi_2(t) = \int_{\Omega} N(x) v_0(x, t) dx, \\ \alpha_{1k} = \int_{\Omega} K(x) w_k(x) dx, \quad \alpha_{2k} = \int_{\Omega} N(x) w_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$R_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_{jk} \alpha_{ik} e^{-\lambda_k t}, \quad i, j = 1, 2.$$

Умножим равенство (7) на функцию $K(x)$ и проинтегрируем по области Ω . Учитывая (4), получим

$$\psi_1(t) + \int_0^t R_{1,1}(t-\tau) q_1(\tau) d\tau + \int_0^t R_{1,2}(t-\tau) q_2(\tau) d\tau = 0. \quad (8)$$

Аналогично, умножая равенство (7) на функцию $N(x)$ и интегрируя, получим соотношение

$$\psi_2(t) + \int_0^t R_{2,1}(t-\tau) q_1(\tau) d\tau + \int_0^t R_{2,2}(t-\tau) q_2(\tau) d\tau = 0. \quad (9)$$

Равенства (8) и (9) дают систему интегральных уравнений Вольтерра первого рода относительно функций $q_1(t)$ и $q_2(t)$, ее разрешимость позволит найти функцию $u(x, t)$ — решение уравнения (1), для которого выполняются условия (2)–(4).

Обозначим через \mathbf{R}_0 матрицу с элементами $R_{i,j}(0)$, $i, j = 1, 2$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$c(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad c(x) \geq 0 \text{ при } x \in \overline{\Omega}, \\ K(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad N(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad h_j(x) \in W_2^4(\Omega), \quad j = 1, 2;$$

$$\det \mathbf{R}_0 \neq 0;$$

числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p a_{jk} \alpha_{ik}$ абсолютно сходятся для $i, j = 1, 2, p = 1, 2, 3$.

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, $f_{tt}(x, t) \in L_2(Q)$, обратная задача I имеет решение $\{u(x, t), q_1(t), q_2(t)\}$ такое, что $u(x, t) \in W_2^{4,1}(Q)$, $q_1(t) \in W_2^1([0, T])$, $q_2(t) \in W_2^1([0, T])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему интегральных уравнений (8), (9). Используя стандартный переход от уравнений Вольтерра первого рода к уравнениям Вольтерра второго рода (дифференцированием, что возможно), нетрудно убедиться, что при выполнении условий теоремы система (8), (9) имеет решение $\{q_1(t), q_2(t)\}$, при этом выполняются включения $q_i(t) \in W_2^1([0, T])$, $i = 1, 2$. Очевидно теперь, что функция $u(x, t)$, определенная равенством

$$u(x, t) = v_0(x, t) + V(x, t) + w(x, t),$$

в котором функции $V(x, t)$ и $w(x, t)$ вычисляются через найденные функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$, будет искомым решением уравнения (1), для нее будет выполняться включение $u(x, t) \in W_2^{4,1}(Q)$ и будут выполняться условия (2)–(4).

Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний.

1. Сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p a_{jk} \alpha_{ik}$ предполагает, что числа a_{ij} или α_{ij} (или их произведение) быстро убывают. Искомое убывание имеет место, например, в случае, когда функции $K(x)$ и $N(x)$ гладкие и обращаются в нуль на Γ вместе со своими производными нужного порядка.

2. Функции $K(x)$, $N(x)$, $h_1(x)$ и $h_2(x)$ вполне могут зависеть и от переменной t . Соответствующие ряды в этом случае будут уже не числовыми а функциональными, для этих рядов естественным образом возникнут условия равномерной сходимости, прочие же выкладки лишь незначительно усложнятся.

3. Восстановление правой части

Пусть функции $f(x, t)$, $h(x, t)$, $K(x)$ заданы и определены при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$. В данной части работы будем рассматривать уравнение

$$u_t + \Delta^2 u = f(x, t) + q(t)h(x, t). \quad (10)$$

Обратная задача II. Найти функции $u(x, t)$, $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (10), при выполнении для функции $u(x, t)$ однородных граничных условий следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{(x,t) \in S} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \Big|_{(x,t) \in S} = 0, \quad (11)$$

начального условия (2) и интегрально-граничного переопределения

$$\int_{\Gamma} K(x)u(x, t) ds_x = 0, \quad t \in (0, T). \quad (12)$$

Обратная задача III. Найти функции $u(x, t), q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (10) при выполнении для функции $u(x, t)$ условий (2), (11) и условия внутреннего интегрального переопределения

$$\int_{\Omega} N(x)u(x, t) dx = 0, \quad t \in (0, T). \quad (13)$$

Заметим, что обратная задача II для параболических уравнений высокого порядка ранее изучалась лишь в [21]. Обратная задача III изучалась ранее многими авторами, выделим здесь монографии [22–24] и статьи [25, 26]. В нашу работу исследование разрешимости обратной задачи III внесено лишь для того, чтобы представить условия ее разрешимости в иных, нежели в указанных выше работах, терминах.

Вновь проведем некоторые формальные построения.

Представим функции $h(x, t)$ и $f(x, t)$, рядами Фурье по системе $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$h(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t)w_k(x), \quad f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)w_k(x).$$

Функцию $u(x, t)$ также представим рядом Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)w_k(x),$$

неизвестные функции $c_k(t)$ здесь являются решениями задачи Коши

$$c_k'(t) + \lambda_k c_k(t) = f_k(t) + q(t)h_k(t), \quad c_k(0) = 0. \quad (14)$$

Решая данную задачу, находим

$$c_k(t) = p_k(t) + \int_0^t q(\tau)h_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau.$$

Подставляя полученные значения функций $w_k(x)$ и $c_k(t)$ в представление компоненты $u(x, t)$, получим

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t f_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau + \int_0^t q(\tau)h_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau \right] w_k(x). \quad (15)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{h}_k &= \max_{[0, T]} |h_k(t)|, \quad p_k(t) = \int_0^t f_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau, \quad \bar{p}_k = \max_{[0, T]} |p_k(t)|, \\ b_k &= \int_{\Gamma} N(x)w_k(x) ds_x, \quad \phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k p_k(t), \quad G(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}, \\ \beta_k &= \int_{\Omega} N(x)w_k(x) dx, \quad \eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k p_k(t), \quad H(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k h_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}. \end{aligned}$$

Умножим равенство (15) на функцию $K(x)$ и проинтегрируем по Γ . Учитывая (12), получим

$$\phi(t) + \int_0^t q(\tau)G(t, \tau) d\tau = 0. \quad (16)$$

Аналогично, умножая равенство (15) на $N(x)$ и интегрируя по Ω , учитывая (13), получим

$$\eta(t) + \int_0^t q(\tau)H(t, \tau) d\tau = 0. \quad (17)$$

Уравнения (16), (17) являются интегральными уравнениями Вольтерра первого рода относительно функции $q(t)$, их разрешимость позволит найти функцию $u(x, t)$ — решение уравнения (10), для которого выполняются условия (2) и (11).

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$h(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad G_t(t, \tau) \in C((0, T), (0, T)),$$

$$\phi(t) \in C^1([0, T]), \quad \phi'(t) \in L_2([0, T]);$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k(t) \right| \geq b_0 > 0 \text{ при } t \in [0, T];$$

числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \bar{h}_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \bar{p}_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \bar{h}_k \lambda_k$ сходятся абсолютно.

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, существует решение $\{u(x, t), q(t)\}$ обратной задачи II такое, что $u(x, t) \in W_2^{2,4}(Q)$, $q(t) \in L_2((0, T))$.

Теорема 3. Пусть выполняются следующие условия:

$$h(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad \eta(t) \in C^1([0, T]),$$

$$\eta'(t) \in L_2([0, T]), \quad H_t(t, \tau) \in C((0, T), (0, T));$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k h_k(t) \right| \geq d_0 > 0 \text{ при } t \in [0, T],$$

числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| \bar{h}_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| \bar{p}_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| \bar{h}_k \lambda_k$ сходятся абсолютно.

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, существует решение $\{u(x, t), q(t)\}$ обратной задачи III такое, что $u(x, t) \in W_2^{2,4}(Q)$, $q(t) \in L_2((0, T))$.

Доказательство теорем 2 и 3 сводится к доказательству разрешимости интегральных уравнений (15) и (16) соответственно. При выполнении условий теорем 1 и 2 данные уравнения разрешимы (см., например, [27]).

4. Дополнение

1. Аналогичные теоремам 1 и 2 результаты нетрудно получить и для параболических уравнений высокого порядка, например для уравнений

$$u_t + (-1)^m \Delta^m u + c(x)u = f(x, t).$$

Для этих уравнений будем считать, что задана система $\{l_j\}_{j=1}^m$ граничных операторов с коэффициентами, не зависящими от переменной t , таких, что спектральная задача

$$w_t + (-1)^m \Delta^m w + c(x)w = \lambda w,$$

$$l_j w(x)|_{x \in \Gamma} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

порождает полную в пространстве $W_2^{2m}(\Omega)$ ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему собственных функций $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ с соответствующими неположительными собственными числами λ_k , $k = 1, 2, \dots$.

Уточним, что для аналога обратной задачи II среди операторов l_1, l_2, \dots, l_m не должен присутствовать оператор $lu = u$.

2. Во всех построениях оператор Δ можно заменить оператором L , имеющим вид

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

с гладкими в $\bar{\Omega}$ коэффициентами $b^{ij}(x)$.

3. Наряду с обратными задачами II и III нетрудно изучить и задачи с точечным переопределением — именно, с заданием условия $u(x_0, t) = 0$ при $x_0 \in \Gamma$ или $x_0 \in \Omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988.
2. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. (Университетская серия. Т. 5).
3. Алексеев Г. В. Оптимизация в стационарных задачах переноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010.
4. Костин А. Б., Прилепко А. И. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 11. С. 1319–1328.
5. Борухов В. Т., Корзюк В. И. Применение неклассических краевых задач для восстановления граничных режимов процессов переноса // Вестн. Белорус. ун-та. 1998. № 1. С. 54–57.
6. Борухов В. Т., Вабишевич П. Н., Корзюк В. И. Сведение одного класса обратных задач теплопроводности к прямым начально-краевым задачам // Вестн. Белорус. ун-та. 2000. № 4. С. 742–747.
7. Короткий А. И., Ковтунов Д. А. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции несжимаемой жидкости // Тр. ИММ ДВО АН. 2006. № 12. С. 88–97.
8. Kozhanov A. I. The problem of recovery of the boundary condition for a heat equation // Аналитические методы анализа и дифференц. уравнений (AMADE-2011): Материалы 6-й Междунар. конф., посвящ. памяти проф. А. А. Килбаса / под общ. ред. С. В. Рогозина. Минск: Изд. центр БГУ, 2012. С. 87–96.
9. Кожанов А. И. Линейные обратные задачи для некоторых классов нестационарных уравнений // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 264–275.

10. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1997. № 13. С. 294–304.
11. Пулькина Л. С. Нелокальная задача с двумя интегральными условиями для гиперболического уравнения на плоскости // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, Ин-т математики СО РАН, 2007. С. 232–236.
12. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Мат. журн. 2009. № 9. С. 78–92.
13. Кожанов А. И. О разрешимости краевых задач с нелокальными и интегральными условиями для параболических уравнений. Нелинейные граничные задачи // ИПММ НАН Украины. 2010. № 20. С. 54–76.
14. Пулькина Л. С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений // Самара: Самар. гос. ун-т, 2012.
15. Кожанов А.И., Пулькина Л. С. Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // Докл. АН. 2005. Т. 404, № 5. С. 589–592.
16. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
17. Абдрахманов А. М., Кожанов А. И. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка // Изв. вузов. Математика. 2007. № 5. С. 3–12.
18. Абдрахманов А. М. О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнений нечетного порядка // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 2. С. 163–172.
19. Кожанов А.И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // Докл. АН. 2014. Т. 457. № 2. С. 152–156.
20. Кожанов А. И. Разрешимость пространственно-нелокальных задач с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 1. С. 1048–1055.
21. Кожанов А. И., Телешева Л. А. Параболические уравнения высокого порядка: обратные задачи с граничным переопределением и гранично-нелокальные задачи // Докл. АМАН. 2015. Т. 17, № 4. С. 42–60.
22. Prilepko A. I., Orlovsky D. C., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Dekker, 1999.
23. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTL Publishers, 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).
24. Belov Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
25. Камынин В. Л., Франчини Э. Об одной обратной задаче для параболического уравнения высокого порядка // Мат. заметки. 1998. Т. 64, вып.5. С. 680–691.
26. Пятков С. Г., Сафонов Е. И. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 777–799.
27. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

Статья поступила 12 сентября 2015 г.

Телешева Любовь Александровна
Бурятский государственный университет,
Институт математики и информатики,
ул. Ранжурова, 59, Улан-Удэ 670000
love_20_09@mail.ru

РЕЗУРГЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ И СИНГУЛЯРНЫЕ ОДУ

Ж. Р. Экаль

Аннотация. Предлагается краткое введение в теорию резургентности и приводятся несколько применений к изучению сингулярных ОДУ.

Ключевые слова: резургентная функция, обыкновенное дифференциальное уравнение.

J. Ecalle. Resurgence functions and ODE.

Abstract: We present here a short introduction to resurgence theory with select applications to local analytic ODEs.

Keywords: resurgence function, ODE.

§ 1. Расходимость и резургентность

ВВЕДЕНИЕ: СИНГУЛЯРНЫЕ ОДУ. Тема настоящей статьи — естественная расходимость (т. е. расходимость степенных рядов, возникающих при решении чисто аналитических задач) и пути ее преодоления: резургентные функции и инородное дифференцирование. Поясним, о чем идет речь, на примере локальных аналитических ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений), т. е. на примере ростков таких ОДУ вблизи особой точки z_0 . В качестве особой точки удобно брать не 0, а ∞ . Все зависит от природы полного (т. е. насыщенного параметрами u) формального решения $\tilde{Y}(z, u)$ нашего ОДУ.

Случай, когда полное формальное решение содержит только степенные ряды, тривиален (с локальной точки зрения), так как эти ряды сходятся.

Противоположный случай, когда нет полного (или вообще никакого) формального решения, безнадежен (опять-таки с локальной точки зрения), ибо там суммировать нечего.

Интересен и доступен промежуточный, так называемый сингулярный, случай, когда формальное решение является смесью экспонент и степенных рядов: последние обычно расходятся, но поддаются суммированию.

СУММИРОВАНИЕ ПО БОРЕЛЮ. Рассмотрим сингулярное аналитическое ОДУ $E(z, Y) = 0$ вблизи ∞ и ограничимся пока монокритическим случаем, т. е. тем случаем, когда имеется полное формальное решение с разложением

$$\tilde{Y}(z, u) = \tilde{Y}_0(z) + \sum_{n \in \mathbb{N}^d} u^n e^{\lambda_n z} \tilde{Y}_n(z) \quad (u = (u_1, \dots, u_d)) \quad (1)$$

с расходящимися степенными рядами

$$\tilde{Y}_n(z) = \sum a_{n,k} z^{-k},$$

но с простыми экспонентами $e^{\lambda_n z}$ («монокритичность»). Вся задача в том, чтобы это формальное решение превратить в настоящее. Для этого надо просуммировать каждый $\tilde{Y}_n(z)$, т. е. обратить его в аналитический росток $Y_{n,\theta}(z)$, определенный в какой-то секториальной окрестности ∞ с биссектрисой $\arg z^{-1} = \theta$ и допускающий там $\tilde{Y}_n(z)$ в качестве асимптотического ряда. Однако «удаление тильды», т. е. суммирование, возможно лишь опосредованно, через промежуточный шаг \hat{Y}_n :

$$\tilde{Y}_n(z) \xrightarrow{\mathcal{B}=\text{Borel}} \hat{Y}_n(\zeta) \xrightarrow{\mathcal{L}=\text{Laplace}} Y_{n,\theta}(z) \stackrel{\text{asympt}^{ty}}{\sim} \tilde{Y}_n(z). \quad (2)$$

Преобразование Бореля (\mathcal{B}) действует «почленно»:

$$\mathcal{B}: z^{-\sigma} \mapsto \zeta^{\sigma-1}/\Gamma(\sigma) \quad (\sigma \notin -\mathbb{N}); \quad z^n \mapsto \delta^{(n)} \quad (n \in \mathbb{N}, \delta = \text{Dirac}), \quad (3)$$

и превращает любой ряд $\tilde{\varphi}(z)$ с коэффициентами типа Жевре 1 в ряд $\hat{\varphi}(\zeta)$ с ненулевым радиусом сходимости

$$\mathcal{B}: \tilde{\varphi}(z) = \sum a_n z^{-n} \mapsto \hat{\varphi}(\zeta) = \sum \frac{a_n \zeta^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (4)$$

Более того, если ряд $\tilde{\varphi}$ «естественного происхождения», то $\hat{\varphi}$ обычно обладает аналитическим продолжением по почти всем осям от 0 до ∞ без аналитических барьеров с дискретной конфигурацией особых точек ω_i и с не более чем экспоненциальным ростом вблизи ∞ , что и позволяет подвергать $\hat{\varphi}$ преобразованию Лапласа (\mathcal{L}), формально обратному к \mathcal{B} :

$$\mathcal{L}: \hat{\varphi} \mapsto \varphi_\theta \quad \text{с} \quad \varphi_\theta(z) := \int_0^{\infty e^{i\theta}} \hat{\varphi}(\zeta) e^{-\zeta z} d\zeta. \quad (5)$$

Преобразование Бореля превращает обыкновенное произведение в так называемую свертку $*$, а дифференцирование по z — в умножение на ζ . Преобразование Лапласа осуществляет обратные превращения:

$$\mathcal{B}: \tilde{\varphi}_1 \cdot \tilde{\varphi}_2 \mapsto \hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2 \quad \text{с} \quad (\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2)(\zeta) := \int_0^\zeta \hat{\varphi}_1(\zeta_1) * \hat{\varphi}_2(\zeta - \zeta_1) d\zeta_1, \quad (6)$$

$$\mathcal{B}: \partial_z \tilde{\varphi}(z) \mapsto -\zeta \hat{\varphi}(\zeta), \quad (7)$$

$$\mathcal{B}: \psi(z) = (\omega + \partial_z)\varphi(z) \implies \hat{\varphi}(\zeta) = (\omega - \zeta)^{-1} \hat{\psi}(\zeta), \quad (8)$$

$$\mathcal{B}: \psi(z) = \varphi(z) - \varphi(z+1) \implies \hat{\varphi}(\zeta) = (1 - \exp(-\zeta))^{-1} \hat{\psi}(\zeta). \quad (9)$$

Из (8) и (9) видно, что решение дифференциальных или разностных уравнений может создавать в функциях $\hat{\varphi}$ не только простые полюсы, но еще, под повторным действием свертки, более сложные особенности. Общая схема суммирования «по Борелю» выглядит так:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\varphi}(z) & \dots & \varphi_\theta(z) & z\text{-plane (multiplication)} \\ \mathcal{B} \searrow & & \nearrow \mathcal{L} & \\ & \hat{\varphi}(\zeta) & & \zeta\text{-plane (convolution)} \end{array}$$

Любая ось интегрирования $\arg \zeta = \theta$ может двигаться ровно столько, сколько особые точки ω_i разрешают, а каждому регулярному сектору раствора $\delta\theta$ в ζ -плоскости соответствует в z -плоскости регулярный сектор раствора $\delta\theta + \pi$.

Отсюда видны главные задачи и трудности, стоящие перед нами.

Задача 1. Чтобы проинтегрировать по Лапласу, надо удостовериться, что функция $\widehat{\varphi}(\zeta)$ не имеет аналитических барьеров и не растет сверхэкспоненциально, когда $\zeta \rightarrow \infty$ по прямым осям.

Задача 2. Чтобы контролировать этот рост, надо уметь ограничивать интегралы свертки, неявно входящие в определение функции $\widehat{\varphi}(\zeta)$.

Задача 3. Надо найти все особые точки ω функции $\widehat{\varphi}$ и выяснить поведение $\widehat{\varphi}$ в каждой такой ω , ибо особенности эти ответственны за расходимость исходного ряда $\widetilde{\varphi}$ и несут важную информацию (константы Стокса).

ЗАТРУДНЕНИЕ 1. Возможное присутствие особых точек ω над \mathbb{R}^+ .

ЗАТРУДНЕНИЕ 2. Высокая разветвленность римановых поверхностей.

ЗАТРУДНЕНИЕ 3. Сложность и запутанность путей интегрирования, по которым приходится вычислять простую и n -кратную свертки.

§ 2. Мультипликативное усреднение

Физики склонны считать, что при наличии особых точек ω_i над \mathbb{R}^+ ряд $\widetilde{\varphi}$ просуммировать нельзя. Это, однако, неверно. Надо просто прибегнуть к подходящему усреднению μ отдельных ветвей многозначной функции:

$$\widetilde{\varphi}(z) \xrightarrow{\mathcal{B}} \widehat{\varphi}(\zeta) \xrightarrow{\mu} \mu\widehat{\varphi}(\zeta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(z). \quad (10)$$

Усреднение $\mu : \widehat{\varphi} \mapsto \mu\widehat{\varphi}$ определяется весами $\mu^{(\epsilon)}$:

$$\mu\widehat{\varphi}(\zeta) := \sum_{\epsilon_i \in \{+, -\}} \mu^{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)} \widehat{\varphi}^{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)}(\zeta), \quad \text{если } \omega_r < \zeta < \omega_{r+1}. \quad (11)$$

Здесь $\omega_1, \omega_2, \dots$ означают особые точки, лежащие над \mathbb{R}^+ , а $\widehat{\varphi}^{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)}$ — ту параметризацию функции $\widehat{\varphi}$ над интервалом $]\omega_i, \omega_{i+1}[$, которая соответствует обходу очередной точки ω_i справа, если $\epsilon_i = +$, или слева, если $\epsilon_i = -$. Более того, μ должно удовлетворять следующим двум главным условиям.

(i) Должно сохранять вещественность для применения к тем задачам, где только вещественные решения приемлемы. Значит, если многозначная $\widehat{\varphi}(\zeta)$ вещественна для малых $\zeta > 0$, то однозначная $\mu\widehat{\varphi}(\zeta)$ должна оставаться вещественной для всех $\zeta > 0$.

(ii) Должно коммутировать со сверткой:

$$\mu(\widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2) \equiv (\mu\widehat{\varphi}_1) * (\mu\widehat{\varphi}_2), \quad (12)$$

для применения к нелинейным задачам. Иначе говоря, в схеме (10) средняя стрелка, подобно левой и правой, должна быть не только линейным, но и мультипликативным гомоморфизмом. Оба эти условия трудно совместимы. Ясно, например, что «полусумма»

$$\mu^{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_r, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (13)$$

удовлетворяет (i), но не удовлетворяет (ii). К счастью, подходящие усреднения, для которых выполнены все требования, есть. Вот два главных примера.

СТАНДАРТНОЕ УСРЕДНЕНИЕ. Его веса даются прямой формулой:

$$\mu^{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)} := \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2})\Gamma(q + \frac{1}{2})}{\Gamma(r + 1)\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{(2p)!(2q)!}{4^{p+q}p!q!(p+q)!} \quad (14)$$

с

$$p := \sum_{\epsilon_i=+} 1, \quad q := \sum_{\epsilon_i=-} 1 \quad (p + q = r). \quad (15)$$

«ОРГАНИЧНОЕ» УСРЕДНЕНИЕ. Его веса даются рекуррентной формулой:

$$\mu^{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)} := \mu^{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{r-1})} \frac{1}{2} \left(1 + \epsilon_{r-1} \epsilon_r \frac{\omega_{r-1}}{\omega_r} \right) \quad \text{с} \quad \mu^{(\pm)} := \frac{1}{2}. \quad (16)$$

§ 3. Инеродное дифференцирование

ВЫЧИСЛЕНИЕ СВЕРТКИ ПО ССС-ПУТЯМ. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ — дискретное подмножество \mathbb{C} и $\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2$ — две аналитические функции на $\mathcal{R} := \mathbb{C} \setminus \Omega$. Для малых ζ интеграл свертки (6) вычисляется по промежутку $[0, \zeta]$, а для отдаленных ζ его надо вычислять по так называемым *самосимметрично сократимым* (ССС) путям, т. е. по таким путям $\Gamma_* \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$, которые не только симметричны относительно их середины $\zeta/2$, но еще непрерывно стягиваемы к нулю при постоянном сохранении самосимметричности. За исключением счетного подмножества, каждый $\zeta \in \mathcal{R}$ является концом такого ССС-пути, но беда в том, что даже для простых поверхностей \mathcal{R} ССС-пути настолько крутятся и усложняются по мере удаления их конца ζ , что они фактически неприменимы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Δ -ОПЕРАТОРОВ. Вместо никуда не годных ССС-путей нам нужны линейные операторы $\widehat{\Delta}_\omega$ с индексами из $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, подробно описывающие поведение $\widehat{\varphi}(\zeta)$ вблизи особой точки ω (вернее, над ней), и действующие «по Лейбницу»:

$$\widehat{\Delta}_\omega(\widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2) \equiv (\widehat{\Delta}_\omega \widehat{\varphi}_1) * \widehat{\varphi}_2 + \widehat{\varphi}_1 * (\widehat{\Delta}_\omega \widehat{\varphi}_2). \quad (17)$$

Их действие определяется формулой

$$\widehat{\Delta}_\omega \widehat{\varphi}(\zeta) := \sum_{\epsilon_i=\pm} \frac{\epsilon_r}{2\pi i} \delta^{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)} \widehat{\varphi}^{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)}(\zeta + \omega) \quad (\omega_r := \omega), \quad (18)$$

сначала для малых $\zeta \in [0, \omega]$, а затем аналитически продолжается. Здесь $\omega_1, \omega_2, \dots$ — особые точки, лежащие между 0 и $\omega_r := \omega$, а чтобы обеспечить (17), веса δ должны удовлетворять строгим алгебраическим условиям. Для «стандартных» Δ -операторов веса зависят только от ϵ :

$$\delta^{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)} := \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \quad \text{с} \quad p := \sum_{\epsilon_i=+}^{1 \leq i \leq r-1} 1, \quad q := \sum_{\epsilon_i=-}^{1 \leq i \leq r-1} 1, \quad (19)$$

а для «органичных» Δ -операторов они зависят еще от ω :

$$\delta^{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)} := \begin{cases} (\omega_{p+1} - \omega_p)/(2\omega_r), & \text{если } (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r) = ((+)^p, (-)^q, \epsilon_r), \\ (\omega_{q+1} - \omega_q)/(2\omega_r), & \text{если } (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r) = ((-)^q, (+)^p, \epsilon_r), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ввиду (17) операторы $\widehat{\Delta}_\omega$ называют *инородными дифференцированиями*, а функцию $\widehat{\Delta}_\omega \widehat{\varphi}$ — *инородной производной от $\widehat{\varphi}$* .

Свойства Δ -ОПЕРАТОРОВ. Помимо $\widehat{\Delta}_\omega$ удобно рассматривать операторы Δ_ω и $\mathbf{\Delta}_\omega$, которые действуют непосредственно в z -плоскости одинаково на ряды $\widetilde{\varphi}$ и на ростки φ_θ :

$$\widehat{\Delta}_\omega \stackrel{\text{pull back}}{\implies} \Delta_\omega = \mathcal{B}^{-1} \widehat{\Delta}_\omega \mathcal{B} \implies \Delta_\omega := e^{-\omega z} \Delta_\omega. \quad (20)$$

Для этих вариантов правило Лейбница принимает вид

$$\widehat{\Delta}_\omega(\widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2) \equiv (\widehat{\Delta}_\omega \widehat{\varphi}_1) * \widehat{\varphi}_2 + \widehat{\varphi}_1 * (\widehat{\Delta}_\omega \widehat{\varphi}_2) \quad (\zeta\text{-plane}), \quad (21)$$

$$\Delta_\omega(\varphi_1 \cdot \varphi_2) \equiv (\Delta_\omega \varphi_1) \cdot \varphi_2 + \varphi_1 \cdot (\Delta_\omega \varphi_2) \quad (z\text{-plane}), \quad (22)$$

$$\mathbf{\Delta}_\omega(\varphi_1 \cdot \varphi_2) \equiv (\mathbf{\Delta}_\omega \varphi_1) \cdot \varphi_2 + \varphi_1 \cdot (\mathbf{\Delta}_\omega \varphi_2) \quad (z\text{-plane}). \quad (23)$$

Благодаря экспоненциальному фактору, «жирные», или «инвариантные», операторы $\mathbf{\Delta}_\omega$ коммутируют с простым дифференцированием $\partial := \partial_z$:

$$[\widehat{\Delta}_\omega, \widehat{\partial}] = -\omega \widehat{\Delta}_\omega \implies [\Delta_\omega, \partial] = -\omega \Delta_\omega \implies [\mathbf{\Delta}_\omega, \partial] = 0. \quad (24)$$

Δ -операторы определенного типа, «стандартного» или «органичного», свободно порождают одну и ту же алгебру Ли \mathbb{A} , т. е. для любого

$$\mathbf{\Delta} := \sum \gamma^{\omega_1, \dots, \omega_r} [\mathbf{\Delta}_{\omega_r} \dots [\mathbf{\Delta}_{\omega_2}, \mathbf{\Delta}_{\omega_1}]]$$

найдется такое φ , что $\mathbf{\Delta}\varphi \neq 0$. Добавим, что во многих приложениях действие операторов Δ_ω зависит не от ω как элемента $\mathbb{C}_\bullet := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а только от его проекции $\dot{\omega}$ на \mathbb{C} .

АЛГЕБРА \mathbb{RES} РЕЗУРГЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ. Не входя в подробности, условимся называть *резургентными «функциями»* те ряды $\widetilde{\varphi}(z)$, те функции $\widehat{\varphi}(\zeta)$ и те ростки $\varphi_\theta(z)$, которые поддаются общей схеме из § 1. Для большей простоты эти «функции» мы обычно означаем через $\varphi(z)$ без тильды и без θ , не забывая при этом, что все высказывания о них должны интерпретироваться параллельно в трех «моделях». Пространство \mathbb{RES} резургентных функций замкнуто не только мультипликативно (по простому произведению в z -моделях) и по свертке в (ζ -модели), но еще и по инородному дифференцированию.

ПЕРВОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ: УРАВНЕНИЯ РЕЗУРГЕНТНОСТИ. Имеются простые критерии, позволяющие предсказать, будет ли формальное решение φ данного ОДУ резургентным относительно переменной z . Пусть $E = 0$ такое ОДУ. Используя правило Лейбница, легко получить чисто формальным путем новые уравнения как для простой, так и для инородных производных от φ :

$$E(z, \varphi) = 0 \implies \begin{cases} E_*(z, \varphi, \partial\varphi) = 0 & (\text{linear homogeneous in } \partial\varphi), \\ E_\omega(z, \varphi, \Delta_\omega\varphi) = 0 & (\text{linear homogeneous in } \Delta_\omega\varphi). \end{cases}$$

Общее решение уравнения $E_\omega = 0$ обычно имеет вид

$$\Delta_\omega \varphi = A_\omega \varphi_\omega \quad (*)$$

или, реже,

$$\Delta_\omega \varphi = \sum_{j=1}^{j=s} A_{j,\omega} \varphi_{j,\omega}, \quad (**)$$

где A_ω (или $A_{j,\omega}$) — нетривиальная, обычно трансцендентная скалярная величина (константа Стокса) и φ_ω (или $\varphi_{j,\omega}$) — простой степенной ряд, чисто формально выводимый из $E_\omega = 0$, а значит, и из $E = 0$. Заметим, что здесь без всякого анализа устанавливается аналитический факт, ибо формулы (*), (**) дают аналитическое продолжение $\widehat{\varphi}$ вплоть до ω в ζ -плоскости. В тесной связи между φ и $\Delta_\omega \varphi$ оказывается любопытная, но в то же время универсальная тенденция таких функций к самовоспроизведению в своих особых точках, в каждой из них! Отсюда и термин «резургентность».

ИЗБАВЛЕНИЕ ОТ ССС-ПУТЕЙ И ПРЕОДОЛЕНИЕ «МНОГОЗНАЧНОСТИ». Действие «ломаных» \widehat{T}_Γ и $\widehat{\Delta}_\Gamma$ -операторов дается формулами

$$\widehat{T}_\Gamma \widehat{\varphi}(\zeta) := \widehat{\varphi}_\Gamma(\zeta + \omega), \quad \widehat{\Delta}_\Gamma \widehat{\varphi}(\zeta) := \widehat{\varphi}_\Gamma^+(\zeta + \omega) - \widehat{\varphi}_\Gamma^-(\zeta + \omega) \quad (\omega = \text{конец } \Gamma)$$

сначала для малых ζ , а потом в целом, путем аналитического продолжения вдоль конечной конечно проколотой ломаной линии Γ с предписанием для обхода каждой проколотой точки. Эти «ломаные» операторы можно однозначно представить в виде многочлена от конечного числа $\widehat{\Delta}$ -операторов и вращения $R := \widehat{\varphi}(\zeta) \mapsto \widehat{\varphi}(e^{2\pi i} \zeta)$ ($\zeta \in \mathbb{C}_\bullet := \mathbb{C} \setminus \{0\}$):

$$\widehat{T}_\Gamma = \text{id} + \sum_r \sum_n \sum_{\omega_i} (2\pi i)^r \tau^{\omega_1, \dots, \omega_r} R^n \widehat{\Delta}_{\omega_r} \dots \widehat{\Delta}_{\omega_1} \quad (\tau^\omega \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}), \quad (26)$$

$$\widehat{\Delta}_\Gamma = \widehat{\Delta}_\omega + \sum_r \sum_n \sum_{\omega_i} (2\pi i)^r \lambda^{\omega_1, \dots, \omega_r} R^n \widehat{\Delta}_{\omega_r} \dots \widehat{\Delta}_{\omega_1} \quad (\lambda^\omega \in \mathbb{Q}, \sum \omega_i = \omega).$$

Это представление крайне удобно, так как оно сводит все операции типа $(\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2) \mapsto \widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2$ или типа $\widehat{\varphi} \mapsto (\widehat{\varphi})^{*n}$ к операциям на первом листе римановой поверхности, т. е. на общей «звезде аналитичности».

Как видно, Δ -операторы избавляют

- (i) от многозначных функций $\widehat{\varphi}$,
- (ii) от сложных многолистных римановых поверхностей,
- (iii) от невозможно извилистых ССС-путей интегрирования.

Благодаря Δ -операторам, достаточно рассматривать функции $\widehat{\varphi}$ и все их инородные производные как однозначные функции на их общей звезде аналитичности (с центром в 0_\bullet) и тогда все операции сводятся к простым операциям над однозначными функциями.

Обзор основных понятий и главных правил.

ПЕРВИЧНЫЕ Δ -ОПЕРАТОРЫ (alien derivations):

$$\widehat{\Delta}_\omega \text{ в } \zeta\text{-плоскости} \implies \Delta_\omega \text{ в } z\text{-плоскости ("pull back")} \quad (27)$$

ВТОРИЧНЫЕ Δ -ОПЕРАТОРЫ: $\mathbf{\Delta}_\omega := e^{-\omega z} \Delta_\omega$ в z -плоскости:

$$[\partial_z, \mathbf{\Delta}_\omega] \equiv 0, \quad \mathbf{\Delta}_\omega(f \circ g)(z) \equiv (\mathbf{\Delta}_\omega f) \circ g(z) \text{ в } g(z) \sim z. \quad (28)$$

Z-СИМВОЛЫ $\mathbf{Z}^\omega = \mathbf{Z}^{\omega_1, \dots, \omega_r}$ (pseudovariables). Это понятие двойственно к Δ -операторам. Произведение **Z**-символов — по «перетасовке» индексов:

$$\partial_z \mathbf{Z}^\omega \equiv 0, \quad \mathbf{Z}^\omega \circ g \equiv \mathbf{Z}^\omega, \quad \mathbf{Z}^{\omega'} \mathbf{Z}^{\omega''} = \sum \mathbf{Z}^\omega \quad (\text{shuffle product}). \quad (29)$$

Дисплей (display). Это своего рода «инородный ряд Тейлора»:

$$\text{dpl } \varphi := \varphi + \sum_r \sum_{\omega_j} \mathbf{Z}^{\omega_1, \dots, \omega_r} \Delta_{\omega_r} \dots \Delta_{\omega_1} \varphi. \quad (30)$$

Он имеет как локальный (z -часть) так и глобальный характер (**Z**-часть). В нем закодирована в предельно сжатой и удобной форме вся информация о функции $\widehat{\varphi}(\zeta)$ на всех листах ее римановой поверхности. Главное свойство дисплея — автоматическое распространение любого соотношения между функциями на соотношение между дисплеями:

$$R(\varphi_1, \dots, \varphi_s) \equiv 0 \implies R(\text{dpl } \varphi_1, \dots, \text{dpl } \varphi_s) \equiv 0. \quad (31)$$

§ 4. Сингулярные ОДУ и мостовое уравнение

Мостовое уравнение (Bridge Equation) обязано своим названием тому обстоятельству, что оно связывает инородные и простые производные. Оно имеет огромное поле применений. Мы сначала укажем главные факты о нем, а потом приведем несколько примеров. Вид его таков:

$$\Delta_\omega Y(z, u) = \mathbf{A}_\omega Y(z, u) \quad (\forall \omega \in \Omega) \quad (32)$$

- $Y(z, u)$ — формальное решение сингулярного ОДУ с максимальным числом параметров $u := (u_1, \dots, u_d)$. Тильда для простоты опускается.
- Δ_ω — «инородное дифференцирование». Индекс ω пробегает счетное подмножество $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ или $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- \mathbf{A}_ω — «оператор Стокса». Это обыкновенный дифференциальный оператор по переменной z и по параметрам u_1, \dots, u_d . Вид его — «самый общий из всех формально допустимых видов».
- $\{\mathbf{A}_\omega; \omega \in \Omega\}$ является полной системой констант Стокса.
- Вся расходимость в $Y(z, u)$ сосредоточена в степенных рядах по z^{-1} .

МОСТОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ДИСПЛЕЙ. Поскольку мостовое уравнение можно итерировать:

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega_1} Y(z, u) &= \mathbf{A}_{\omega_1} Y(z, u) \implies \\ \Delta_{\omega_2} \Delta_{\omega_1} Y(z, u) &= \Delta_{\omega_2} \mathbf{A}_{\omega_1} Y(z, u) \\ &= \mathbf{A}_{\omega_1} \Delta_{\omega_2} Y(z, u) \\ &= \mathbf{A}_{\omega_1} \mathbf{A}_{\omega_2} Y(z, u) (\text{order reversal!}), \end{aligned}$$

оно сразу дает инородные производные всех порядков:

$$\Delta_{\omega_r} \dots \Delta_{\omega_1} Y(z, u) = \mathbf{A}_{\omega_1} \dots \mathbf{A}_{\omega_r} Y(z, u). \quad (33)$$

Подключая (33) в определение дисплея (30), получаем

$$\begin{aligned} \text{dpl } Y(z, u) &= Y(z, u) + \sum_r \sum_{\omega_i} \mathbf{Z}^{\omega_1, \dots, \omega_r} \Delta_{\omega_r} \dots \Delta_{\omega_1} Y(z, y) \\ &= Y(z, u) + \sum_r \sum_{\omega_i} \mathbf{Z}^{\omega_1, \dots, \omega_r} \mathbf{A}_{\omega_1} \dots \mathbf{A}_{\omega_r} Y(z, y). \end{aligned} \quad (34)$$

Сингулярное уравнение Риккати есть самое простое нелинейное ОДУ:

$$Y' = Y + H^-(z) + H^+(z)Y^2 \quad (H^\pm(z) \in z^{-1}\mathbb{C}\{z^{-1}\}). \quad (35)$$

Общее решение можно записать в неоднородном или однородном виде с помощью S_i или T_i . Первые имеют бесконечно много особых точек в ζ -плоскости, последние — только две:

$$Y(z, u) = \frac{ue^z S_0 + S_-}{ue^z S_0 S_+ + 1} = \frac{ue^z T_1 + T_2}{ue^z T_3 + T_4}, \quad \det \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} = 1, \quad (36)$$

$$\widehat{S}_\pm(\zeta) \text{ sing. over } \pm\beta N^* \quad \parallel \quad \widehat{T}_1, \widehat{T}_3 \text{ sing. over } \{0, 1\},$$

$$\widehat{S}_0(\zeta) \text{ sing. over } \mathbb{Z} \quad \parallel \quad \widehat{T}_2, \widehat{T}_4 \text{ sing. over } \{0, -1\}.$$

Мостовое уравнение в данном случае имеет довольно простой вид:

$$\Delta_{\pm 1} Y(z, u) = \mathbf{A}_{\pm 1} Y(z, u) \text{ с } \mathbf{A}_{\pm 1} = \alpha_{\pm 1} u^{1\pm 1} \partial_u. \quad (37)$$

Отсюда для отдельных компонент получаем следующие уравнения резургентности:

$$\begin{aligned} \Delta_{+1} T_1 &= \alpha_1 T_2, & \Delta_{+1} T_2 &= 0, & \Delta_{+1} T_3 &= \alpha_1 T_4, & \Delta_{+1} T_4 &= 0, \\ \Delta_{-1} T_2 &= \alpha_{-1} T_1, & \Delta_{-1} T_1 &= 0, & \Delta_{-1} T_4 &= \alpha_{-1} T_3, & \Delta_{-1} T_3 &= 0, \\ \Delta_{+1} S_0 &= a_1 S_-, & \Delta_{+1} S_+ &= a_1 S_0^{-1}(1 - S_+ S_-), & \Delta_{+1} S_- &= 0, \\ \Delta_{-1} S_0 &= a_{-1} S_+, & \Delta_{-1} S_- &= a_{-1} S_0(1 - S_+ S_-), & \Delta_{-1} S_+ &= 0. \end{aligned}$$

Соответствующие дисплеи с их четким разделением z -переменной и \mathbb{Z} -символов аккуратно алгебраизуют сложную геометрию ζ -плоскости:

$$\begin{pmatrix} \text{dpl } T_1 & \text{dpl } T_2 \\ \text{dpl } T_3 & \text{dpl } T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_4 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\text{dpl } S_0 = \frac{S_0 \mathbf{S}_0 + S_- \mathbf{S}_0 \mathbf{S}_+}{1 + S_0 S_+ S_-}, \quad \text{dpl } S_\pm = \frac{S_\pm + S_0^{\mp 1} \mathbf{S}_\pm}{1 + S_0^{\mp 1} S_\mp \mathbf{S}_\pm}, \quad (39)$$

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{1} + \sum (\alpha_1 \alpha_{-1})^n \mathbf{Z}^{\{1, -1\}^n}, \quad \mathbf{T}_2 = \sum \alpha_{-1} (\alpha_1 \alpha_{-1})^n \mathbf{Z}^{-1, \{1, -1\}^n},$$

$$\mathbf{T}_3 = \sum \alpha_1 (\alpha_{-1} \alpha_1)^n \mathbf{Z}^{1, \{-1, 1\}^n}, \quad \mathbf{T}_4 = \mathbf{1} + \sum (\alpha_{-1} \alpha_1)^n \mathbf{Z}^{\{-1, +1\}^n},$$

$$\log \mathbf{S}_0 = \sum_{1 \leq r} \sum_{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_r = 0}^{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \gamma_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_r} \alpha_{\epsilon_1} \dots \alpha_{\epsilon_r} \mathbf{Z}^{\epsilon_1, \dots, \epsilon_r},$$

$$\mathbf{S}_\pm = \pm \sum_{2 \leq r} \sum_{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_r = \pm 1}^{\epsilon_i = \pm 1} \gamma_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_r} \alpha_{\epsilon_1} \dots \alpha_{\epsilon_r} \mathbf{Z}^{\epsilon_1, \dots, \epsilon_r},$$

причем

$$\gamma_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_r} := \prod \epsilon_j \prod (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_r).$$

Исходя из этих формул, интересно проследить, как соотношения между компонентами двух типов

$$T_1 T_4 - T_2 T_3 = 1, \quad Y_0 = T_1 / T_4, \quad Y_+ = T_3 / T_1, \quad Y_- = T_2 / T_4, \quad (40)$$

$$T_1^2 \equiv Y_0(1 - Y_+Y_-)^{-1}, \quad T_2^2 \equiv Y_0^{-1}Y_-^2(1 - Y_+Y_-)^{-1}, \quad (41)$$

$$T_3^2 \equiv Y_0Y_-^2(1 - Y_+Y_-)^{-1}, \quad T_4^2 \equiv Y_0^{-1}(1 - Y_+Y_-)^{-1} \quad (42)$$

автоматически переходят в соотношения между дисплеями:

$$R(T_i, Y_j) \equiv 0 \implies R(\text{dpl } T_i, \text{dpl } Y_j) \equiv 0 \implies R(\mathbf{T}_i, \mathbf{Y}_j) \equiv 0.$$

Для проверки соотношений $R(\mathbf{T}_i, \mathbf{Y}_j) \equiv 0$ можно положить $\alpha_1 = \alpha_{-1} = 1$ и применить правило умножения (29) к рядам \mathbf{Z} -символов:

$$\mathbf{T}_1 = 1 + \mathbf{Z}^{+-} + \mathbf{Z}^{+--+} \dots, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{Z}^- + \mathbf{Z}^{-+-} + \mathbf{Z}^{-++-} \dots,$$

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{Z}^+ + \mathbf{Z}^{+-+} + \mathbf{Z}^{+--+} \dots, \quad \mathbf{T}_4 = 1 + \mathbf{Z}^{-+} + \mathbf{Z}^{-++-} \dots,$$

$$\mathbf{Y}_+ = \mathbf{Z}^+ - 2\mathbf{Z}^{+-+} + 4\mathbf{Z}^{+--+} - 12\mathbf{Z}^{++--} + \dots,$$

$$\mathbf{Y}_- = \mathbf{Z}^- - 2\mathbf{Z}^{-+-} + 4\mathbf{Z}^{-++-} - 12\mathbf{Z}^{---+} + \dots,$$

$$\begin{aligned} \log \mathbf{Y}_0 &= (\mathbf{Z}^{+-} - \mathbf{Z}^{-+}) - 2(\mathbf{Z}^{++--} - \mathbf{Z}^{---+}) \\ &\quad + 4(\mathbf{Z}^{+--+} - \mathbf{Z}^{-++-}) - 12(\mathbf{Z}^{++--} - \mathbf{Z}^{---+}) \dots \end{aligned}$$

Сингулярное ОДУ первого порядка. Перейдем к общему ОДУ, формально сопряженному с уравнением $Y' = Y$:

$$Y' = Y + \sum_{0 \leq n} H_n(z)Y^n \quad \left(\sum H_n Y^n \in z^{-1}\mathbb{C}\{z^{-1}, Y\} \right). \quad (44)$$

В полном решении участвуют экспоненты и расходящиеся ряды Y_m :

$$Y(z, u) = Y_0(z) + \sum_{1 \leq m} u^m e^{mz} Y_m(z) \quad (Y_m(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]) \quad (45)$$

Каждый $Y_m(z)$ сам по себе резургентен, а особые точки $\hat{Y}_m(\zeta)$ лежат над $m \in \mathbb{N}$. Здесь мостовое уравнение принимает вид

$$\Delta_n Y(z, u) = \mathbf{A}_n Y(z, u) \text{ с } \mathbf{A}_n = a_n u^{n+1} \partial_u \quad (\forall n \in \{-1\} \cup \mathbb{N}^*), \quad (46)$$

что приводит к отдельным уравнениям резургентности

$$\Delta_n Y_m = (m - n)a_n Y_{m-n} \quad (m \in \mathbb{N}, -1 \leq n \leq m, a_n \in \mathbb{C}). \quad (47)$$

Из специальных уравнений

$$\Delta_{-1} Y_0 = a_{-1} Y_1, \quad \Delta_{-1} Y_1 = 2a_{-1} Y_2, \quad \dots, \quad \Delta_{-1} Y_{m-1} = ma_{-1} Y_m$$

следует, что $(\Delta_{-1})^m Y_0 = m!(a_{-1})^m Y_m$. А это значит, что (при условии, если ключевой коэффициент $a_{-1} \neq 0$) можно конструктивно вывести всю последовательность $Y_1, Y_2, Y_3 \dots$ из знания одного Y_0 , что, конечно, невозможно в случае регулярных ОДУ. Это показывает что сингулярные ОДУ, в отличие от регулярных, обладают замечательной связностью. Они целостны: зная хоть маленькую часть их решения, можно восстановить полное решение.

Для сравнения: если $P(x)$ — неприводимый (приводимый) многочлен над \mathbb{Q} , то из одного корня x_0 можно (нельзя) вывести все остальные!

СИНГУЛЯРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. Результаты, весьма близкие к вышеуказанным, имеются в частности

- (i) для ОДУ порядка $d \geq 2$ с двугранным полигоном Ньютона,
- (ii) для неавтономных дифференциальных систем:

$$Y_j' = \lambda_j Y_j + h_j(z, Y_1, \dots, Y_n) \quad (1 \leq j \leq n), \quad (48)$$

- (iii) для автономных дифференциальных систем («векторных полей»):

$$Y_j' = \lambda_j Y_j + h_j(Y_1, \dots, Y_n) \quad (1 \leq j \leq n) \quad (49)$$

с однократным резонансом $\sum m_j \lambda_j = \lambda_{j_0}$ ($m_j \geq 0$).

§ 5. Трансцендентность. Анализ и синтез

ТЕОРЕМЫ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ И НЕЗАВИСИМОСТИ. Дисплей облегчает доказательство теорем независимости решений $\varphi_i(z) = \sum a_{j,n} z^{-n}$ отдельных ОДУ, т. е. доказательство того факта, что такие φ_i , вообще говоря, не связаны никакими новыми соотношениями. А причина простая: вложение 2-символов в гипотетичное соотношение R накладывает огромное количество новых, очень трудно выполнимых условий:

$$R(\varphi_1, \dots, \varphi_s) = 0 \implies R(\text{dpl } \varphi_1, \dots, \text{dpl } \varphi_s) = \sum_{p,q,\omega_i} R_{p,\omega_1,\dots,\omega_q} \overbrace{z^{-p} \mathbb{Z}^{\omega_1,\dots,\omega_q}}^{p+q=:N} = 0.$$

Действительно, когда $N := p + q \rightarrow \infty$, число соотношений $R_{p,\omega_1,\dots,\omega_q} = 0$ растет как $\mathcal{O}(N^{1+k})$, а число их коэффициентов $a_{j,n}$ растет лишь как $\mathcal{O}(s \cdot N)$, что легко приводит к противоречию.

Анализ в данном контексте есть задача об описании констант Стокса A_ω . Здесь возможны два подхода: вычислительный и теоретический.

Для доминантных констант A_ω (ω на границе круга сходимости), исходя из $\widehat{\Delta}_\omega \widehat{\varphi}(\zeta) := A_\omega \widehat{\varphi}_\omega(\zeta)$, где $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\varphi}_\omega$ хорошо известны, можно эффективно вычислить A_ω с помощью асимптотического анализа коэффициентов $\widehat{\varphi}$. Для недоминантных констант Стокса A_ω надо сначала перенести точку ω в круг сходимости с помощью конформного отображения.

Теперь о теоретическом подходе. Разлагая решение φ в ряд вида

$$\varphi(z) = \left(\sum_r \sum_{\omega_i} \mathbf{W}^{\omega_1,\dots,\omega_r}(z) \mathbf{B}_{\omega_r} \dots \mathbf{B}_{\omega_1} \right) z, \quad (50)$$

выводим отсюда явное выражение для констант Стокса:

$$\mathbf{A}_{\omega_0} = \left(\sum_r \sum_{\omega_1+\dots+\omega_r=\omega_0} \mathbf{W}^{\omega_1,\dots,\omega_r}(z) \mathbf{B}_{\omega_r} \dots \mathbf{B}_{\omega_1} \right) z, \quad (51)$$

где \mathbf{B}_ω — простые дифференциальные операторы, кодирующие коэффициенты Тейлора нашего ОДУ и $\mathbf{W}^{\omega_1,\dots,\omega_r}$ — элементарные резургентные функции с элементарным поведением при Δ -дифференцировании:

$$\Delta_{\omega_0} \mathbf{W}^{\omega_1,\dots,\omega_r}(z) = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{\omega_1+\dots+\omega_j=\omega_0} \mathbf{W}^{\omega_1,\dots,\omega_j} \mathbf{W}^{\omega_{j+1},\dots,\omega_r}(z). \quad (52)$$

Элементарные функции $W^\omega(z)$ называют резургентными одночленами (*resurgence monomials*) а числа W^ω известны как *резургентные константы* (*resurgence monics*). Последние по своему виду походят на гиперлогарифмы.

Синтез есть задача, обратная к «анализу»: для определенного типа сингулярного ОДУ требуется построить путем явных формул наиболее «естественное» или «простое» ОДУ данного вида, обладающее заранее заданным набором констант Стокса: $\{\mathbf{A}_\omega, \omega \in \Omega\} \implies \text{ОДУ}$.

Синтез опирается на резургентные одночлены $U_c^\omega(z)$, отличные от прежних $W_c^\omega(z)$, использованных при анализе. Вот их определение:

$$U_c^{\omega_1, \dots, \omega_r}(z) := \text{SPA} \int_0^\infty \frac{e^{\sum_j \omega_j(z-y_j) + c^2 \sum_j \bar{\omega}_j(z^{-1}-y_j^{-1})} dy_1 \dots dy_r}{(y_r - y_{r-1}) \dots (y_2 - y_1)(y_1 - z)}, \quad (53)$$

где SPA — стандартное усреднение путей интегрирования. Перечислим главные свойства этих новых «одночленов»:

$$U_c^{\omega'} U_c^{\omega''} = \sum_{\omega \in \text{sha}(\omega', \omega'')} U_c^\omega \quad (\text{“shuffle product”}), \quad (54)$$

$$\Delta_{\omega_0} U_c^{\omega_1, \dots, \omega_r} = U_c^{\omega_2, \dots, \omega_r}, \quad \text{если } \omega_0 = \omega_1 \quad (\text{соответственно } = 0, \text{ если } \omega_0 = \omega_1), \quad (55)$$

$$\partial_z U_c^\omega = \sum_{\omega' \cdot \omega'' = \omega} U_c^{\omega'} U_c^{\omega''} = \text{earlier monomials } U_c^{\omega'}. \quad (56)$$

Еще стоит отметить схожесть поведения U_c^ω в антиподах $z = \infty$ и $z = 0$. А теперь к общей схеме синтеза. Для каждого $c > 0$ легко найти (единственное) формальное решение в виде рядов констант Стокса \mathbf{A}_ω с одной стороны и «одночленов» U_c^ω — с другой. Например, для резонансных векторных полей X решение таково: $X = \Theta \partial \Theta^{-1}$, причем

$$\Theta := 1 + \sum (-1)^r U_c^{\omega_1, \dots, \omega_r} \mathbf{A}_{\omega_r} \dots \mathbf{A}_{\omega_1}, \quad (57)$$

$$\Theta^{-1} := 1 + \sum U_c^{\omega_1, \dots, \omega_r} \mathbf{A}_{\omega_1} \dots \mathbf{A}_{\omega_r}. \quad (58)$$

Сходимость этих рядов (что важно) автоматически обеспечена для достаточно больших значений параметра c . Еще следует отметить такое любопытное явление: хотя построенное ОДУ определено вблизи $z = \infty$, в силу «антиподальности» наших U^ω ему соответствует другое ОДУ, определенное вблизи $z = 0$ (его «антиподальная тень»).

§ 6. Мультикритические ОДУ и ускорение

Когда полное решение данного ОДУ является рядом от z^{-1} и разных элементарных блоков $u_i e^{\sigma_{ij} z_j}$, причем $z_1 \prec z_2 \prec \dots \prec z_r$ (например, $z_j \equiv z^{\alpha_j}$ и $0 < \alpha_j \uparrow$), схема суммирования усложняется. Это относится, в частности, к ОДУ с более чем двугранным полигоном Ньютона и к векторным полям с многократным резонансом. Надо проходить поочередно через несколько борелевых плоскостей — ровно столько, сколько есть «критических времен» z_j . Переходы

$\widehat{\varphi}_j(\zeta_j) \rightarrow \widehat{\varphi}_{j+1}(\zeta_{j+1})$ осуществляются путем так называемых интегралов ускорения $\mathcal{C}_{j,j+1}$, но зато в каждой ζ_j -плоскости картина остается прежней: на каждую функцию $\widehat{\varphi}_j(\zeta_j)$ действуют свои Δ -операторы, порождая свои уравнения резургентности со своими константами Стокса \mathbf{A}_ω . Общая схема такая:

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{\varphi}_1(z_1) & \leftarrow & \widetilde{\varphi}(z) & & \varphi(z) & \leftarrow & \varphi_r(z_r) \\ \downarrow \mathcal{B} & & & & & & \mathcal{L} \uparrow \\ \widehat{\varphi}_1(\zeta_1) & \rightarrow & \widehat{\varphi}_2(\zeta_2) & \rightarrow \cdots \rightarrow & \widehat{\varphi}_{r-1}(\zeta_{r-1}) & \rightarrow & \widehat{\varphi}_r(\zeta_r) \\ & & \mathcal{C}_{1,2} & & \mathcal{C}_{2,3} & & \mathcal{C}_{r-1,r} \end{array}$$

§ 7. Заключение

В математике резургентные функции применяются также

- (i) в так называемых разностных уравнениях;
- (ii) в разного рода функциональных уравнениях, например в ОДУ с запаздывающим аргументом;
- (iii) в дискретных динамических системах;
- (iv) в сингулярных возмущениях, т. е. в разложениях по сингулярному параметру ϵ , например в ОДУ типа

$$E(z, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(d-1)}) + \epsilon \varphi^d = 0;$$

- (v) в уравнениях с частными производными (О. Costin) и многих других задачах.

В физике резургентные функции все больше встречаются в разложениях

- (i) по постоянной Планка \hbar , в так называемом квазиклассическом подходе к квантовой механике
- (ii) по постоянной калибровочного взаимодействия α ;
- (iii) и вообще по чуть ли не всем важным «малым» константам физики, ибо по принципу М. Бэрри (Michael Berry): «Когда отличие от нуля некоего малого физического параметра ϵ означает переход от одной классической теории к ее неклассическому обобщению, тогда разложения в степенные ряды по ϵ , как правило, расходятся, что и отражает нетривиальность данного перехода.» (См. недавнюю конференцию о резургентности и теории струн в Женеве (29-06 по 3-07 2014, CERN).) В заключение подчеркнем что

- (i) Δ -операторы порождают новое «исчисление», своеобразное и многогранное, у которого есть как своя «дифференциальная», так и своя «интегральная» стороны;
- (ii) резургентные функции «алгебраизуют» и тем самым упрощают многие аналитические проблемы, особенно при изучении сингулярных ОДУ;
- (iii) они все чаще встречаются в теоретической физике, где частая расходимость отнюдь не «проклятие», а скорее источник новых прозрений.

Укажем несколько ссылок на рассмотренную тему: [1–7] (более полный перечень имеется на сайте автора).

ЛИТЕРАТУРА

1. Costin O. On Borel summation and Stokes phenomena of nonlinear differential systems // Duke Math. J. 1998. V. 93, N 2.

2. *Ecalte J.* Théorie des fonctions résurgents. Paris: Orsay, 1980–1985. Vol. I, II, III.
3. *Ecalte J.* Six lectures on transseries, analysable functions and the constructive proof of Dulac's conjecture // Bifurcations etc. Kluwer, 1993. P. 75–184.
4. *Ecalte J.* Recent advances in the analysis of divergence and singularities // Proc. 2002 Montreal Sem. ODEs & normal forms. Kluwer, 2003. P. 87–187.
5. *Ecalte J.* Twisted resurgence monomials and canonical-spherical synthesis of local objects // Proc. 2002 Edinb. Conf. Asymptotics. Singapore: World Sci. Publ., 2003.
6. *Hoeven J.v.d.* Transseries and real differential algebra. Berlin: Springer, 2006. (Lect. Notes Math.; V. 1888).
7. *Voros A.* The return of the quartic oscillator. The complex WKB method // Ann. Inst. H. Poincaré, A. Phys. Théor. 1983.

Статья поступила 31 августа 2015 г.

Jean Ecalte (Жан Робертович Экаль)

CNRS & Paris 11 Univ., Orsay, France,

Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France

jean.ecalte@math.u-psud.fr, homepage: <http://www.math.u-psud.fr/~ecalle/>

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ
ФУНКЦИОНАЛЫ ПОГРЕШНОСТИ
РЕШЕТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Ц. Ж. Юмова

Аннотация. С помощью функционально-аналитического метода теории кубатур минимизирована норма периодического функционала погрешности и улучшено качество построенных формул для целого семейства элементов анизотропного пространства.

Ключевые слова: решетчатые кубатурные формулы, периодический функционал погрешности, анизотропное пространство Соболева.

Ts. Zh. Yumova. The asymptotical optimal error functionals of lattice cubature formulas.

Abstract: With the using of functional analytical method of the theory cubature were minimized the norm of periodic error functional, the quality of the constructed formulas for the family of elements of anisotropic space had been improved.

Keywords: lattice cubature formulas, periodic error functional, anisotropic Sobolev spaces.

Введение. Постановка и основные результаты теории кубатурных формул принадлежат академику С. Л. Соболеву [1], предложившему функционально-аналитический метод для семейства подынтегральных элементов гильбертова пространства. Опубликованные им работы заложили основы и послужили источником интенсивного развития современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, функционального анализа и вычислительной математики.

При больших численных расчетах возникает трудность в процессе приближенного вычисления многомерных интегралов, поскольку до сих пор не созданы универсальные методы оптимизации кубатурных формул на классах функций и, в этой связи, исследования задач ведутся с точки зрения разных научных направлений. Одним из таких направлений является «функционально-аналитический» подход, связанный с исследованием оценок погрешностей в классах суммируемых функций и линейных нормированных пространствах, включающих в себя интегрируемые функции.

Основные результаты исследования задач оптимизации кубатурных формул на классах функций анизотропных пространств $W_p^m(E_n)$, неодинаковых вдоль разных координатных направлений из-за гладкости функций, рассматривались в работах Ц. Б. Шойнжурова [2, 3], М. Д. Рамазанова [4]. В частности, М. Д. Рамазанов исследовал кубатурные формулы на невесовом пространстве

периодических функций с единичным кубом в качестве основного периода. Однако при таком определении нормы функции возникали определенные трудности при периодическом продолжении функции на единичный куб. Ц. Б. Шойнжуров продолжил функции из рассматриваемой области на все пространство, «избавившись» от ограничений, что позволило к периодической на всем пространстве функции применить преобразование Фурье.

В данной работе для построения решетчатых кубатурных формул, асимптотически оптимальных относительно интегрируемых функций, зависящих от их дифференциальных свойств, в явном виде выделен главный член нормы периодического функционала погрешности с конечным значением показателя суммируемости.

Предварительные сведения и обозначения. Пусть $k = 1, \dots, n$, $h_k > 0$ — шаги решетки, x_k — узлы формулы, C_k — коэффициенты формулы, m_k — гладкость функции вдоль выбранных координатных направлений, $\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $m^* = n / \left(\sum_{k=1}^n m_k^{-1} \right)$, $\bar{h} = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$ — матрица периодов, $\Delta_{\bar{h}} = \{x \in E_n, 0 \leq x_k < h_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ — фундаментальный параллелепипед с длинами ребер h_k , $\Delta_{\bar{h}} = h^n = \det \bar{h} \neq 0$, $\Delta = \{x \in E_n, 0 \leq x_k < 1, k = 1, 2, \dots, n\}$ — фундаментальный единичный куб.

В работе исследуются кубатурные формулы на классах периодических функций анизотропного пространства с матрицей периодов \bar{h} , у которых каждая обобщенная частная производная обладает свойством гладкости, зависящей от координатных направлений. Построенные формулы будут использованы для целого семейства подынтегральных элементов анизотропного пространства $W_p^{\bar{m}}(E_n)$ с естественной нормой

$$\|\varphi\|_{W_p^{\bar{m}}(E_n)} = \left[\int_{E_n} \left(|\varphi(x)|^p + \sum_{k=1}^n |D^{m_k} \varphi(x)|^p \right) dx \right]^{1/p} < \infty.$$

Разность между интегралом и приближающей его линейной комбинацией значений подынтегральной функции рассматривается как результат действия на эту подынтегральную функцию некоторой обобщенной функции, полностью определяемой исходной кубатурной формулой и называемой функционалом погрешности. Кубатурная же сумма, приближающая интеграл, представляет собой с функциональной точки зрения линейную комбинацию дельта-функций $\delta(x)$ Дирака

$$\sum_{k=1}^N C_k \varphi(x^{(k)}) = \left(\sum_{k=1}^N C_k \delta(x - x^{(k)}), \varphi(x) \right).$$

Дельта-функции имеют смысл при воздействии на непрерывные пробные функции, отсюда требование вложения основного пространства в пространство непрерывных функций $W_p^{\bar{m}}(E_n) \subset C(E_n)$, обеспечиваемое условием вложения $p - \sum_{k=1}^n m_k^{-1} > 0$ [5]. Это вложение непрерывно, т. е. функционал погрешности кубатурной формулы не только линеен, но и ограничен на $W_p^{\bar{m}}(E_n)$. Знание численной мажоранты для его нормы в сопряженном пространстве $W_p^{\bar{m}^*}(E_n)$

позволяет получать для произвольной функции из единичной сферы анизотропного пространства гарантированные оценки близости истинного значения интеграла от этой функции к рассматриваемой на ней кубатурной сумме.

Известно [6], что дифференциальные свойства анизотропного пространства не одинаковы по направлениям: оно полное при $1 \leq p \leq \infty$, сепарабельно при $1 \leq p < \infty$ и рефлексивно и равномерно выпукло при $1 < p < \infty$.

Общее представление функционала погрешности и экстремальной функции. При оценке качества той или иной кубатурной формулы предпочтительнее считается та, функционал погрешности которой имеет меньшую норму. Для отыскания нормы функционала погрешности в соответствующем пространстве используется экстремальная функция, которая является обобщенным решением некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. Дифференциальный оператор $L(D) = \sum_{k=0}^n (-1)^{m_k} D^{2m_k}$, входящий в такое уравнение, порождается видом нормы функции в основном пространстве. Доказано (см., например, [3]), что любой финитный линейный функционал $l(x)$ из $W_p^{\overline{m}^*}$ представим в виде

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{E_n} \sum_{k=0}^n (-1)^{m_k} D^{m_k} u * D^{m_k} \varphi dx,$$

где $\varphi \in W_p^{\overline{m}}$, $u \in W_p^{\overline{m}'}$ и выполняется равенство

$$L(D)u = l(x), \quad l \in W_p^{\overline{m}^*}. \quad (1)$$

Известно [7], что фундаментальное решение $\varepsilon_{2\overline{m}}(x)$ оператора $L(D)$ неединственно, оно определяется с точностью до слагаемого $\varepsilon_{2\overline{m}}^0(x)$, являющегося произвольным решением однородного уравнения $L(D)\varepsilon_{2\overline{m}}^0 = 0$. Для того чтобы функция $\varepsilon_{2\overline{m}}(x) \in W_p^{\overline{m}^*}(E_n)$, удовлетворяющая уравнению

$$L(D)\varepsilon_{2\overline{m}}(x) = \delta(x), \quad (2)$$

была фундаментальным решением уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Фурье удовлетворяло уравнению

$$L(2\pi i\xi)F[\varepsilon_{2\overline{m}}(x)] = 1,$$

где

$$L(2\pi i\xi) = \sum_{k=1}^n (-1)^{m_k} (2\pi i\xi_k)^{2m_k} + 1 = 1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \xi_k)^{2m_k}.$$

Фундаментальное решение оператора $L(D)$, в дальнейшем ядро $\varepsilon_{2\overline{m}}(x)$, представляет собой бесконечно дифференцируемую при $x \neq 0$ суммируемую в E_n функцию и имеет вид

$$\varepsilon_{2\overline{m}}(x) = F^{-1} \left(\frac{1}{\sum_{k=0}^n (-1)^{m_k} |2\pi \xi_k|^{2m_k}} \right).$$

Благодаря введению Ц. Б. Шойнжуровым [2] специальной нормы, для которой соответствующий дифференциальный оператор хорошо изучен и описан в

литературе, в частности, в [5], стало возможным применять свойства его фундаментального решения для нахождения экстремальных функций и норм функционалов погрешности кубатурных формул. Ранее в [8] при выполнении условия вложения $1 - p^{-1} \sum_{k=1}^n m_k^{-1} > 0$ были получены общие представления периодического функционала погрешности $\tilde{l}_0(h^{-1}x) = 1 - \Phi_0(h^{-1}x)$:

$$\langle \tilde{l}_0(h^{-1}x), \varphi(x) \rangle_{\Delta_{\bar{h}}} = \int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n (D^{m_k} \varphi_0(h^{-1}x) + h_k^{m_k} C_k^{(0)}) D^{m_k} \varphi(x) dx$$

и соответствующей ей экстремальной функции

$$\varphi_0(h^{-1}x) = h^{m^* p'} \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2\pi i h^{-1} \gamma (x-y)}}{|2\pi \gamma|^{2m^*}} C_\gamma, \quad (3)$$

$$C_\gamma = \int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n (-1)^{m_k} \left| C_k^{(0)} \sum_{\beta \neq 0} \frac{D^{m_k} e^{-2\pi i h^{-1} \beta y}}{1 + \sum_{j=1}^n (2\pi i h^{-1} \beta_j)^{2m_j}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right|^{\frac{1}{p-1}} \times \operatorname{sgn} \left(C_k^{(0)} \sum_{\beta \neq 0} \frac{D^{m_k} e^{-2\pi i h^{-1} \beta y}}{1 + \sum_{j=1}^n (2\pi i h^{-1} \beta_j)^{2m_j}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right) dy,$$

где $C_k^{(0)}$ — решение системы уравнений

$$\int_{\Delta} \sum_{k=1}^n \left| \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{\sum_{j=0}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} + C_k^{(0)} \right|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} \left(\frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{\sum_{j=0}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} + C_k^{(0)} \right) dx = 0. \quad (4)$$

Аналогичный использованному в [2] прием с применением свойств фундаментального решения $\varepsilon_{2\bar{m}}(x)$ позволил найти норму периодического функционала погрешностей кубатурных формул:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\|_{\tilde{W}_p^{\bar{m}^*}(\Delta_{\bar{h}})} \\ &= \left(\int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(2\pi i h_k^{-1} \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i h_k^{-1} \beta_k x_k}}{1 + \sum_{j=1}^n (2\pi i h^{-1} \beta_j)^{2m_j}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right|^{p'} dx \right)^{1/p'}. \quad (5) \end{aligned}$$

Асимптотическое выражение нормы оптимального функционала погрешности. В пространстве периодических функций выделим главный член нормы функционала погрешности (5), не зависящий от $\bar{h} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}$ при стремлении последнего к нулю.

Возникшая трудность [4], характерная для анизотропного пространства, когда дифференциальные свойства функции неодинаковы по выбранным направлениям и все функции должны быть периодически продолженными с одним и тем же основным периодом, требовала, чтобы норма не возрастала при вычитании из функции ее нулевого коэффициента в соответствующих рядах. Для

разрешения упомянутой проблемы в [8] получен критерий асимптотической оптимальности кубатурной формулы по коэффициентам, а именно, порядок сходимости должен согласовываться с шагом решетки и гладкостью функции по координатным направлениям системой соотношений

$$h_1^{m_1} = h_2^{m_2} = \dots = h_n^{m_n} = h^{m^*}. \quad (6)$$

Это позволит установить порядковую оптимальность на всем классе решетчатых кубатурных формул в анизотропном пространстве и найти из (6) зависимость шага решетки от гладкости функции по выбранному направлению, определенную равенством

$$h_k = h^{m^*/m_k}, \quad N_k = N^{m^*/m_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая требования согласованности порядка сходимости с шагом решетки и гладкостью функции по координатным направлениям из условия (6), преобразуем интеграл в правой части (5):

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i h_k \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i h_k \beta_k x_k}}{\sum_{j=0}^n (2\pi i h_k \beta_j)^{2m_j}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right|^{p'} dx \\ &= h^{m^* p'} h^n \int_{\Delta} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{\sum_{j=0}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} + C_k^{(0)} \right|^{p'} dx. \quad (7) \end{aligned}$$

Равенство

$$(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x} = h^{m^*} e^{-2\pi i \beta_k x}$$

имеет место при нулевом значении параметра k , и тогда интеграл (7) переписывается в виде

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Delta} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{h^{m^*} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{h^{2m^*} + \sum_{j=1}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} \right|^{p'} dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{h^{2m^*} + \sum_{j=1}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} + C_k^{(0)} \right|^{p'} dx. \end{aligned}$$

Теорема. Если в пространстве $\widetilde{W}_p^{\overline{m}}(\Delta_{\bar{h}})$ выполнены условия (2), (3),

$$\tilde{l}_0(h^{-1}x) \in \widetilde{W}_p^{\overline{m}}(\Delta_{\bar{h}}), \quad 1 - p^{-1} \sum_{k=1}^n m_k^{-1} > 0, \quad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

h_k — шаг решетки, норма функционала $\tilde{l}_0(h^{-1}x)$ определяется равенством (5), где параметры $C_k^{(0)}$ — решения системы уравнений (4), то норма оптимального периодического функционала погрешности при $\bar{h} \rightarrow 0$ имеет асимптотическое выражение

$$\begin{aligned} &\|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\|_{\widetilde{W}_p^{\overline{m}}(\Delta_{\bar{h}})} \\ &= h^{m^* + n + \frac{n}{p'}} \left(\int_{\Delta} \sum_{k=1}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{h^{2m^*} + \sum_{j=1}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} + C_k^{(0)} \right|^{p'} \right)^{1/p'} (1 + O(h)). \quad (8) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая условия (6) и полагая в интеграле (5) $h_k^{-1}x_k = y_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, получим

$$\begin{aligned} & \|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\|_{\widetilde{W}_p^m(\Delta_{\bar{h}})} \\ &= \left(\int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i h_k^{-1} \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i h_k^{-1} \beta_k x_k}}{\sum_{j=0}^n (2\pi i h_j^{-1} \beta_j)^{2m_j}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right|^{p'} dx \right)^{1/p'} \\ &= \left\langle \begin{array}{l} y = h^{-1}x \quad dx = h^n dy \\ x = hy \quad \Delta_{\bar{h}} \rightarrow \Delta \end{array} \right\rangle \\ &= h^n \left(\int_{\Delta} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} h_k^{-m_k} e^{-2\pi i h_k^{-1} \beta_k y_k}}{\sum_{k=0}^n (2\pi i h_k^{-1} \beta_k)^{2m_k}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right) dy \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Преобразуем знаменатель:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (2\pi i h_k^{-1} \beta_k)^{2m_k} &= \sum_{k=0}^n |2\pi h_k^{-1} \beta_k|^{2m_k} = \sum_{k=0}^n |2\pi \beta_k|^{2m_k} h_k^{-2m^*} \\ &= h_k^{-2m^*} \sum_{k=0}^n |2\pi \beta_k|^{2m_k} h_k^{2m^* - 2m_k}. \quad (9) \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |2\pi \beta_k|^{2m_k} h_k^{2m^* - 2m_k} &= h^{2m^*} + |2\pi \beta_1|^{2m_1} h_1^{2m^* - 2m_1} + |2\pi \beta_2|^{2m_2} h_2^{2m^* - 2m_2} \\ &+ \dots + |2\pi \beta_{n-1}|^{2m_{n-1}} h_{n-1}^{2m^* - 2m_{n-1}} + |2\pi \beta_n|^{2m_n} h_n^{2m^* - 2m_n} > |2\pi \beta_k|^{2m^*}. \quad (10) \end{aligned}$$

С учетом (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\| &= h^n \left(\int_{\Delta} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} h_k^{-m_k} e^{-2\pi i \beta_k y_k}}{-h_k^{-2m^*} \sum_{k=0}^n (2\pi i \beta_k)^{2m_k} h_k^{2m^* - 2m_k}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right) dy \right)^{1/p'} \\ &= h^n \left(\int_{\Delta} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} h_k^{2m^* - m_k} e^{-2\pi i \beta_k y_k}}{-\sum_{k=0}^n (2\pi i \beta_k)^{2m_k} h_k^{2m^* - 2m_k}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right) dy \right)^{1/p'} \\ &= h^n \left(\int_{\Delta} \sum_{k=0}^n h_k^{(2m^* - m_k)p'} \left(\sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k y_k}}{-\sum_{k=0}^n (2\pi i \beta_k)^{2m_k} h_k^{2m^* - 2m_k}} + C_k^{(0)} \right) dy \right)^{1/p'} \\ &\leq K h^n \sum_{k=0}^n h_k^{(2m^* - m_k)p'} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k y_k}}{-\sum_{k=0}^n (2\pi i \beta_k)^{2m_k} h_k^{2m^* - 2m_k}} + C_k^{(0)} \right) dy \right)^{1/p'}. \quad (11) \end{aligned}$$

Перепишем цепочку (11):

$$\|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\|^{p'} \leq K h^n \sum_{k=0}^n \int_{\Delta} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \beta_k)^{2m_k}} + C_k \right|^{p'} dy h_k^{(2m^* - m_k)p'}$$

$$\begin{aligned}
&= Kh^n \int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n h^{2m^* p'} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_0)^{m_0} e^{-2\pi i \beta_0 x_0}}{1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \beta_k)^{2m_k}} + C_0 \right|^{p'} dy \\
&+ Kh^n \int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n h^{(2m^* - m_1) p'} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_1)^{m_1} e^{-2\pi i \beta_1 x_1}}{1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \beta_k)^{2m_k}} + C_1 \right|^{p'} dy \\
&+ \dots + Kh^n \int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n h^{(2m^* - m_n) p'} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_n)^{m_n} e^{-2\pi i \beta_n x_n}}{1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \beta_k)^{2m_k}} + C_n \right|^{p'} dy \\
&\leq Kh^n \int_{\Delta} \sum_{k=0}^n h^{m^* p'} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \beta_k)^{2m_k}} + C_k \right|^{p'} dy (1 + K_1 h^{p'}).
\end{aligned}$$

Так как гладкость функций анизотропного пространства неодинаковая по выбранным направлениям с шагом решетки h_k , получаем

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\|^{p'} \\
&\leq Kh^n \int_{\Delta} \sum_{k=0}^n h^{(m^* + n) p'} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \beta_k)^{2m_k}} + C_k \right|^{p'} dy (1 + O(h^{p'})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\| \\
&\leq Kh^{(m^* + n)} h^{\frac{n}{p'}} \left(\int_{\Delta} \sum_{k=1}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x}}{\sum_{j=1}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} + C_k^{(0)} \right| \right)^{1/p'} (1 + O(h)).
\end{aligned}$$

Таким образом, норма (4) при $\bar{h} \rightarrow 0$ имеет асимптотическое выражение (8).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. Шойнжуров Ц. Б. Некоторые вопросы теории кубатурных формул в пространстве $W_p^m(E_n)$ // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: Наука, 1980. С. 302–306.
3. Шойнжуров Ц. Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005.
4. Рамазанов М. Д. Лекции по теории приближенного интегрирования. Уфа: Изд-во Башкир. ун-та, 1973.
5. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
6. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

-
8. Юмова Ц. Ж. Вычисление параметров функционалов погрешностей кубатурных формул. Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ., 2011.

Статья поступила 20 августа 2015 г.

Юмова Цыренханда Жэмбэевна
Восточно-Сибирский гос. университет технологий и управления,
ул. Ключевская, 40в, Улан-Удэ 670013
syum@mail.ru

О ВЛИЯНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ НА СТАБИЛЬНОСТЬ ОБЩЕСТВА

Е. К. Басаева,
Е. С. Каменецкий, З. Х. Хосаева

Аннотация. Рассматривается взаимодействие элиты и трудящихся. Качественный анализ дифференциальных уравнений, описывающих это взаимодействие, показывает возможность существования катастрофы складки, возникающей при изменении числа реальных стационарных точек. Форма складки зависит от коэффициента, характеризующего внутреннюю тенденцию к ослаблению или усилению воздействия.

Ключевые слова: динамическая модель, стационарные точки, катастрофа складки, взаимодействие элиты и трудящихся.

E. K. Basaeva, E. S. Kamenetsky and Z. H. Khosaeva. The influence of nonlinear effects on the stability of society.

Abstract: The article describes the interaction of the elite and working people. Qualitative analysis of differential equations describing the interaction shows the possibility of the fold catastrophe that occurs when changing the number of workable stationary points. Folds form depends on the coefficient characterizing the inner tendency to reduce or increase exposure.

Keywords: dynamic model, stationary points, catastrophe of fold, interaction of elite and working people.

Для описания социальных систем на микроуровне, т. е. на уровне взаимодействия отдельных индивидуумов и/или малых групп, не существует адекватных динамических моделей. В то же время имеются многочисленные попытки применения динамических моделей, основанных на разумных и реалистичных социальных гипотезах, т. е. информации о социальных движущих силах, для анализа взаимодействия больших социальных групп (макроуровень) (см. обзор [1]). В этом случае возникает задача: выделить существенные для конкретного исследования макропараметры и выписать уравнения, определяющие их изменение.

В настоящее время общепризнан нелинейный характер изменения состояния социальных систем. Нелинейные эффекты могут приводить к неустойчивости системы (см., например, [2–6]), поэтому с нелинейными эффектами связывают возникновение социальных кризисов и революционных ситуаций. Один из примеров применения нелинейной модели для описания взаимодействия между правящей группой и враждебной ей социальной группой претендентов на власть приведен в [5]. Система уравнений из [5] при превышении управляющим параметром некоторого порогового значения приводит к резкому скачку уровня враждебности между группами, т. е. возникновению катастрофы складки.

Управляющим параметром является уровень начального недовольства группы претендентов на власть, который связан с ухудшением экономической ситуации, увеличением неравенства, чувством дискриминации у этнических, религиозных, языковых и региональных групп и введением политических санкций. В [5] не приводится количественной оценки коэффициентов модели и влияния вышеперечисленных факторов на управляющий параметр.

В [7] предложена модель коллективных действий, учитывающая влияние эмоций и стереотипов на действия людей в толпе. Эта модель описывает взаимодействие отдельных личностей в группе. Аналогичный подход можно использовать и для описания взаимодействия нескольких социальных групп между собой. Интегральной характеристикой ментального состояния группы будем считать социально-политическую напряженность.

Под *социальной-политической напряженностью* понимаем интегральный феномен, который отражает неудовлетворенность больших масс людей системой социальных, экономических и политических отношений.

Для описания напряженности социальной группы используем дифференциальное уравнение, полученное путем несложных преобразований и предельного перехода из конечно-разностного уравнения в [7]:

$$\frac{dP}{dt} = \gamma[1 - \eta(1 - \beta)]U + \gamma[\eta((U + \beta(1 - 2U)) - 1)]P,$$

где $P \in [0, 1]$ ($P = 0$ соответствует полному отсутствию напряженности, а $P = 1$ — максимально возможной напряженности), U — управляющий параметр, γ — интенсивность восприятия воздействия, η — внутренняя тенденция к ослаблению или усилению воздействия, $\eta \in [0, 1]$, β — склонность к восприятию воздействия, $\beta \in [-1, 1]$.

Если внутренняя тенденция к усилению воздействия отсутствует (т. е. $\eta = 0$), то

$$\frac{dP}{dt} = \gamma(U - P). \quad (1)$$

Таким уравнением может быть описана зависимость напряженности группы от изменения экономической ситуации или другой маловлияющей социальной группы. Заметим, что резкое ухудшение экономической ситуации соответствует $U \rightarrow 1$, а резкое улучшение — $U \rightarrow 0$.

При существенном межгрупповом влиянии, например $\beta = 1$, имеем

$$\frac{dP}{dt} = \gamma[(U - P) + \eta P(1 - U)]. \quad (2)$$

В случае же, когда напряженность социальной группы существенно определяется влиянием другой группы, коэффициент интенсивности восприятия воздействия γ целесообразно считать не константой, а записывать в виде $\gamma = cU/(1 - U)$ [8]. Здесь постоянная $c \in [0, 4]$ определяет ощущаемую степень опасности для данной социальной группы от конфронтации с другой группой.

Рассмотрим изменение напряженности в обществе, состоящем из двух групп — правящей элиты и трудящихся. Предположим, что влияние изменения экономической ситуации и межгруппового взаимодействия аддитивно, а трудящиеся мало влияют на элиту. Обозначим через P_1 напряженность элиты, через

P_2 — напряженность трудящихся. Тогда напряженность элиты будет состоять из двух слагаемых вида (1): $\gamma_{\text{э}1}(U_1 - P_1)$ — влияние экономических факторов, и $\gamma_{12}(P_2 - P_1)$ — влияние трудящихся на элиту, где $U = P_2$. Таким образом,

$$\frac{dP_1}{dt} = \gamma_{\text{э}1}(U_1 - P_1) + \gamma_{12}(P_2 - P_1). \quad (3)$$

Если элита обеспечивает себе максимально благоприятную экономическую ситуацию, т. е. $U_1 = 0$, то

$$\frac{dP_1}{dt} = -\gamma_{\text{э}1}P_1 + \gamma_{12}(P_2 - P_1). \quad (4)$$

Аналогично напряженность трудящихся складывается из слагаемого вида (1), отражающего влияние изменения экономической ситуации на трудящихся, и слагаемого вида (2), характеризующего воздействие элиты на трудящихся. Так как напряженность трудящихся подвержена существенному влиянию элиты, считаем $\gamma_{21} = c_2 P_1 / (1 - P_1)$. Тем самым приходим к уравнению для описания напряженности трудящихся P_2 :

$$\frac{dP_2}{dt} = \gamma_{\text{э}2}(U_2 - P_2) + c_2 \frac{P_1}{1 - P_1} [(P_1 - P_2) + \eta_2 P_2 (1 - P_1)]. \quad (5)$$

Система уравнений (4), (5) совпадает с уравнениями, предложенными в [5], в случае, когда «стоимость коллективных действий пропорциональна квадрату напряженности правящей элиты».

Найдем стационарные точки полученной системы уравнений. Из (4) получаем связь между стационарным значением напряженности элиты (P_1^*) и трудящихся P_2^* :

$$P_1^* = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{\text{э}1} + \gamma_{12}} P_2^*.$$

Подставляя полученное выражение в (5), имеем

$$\begin{aligned} \eta_2 c_2 \left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{\text{э}1} + \gamma_{12}} \right)^2 (P_2^*)^3 + \left(\gamma_{\text{э}2} + \frac{\gamma_{12} \gamma_{\text{э}2}}{\gamma_{\text{э}1} + \gamma_{12}} U_2 \right) P_2^* - \gamma_{\text{э}2} U_2 \\ - \left[\frac{\gamma_{12} \gamma_{\text{э}2}}{\gamma_{\text{э}1} + \gamma_{12}} + c_2 \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{\text{э}1} + \gamma_{12}} \left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{\text{э}1} + \gamma_{12}} - 1 \right) + \eta_2 c_2 \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{\text{э}1} + \gamma_{12}} \right] (P_2^*)^2 = 0. \end{aligned}$$

Полученное кубическое уравнение для P_2^* при $\gamma_{\text{э}1} = 0.1$, $\gamma_{\text{э}2} = 0.1$, $\eta_2 = 0.4$, $c_1 = 0.3$, $\gamma_{12} = 1$ в зависимости от U_2 может иметь как одно, так и три действительных решения (рис. 1). Нижняя и верхняя ветви решения соответствуют устойчивым стационарным точкам, а средняя ветвь неустойчива. Это означает, что при переходе от трех стационарных точек к одной возможно резкое изменение напряженности трудящихся, т. е. при определенном критическом значении управляющего параметра возникает катастрофа складки. При больших значениях управляющего параметра имеется одна стационарная точка с большим значением напряженности трудящихся.

Полученное при заданных значениях констант критическое значение управляющего параметра $U_2 \approx 0.11$ соответствует росту экономики, поэтому нерелевантно. Более того, ни при каких значениях констант не удалось сколько-нибудь

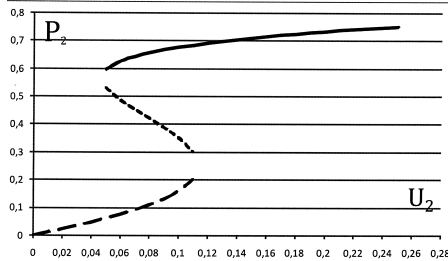


Рис. 1. Изменение напряженности трудящихся при изменении экономической ситуации.

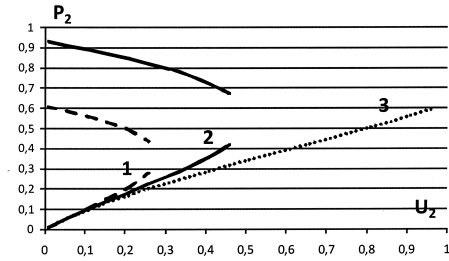


Рис. 2. Изменение напряженности трудящихся при изменении экономической ситуации (кривая 1: $\eta_2 = 0.6$, кривая 2: $\eta_2 = 0.4$, кривая 3: $\eta_2 = 0.2$).

существенно увеличить это критическое значение. Это означает, что модель (4), (5) неудовлетворительна.

Для улучшения модели предположим, что влияние трудящихся на элиту описывается выражением, аналогичным выражению влияния элиты на трудящихся, но с другими константами: $\gamma_{12} = c_1 P_2 / (1 - P_2)$, $\eta_1 = 0$. Первое уравнение системы принимает следующий вид:

$$\frac{dP_1}{dt} = -\gamma_{\varepsilon 1} P_1 + c_1 \frac{P_2}{1 - P_2} (P_2 - P_1). \quad (4')$$

Для стационарных точек системы (4'), (5) получаем алгебраическое уравнение шестой степени.

Константы, входящие в уравнения (4') и (5), определяются сформировавшимися межгрупповыми отношениями и менталитетом и изменяются достаточно медленно (характерное время порядка десятков лет). Исключение составляет параметр η_2 — внутренняя тенденция к ослаблению или усилению воздействия, который под влиянием информационного воздействия может претерпевать более быстрые изменения. Поэтому представляет интерес исследование поведения системы (4'), (5) при различных значениях параметра η_2 .

По модели (4'), (5) проведена серия вычислительных экспериментов. При $\gamma_{\varepsilon 1} = 0.1$, $\gamma_{\varepsilon 2} = 0.1$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.8$ в область $P_2 \in (0, 1)$ в зависимости от значений η_2 попадают либо две ветви решения алгебраического уравнения для определения стационарных точек, либо одна (рис. 2).

Нижняя ветвь устойчива, а верхняя неустойчива. С уменьшением значений η_2 расстояние между ветвями увеличивается и верхняя ветвь уходит за пределы интересующей нас области.

Такое поведение системы соответствует представлениям о возможности дестабилизации общества под действием резкого ухудшения экономической ситуации (рис. 2, кривые 1, 2). Отметим, что при достаточно малых значениях параметра η_2 дестабилизация не наступает вообще (рис. 2, кривая 3). Причиной этого является возникновение обратной связи при больших η_2 . Увеличение напряженности трудящихся приводит к увеличению напряженности элиты, что вызывает дополнительное увеличение напряженности трудящихся.

Отметим, что в теории катастроф обычно неявно предполагается мгновенность перехода из одного состояния в другое, т. е. перескок из одной точки равновесия в другую или на границу области. В действительности для рассматриваемой социальной системы этот процесс занимает определенное время. Поэтому если в течение этого времени произойдет возврат к исходному значению управляющего параметра (что соответствует улучшению экономической ситуации), а система еще не покинет область притяжения устойчивой стационарной точки, то она вернется к устойчивому состоянию.

Ранее считалось [9], что «падение жизненного уровня примерно на порядки означает поражение, революционную ситуацию, смену режима». Но уже в [10] отмечается, что «события последних лет в ряде государств, свидетелями которых мы стали, показывают, что это неверно». Полученные результаты позволяют предложить объяснение неоднозначности воздействия экономических факторов на дестабилизацию общества, т. е. помимо экономического фактора на дестабилизацию влияет также параметр η_2 , зависящий, по-видимому, от доли молодежи в обществе [11], наличия материально обеспеченных и/или образованных людей, не имеющих возможности влиять на процессы управления обществом [12], и информационного воздействия, часто внешнего характера [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Castellano C., Fortunato S., Loretto M.* Statistical physics of social dynamics // *Rev. Modern Phys.* 2009. V. 81, N 2. P. 556–646.
2. *Бородкин Л. И.* Порядок из хаоса: концепции синергетики в методологии исторических исследований // *Новая и новейшая история.* 2003. № 2. С. 98–118.
3. *Балацкий Е. В., Екимов Н. А.* Экономические детерминанты психологического состояния общества // *Мониторинг общественного мнения.* 2008. № 2. С. 18–25.
4. *Francisco R. A.* The relationship between coercion and protest: An empirical evaluation of three coercive states // *J. Conflict Resolution.* 1995. V. 39. P. 263–282.
5. *Karmeshu M., Jain V. P., Mahajan A. K.* A dynamic model of domestic political conflict process // *J. Conflict Resolution.* 1990. V. 34. P. 252–269.
6. *Петухов А. Ю.* Моделирование социальных и политических процессов. Н. Новгород: НГУ, 2015.
7. *Bosse E., Hoogendoorn M., Klein M. C. A., Treur J., van der Wal C. N., van Wissen A.* Modelling collective decision making in groups and crowds: Integrating social contagion and interacting emotions, beliefs and intentions // *Auton. AgentMulti-AgentSyst.* 2013. V. 27. P. 52–74.
8. *Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.* Математическое моделирование социальной напряженности в неоднородном обществе // *Модернизация полиэтничного макрорегиона и сопредельных государств: опыт, проблемы, сценарии развития: мат. Всерос. науч. конф. (г. Ростов-на-Дону, 18–19 сентября 2014 г.) (ред. акад. Г. Г. Матишов).* Ростов н/Д: Изд-во ЮНЦ РАН, 2014. С. 53–58.
9. *Павловский Ю. Н.* Имитационные системы и модели. М.: Знание, 1990.
10. *Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика и прогнозы будущего. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
11. *Коротаев А. В., Зинькина Ю. В.* Социально-экономическое развитие и прогноз структурно-демографических рисков стран Восточной Африки (Кения, Танзания, Уганда) // *Восток, Афро-Азиатские общества и современность.* 2013. № 1. С. 105–118.
12. *Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.* Синергетические процессы в социальных системах // *Информационный бюллетень Ассоциации «История и компьютер».* Петрозаводск: ПетрГУ, 2013. С. 21–26.
13. *Jenings W., Saunders C.* Protest, media agendas and context: a dynamic analysis // *7th Annu. Meeting Comparative Agendas Project (Konstanz, June 14–16, 2014).* Konstanz, 2014.

46 p. <http://www.gpa.uni-konstanz.de/cap2014/>.

Статья поступила 10 сентября 2015 г.

Басаева Елена Казбековна
Южный математический институт
Владикавказского науч. центра РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027;
Северо-Осетинский гос. университет им. К. Л. Хетагурова,
ул. Вагутина, 48, Владикавказ 362025
helen@smath.ru

Каменецкий Евгений Самойлович
Южный математический институт
Владикавказского науч. центра РАН;
Владикавказский научный центр РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
esk@smath.ru

Хосаева Зарина Хетаговна
Владикавказский научный центр РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
hzaiac83@mail.ru

3D-МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СРЕДАХ, ХАРАКТЕРНЫХ ДЛЯ ВУЛКАНИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Б. М. Глинский,
В. Н. Мартынов, А. Ф. Сапетина

Аннотация. Необходимость предсказания катастрофических явлений, которые могут быть вызваны готовящейся вспышкой вулканической деятельности, является актуальной задачей. Для решения этой задачи необходимо проведение комплексных и объективных исследований процессов, происходящих на поверхности и внутри вулканической структуры, в том числе математическое моделирование с целью создания системы вибросейсмического мониторинга. Разработаны параллельные 2D- и 3D-алгоритмы и созданы программы для моделирования распространения упругих волн в сложно построенной 3D-упругой среде (2D-модель есть сечение исходной 3D-модели различными плоскостями и под разными углами). Используется конечно-разностный метод, явные разностные схемы на сдвинутых сетках и метод поглощающих границ CFS-PML. Предложенный численный метод и его параллельная программная реализация эффективно используют архитектуру современного суперкомпьютера на основе графических ускорителей. Проведена серия 3D-расчетов с целью изучения структуры волнового поля, обусловленного геометрией внутренних границ, для уточнения кинематических и динамических характеристик волнового поля с целью возможного создания системы вибросейсмического мониторинга стратовулкана Эльбрус.

Ключевые слова: мониторинг, 3D-моделирование, упругие волны, разностные схемы, гибридный кластер, GPU.

B. M. Glinskiy, V. N. Martynov and A. F. Sapetina. 3D-Modeling of Seismic Wave Fields in a Medium Specific to Volcanic Structures.

Abstract: The need for prediction of catastrophic events that may be caused by the impending outbreak of volcanic activity, is an actual problem. It is necessary for solve this problem to conduct comprehensive and objective investigation of the processes occurring on the surface and inside the volcanic structure, including mathematical modeling to create a system of vibroseis monitoring. 2D and 3D-algorithms are developed and software for simulation of elastic wave propagation in a complicated medium (2D model is separation of original 3D-model using various angles and planes) is created. Explicit finite-difference schemes for the shifted grids and CFS-PML method of absorbing boundaries are used. Proposed numerical method and its parallel realization efficiently uses architecture of modern supercomputer equipped with graphical accelerator. Serial of 3D-estimation is carried out for the structure researching of wave field due to the geometry of the internal boundaries and refinement of its kinematic and dynamic characteristics in order to create the system of vibroseis monitoring of stratovolcano Elbrus.

Keywords: monitoring, 3D-simulation, elastic waves, finite difference schemes, hybrid cluster, GPU.

1. Введение

Современный процесс разработки программного инструментария для проведения численного моделирования становится все более зависимым от архитектуры суперкомпьютера, подчиняя себе не только выбор алгоритмов для решения поставленных задач под вычислительную архитектуру, но и выбор самой постановки. Разные алгоритмы быстрее работают на разных типах вычислительных архитектур и практически всегда требуется некая адаптация выбранного алгоритма под имеющуюся архитектуру, которая может дать большой прирост производительности при решении задачи, что соответственно уменьшает время моделирования. Данная работа опирается именно на такой подход к разработке инструментария для численного моделирования сейсмических волновых полей в 3D-средах, характерных для вулканических структур.

Вулканы, в том числе и спящие, являются потенциальной угрозой внезапного возникновения мощных катастрофических явлений. Возможность предсказать заранее приближающееся извержение позволила бы сохранить жизни людей и их имущество. Для этого необходимо проводить мониторинг состояния вулкана, отслеживать изменения параметров внутренней среды, их вариации, и делать по ним прогноз извержений. Последнее требует предварительного тщательного комплексного исследования процессов, проходящих внутри вулканов и на их поверхности.

Одним из инструментов для проведения такого исследования является активный вибросейсмический мониторинг. Получаемая в его ходе информация сложна для интерпретации и требует проведения предварительного и сопутствующего математического моделирования процессов, происходящих внутри исследуемого геофизического объекта с учетом особенностей его строения. Обычно рельеф исследуемого объекта достаточно сложен и не позволяет расположить на нем площадную систему наблюдения для решения обратной задачи геофизики, поэтому приходится решать прямую задачу, варьируя параметры моделируемой среды так, чтобы результаты численного и натурального экспериментов совпадали.

Кроме того, такой подход позволяет рассмотреть возможные типы строения магматических вулканов и их различные состояния, чтобы выделить основные эффекты, возникающие в данных, фиксируемых системой наблюдения на поверхности вулкана, для облегчения их интерпретации при непосредственном мониторинге.

Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой проведения крупномасштабного численного моделирования процессов, происходящих в вулканических структурах различного строения при вибросейсмическом мониторинге. Решение такой задачи требует использования новейших суперкомпьютерных технологий.

2. Постановка задачи и метод решения

Численное моделирование распространения сейсмических волн в упругих неоднородных средах проводится на основе решения полной системы уравнений

теории упругости с соответствующими начальными и граничными условиями, записанной в терминах вектора скоростей смещений $\vec{u} = (U, V, W)^T$ и тензора напряжений $\vec{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})^T$.

В качестве области моделирования рассматривается изотропная 3D-неоднородная сложно построенная упругая среда, представляющая собой параллелепипед, одна из граней которого является свободной поверхностью (плоскость $z = 0$).

Основные уравнения в векторной форме могут быть представлены в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = [A]\vec{\sigma} + \vec{F}(t, x, y, z), \quad \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} = [B]\vec{u},$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} & \lambda \frac{\partial}{\partial y} & \lambda \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda \frac{\partial}{\partial x} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} & \lambda \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda \frac{\partial}{\partial x} & \lambda \frac{\partial}{\partial y} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial}{\partial y} & \mu \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \mu \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \mu \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \mu \frac{\partial}{\partial z} & \mu \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где t — время, $\rho(x, y, z)$ — плотность, $\lambda(x, y, z)$, $\mu(x, y, z)$ — параметры Ламе. Начальные условия имеют вид

$$\sigma_{xz}|_{t=0} = 0, \quad \sigma_{yz}|_{t=0} = 0, \quad \sigma_{xy}|_{t=0} = 0, \quad \sigma_{xx}|_{t=0} = 0, \quad \sigma_{yy}|_{t=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$U|_{t=0} = 0, \quad V|_{t=0} = 0, \quad W|_{t=0} = 0,$$

а граничные условия на свободной поверхности — вид

$$\sigma_{xz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{yz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0. \quad (3)$$

Для численного решения поставленной задачи (1)–(3) применяется известная конечно-разностная схема Верье [1–3], хорошо себя зарекомендовавшая. Расчет ее сеточных коэффициентов проводится на основе интегральных законов сохранения. Схема имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству [1], в данной работе рассматриваются только равномерные сетки. Для примера представим несколько конечно-разностных уравнений используемой схемы:

$$\frac{\rho_{i,j,k} + \rho_{i-1,j,k}}{2} \frac{u_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{\tau} = \frac{\sigma_{xxi,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{xxi-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{xyi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{xyi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{\sigma_{xzi-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{xzi-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} + f_{xi,j,k}^n,$$

$$\frac{\sigma_{xzi-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{xzi-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\tau} = \mu 1_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n - u_{i-\frac{1}{2},j,k-1}^n}{\Delta z} + \frac{w_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n - w_{i-1,j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right),$$

где

$$\mu 1_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_{i,j,k}} + \frac{1}{\mu_{i-1,j,k}} + \frac{1}{\mu_{i,j,k-1}} + \frac{1}{\mu_{i-1,j,k-1}} \right) \right)^{-1}.$$

Границы области моделирования вызывают ложные отражения внутри нее. Для поглощения этих отражений используется вспомогательный метод CFS-PML [4–6], имеющий ряд преимуществ перед классическим методом PML. Он дает более «качественную» картину волнового поля для данной задачи, более прост в реализации и экономичен с вычислительной точки зрения. Для применения метода каждая из границ моделируемой области — параллелепипеда — за исключением свободной поверхности, располагающейся на верхней грани, окружается поглощающим слоем. Во внутренности волновое поле рассчитывается по первоначальным конечно-разностным уравнениям, а при попадании волны в зону поглощения происходит расчет по новым формулам с демпфирующими параметрами, описывающими подход к созданию поглощающих границ. Выбор значений демпфирующих параметров для численных расчетов в соответствующих поглощающих слоях проводится на основе результатов работы [5].

3. Программный комплекс для проведения численных экспериментов

В данной работе предлагается подход для численного моделирования распространения сейсмических волн в средах, характерных для вулканических структур, в рамках которого требуется разработать комплекс алгоритмов и программ, позволяющих проводить конструирование сеточной модели среды сложной геометрии и необходимые расчеты. При этом предлагается в зависимости от текущей цели и имеющихся ресурсов проводить или 3D-моделирование во всей интересующей области, или 2D-моделирование в сечениях изначальной области, содержащих наиболее интересные характерные особенности волнового поля, или сочетать эти подходы.

Таким образом, предлагаемый программный комплекс должен состоять из следующих частей:

- программа для конструирования сеточных моделей сложно построенных сред с включениями, характерными для магматических вулканов;
- программа численного моделирования распространения упругих волн в 3D-неоднородных упругих средах с криволинейной свободной поверхностью;
- программа численного моделирования распространения упругих волн в 3D-неоднородных упругих средах с прямолинейной свободной поверхностью;
- программа численного моделирования распространения упругих волн в 2D-неоднородных упругих средах с криволинейной свободной поверхностью для заданного сечения рассматриваемой 3D-модели;

— программа численного моделирования распространения упругих волн в 2D-неоднородных упругих средах с прямолинейной свободной поверхностью для заданного сечения рассматриваемой 3D-модели.

На данный момент реализованы части предлагаемого комплекса, позволяющие работать со случаем прямолинейной свободной поверхности. Разработка программ велась с учетом особенностей архитектуры гибридного кластера НКС-30Т+GPU ССКЦ ИВМиМГ СО РАН (<http://www2.sssc.ru>), включающего в себя 40 вычислительных узлов, оснащенных графическими картами NVIDIA Tesla M2090 на архитектуре Fermi. Пиковая производительность 85 Тфлопс.

Для эффективного использования гибридной архитектуры необходима адаптация и оптимизация используемых в ходе моделирования алгоритмов, основанная на знании архитектуры кластера и его составляющих и необходимых программных средств. Подробное описание разработанных программных средств и параллельной реализации, адаптации и оптимизации алгоритмов приведено в [7, 8]. Повторим здесь некоторые основные моменты.

В разработанный комплекс входит построитель моделей среды, который позволяет конструировать на сеточном уровне сложные модели упругих сред на основе идеи Z порядка, описанной в [2, 3]. При параллельном исполнении данные сразу конструируются на тех вычислительных узлах, на которых впоследствии будет проводиться расчет.

Также создана параллельная программа для численного моделирования распространения волн в трехмерных неоднородных упругих средах с прямолинейной свободной поверхностью, реализующая указанные ранее методы (схема Верье и CFS-PML), адаптированные под архитектуру гибридного кластера.

Для распараллеливания данной задачи используется декомпозиция области на слои вдоль направления одной из координатных осей. Каждый слой рассчитывается на отдельном узле, где, в свою очередь, он разбивается еще на подслои вдоль другой координатной оси по числу графических ускорителей на узле. При такой реализации каждая графическая карта рассчитывает свою сеточную область внутри подслоя на каждом временном шаге независимо от других, за исключением точек, находящихся на границе между двумя соседними областями. Эти точки являются общими для каждой из областей, и для продолжения счета необходимо производить обмен информацией об искомых величинах между графическими картами на узле и между соседними узлами в направлении разных координатных осей. Обмены производятся при помощи технологии MPI (Message Passing Interface), работа с графическими ускорителями осуществляется с помощью технологии CUDA (Compute Unified Device Architecture). При этом на каждой графической карте параллельная часть кода выполняется как большое количество нитей. Такой гибридный подход обеспечивает высокую степень параллелизма.

Также в разработанный комплекс входит программа для численного моделирования распространения сейсмических волн в двумерной упругой среде, которая разработана на основе программы для трехмерного случая. Для решения 2D-задачи используется та же разностная схема на сдвинутых сетках и вспомогательный метод CFS-PML в их двумерном варианте.

Для 2D-расчета требуется намного меньше вычислительных ресурсов, в том числе и памяти для хранения всех необходимых данных, поэтому данная реализация использует всего один вычислительный узел гибридного кластера с тремя графическими ускорителями. В итоге разработанная программа позволяет проводить полномасштабные расчеты за приемлемое время, задействовав при этом намного меньшее количество ресурсов по сравнению с 3D-вариантом, который потребует для расчета решения практически все ресурсы гибридного кластера и намного больше времени для вычислений. Для примера, построение модели и реальный расчет волнового поля на узле с тремя графическими ускорителями для соответствующих сеток по времени и пространству (6000×9000 узлов по пространству и 25000 шагов по времени) занимает всего 12 минут.

4. Исследование масштабируемости разработанного ПО

Для анализа производительности разработанного программного обеспечения исследована его сильная и слабая масштабируемость, проведена имитация исполнения программы на большом количестве ядер и сравнение времени работы программы на гибридном кластере с аналогичным временем для программы, исполнявшейся на кластере с классической MPP-архитектурой.

Под сильной масштабируемостью будем понимать уменьшение времени счета одного шага одной и той же задачи при использовании большего числа графических ядер в рамках одной графической карты. Ее исследование позволяет понять, насколько эффективно применяемые алгоритмы используют архитектуру самой графической карты. Под слабой масштабируемостью будем понимать сохранение времени счета одного шага одного и того же объема задачи при одновременном увеличении количества графических карт.

Результаты исследований для программы 3D-моделирования приведены на рис. 1 и 2 в виде графиков. Из графика на рис. 1 видно, что задача хорошо ложится на архитектуру графической карты (получено ускорение около 40 раз при использовании всех ядер GPU по сравнению с одним ядром GPU).

Из графика на рис. 2 видно, что достигнута эффективность около 92% при увеличении количества графических карт до 30 штук. На основе собранных данных о времени вычисления искомых компонент тензора напряжения и вектора скоростей смещения и времени обменов между вычислительными узлами и графическими ускорителями для реализованного программного обеспечения была проведена имитация выполнения алгоритма численного моделирования распространения сейсмических волн в упругой среде с помощью распределенной агентно-ориентированной системы имитационного моделирования AGNES, разработанной в ИВМиМГ.

Пакет AGNES (AGent NETwork Simulator) базируется на Java Agent Development Framework (JADE). JADE — это мощный инструмент для создания мультиагентных систем на JAVA, и он состоит из 3-х частей: среда исполнения агентов; библиотека базовых классов, необходимых для разработки агентной системы; набор утилит, позволяющих наблюдать и администрировать MAS (мультиагентная система). Для моделирования больших вычислений важно,

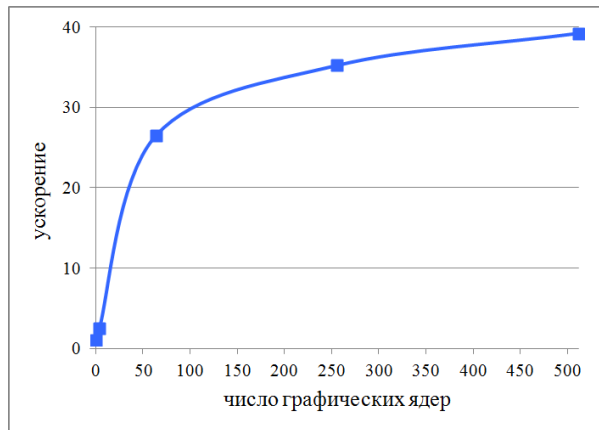


Рис. 1. График исследования сильной масштабируемости.

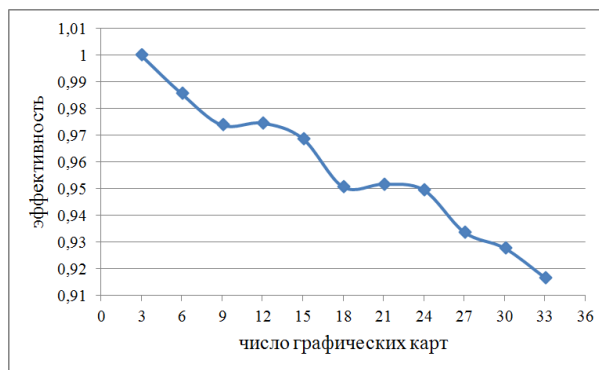


Рис. 2. График исследования слабой масштабируемости.

что JADE — это FIPA-совместимая распределенная агентная платформа, которая может использовать один или несколько компьютеров (узлов сети), на каждом из которых должна работать только одна виртуальная JAVA машина [9]. Данная система позволяет отображать вычислительный алгоритм на гипотетический суперкомпьютер, исследовать его поведение, провести корректировку вычислительной схемы. Примеры применения данного подхода изложены в [10].

Результаты имитации представлены на рис. 3. Начало имитационного процесса сопоставлено с данными реального исследования слабой масштабируемости. Имитация показывает, что при увеличении количества вычислительных ядер до миллиона эффективность работы предлагаемой программы будет равна около 75%. Это говорит о том, что разработанное ПО обладает хорошей масштабируемостью, что позволит использовать его на больших вычислительных комплексах для проведения крупномасштабных исследований.

Проведено сравнение времени, затраченного на численное моделирование 3D-модели с использованием для вычислений узлов с GPU, с аналогичным временем для расчета на классическом кластере с CPU. Для этого используется время полномасштабного расчета, указанное в [2] для сетки размером $1677 \times 1059 \times 971$ по пространству и 10313 шагов по времени. Расчет проведен

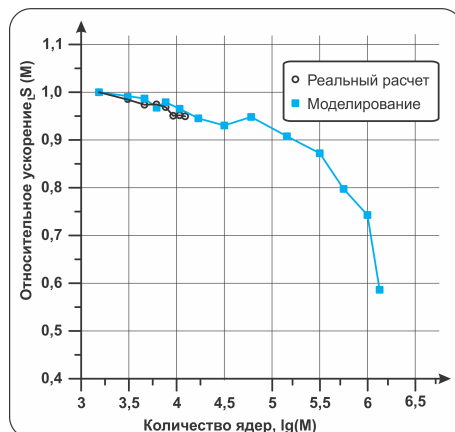


Рис. 3. Зависимость относительного ускорения $SL(M)$ от общего числа моделируемых GPU ядер M (горизонтальная ось — в логарифмическом масштабе)

на 20 вычислительных блэйд-серверах hp ProLiant BL2x220c G5, находящихся в составе НКС-30Т ССКЦ ИВМиМГ СО РАН. Соответствующее время составило 31 час 15 мин. 17 с (задействовано 160 CPU ядер). Аналогичное время расчета с теми же размерами расчетной сетки на 15 узлах гибридного кластера с помощью разработанного программного обеспечения составило 2 час 56 мин. (задействовано 15360 GPU ядер); полученное ускорение составило 10,66 раза.

Таким образом, созданное программное обеспечение, адаптированное под современную гибридную вычислительную архитектуру с графическими ускорителями, используемыми в различных вычислительных центрах России и мира, обладает высокой производительностью.

5. Численные эксперименты

На основании данных, приведенных в [11–15], а также в работах других авторов, построена геофизическая модель стратовулкана Эльбрус. Вулканическая постройка лежит на гранитном блоке +I (рис. 4); эффузивные породы слагают вулканический конус +II; ниже нулевой отметки можно выделить 8 слоев (табл. 1). Зададим верхний магматический очаг в виде эллипсоида с горизонтальными и вертикальными осями 9 и 6 км ($\rho = 2,1 \text{ г/см}^3$, $V_p = 2,2 \text{ км/с}$); диаметр бывшего канала 130 м; зададим материнский магматический очаг: эллипсоид с горизонтальными и вертикальными осями 24 и 13 км ($\rho = 1,8 \text{ г/см}^3$, $V_p = 1,9 \text{ км/с}$), диаметр предполагаемого подпитывающего канала 250 м. Средний канал — цилиндр диаметром 160 м. Итак, в качестве приближенной модели вулкана Эльбрус можно принять многослойную среду с включениями в виде эллипсов цилиндров с параметрами, указанными в табл. 1. Подробное описание геофизической модели можно найти в [8].

Построенная модель была взята за основу для проведения последующих вычислительных экспериментов, результаты которых приведены далее для иллюстрации работоспособности разработанного комплекса программ, а также для

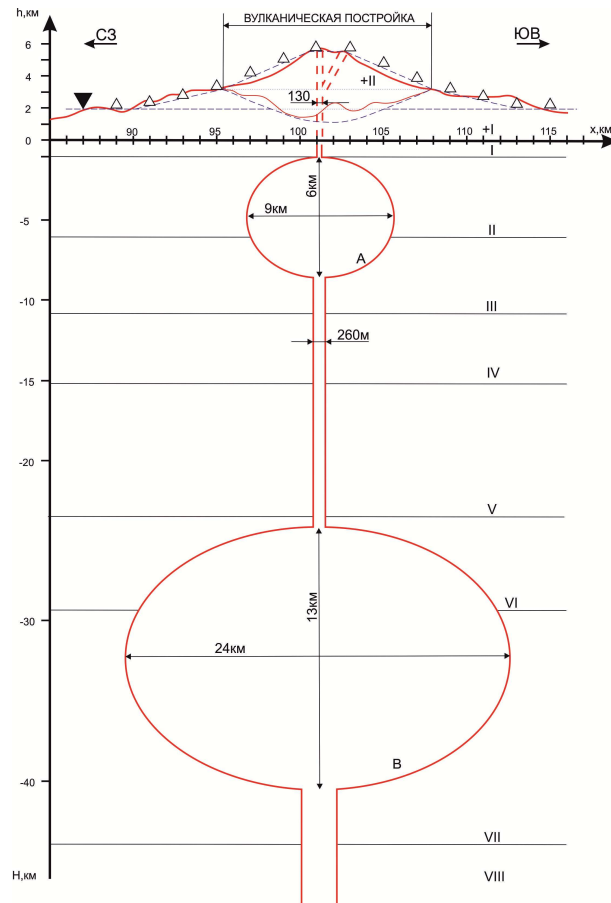


Рис. 4. Геофизическая модель вулкана Эльбрус и схема вибросейсмического мониторинга.

Таблица 1. Параметры среды для геофизической модели вулкана Эльбрус

	V_p , км/с	V_s , км/с	ρ , г/см ³
Слой +II	2,85	1,65	2,4
Слой +I	3,1	1,79	2,66
Слой I	3,2	1,82	2,7
Слой II	5,9	3,42	2,85
Слой III	6,22	3,59	2,62
Слой IV	5,82	3,37	2,7
Слой V	5,97	3,45	2,75
Слой VI	6,43	3,72	2,78
Слой VII	6,95	4,03	2,81
Слой VIII	8,1	4,68	2,85

того чтобы продемонстрировать различные возможности применения предложенной технологии суперкомпьютерного моделирования распространения сей-

смических волн в средах характерных для вулканических структур.

Каждый расчет проводился на 11 узлах кластера НКС-30Т+GPU, оснащенных графическими картами. Для моделирования процесса на 12000 шагов по времени тратится в среднем чуть больше полутора часов.

Результаты 3D-численного моделирования содержат большой объем информации. В связи с этим для представления и анализа результатов численного моделирования мы используем теоретические сейсмограммы и мгновенные снимки различных сечений 3D-волнового поля плоскостями, проходящими через линии возможной системы наблюдений.

Система возбуждения для всех расчетов состоит из точечного источника типа «центр давления» с частотой 8 Гц, располагающегося вблизи свободной поверхности в левой части расчетной области в одной плоскости с осью симметрии магматических каналов и камер.

Для первого расчета в качестве среды взят фрагмент исходной приближенной модели стратовулкана Эльбрус, включающий в себя только верхнюю магматическую камеру видоизмененной формы и прилегающие к ней каналы, расположенные в пятислойной среде. Параметры среды взяты из табл. 1. Целью расчета было проиллюстрировать возможности построителя сеточных моделей среды, с помощью которого можно сконструировать среду с включениями достаточно сложной формы (например, пересечение нескольких объектов различной природы под различными углами). В данном случае магматическая камера имеет форму двух пересекающихся эллипсоидов.

Результаты расчета приведены на рис. 5 в виде мгновенных снимков волнового поля в плоскости XZ , проходящей через точечный источник и ось симметрии верхнего канала. Визуализация снимков проведена с помощью программы *Aspis*, разработанной в ОАО «Сибнефтегеофизика». На снимках отмечены границы между различающимися по параметрам участками моделируемой среды.

Из рис. 5 видно, что волновое поле имеет сложную структуру и существенно зависит от геометрии, размеров и свойств включений. Для проведения геофизической интерпретации теоретических сейсмограмм, полученных также в ходе расчета такой сложно построенной среды, требуется проведение большой серии вычислительных экспериментов для 3D-модели среды, а также ее характерных 2D-сечений, которые могут быть использованы с этой целью.

В [8] приведено сравнение результатов 3D- и 2D-расчетов для фрагмента предлагаемой приближенной модели стратовулкана Эльбрус. Представленные снимки являются иллюстрацией нашего предположения о том, что 2D-моделирование может быть использовано для возможного построения 3D-моделей среды. Расчет может производиться одновременно для 3D-модели среды и нескольких 2D-сечений для получения необходимой информации об особенностях строения волнового поля для выбранной геофизической модели, системы наблюдения и положения источника. Такой подход значительно ускоряет процесс исследования особенностей волнового поля при моделировании процесса вибросейсмического зондирования вулканической постройки и позволяет провести меньшее количество расчетов для трехмерной задачи, требующих значительно большего числа ресурсов.

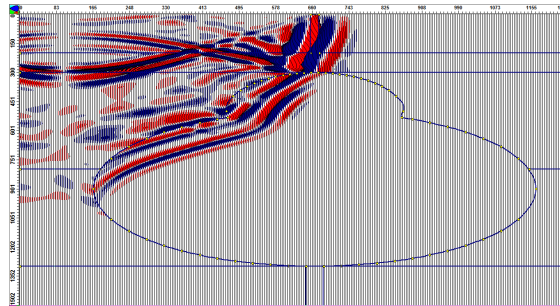
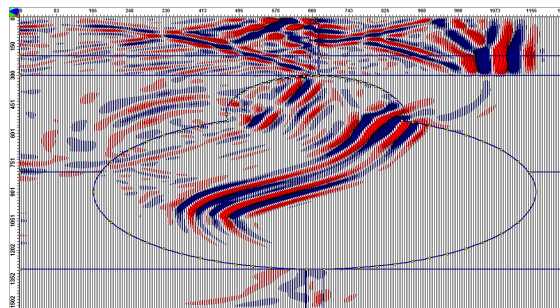
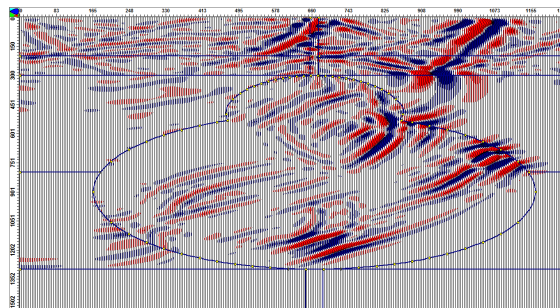
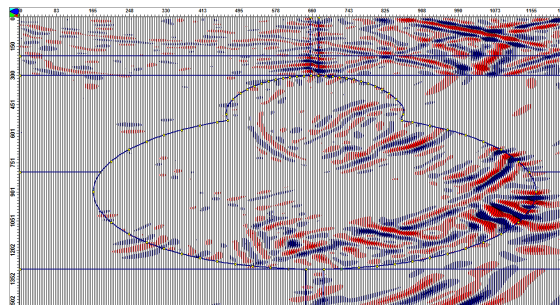
 $T = 1,15 \text{ с}$  $T = 1,84 \text{ с}$  $T = 2,53 \text{ с}$  $T = 3,22 \text{ с}$

Рис. 5. Мгновенные снимки сечения 3D-волнового поля в различные моменты времени для пятислойной среды с включением из двух пересекающихся эллипсоидов (компонента U , плоскость XZ).

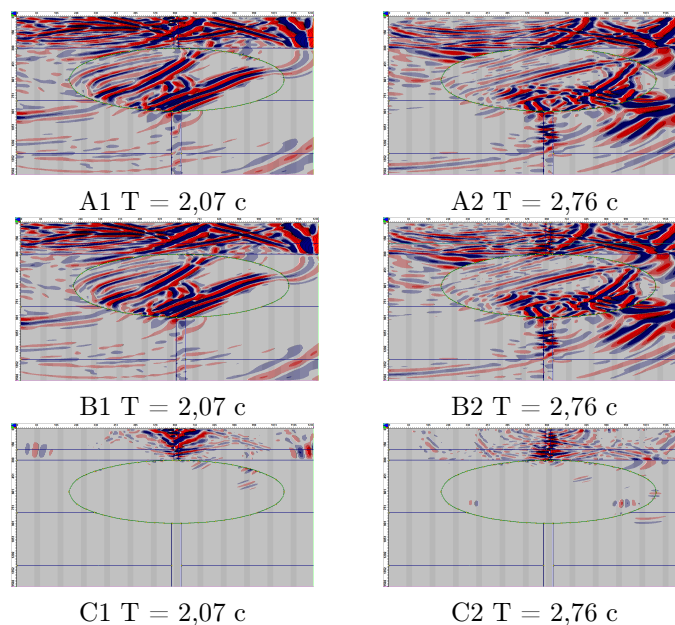


Рис. 6. Мгновенные снимки сечения 3D-волнового поля в различные моменты времени (компонента U , плоскость XZ):
 А — среда без верхнего канала (равновесное состояние вулкана),
 В — среда, содержащая верхний канал, заполненный магмой (момент извержения),
 С — разница между сейсмограммами А и В.

Разработанный комплекс программ создавался с целью проведения исследований процессов, проходящих внутри магматических вулканов и на их поверхности, для осуществления последующего мониторинга извержений. Первым шагом на пути к этой цели могут быть следующие расчеты.

В качестве моделируемой среды для них также взят фрагмент предложенной приближенной модели стратовулкана Эльбрус, включающий в себя только верхнюю магматическую камеру в форме эллипсоида и прилегающий к ней подпитывающий канал, расположенные в пятислойной среде. Разница между этими средами заключается в том, что в одном случае верхний канал заполнен магмой (момент извержения), а во втором случае он сливается с окружающими слоями (равновесное состояние). Параметры среды взяты из описания выше.

Результаты расчетов представлены на рис. 6 в виде мгновенных снимков волнового поля в плоскости XZ , проходящей через точечный источник и ось симметрии верхнего канала. Также добавлены разницы между волновым полем соответствующих снимков. На них наглядно видны эффекты, возникающие в связи с присутствием верхнего канала.

Отметим важность проведения интерпретации теоретических сейсмограмм, получаемых в ходе численного эксперимента, так как в ходе натурных экспериментов исследователи получают данные именно с поверхности, соответственно сопоставление теоретических и натурных данных может быть проведено именно на этом уровне. При этом снимки волнового поля, полученные в ходе расчета,

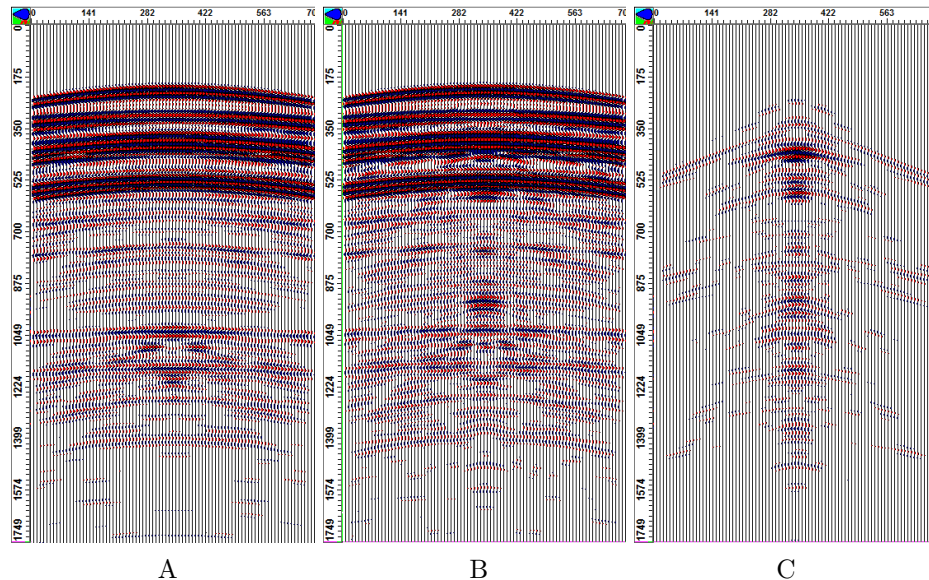


Рис. 7. Теоретические сейсмограммы для компоненты U :

А — среда без верхнего канала (равновесное состояние вулкана),

В — среда, содержащая верхний канал, заполненный магмой (момент извержения),

С — разница между сейсмограммами А и В.

могут служить материалом для объяснения эффектов, возникающих на сейсмограммах.

На рис. 7 приведены теоретические сейсмограммы для проведенных расчетов, а также их разница, на которой видны возникающие различия в общей картине.

Полученные данные сложны для интерпретации. Тщательное изучение теоретических сейсмограмм на основе полученных снимков волнового поля и дополнительных расчетов может выявить признаки, по которым будет осуществляться мониторинг извержений.

Заключение

В работе описана технология решения задачи распространения упругих волн в сложно построенных средах, учитывающая различные по размерности численные методы исследования неоднородной среды и ориентированная на гибридную архитектуру суперкомпьютера, оснащенного графическими ускорителями.

Разработан комплекс параллельных программ с учетом выбранной архитектуры, реализующий распространение упругих волн в 2D- и 3D-моделях в сложно построенных средах, характерных для вулканических структур. Проведено исследование времени работы программного обеспечения, в том числе имитация выполнения программы на большом числе ядер, которое показывает, что созданное ПО обладает высокой производительностью и может эффективно

использовать ресурсы больших вычислительных комплексов.

Различные численные эксперименты для различных вариаций предложенной упрощенной модели вулкана Эльбрус показывают работоспособность созданного комплекса программ и различные возможности его применения для последующих исследований. Во всех экспериментах рассчитанное волновое поле от точечного источника имеет сложную картину и существенно зависит от геометрии, размеров и свойств включений. Интерпретация данных, полученных в ходе численного моделирования для сложно построенных сред с наличием различных включений, обусловленных приближением к реальной модели среды, — непростая задача. Тем не менее представленные эксперименты показывают, что численное моделирование может дать значительную информацию для организации проведения натуральных экспериментов и интерпретации результатов экспериментальных наблюдений, полученных в ходе вибросейсмического мониторинга. Особенности, которые можно выявить из полученных результатов, могут быть использованы при вибросейсмическом мониторинге вулканических структур. Проведение серий подобных расчетов позволяет выбрать модель вулканической структуры, адекватную результатам натуральных наблюдений по кинематическим и динамическим характеристикам.

В дальнейшем предполагается развитие предложенной суперкомпьютерной технологии численных расчетов и последующее проведение численных экспериментов для моделей с криволинейной свободной поверхностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bihn M., Weiland T. A.* Stable discretization scheme for the simulation of elastic waves // Proc. 15th IMACS World Congress Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics (IMACS 1997). 1997. V. 2. P. 75–80.
В 1 надо указать место издания и издательство.
2. *Глинский Б. М., Караваев Д. А., Ковалевский В. В., Мартынов В. Н.* Численное моделирование и экспериментальные исследования грязевого вулкана «Гора Карabetова» вибросейсмическими методами // Вычисл. методы и программирование. 2010. Т. 11. С. 95–104.
3. *Караваев Д. А.* Параллельная реализация метода численного моделирования волновых полей в трехмерных моделях неоднородных сред // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2009. Т. 6, № 1. С. 203–209.
4. *Drossaert F., Giannopoulos A.* Complex frequency shifted convolution PML for FDTD modeling of elastic waves // Wave Motion. 2007. V. 44. P. 593–604.
5. *Komatitsch D., Martin R.* An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation // Geophysics. 2008. V. 73, N 4. P. T51–T61.
6. *Hastings F. D., Schneider J. B., Broschat S. L.* Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 100, N 5. P. 3061–3069.
7. *Сапегина А. Ф.* Численное моделирование распространения сейсмических волн в сложно построенных средах на гибридном кластере // Пробл. прочности и пластичности. 2014. Т. 76, № 4. С. 288–296.
8. *Глинский Б. М., Мартынов В. Н., Сапегина А. Ф.* Технология суперкомпьютерного 3D-моделирования сейсмических волновых полей в сложно построенных средах // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Вычисл. математика и информатика. 2015. Т. 4, № 4. С. 101–116.
9. *Подкорытов Д. И.* Агентно-ориентированная среда моделирования сетевых систем AGNES // Ползунов. вестн. 2014. № 2/1. С. 93–106.
10. *Глинский Б. М., Куликов И. М., Снытников А. В., Черных И. Г., Винс Д. В.* Многоуровневый подход к разработке алгоритмического и программного обеспечения экзафлопсных суперЭВМ // Вычисл. методы и программирование. 2015. Т. 16. С. 543–556.

11. Мясников А. В. Мониторинг состояния магматических структур вулкана Эльбрус по наблюдениям литосферных деформаций баксанским лазерным интерферометром: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2012.
12. Гурбанов А. Г., Газеев В. М., Богатилов О. А. и др. Активный вулкан Эльбрус и этапы его геологической истории // Современные методы геолого-геофизического мониторинга природных процессов на территории Кабардино-Балкарии. 2005. С. 94–119.
13. Авдулов М. В., Короновский Н. В. О геологической природе гравитационной аномалии Эльбруса // Изв. АН СССР. Сер. геол. 1962. № 9. С. 67–74.
14. Авдулов М. В. О геологической природе Эльбрусского гравитационного минимума // Вестн. МГУ. Сер. 4. Геология. 1993. № 3. С. 32–39.
15. Собисевич А. Л. Избранные задачи математической геофизики, вулканологии и геоэкологии. Т. 1. М.: ИФЗ РАН, 2012.

Статья поступила 20 августа 2015 г.

Глинский Борис Михайлович, Мартынов Валерий Николаевич,
Сапегина Анна Федоровна
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
пр. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
vnm@nmsf.sscs.ru

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ СРЕД
СЛОЖНОГО СТРОЕНИЯ И СТРУКТУРЫ
НА СВЕРХДАЛЬНИЕ РАССТОЯНИЯ

А. Г. Фатьянов

Аннотация. Разработан аналитический метод моделирования сейсмических волновых полей для широкого круга геофизических сред (включая упругие, неупругие, анизотропные, анизотропно-неупругие, пористые, случайно-неоднородные и т. п.) на сверхдальние расстояния. Поскольку не используются конечно-разностные аппроксимации, не возникает сеточной дисперсии при расчетах волновых полей для произвольных моделей сред и систем регистраций. Аналитическое представление решения позволяет проводить анализ полного поля по частям, в частности, получать однократные волны. На основе созданного программного модуля расчета волновых полей проведено моделирование сейсмического «звона» на Луне. Проведено сравнение с лучевым методом.

Ключевые слова: математическое моделирование, аналитическое решение, полное волновое поле, однократные волны, упругие, пористые, неупругие, анизотропно-неупругие, случайно-неоднородные среды; лучевой метод.

A. G. Fatyanov. Analytical modeling of wave fields for complex subsurface geometries for super-long distances.

Abstract: We propose an analytical method of modeling seismic wave fields for a wide range of geophysical media: elastic, non-elastic, anisotropic, anisotropic-non-elastic, porous, random-inhomogeneous, etc. for super-remote (far) distances. As finite difference approximations are not used, there is no grid, no dispersion when computing wave fields for arbitrary media models and observation points. The analytical solution representation in the spectral domain makes possible to carry out analysis of a wave field in parts, specifically, to obtain the primary waves. Based on the developed program of computing wave fields, we have carried out the simulation of seismic "ringing" on the Moon. Obtained comparison with ray method.

Keywords: mathematical modeling, analytical solution, full wave field, primary waves, elastic, non-elastic, anisotropic-non-elastic, porous, random-inhomogeneous media; seismic ray method.

Введение

В настоящее время одним из основных инструментов исследования процессов распространения сейсмических волн для различных моделей сред является математическое моделирование. Постоянное совершенствование измерительных инструментов приводит, с одной стороны, к повышению точности экспериментальных данных, с другой — к увеличению пространственно-временных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 14-07-00832, 15-07-06821).

масштабов. Это влечет необходимость разработки новых и совершенствования известных вычислительных методов расчета волновых полей. В работе развит аналитический метод моделирования, позволяющий рассчитывать волновые поля для значительных пространственно-временных масштабов, возникающих при проведении экспериментальных работ.

Важное, а зачастую и определяющее значение для задач интерпретации экспериментальных данных имеет возможность анализа полного волнового поля по частям. В работе развит аналитический алгоритм моделирования волновых полей на сверхдальние расстояния, не имеющий ограничений по точности, моделям сред и базам наблюдения и позволяющий рассчитывать динамику отдельно взятых волн (однократные, волны спутники и т. п.) без ограничений лучевого метода. В результате сравнения с лучевым методом показано, что к известным геометрическим ограничениям лучевого метода добавляются еще и ограничения, связанные с длительностью входного импульса.

Развитый аналитический метод моделирования позволяет рассматривать разнообразные прикладные задачи. В настоящей статье проведено математическое моделирование волнового сейсмического поля для модели упругой Луны, в которой имеется приповерхностная зона малых скоростей (ЗМС) в случае значительных пространственно-временных масштабов (часовые записи экспериментальных данных). Моделирование проведено в рамках 3D плоскостной среды. Лунные сейсмограммы значительно отличаются от сейсмограмм, полученных на Земле. Наиболее характерная особенность лунных сейсмограмм — большая длительность сигнала, превосходящая часовые записи. Результаты моделирования показывают, что при наличии в среде ЗМС возникает сейсмический «звон», что приводит к значительному увеличению длительности записи сейсмического сигнала. Длительность сейсмического «звона» на Луне в первом приближении можно объяснить резонансными явлениями, возникающими в волновом поле при наличии тонкого низкоскоростного слоя (реголита).

Аналитический метод моделирования развит для сред сложного строения и структуры, включая упругие, неупругие, анизотропные, анизотропно-неупругие, пористые, случайно-неоднородные и др. При анализе экспериментальных данных полевых работ в районе вулкана Шуго (Краснодарский край, Россия) была выяснена особенность волнового поля, связанная с появлением ряда резонансов в низкочастотном диапазоне частот. При этом резонанс монотонно смещается в область более низких частот с увеличением расстояния регистрации, что не имеет наглядного физического объяснения. Это явление объяснено разномасштабными эффектами (кусковатостью) в рамках случайно-неоднородной среды.

Аналитический подход позволяет оценивать точность конечно-разностных методов. Сравнение аналитического и сеточного подходов позволило сделать количественные выводы о выборе шагов разностной схемы. Выяснено, что в сеточных методах для проведения «безартефактных» расчетов нужно брать не просто маленький шаг разностной схемы, но он еще должен пропорционально уменьшаться с увеличением пространственно-временных масштабов.

1. Постановка задачи моделирования

Математическая постановка задачи моделирования волновых полей формулируется в декартовой системе координат следующим образом: определить компоненты вектора смещения для неупругой анизотропной среды, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + f_x f(t), \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + f_y f(t), \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + f_z f(t) \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями при $t = 0$

$$u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = u_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} = u_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$$

и граничными данными при $z = 0$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций (а они с компонентами вектора смещения) известными соотношениями, в которых анизотропные коэффициенты c_{ij} по принципу Вольтерра заменяются интегральными операторами C_{ij} , учитывающими влияние упругого последействия:

$$C_{ij}x \equiv c_{ij}x(t) - c_{ij}^1 \int_{-\infty}^t h_{ij}(t - \tau)x(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где c_{ij}^1 — величины, определяющие уровень анизотропного поглощения. Функции последействия (ядра) $h_{ij}(\xi)$ определяют спектральный состав поглощения. Среда (c_{ij}, c_{ij}^1, ρ) предполагается кусочно-постоянной по координате z (глубине). Для замкнутого описания анизотропного поглощения вводятся дополнительные физические параметры поглощения (декременты поглощения квазипродольных и квазипоперечных волн), которые определяются по величинам c_{ij}^1 [1]. Компоненты вектора силы f_x, f_y, f_z описывают сосредоточенные и распределенные источники различного типа.

2. Аналитическое моделирование сейсмических волн

Аналитическое решение для наглядности приведено в случае распространения SH волн, когда источник расположен на свободной поверхности. Ограничимся рассмотрением ставшего классическим случая трансверсально-изотропной среды, когда ось симметрии совпадает с осью Oz . В этом случае задача определения вектора смещения в цилиндрической системе координат сводится к нахождению единственной отличной от нуля компоненты вектора смещения:

$$C_{66} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$C_{66} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} \frac{\delta(r)}{r} f(t), \quad (5)$$

$$u_\varphi|_{t=0} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

На границах разрыва параметров ставятся известные условия сопряжения.

Для построения решения применяются известные преобразования Фурье — Бесселя по переменным (r, t) и в спектральной области (k, ω) получается следующее двухпараметрическое семейство краевых задач в каждом слое:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \nu^2 w, \quad \frac{dw}{dz} \Big|_{z=0} = f(\omega), \quad (7)$$

где $\nu^2 = k^2 - \omega^2 \rho / \left(c_{66} - c_{66}^1 \int_0^T h_{66}(t) e^{-i\omega t} dt \right)$.

Далее в рассмотрение вводятся две неизвестные функции $x(z, k, \omega)$ и $y(z, k, \omega)$ такие, что

$$\frac{dx}{dz} = \alpha(z)x, \quad \frac{dy}{dz} = -\beta(z)y, \quad (8)$$

и x и y удовлетворяют уравнению из (7). Тогда α и β определяются из уравнения Риккати:

$$\frac{d\alpha}{dz} + \alpha^2 = \nu^2, \quad \frac{d\beta}{dz} - \beta^2 = -\nu^2. \quad (9)$$

Предположим, что среда состоит из N слоев. Тогда в полупространстве имеем

$$\alpha = \beta|_{z>h_N} = \nu_{N+1}. \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что функции x и y линейно независимы [2], откуда $w = x + y$. Из условия причинности поглощения и ограниченности решения следует, что $x \equiv 0$ и $\text{Re}(\nu) > 0$.

Таким образом задача свелась к следующей: найти функцию y из системы уравнений

$$\frac{dy}{dz} = -\beta y, \quad \frac{d\beta}{dz} - \beta^2 = -\nu^2, \quad y|_{z=0} = -\frac{f}{\beta(0)}, \quad (11)$$

$$[\beta]|_{z=h_i} = 0, \quad \beta|_{z \geq h_N} = \nu_{N+1}. \quad (12)$$

Уравнение Риккати допускает аналитическое решение в каждом слое:

$$\beta(z) = \nu_i \frac{\beta_i + \nu_i \text{th}(\nu_i(h_i - z))}{\nu_i + \beta_i \text{th}(\nu_i(h_i - z))}. \quad (13)$$

При увеличении пространственно-временных масштабов при вычислении гиперболического тангенса в (13) происходит «переполнение» (выход за границу числового представления). Поэтому (13) записывается в эквивалентном виде:

$$\beta(z) = \nu_i \frac{\beta_i + \nu_i - (\nu_i - \beta_i) \exp(-2\nu_i(h_i - z))}{\beta_i + \nu_i + (\nu_i - \beta_i) \exp(-2\nu_i(h_i - z))}, \quad (14)$$

где β_i — значение $\beta(z)$ на верхней границе i -го слоя. В итоге исходная краевая задача (7) сведена к двум задачам Коши, при этом одна из них нелинейная, что не приносит никаких трудностей, так как она допускает аналитическое решение (13).

Окончательно алгоритм состоит в следующем. Сначала пересчитывается значение β из полупространства на верхнюю границу слоя с индексом N (в данном случае они совпадают). Далее по (14) находится значение β на нижней границе $(N - 1)$ -го слоя и пересчитывается на верхнюю границу $(N - 1)$ -го слоя. Продолжая этот процесс N раз, определяем значение $\beta(0)$. Из (11) определяем y при $z = 0$ и вместе с ним и w , решая тем самым задачу (7). Знание $\beta(z)$ позволяет аналитически найти w в произвольной точке слоистой среды. После обратного преобразования Фурье — Бесселя определяется решение (4)–(6) для произвольных r, z, t .

Многочисленные экспериментальные наблюдения указывают на наличие поглощения и анизотропии различных типов. В [3] предложены четыре тонкослоистые модели трансверсально-изотропных сред, принадлежащие к различным типам. На рис. 1 приведены сейсмограммы вертикальной компоненты и индикатрисы квазипродольных и квазипоперечных лучевых скоростей для трансверсально-изотропной среды от источника типа «центр давления» с параметрами из [3]. Волновые поля выданы по окружности с шагом 4.5° для упругих (слева) и неупругих сред. Анизотропные декременты поглощения $\Delta_{p\perp}, \Delta_{p\parallel}$ и $\Delta_{s\perp}, \Delta_{s\parallel}$ выбраны равными. Видно, что каждой ветви лучевой индикатрисы в упругом и неупругом случаях соответствует определенная волна в полном поле. При этом, как показали численные эксперименты, угол раствора «петли» в упругом волновом поле квазипоперечных волн на 8° – 10° больше угла раствора петли на лучевых индикатрисах соответствующих волн. Явление это относится к разряду «нелучевых».

Результаты моделирования показали, что введение поглощения не приводит к значительному уменьшению величины раствора «петли» при общем уменьшении «нелучевой» области. Происходит заметное изменение спектров в неупругом случае. Существенно изменяется и форма сейсмического импульса: он интегрируется. Как и в «просто» неупругой среде, происходит существенное перераспределение энергии и изменение спектрального состава квазипродольных и квазипоперечных волн. Вообще, влияние поглощения зависит от величины декремента, частоты и расстояния пройденного волной. Для низких частот и коротких дистанций потери на расхождение превышают потери на поглощение. С увеличением частоты и расстояний потери на поглощение растут и становятся преобладающими. Это относится как к изотропным, так и анизотропным средам. Без учета этого можно получить, например, неправильное определение кинематики.

В [1] подробно исследована волновая картина для четырех типов анизотропии из [3]. Существенным отличием волновой картины в анизотропных неупругих средах от анизотропных упругих является наличие аномальной дисперсии, которая приводит к возрастанию видимых периодов со временем регистрации.

Развитый аналитический метод моделирования позволяет рассматривать разнообразные прикладные задачи. Возможности аналитического метода позволили провести моделирование волнового сейсмического поля для модели упругой Луны, в которой имеется приповерхностная зона малых скоростей (реголит)

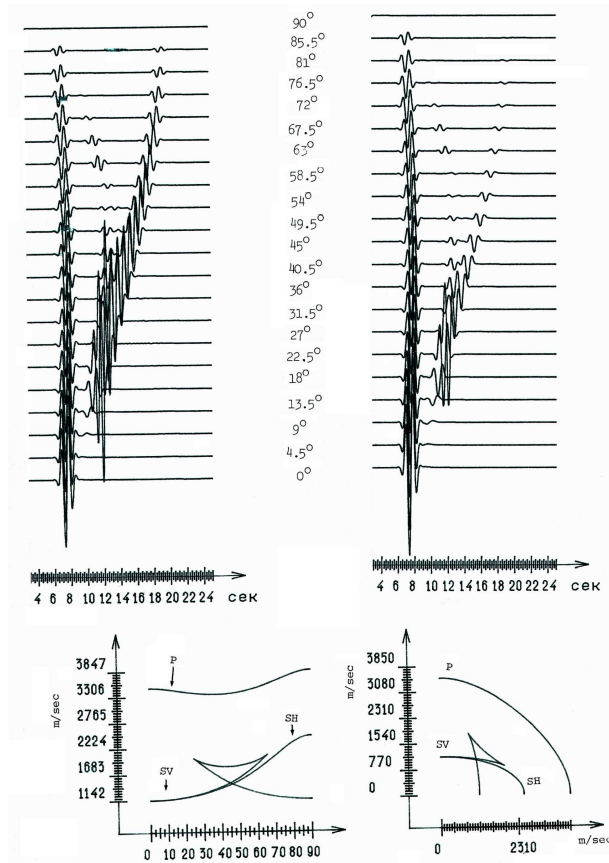


Рис. 1. Вертикальная компонента u_z и поляризационные диаграммы для анизотропной упругой (слева) и неупругой среды.

в случае значительных пространственно-временных масштабов (часовые записи экспериментальных данных). Моделирование проведено в рамках 3D плоско-слоистой среды.

Поскольку слой реголита очень тонкий, особое внимание уделялось точности расчетов. Отметим, что, например, в матричном методе и его модификациях при расчете волновых полей для высоких частот (тонких слоев) происходит потеря точности [4]. Сеточными методами также практически невозможен безартефактный расчет волновых полей в случае наличия тонкого слоя реголита. Моделирование волновых полей в этом случае, особенно на больших расстояниях, требует использования мелкого шага пространственной сетки, что приводит к колоссальному объему вычислительной работы.

На основе метода, развитого в [5, 6], создана компьютерная программа, позволяющая проводить моделирование волновых полей для значительных пространственно-временных масштабов, характерных для лунных экспериментальных данных. Аналитический метод моделирования, который применяется в настоящей статье, был разработан еще в 1990 г. Из-за малой мощности компьютеров тогда моделирование проводилось для пространственно-временных масштабов

порядка 50 длин волн. Здесь же расчеты проведены для десятков тысяч длин волн. Это потребовало модернизации метода. Для возможности проведения расчетов для значительных пространственно-временных масштабов на «обычных» компьютерах алгоритм модифицирован с целью исключения промежуточных массивов большой размерности, которые насчитываются аналитически в процессе расчета. В алгоритм также введена повышенная точность расчетов, проведено дополнительное тестирование и т. п.

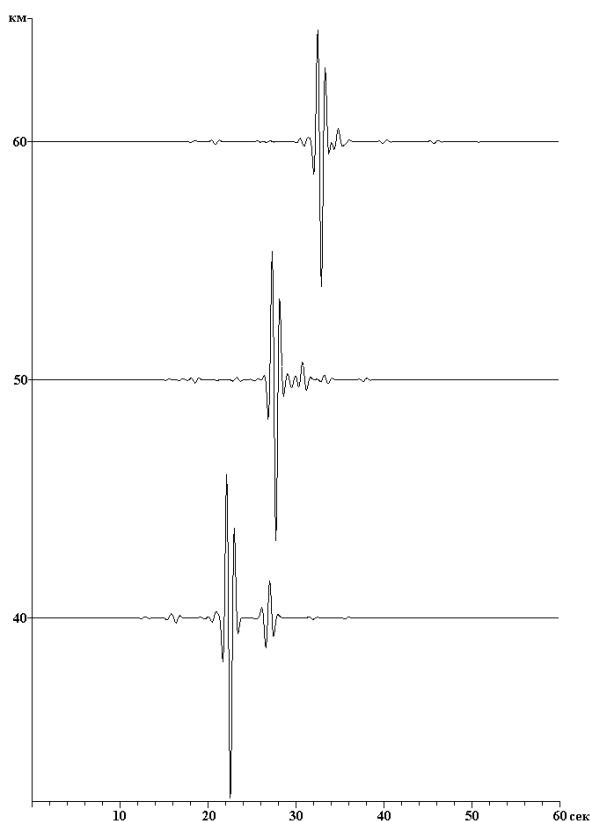


Рис. 2. Расчет минутной записи компоненты u_z для модели Луны без зоны малых скоростей (реголита). Приемники расположены на расстояниях 40, 50 и 60 км от источника.

В итоге, аналитический (не использующий сеток) подход позволил провести моделирование сейсмического «звона» на Луне без использования технологии высокопроизводительных вычислений на «обычных» компьютерах.

Схема численного эксперимента основывается на известных моделях Луны [7, 8]. Первая из используемых моделей — модель приповерхностной части Луны, в которой выделяется несколько маломощных слоев с низкими скоростями. Верхний слой в первой модели — реголит с мощностью в 10 м. Скорость продольных волн в реголите равна 100 м/сек, поперечных — 40 м/сек [7]. Вторая модель — глубинная модель, достигающая центра Луны и сложенная

многокилометровыми высокоскоростными слоями [8]. Используемая в расчетах модель Луны получена объединением данных моделей путем замены первого слоя глубинной модели [8] слоями модели [7]. Ниже приведены результаты моделирования для источника типа нормальной силы, расположенного на дневной поверхности, с доминирующей частотой входного сигнала в 1 Гц. Этот источник в первом приближении соответствует удару метеорита.

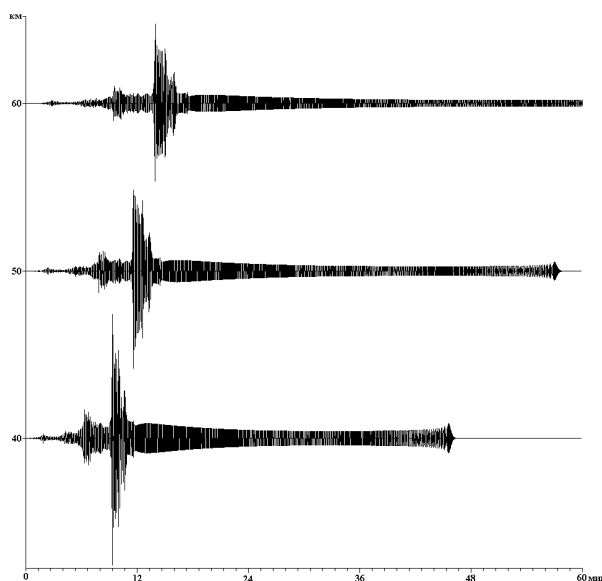


Рис. 3. Расчет часовой записи компоненты u_z для модели Луны с зоной малых скоростей (реголитом). Приемники расположены на расстояниях 40, 50 и 60 км от источника.

Лунные сейсмограммы сильно отличаются от сейсмограмм, полученных на Земле. Наиболее характерная особенность лунных сейсмограмм — значительная длительность сейсмического сигнала, превосходящая часовые записи [7]. В [9] дается объяснение этой особенности лунных сейсмограмм. Предполагается, что «сейсмический звон» возникает за счет высокой степени неоднородности среды, приводящей к интенсивному рассеянию при очень низком поглощении сейсмической энергии в приповерхностном слое. Однако численного моделирования волнового поля в такой рассеивающей среде никем не проводилось.

Из рис. 2 следует, что для модели без реголита в течение одной минуты колебания затухают полностью, «звона» в этом случае нет. На рис. 3 приведен пример расчета для модели Луны с наличием зоны малых скоростей (реголитом). Как видно, «звон» в случае наличия реголита имеет значительную длительность, на больших удалениях превосходящую часовой интервал.

Результаты моделирования показывают существенную зависимость длительности «звона» от наличия тонкого низкоскоростного слоя, состоящего из реголита. Значительная длительность «звона» наблюдается при наличии тонкого реголитового слоя и в модели верхней части глубинного разреза Луны [7],

и в ее общей модели [8]. Если же брать модель Луны без тонкого слоя реголита (рис. 2), то волновое поле имеет длительность меньше минуты, «звона» не наблюдается. Результаты моделирования позволяют сделать следующий вывод. В первом приближении «сейсмический звон» на Луне может быть объяснен резонансными свойствами тонкого слоя без привлечения эффектов рассеяния, обусловленных высокой степенью неоднородности среды.

3. Расчет однократных волн без использования коэффициентов отражения и сравнение с лучевым методом

Существует большое число методов расчета волновых полей в слоистых средах. Все они имеют свою область применимости и могут рассчитывать только полное волновое поле без выделения из него отдельных типов волн. В то же время, в задачах моделирования волновых полей в сложно устроенных средах большое, а зачастую и определяющее значение имеют алгоритмы, позволяющие рассчитывать динамику отдельно взятых волн. В слоисто-неоднородных средах с большим числом слоев единственным методом численного анализа волнового поля по частям является асимптотический лучевой метод. Его применение, однако, имеет известные ограничения. Ниже рассматривается алгоритм расчета однократных и монопольных волн для слоисто-неоднородных сред с произвольным числом слоев на основе специальных разложений точных решений, не имеющий ограничений лучевого метода.

Для наглядности рассмотрим волновое уравнение для P волн. В этом случае решение в спектральной области после преобразований получено на свободной поверхности в следующем явном виде:

$$u(k, \omega) = -\frac{F(\omega)}{\nu_1} [1 - 2p_1 e^{-2\nu_1 h} - 2p_2 e^{-2(\nu_2 + \nu_1)h} (1 - p_1^2) - \dots], \quad (15)$$

где $p_i = (\nu_{i+1} - \nu_i) / (\nu_{i+1} + \nu_i)$.

Выясним физический смысл параметров в (15). Для большей наглядности рассмотрим случай плоских волн. В этом случае $p_i = (c_i - c_{i+1}) / (c_i + c_{i+1})$. Таким образом, (15) есть не что иное, как сферический аналог известного плоского представления однократно-отраженных волн [10].

В [11] развит алгоритм расчета однократных продольных и поперечных волн для упругих и неупругих сред. В [12] проведено сравнение аналитического и лучевого методов.

На рис. 4 приведен пример сравнения аналитического и лучевого методов для однократных продольных (РР) волн для двухслойной модели среды. Масштаб выбран одинаковым. Нормировка производилась по прямой волне. Видны отличия в амплитуде и фазе. При этом отличия есть не только в точке выхода головной волны, как считалось ранее. Отличия наблюдаются и в некоторой области, зависящей от длительности входного импульса. Полученные в [12] результаты показывают, что к известным геометрическим ограничениям лучевого метода добавляются еще и ограничения, связанные с длительностью входного импульса. Чем больше длительность импульса, тем в большей области будет неточно работать лучевой метод.

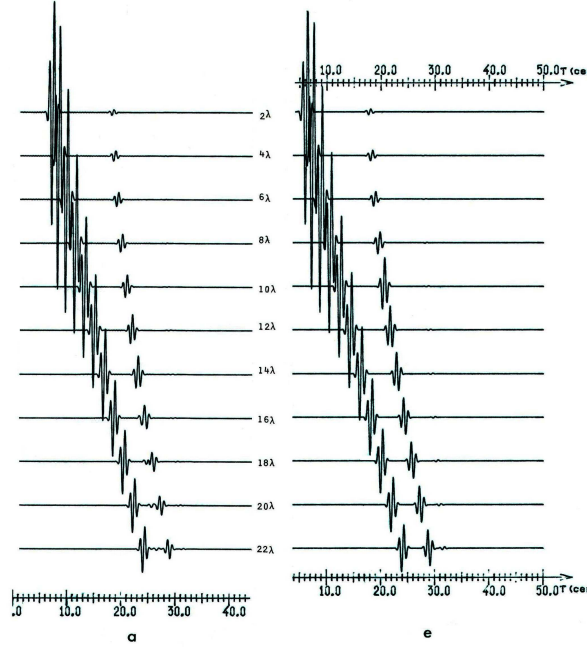


Рис. 4. Сравнение аналитического (а) и лучевого (е) методов для РР волн.

4. Аналитическое моделирование волновых полей в средах сложной структуры

Неоднородная среда часто устроена так, что ее характерные размеры, например, по глубине меняются в широких пределах. Известно [13], что в этом случае практически невозможно рассматривать такую задачу в рамках детерминированного подхода. В любом случае использование детерминированных подходов требует значительно более сложных вычислений. Для построения модели разномасштабной неоднородности используется телеграфный случайный процесс $\xi(z) = a(-1)^{n(0,z)}$ [14], где $n(z_1, z_2)$ — случайная последовательность целых чисел, описывающая количество скачков на интервале (z_1, z_2) . Вероятность выпадения n точек на интервале (z_1, z_2) определяется формулой Пуассона:

$$P_{n(z_1, z_2)=n} = \frac{\langle n(z_1, z_2) \rangle^n}{n!} e^{-\langle n(z_1, z_2) \rangle},$$

где $\langle n(z_1, z_2) \rangle = \nu |z_2 - z_1|$ — среднее значение точек на интервале (z_1, z_2) , а ν — среднее число точек, приходящихся на единицу расстояния. Длина интервала между соседними скачками при этом имеет экспоненциальное распределение.

Построение уравнения для разномасштабной среды иллюстрируется на примере волнового уравнения продольных волн в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (16)$$

После преобразования Фурье — Бесселя уравнение (16) будет выглядеть следу-

ющим известным образом (несущественные индексы опущены):

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = k^2 u - \frac{\omega^2}{c^2} u = \nu_p^2 u. \quad (17)$$

Для рассмотрения разномасштабной среды в (17) используем телеграфный случайный процесс $\xi(z)$:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = k^2 u - \frac{\omega^2}{c^2} [1 + \xi(z)] u \quad (18)$$

Решение уравнения (18) как некий функционал от $\xi(z)$ уже имеет случайный характер. Применительно к практическим приложениям рассмотрим среднее значение флуктуирующего поля $\langle u \rangle$. В [15] получено точное замкнутое уравнение для среднего значения поля:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \langle u \rangle}{dz^4} + 4\nu \frac{d^3 \langle u \rangle}{dz^3} + \left(4\nu^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \nu_p^2 \right) \frac{d^2 \langle u \rangle}{dz^2} \\ - 4\nu \nu_p^2 \frac{d \langle u \rangle}{dz} - \left(\frac{\omega^4}{c^4} a^4 + 4\nu^2 \nu_p^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \nu_p^2 \right) \langle u \rangle = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

Таким образом, вместо «обычного» волнового уравнения второго порядка (17) в случае случайно-неоднородной среды получается уравнение четвертого порядка для среднего значения поля. К уравнению (19) добавляются соответствующие краевые условия для среднего значения поля [16]. В (19) параметр a определяет величину разномасштабности неоднородности, а $r_0 = 1/2\nu$ — характерный размер неоднородности (кусковатости) среды. Отметим, что параметры a и r_0 могут быть произвольными величинами. В [16] разработан аналитический метод расчета разномасштабных волн.

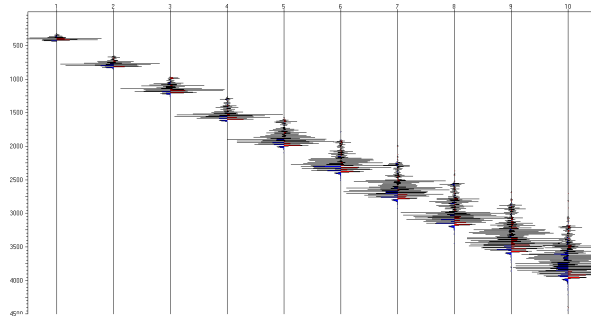


Рис. 5. Волновое поле на дневной поверхности для разномасштабной неоднородной среды. Характерный размер неоднородности $\lambda/16$.

На рис. 5 приведены волновые поля для значительного удаления системы источник-приемник с большой разномасштабностью неоднородности. Выдача производится на свободной поверхности. Характерный размер неоднородности $r_0 = \lambda/16$ (λ — длина волны). Первый приемник расположен на расстоянии 30 λ от источника, последний — 300 λ . Как видно из рис. 5, на малых расстояниях эффекты разномасштабности значительно меньше, чем на больших. С

удалением приемника от источника волновая картина существенно изменяется. Энергия существенно перераспределяется в область низких частот.

При анализе экспериментальных данных полевых работ в районе вулкана Шуго (Краснодарский край, Россия) была выяснена особенность волнового поля, связанная с появлением ряда резонансов в низкочастотном диапазоне частот. При этом резонанс монотонно смещается в область более низких частот с увеличением расстояния регистрации [17], что не имеет наглядного физического объяснения. Это явление может быть просто объяснено разномасштабными эффектами (кусковатостью) среды. Как видно из рис. 5, частота разномасштабной волны монотонно убывает с ростом расстояния. Это полностью объясняет эффект монотонного уменьшения частоты с ростом расстояния, обнаруженный при практических наблюдениях.

Аналитический метод моделирования разработан для широкого круга геофизических сред, включая упругие, неупругие, анизотропные, анизотропно-неупругие, пористые, случайно-неоднородные и т. д. Источники при описании сейсмических, сейсмологических и вибрационных процессов могут быть сосредоточенными и распределенными [18]. Поскольку решение дается аналитическими выражениями, расчеты на сверхдальние расстояния можно проводить на «обычных» компьютерах без использования технологии высокопроизводительных вычислений.

Кроме того, аналитический метод может служить для количественного контроля точности конечно-разностных методов. В [19] проведено сравнение аналитического и сеточного методов. Там выяснено, что в сеточных методах для проведения безартефактных расчетов нужно брать не просто маленький шаг разностной схемы, но он еще должен пропорционально уменьшаться с ростом времени записи (увеличением пространственно-временных масштабов).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фатьянов А. Г. Нестационарные сейсмические волновые поля в неоднородных анизотропных средах с поглощением энергии. Новосибирск, 1989. 44 с. (Препринт/ВЦ; № 857).
2. Фатьянов А. Г., Михайленко Б. Г. Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 4. С. 834–839.
3. Невский М. В. Квазианизотропия скоростей сейсмических волн. М.: Наука, 1974.
4. Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984.
5. Фатьянов А. Г. Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310, № 2. С. 323–327.
6. Фатьянов А. Г. Математическое моделирование волновых полей в средах с криволинейными границами // Докл. АН. 2005. Т. 401, № 4. С. 529–532.
7. Галкин И. Н., Шварев В. В. Строение Луны. М.: Знание, 1977.
8. Nakamura Y., Dorman J., Duennebier F., Lammlein D., Latham G. Shallow lunar structure determined from the passive seismic experiment // Moon. 1975. V. 13. P. 57–66.
9. Latham G., Ewing M., Press F., Sutton G., Dorman J., Nakamura Y., Toksoz N., Wiggins R., Derr J., Duennebier F. Apollo 11 passive seismic experiment // Geochim. Cosmochim. Acta. 1970. V. 34. Suppl. 1. P. 2309–2320.
10. Козлов Е. А. Распознавание и подавление многократных волн в сейсморазведке. М.: Недра, 1982.
11. Fatyanov A. G., Mikhailenko B. G. Numerically-analytical method for calculation of theoretical seismograms in layered-inhomogeneous inelastic media // Geophysical data inversion methods and applications, free. Berlin: Univ. Berlin, 1989. P. 499–530.

12. Алексеева М. В. Математическое моделирование сейсмического поля в многослойной упругой среде (в рамках лучевого метода). Новосибирск, 1987. 60 с. (Препринт/ВЦ; № 729).
13. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983.
14. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001.
15. Шапиро В. Е., Логинов В. М. Динамические системы при случайных воздействиях. Новосибирск: Наука, 1983.
16. Алексеев А. С., Глинский Б. М., Ковалевский В. В., Фатьянов А. Г. и др. Методы решения прямых и обратных задач сейсмологии, электромагнетизма и экспериментальные исследования в проблемах изучения геодинамических процессов в коре и верхней мантии Земли. : Изд-во СО РАН, 2010.
17. Глинский Б. М., Собисевич А. Л., Фатьянов А. Г., Хайретдинов М. С. Математическое моделирование и экспериментальные исследования грязевого вулкана Шуго // Вулканология и сейсмология. 2008. № 5. С. 69–77.
18. Фатьянов А. Г. Прямые и обратные задачи для тензора сейсмического момента в слоистых средах // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 6. С. 1357–1361.
19. Fatyanov A. G., Terekhov A. V. High-performance modeling acoustic and elastic waves using the Parallel Dichotomy Algorithm // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. P. 1992–2003.

Статья поступила 3 сентября 2015 г.

Фатьянов Алексей Геннадьевич
Институт вычислительной математики и математической геофизики,
пр. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
fat@nmsf.ssc.ru

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья может быть представлена в виде файла в формате pdf или распечатки, подготовленной с использованием какой-либо компьютерной системы подготовки математических текстов.

5. В начале статьи указывается индекс УДК. Статья сопровождается краткой аннотацией, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках. Подготовленная с использованием компьютера графика должна быть высококачественной, не ниже 600 DPI, и не использующей шрифты Adobe, отсутствующие в пакете MikTeX.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках.

Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних трех лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в издательстве и в редакции издания в течение пяти лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство образования и науки Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. Если статья принимается к опубликованию после доработки, то автор направляет в редакцию файл ее последней версии. При подготовке файла следует использовать, как правило, макропакет AMS-TEX со стилевым файлом `amsrpt`.

11. Предоставление файлов в форматах TEX или LaTeX возможно только при согласовании с редакцией. Автор не должен использовать необязательные авторские командные последовательности, введенные для облегчения набора. Запрещается переопределять греческие буквы, стандартные команды и т. п.

12. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

13. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

14. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.