

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 22, № 4 (88)

Октябрь—декабрь, 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

<b>Борель Л. В.</b> О разрешимости вырожденных нагруженных систем уравнений .....	<b>3</b>
<b>Кудина Е. С., Медных А. Д.</b> О псевдообъеме гиперболического тетраэдра .....	<b>12</b>
<b>Лавшук Т. М.</b> Правильные многоугольники и многогранники над конечным полем .....	<b>21</b>
<b>Медных А. Д., Соколова Д. Ю.</b> О существовании евклидовой структуры на узле восьмерка с мостом .....	<b>32</b>
<b>Поисеева С. С.</b> Конечные группы с большой степенью неприводимого характера .....	<b>43</b>
<b>Федоров Ф. М., Иванова О. Ф., Павлов Н. Н.</b> Об особенностях бесконечных систем .....	<b>62</b>
<b>Шайхуллина П. А.</b> Формальная классификация типичных ростков полугиперболических отображений .....	<b>79</b>

Математическое моделирование

<b>Ling-De Su</b>	<i>Finite difference method for the inverse problem of the simultaneous determination of the right-hand side and the lowest coefficients in parabolic equations</i>	91
<b>Указатель</b>		99

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

[http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/  
instituty/niim/mzsvfu/](http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/)

e-mail: [prokopevav85@gmail.com](mailto:prokopevav85@gmail.com); [madu@ysu.ru](mailto:madu@ysu.ru);

[ivanegorov51@mail.ru](mailto:ivanegorov51@mail.ru)

УДК 517.9

## О РАЗРЕШИМОСТИ ВЫРОЖДЕННЫХ НАГРУЖЕННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Л. В. Борель

**Аннотация.** Исследуются нагруженные линейные системы дифференциальных уравнений, не разрешимые относительно производной по времени. Рассмотрены случаи систем уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены достаточные условия однозначной разрешимости начально-краевых (или начальных) задач для таких систем уравнений.

**Ключевые слова:** нагруженное уравнение, вырожденное эволюционное уравнение, интегральный оператор, начально-краевая задача, алгебро-дифференциальная система уравнений.

**Borel L. V. On solvability of degenerate loaded systems of equations.**

**Abstract:** Loaded linear systems of differential equations not solvable with respect to the time derivative are studied in the paper. The cases of partial and ordinary differential equations systems are considered. Sufficient conditions for the unique solvability of initial boundary value problems (or initial problems) are obtained for the systems of equations.

**Keywords:** loaded equation, degenerate evolution equation, integral operator, initial boundary value problem, algebraic-differential system of equations.

### Введение

Пусть  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{V}$  — банаховы пространства, оператор  $L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$  линеен и непрерывен (для краткости обозначим  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ ), а оператор  $M : D_M \rightarrow \mathfrak{V}$  линеен, замкнут и плотно определен в  $\mathfrak{U}$  (коротко,  $M \in \mathcal{E}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ ). Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0, \quad (1)$$

для интегродифференциального уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int_0^T \mathcal{K}(t, s)u(s) d\mu(s), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

не разрешимого относительно производной, так как предполагается выполнение условия  $\ker L \neq \{0\}$ . Здесь  $T > 0$ ,  $\mathcal{K} : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ ,  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  —

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

функция ограниченной вариации. Уравнения, содержащие помимо дифференциальной части некоторый функционал от искомой функции (как интеграл Стильеса в уравнении (2)) часто называются *нагруженными* [1–4], они встречаются при поиске приближенных решений дифференциальных уравнений, при исследовании обратных задач для них, при математическом моделировании нелокальных процессов и т. п.

Решением задачи (1), (2) называется функция  $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; D_M)$ , удовлетворяющая уравнению (2) на отрезке  $[0, T]$  и условию (1). В работе [5] получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши (1), а также обобщенной задачи Шоуолтера — Сидорова для вырожденного нагруженного уравнения (2) при условии сильной  $(L, p)$ -радиальности оператора  $M$  [6–8]. Эффективность полученных результатов была продемонстрирована на примерах начально-краевых задач для нагруженных псевдопараболических уравнений. Отметим ряд работ, посвященных вырожденным эволюционным уравнениям не с интегральным оператором Фредгольма, как в (2), а с интегральным оператором Вольтерра — уравнения с памятью [9–11], а также вырожденным эволюционным уравнениям с интегральным оператором запаздывания [12, 13].

Цель данной работы — используя результаты из [5], исследовать некоторые встречающиеся в приложениях нагруженные системы уравнений, не разрешимые относительно производной по времени. В разд. 1 приведено краткое изложение используемых далее определений и теорем из [5, 7]. В разд. 2 получены достаточные условия однозначной разрешимости начально-краевых задач для вырожденной нагруженной системы уравнений в частных производных. В разд. 3 аналогичные исследования проведены для вырожденной нагруженной системы уравнений для функций одной переменной — нагруженной алгебро-дифференциальной системы [14].

### 1. Вырожденные нагруженные уравнения в банаховых пространствах

Приведем используемые в основной части работы определения и теоремы, полученные в [5, 7] (см. также [6, 8]).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &= \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad \overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+, \\ \rho^L(M) &= \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})\}, \\ R_\mu^L(M) &= (\mu L - M)^{-1} L, \quad L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть  $p \in \mathbb{N}_0$ . Оператор  $M$  называется *сильно  $(L, p)$ -радиальным*, если

- (i)  $\exists a \in \mathbb{R} \ (a, +\infty) \subset \rho^L(M)$ ;
- (ii)  $\exists K \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in (a, +\infty) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max \left\{ \|(R_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{B})} \right\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует плотный в  $\mathfrak{Y}$  идеал  $\mathfrak{Y}^\circ$  такой, что

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L_\mu^L(M))^{p+1}f\|_{\mathfrak{Y}} \leq \frac{\text{const}(f)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall f \in \mathfrak{Y}^\circ;$$

$$\|(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{U})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}$$

при любом  $\mu \in (a, +\infty)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эквивалентность условий (ii), (iii) несколько более сложным условиям, используемым в [6–8], показана в [15].

Положим

$$\mathfrak{U}^0 = \ker (R_\mu^L(M))^{p+1}, \quad \mathfrak{Y}^0 = \ker (L_\mu^L(M))^{p+1},$$

$\mathfrak{U}^1$  — замыкание образа оператора  $\text{im} (R_\mu^L(M))^{p+1}$  в пространстве  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{Y}^1$  — замыкание образа  $\text{im} (L_\mu^L(M))^{p+1}$  в пространстве  $\mathfrak{Y}$ . Обозначим через  $L_k$  ( $M_k$ ) сужение оператора  $L$  ( $M$ ) на  $\mathfrak{U}^k$  ( $D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k$ ),  $k = 0, 1$ .

**Теорема 1** [7]. Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален. Тогда

- (i)  $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ ,  $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$ ;
- (ii)  $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{Y}^k)$ ,  $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{Y}^k)$ ,  $k = 0, 1$ ;
- (iii) существуют операторы  $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0; \mathfrak{U}^0)$  и  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{U}^1)$ ;
- (iv) оператор  $H = M_0^{-1}L_0$  нильпотентен степени не больше  $p$ ;
- (v) существует сильно непрерывная разрешающая полугруппа  $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$  ( $\{V(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}) : t \geq 0\}$ ) уравнения  $L\dot{u}(t) = Mu(t)$ . При этом

$$\forall t > 0 \quad U(t) = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k(p+1)}{t} R_{\frac{k(p+1)}{t}}^L(M) \right)^{k(p+1)},$$

$$\forall t \geq 0 \quad \|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq K e^{at}.$$

Проектор вдоль подпространства  $\mathfrak{U}^0$  на  $\mathfrak{U}^1$  (вдоль  $\mathfrak{Y}^0$  на  $\mathfrak{Y}^1$ ) задается формулой

$$P = U(0) = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu R_\mu^L(M))^{p+1} \quad (Q = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_\mu^L(M))^{p+1}).$$

В случае сильно  $(L, p)$ -радиального оператора  $M$ , оператор-функции  $\mathcal{K}$  из класса  $C^{p+1,0}([0, T] \times [0, T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y}))$  (непрерывной и имеющей непрерывные по совокупности переменных частные производные по первому аргументу до порядка  $p+1$ ) и функции ограниченной вариации  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  обозначим при  $T > 0$ ,  $n = 0, 1, \dots, p+1$

$$\frac{\partial^n \mathcal{K}}{\partial t^n} \equiv \mathcal{K}_t^{(n)}, \quad V_0^T(\mu) \max_{t, s \in [0, T]} \|\mathcal{K}_t^{(n)}(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})} \equiv K_n(T),$$

$$V_0^T(\mu) \max_{t, s \in [0, T]} s \|\mathcal{K}_t^{(n)}(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})} \equiv K_{n,1}(T),$$

$$\|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{U})} \equiv C_1, \quad \|H^k M_0^{-1}(I - Q)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{U})} \equiv h_k, \quad k = 0, 1, \dots, p,$$

$$F(T) = \max \left\{ C_1 K(T) \sum_{n=0}^{p+1} K_{n,1}(T) + h_0 \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T), \right. \\ \left. h_1 \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T), \dots, h_p \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T) \right\}.$$

Здесь  $V_0^T(\mu)$  — вариация функции  $\mu$  на отрезке  $[0, T]$ ,

$$K(T) = \max\{K, Ke^{aT}\} = \begin{cases} K, & a \leq 0, \\ Ke^{aT}, & a > 0, \end{cases}$$

$K, a$  — константы из определения сильной  $(L, p)$ -радиальности. В силу теоремы 1(v)  $\|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq K(T)$  при всех  $t \in [0, T]$ .

**Теорема 2** [5]. Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален,  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации,  $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0, T] \times [0, T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{W}))$ ,  $\mathcal{K}_t^{(n)}(0, s) \equiv 0$ ,  $n = 0, 1, \dots, p$ ,  $u_0 \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$ ,  $F(T) < 1$ . Тогда существует единственное решение  $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; D_M)$  задачи (1), (2).

В [5] для уравнения (2) рассмотрена также часто встречающаяся для вырожденных эволюционных уравнений задача с начальным условием Шоултера — Сидорова

$$Pu(0) = u_0. \quad (3)$$

**Теорема 3** [5]. Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален,  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации,  $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0, T] \times [0, T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{W}))$ ,  $u_0 \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$ ,  $F(T) < 1$ . Тогда существует единственное решение  $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; D_M)$  задачи (2), (3).

## 2. Вырожденная нагруженная система уравнений в частных производных

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$z_1(x, 0) = z_{10}(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$z_i(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

для модельной интегродифференциальной системы уравнений

$$z_{1t}(x, t) = \Delta z_1(x, t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T k_{1i}(t, s) z_i(x, s) d\mu(s), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ z_{3t}(x, t) = \Delta z_2(x, t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T k_{2i}(t, s) z_i(x, s) d\mu(s), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (6) \\ 0 = \Delta z_3(x, t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T k_{3i}(t, s) z_i(x, s) d\mu(s), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T].$$

Здесь  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  — ограниченная область с гладкой границей  $\partial\Omega$ , заданы функции  $z_{10} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k_{ji} : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Положим

$$\begin{aligned} H_0^2(\Omega) &= \{v \in H^2(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \\ \mathfrak{U} &= \mathfrak{V} = (L_2(\Omega))^3, \quad D_M = (H_0^2(\Omega))^3, \\ L &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}, \\ \mathcal{K}(t, s) &= \begin{pmatrix} k_{11}(t, s) & k_{12}(t, s) & k_{13}(t, s) \\ k_{21}(t, s) & k_{22}(t, s) & k_{23}(t, s) \\ k_{31}(t, s) & k_{32}(t, s) & k_{33}(t, s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

при  $t, s \in [0, T]$ . Тогда  $u(t) = \text{col}(z_1(\cdot, t), z_2(\cdot, t), z_3(\cdot, t))$ . В [16] показана сильная  $(L, 1)$ -радиальность оператора  $M$  в данной ситуации и найдены подпространства

$$\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{V}^0 = \{0\} \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega), \quad \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{V}^1 = L_2(\Omega) \times \{0\} \times \{0\}.$$

и константы  $a = 0$ ,  $K = 1$ . Поэтому  $K(T) \equiv 1$ ,  $L_1^{-1} = I$ ,  $C_1 = 1$ ,

$$\begin{aligned} M_0^{-1} &= \begin{pmatrix} \Delta^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta^{-1} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & \Delta^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_0^{-1}(I - Q) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^{-1} \end{pmatrix}, \quad HM_0^{-1}(I - Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^{-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ h_k &= \|H^k M_0^{-1}(I - Q)\| = \frac{1}{|\lambda_1|^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \end{aligned}$$

где  $\lambda_1$  — первое, а значит, и наименьшее по модулю собственное значение оператора Лапласа с условием Дирихле на границе,

$$K_n(T) = V_0^T(\mu) \max_{t, s \in [0, T]} \max_{i, j = 1, 2, 3} \left| \frac{\partial^n k_{ij}}{\partial t^n}(t, s) \right|, \quad n = 0, 1, 2,$$

$$K_{n,1}(T) = V_0^T(\mu) \max_{t, s \in [0, T]} \left\{ s \max_{i, j = 1, 2, 3} \left| \frac{\partial^n k_{ij}}{\partial t^n}(t, s) \right| \right\}, \quad n = 0, 1, 2.$$

Отсюда с помощью теоремы 3 сразу получим следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть  $z_{10} \in H_0^2(\Omega)$ ,  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации,  $k_{ij} \in C^{2,0}([0, T] \times [0, T]; \mathbb{R})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,

$$V_0^T(\mu) \max \left\{ \sum_{n=0}^2 K_{n,1}(T) + \frac{1}{|\lambda_1|} \sum_{n=0}^2 K_n(T), \frac{1}{|\lambda_1|^2} \sum_{n=0}^2 K_n(T) \right\} < 1.$$

Тогда существует единственное решение  $z_1, z_2, z_3 \in C^1([0, T]; L_2(\Omega)) \cap C([0, T]; H_0^2(\Omega))$  задачи (4)–(6).

В частном случае получим следующий результат.

**Следствие 1.** Пусть  $z_{10} \in H_0^2(0, \pi)$ ,  $k_{ij} \in C^{2,0}([0, 1] \times [0, 1]; \mathbb{R})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,

$$\sum_{n=0}^2 \max_{t \in [0, 1]} \max_{i, j=1, 2, 3} \left| \frac{\partial^n l_{ij}}{\partial t^n}(t) \right| < 1.$$

Тогда существует единственное решение  $z_1, z_2, z_3 \in C^1([0, 1]; L_2(0, \pi)) \cap C([0, T]; H_0^2(0, \pi))$  задачи

$$\begin{aligned} z_1(x, 0) &= z_{10}(x), \quad x \in (0, \pi), \\ z_i(0, t) &= z_i(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, 2, 3, \\ z_{1t}(x, t) &= \Delta z_1(x, t) + \sum_{i=1}^3 l_{1i}(t) z_i(x, 1), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, 1], \\ z_{3t}(x, t) &= \Delta z_3(x, t) + \sum_{i=1}^3 l_{3i}(t) z_i(x, 1), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, 1], \\ 0 &= \Delta z_3(x, t) + \sum_{i=1}^3 l_{3i}(t) z_i(x, 1), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, 1]. \end{aligned}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Здесь  $H_0^2(0, \pi) = \{v \in L_2(0, \pi) : v(0) = v(\pi) = 0\}$ . Возьмем в предыдущей теореме  $d = 1$ ,  $\Omega = (0, \pi)$ ,  $T = 1$ ,  $\mu \equiv 0$  на  $[0, 1]$ ,  $\mu(1) = 1$ ,  $k_{ij}(t, s) = l_{ij}(t)$  при  $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ . Тогда  $V_0^1(\mu) = 1$ ,  $\lambda_1 = -1$  и по теореме 4 получим требуемое.  $\square$

Результат о разрешимости задачи (5), (6) с начальными условиями Коши

$$z_i(x, 0) = z_{i0}(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

получим аналогичным образом с помощью теоремы 2.

**Теорема 5.** Пусть  $z_{i0} \in H_0^2(\Omega)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации,  $k_{ij} \in C^{2,0}([0, T] \times [0, T]; \mathbb{R})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $k(0, s) \equiv 0$ ,  $\frac{\partial k}{\partial t}(0, s) \equiv 0$  для  $s \in [0, T]$ ,

$$V_0^T(\mu) \max \left\{ \sum_{n=0}^2 K_{n,1}(T) + \frac{1}{|\lambda_1|} \sum_{n=0}^2 K_n(T), \frac{1}{|\lambda_1|^2} \sum_{n=0}^2 K_n(T) \right\} < 1.$$

Тогда существует единственное решение  $z_1, z_2, z_3 \in C^1([0, T]; L_2(\Omega))$  задачи (5)–(7).

### 3. Нагруженная алгебро-дифференциальная система уравнений

Аналогичным образом можно установить достаточные условия разрешимости более простых систем уравнений для функций одной переменной, снабженных начальными условиями. Системы предполагаются алгебро-дифференциальными, т. е. не разрешимыми относительно вектора производных.



Пусть  $B$  и  $C$  — квадратные матрицы порядка  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\text{rang } B = k$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ ,  $K(t, s)$  — квадратная матрица порядка  $d \in \mathbb{N}$ , зависящая от двух параметров  $t, s \in [0, T]$ . Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{8}$$

для алгебро-дифференциальной системы уравнений для функций одной переменной

$$B\dot{u}(t) = Cu(t) + \int_0^T K(t, s)u(s) d\mu(s), \quad t \in [0, T], \tag{9}$$

где  $u(t) = \text{col}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_d(t))$ ,  $u_0 = \text{col}(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{d0})$ ,  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации. Задача (8), (9) совпадает с задачей (1), (2), если положить  $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = \mathbb{R}^d$ , а действие операторов  $L$ ,  $M$  и  $\mathcal{K}(t, s)$  отождествить с действием матриц  $B$ ,  $C$  и  $K(t, s)$  соответственно.

**Лемма 1** [17, с. 122]. Пусть существует такая точка  $\alpha \in \mathbb{C}$ , что  $\det(\alpha B - C) \neq 0$ . Тогда оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален при некотором  $p \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ .

Для данного случая (см. [17, с. 89, 90]) проектор  $P$  может быть вычислен по формуле

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda B - C)^{-1} B d\lambda$$

с помощью теории вычетов. В условиях леммы 1 из теоремы 2 следует, что если начальное значение  $u_0 \in \text{im } P$ ,  $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0, T] \times [0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ ,  $F(T) < 1$ , то существует единственное решение задачи (8), (9).

Рассмотрим для определенности при  $d = 3$  задачу

$$u_i(0) = u_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= u_1(t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T k_{1i}(t, s) u_i(s) d\mu(s), \quad t \in [0, T], \\ \dot{u}_3(t) &= u_2(t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T k_{2i}(t, s) u_i(s) d\mu(s), \quad t \in [0, T], \\ 0 &= u_3(t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T k_{3i}(t, s) u_i(s) d\mu(s), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{11}$$

близкую по форме к задаче (5)–(7). Рассуждая, как в разд. 2, получим

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = I, \quad (\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu-1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\mu \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_\mu^L(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (R_\mu^L(M))^2 = (L_\mu^L(M))^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu-1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(R_\mu^L(M))^2(\mu L - M)^{-1} = M(\mu L - M)^{-1}(L_\mu^L(M))^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu-1)^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому оператор  $I$  сильно  $(L, 1)$ -радиален с константами  $a = 1$ ,  $K = 1$ ,  $K(T) = e^T$ ,  $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{Q}^0 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{Q}^1 = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$ ,  $L_1^{-1} = I$ ,  $C_1 = h_0 = h_1 = 1$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $u_{i0} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации,  $k_{ij} \in C^{2,0}([0, T] \times [0, T]; \mathbb{R})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $k(0, s) \equiv 0$ ,  $\frac{\partial k}{\partial t}(0, s) \equiv 0$  для  $s \in [0, T]$ ,

$$V_0^T(\mu) \sum_{n=0}^2 \max_{t,s \in [0,T]} \max_{i,j=1,2,3} \left| \frac{\partial^n k_{ij}}{\partial t^n}(t, s) \right| < 1.$$

Тогда существует единственное решение  $u_1, u_2, u_3 \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$  задачи (10), (11).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
2. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995.
3. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
4. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853.
5. Федоров В. Е., Борель Л. В. Разрешимость нагруженных линейных эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 3. С. 190–205.
6. Федоров В. Е. Линейные уравнения типа Соболева с относительно  $p$ -радиальными операторами // Докл. АН. 1996. Т. 351, № 3. С. 316–318.
7. Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 173–200.
8. Федоров В. Е. Обобщение теоремы Хилле — Йосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 426–448.
9. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2011. Т. 4, № 1. С. 118–134.
10. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 68–79.
11. Федоров В. Е., Борель Л. В. О разрешимости линейных эволюционных уравнений с эффектами памяти // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2014. Т. 10. С. 106–124.
12. Федоров В. Е., Омельченко Е. А. Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 418–429.
13. Федоров В. Е., Омельченко Е. А. Линейные уравнения соболевского типа с интегральным оператором запаздывания // Изв. вузов. Математика. 2014. № 1. С. 71–81.
14. Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.

15. Федоров В. Е. Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 11. 2009. № 20. С. 12–19.
16. Рузакова О. А., Федоров В. Е. Об  $\varepsilon$ -управляемости линейных уравнений, не разрешенных относительно производной в банаховых пространствах // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 90–102.
17. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

*Статья поступила 1 октября 2015 г.*

Борель Лидия Викторовна  
Челябинский гос. университет,  
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001  
lidiya904@mail.ru

## О ПСЕВДООБЪЕМЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА

Е. С. Кудина, А. Д. Медных

**Аннотация.** Изучаются свойства гиперболического тетраэдра в трехмерном пространстве Лобачевского. Проводится сравнительный анализ двух понятий, характеризующих тетраэдр — это его объем и псевдообъем, определяемый как квадратный корень из модуля определителя матрицы Грама, образованной длинами ребер. В 1877 г. итальянский математик Эрнико д’Овидио предположил, что для гиперболических тетраэдров эти два понятия, с точностью до естественной константы нормирования, совпадают. Позже выяснилось, что это неверно, но, тем не менее, асимптотическое равенство сохраняется для бесконечно малых тетраэдров. Классическая теорема Сервуа утверждает, что объем евклидова тетраэдра равен одной шестой произведения длин скрещивающихся ребер на расстояние и синус угла между ними. Мы покажем, что эта теорема остается справедливой для псевдообъема гиперболического тетраэдра, но перестает быть верной для его неевклидова объема. В качестве следствия будет установлено, что аналогичная ситуация имеет место и для теоремы Штейнера о сохранении евклидова объема тетраэдра при параллельном перемещении его ребер.

**Ключевые слова:** гиперболическое пространство, объем, псевдообъем, теорема Сервуа, теорема Штейнера, матрица Грама.

**E. S. Kudina and A. D. Mednykh. On the pseudo-volume of a hyperbolic tetrahedron**

**Abstract:** The paper is devoted to study of a hyperbolic tetrahedron in the three dimensional Lobachevsky space. The aim is to compare two notions for the hyperbolic tetrahedron: its volume and its pseudo-volume. The latter is defined as the square root of the determinate for Gram matrix formed by the edges. In 1877 Italian mathematician Enrico d’Ovidio suggested that these two notions do coincide. Later it became known that this is not true. In the same time these two volumes are equal for infinitesimal tetrahedra. The classical Servois theorem told that the volume of an Euclidean tetrahedron is one sixth of the product of screw edges times distance and sine of angle between. We show that the theorem is true for the pseudo-volume of a hyperbolic tetrahedron. As a consequence we got a hyperbolic version of the Steiner theorem for the pseudo-volume. We show also that the Steiner theorem for hyperbolic volume is not valid.

**Keywords:** hyperbolic space, volume, pseudo-volume, Servois theorem, Steiner theorem, Gram matrix.

### 1. Введение

Вычисление объема многогранника — это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в наши дни. Во многом

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 16-31-50009 и 15-01-07906).

это связано с тем, что объем трехмерного многообразия является его важным геометрическим инвариантом. В данной работе рассматриваются тетраэдры в гиперболическом пространстве. Сравняются объем и псевдообъем гиперболического тетраэдра в трехмерном пространстве Лобачевского. В 1877 г. итальянским математиком Эрнико д'Овидио выдвинуто предположение о равенстве, с точностью до константы, этих двух понятий. Однако позже было доказано что эти два понятия различны, асимптотическое равенство сохраняется только для бесконечно малых тетраэдров.

Согласно классической теореме Сервуа [1, с. 98], объем евклидова тетраэдра равен одной шестой произведения длин скрещивающихся ребер на расстояние и синус угла между ними. Важным следствием из этого результата является теорема Штейнера [1, с. 99], которая утверждает, что объем евклидова тетраэдра не изменяется при параллельном переносе его стороны вдоль прямой, ее содержащей. В работе для гиперболического тетраэдра приведено доказательство теоремы Сервуа для псевдообъема и построен контрпример, показывающий, что для объемов эта теорема неверна. В качестве следствия из теоремы Сервуа для гиперболических псевдообъемов получена теорема Штейнера для псевдообъема гиперболического тетраэдра.

## 2. Предварительные сведения

Рассмотрим в качестве модели гиперболической геометрии  $\mathbb{H}^3$  верхнее полупространство  $R^3 = \{(x, y, t), x, y, t \in \mathbb{R}, t > 0\}$ , снабженное метрикой  $ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dt^2)/t^2$ . Все необходимые нам формулы неевклидовой геометрии можно найти в [2]. Нам потребуются следующие хорошо известные факты.

**Теорема 2.1.** *Геодезическими в  $\mathbb{H}^3$  является либо полупрямые, либо полукружности, ортогональные плоскости  $xu$ .*

**Теорема 2.2.** *Группа сохраняющих ориентацию изометрий пространства Лобачевского  $\mathbb{H}^3$  совпадает с  $PSL(2, \mathbb{C})$ , состоящей из дробно-линейных преобразований вида  $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ , где  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $a d - b c = 1$ . При этом действие указанных отображений продолжается в  $\mathbb{H}^3$  по формуле Пуанкаре*

$$z + tj \rightarrow [a(z + tj) + b][c(z + tj) + d]^{-1}, \quad (1)$$

где  $j, j^2 = -1$  — единичный кватернион,  $z = x + yi$ , а точка  $z + tj$  отождествляется с точкой  $(x, y, t)$  пространства  $\mathbb{H}^3$ .

**Теорема 2.3.** *Функция расстояния  $\rho$  в пространстве  $\mathbb{H}^3$  удовлетворяет соотношению*

$$\operatorname{ch} \rho(z_1 + t_1 j, z_2 + t_2 j) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2 + |t_1 - t_2|^2}{2t_1 t_2}. \quad (2)$$

**Теорема 2.4.** *Дифференциал объема тетраэдра в гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$  удовлетворяет формуле Шлефли*

$$dV = -\frac{1}{2} \sum_k l_k d\theta_k, \quad (3)$$

где  $l_k$  и  $\theta_k$  — длина  $k$ -го ребра и двугранный угол при этом ребре.

### 3. Основные результаты

Установим следующий предварительный результат.

**Лемма 3.1.** Пусть на расширенной комплексной плоскости заданы четыре попарно различные точки  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . Тогда существует дробно-линейное преобразование, переводящее указанные точки соответственно в точки  $-R, R, -\frac{e^{i\varphi}}{R}, \frac{e^{i\varphi}}{R}$ , где  $R > 0$ , а  $\varphi$  — некоторое вещественное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дробно-линейное отображение

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

и обозначим через  $Q = T(z_4)$  сложное ангармоническое отношение четырех точек  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . Тогда  $T(z)$  отображает точки  $z_1, z_2, z_3, z_4$  в точки  $0, \infty, 1$  и  $Q$  соответственно.

Найдем дробно-линейное отображение  $L$ , переводящее точки  $0, \infty, 1, Q$  в точки  $-k, \frac{1}{k}, k, -\frac{1}{k}$  соответственно, где  $k$  — некоторое комплексное число.

Сравним сложное ангармоническое отношение соответствующих четверок, получим

$$Q = \left( \frac{1}{2} \left( k + \frac{1}{k} \right) \right)^2. \quad (4)$$

Решая полученное уравнение относительно  $k$ , находим один из его корней. Оставшиеся три корня будут равны  $-k, -\frac{1}{k}$  и  $\frac{1}{k}$ . Непосредственно убеждаемся, что дробно-линейное отображение

$$L(z) = \frac{-2kz + k(1 + k^2)}{2k^2z - (1 + k^2)} \quad (5)$$

обладает указанными свойствами.

Пусть  $k = Re^{i\psi}$ . Тогда точки  $-k, k, -\frac{1}{k}, \frac{1}{k}$  отображением  $z \rightarrow e^{-i\psi}z$  перейдут в точки  $-R, R, -\frac{1}{Re^{2i\psi}}, \frac{1}{Re^{2i\psi}}$  соответственно.

Таким образом, отображение  $e^{-i\psi} \circ L \circ T$  переводит точки  $z_1, z_2, z_3, z_4$  в точки  $-R, R, -\frac{1}{Re^{2i\psi}}, \frac{1}{Re^{2i\psi}}$  соответственно. Положим  $\varphi = -2\psi$  и получим требуемый результат.  $\square$

В следующем параграфе будут получены неевклидовы аналоги теорем Сервуа и Штейнера для псевдообъема гиперболического тетраэдра.

### 4. Неевклидовы версии теорем Сервуа и Штейнера

Для получения неевклидовых версий теорем Сервуа и Штейнера нам потребуется выразить определитель матрицы Грама гиперболического тетраэдра через длины его скрещивающихся ребер, расстояния и угол между ними. Для того чтобы сделать это наиболее удобным способом, реализуем гиперболические тетраэдры в верхнем полупространстве  $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, t), x, y, t \in \mathbb{R}, t > 0\}$  таким

образом, что взаимный перпендикуляр между скрещивающимися ребрами совпадает с вертикальной осью  $Ot$ .

Рассмотрим произвольный гиперболический тетраэдр  $ABCD$ . Продолжим сторону  $AB$  через вершину  $A$  до вершины  $A'$ , лежащей на абсолюте, через вершину  $B$  — до вершины  $B'$ , также лежащей на абсолюте. Аналогично продолжим сторону  $CD$  через  $C$  до вершины  $C'$  и через вершину  $D$  — до  $D'$ . Выполняя, если потребуется, дробно-линейное отображение, описанное в лемме 3.1, без ограничения общности можем считать, что  $A' = -R$ ,  $B' = R$ ,  $C' = -\frac{e^{i\varphi}}{R}$ ,  $D' = \frac{e^{i\varphi}}{R}$ .

Обозначим через  $O$  начало координат в декартовой системе  $Oxyt$ . Пусть  $\varphi_A$  — угол, образованный лучами  $OA$  и  $OA'$ . Введем аналогичные обозначения  $\varphi_B, \varphi_C, \varphi_D$  для соответствующих углов  $OB, OB'$ ,  $OC, OC'$ ,  $OD, OD'$ . Тогда вершины тетраэдра можно задать с помощью следующих декартовых координат:

$$\begin{aligned} A &= (R \cos \varphi_A, 0, R \sin \varphi_A), & B &= (R \cos \varphi_B, 0, R \sin \varphi_B), \\ C &= \left( \frac{1}{R} \cos \varphi_C \cos \varphi, \frac{1}{R} \cos \varphi_C \sin \varphi, \frac{1}{R} \sin \varphi_C \right), \\ D &= \left( \frac{1}{R} \cos \varphi_D \cos \varphi, \frac{1}{R} \cos \varphi_D \sin \varphi, \frac{1}{R} \sin \varphi_D \right). \end{aligned}$$

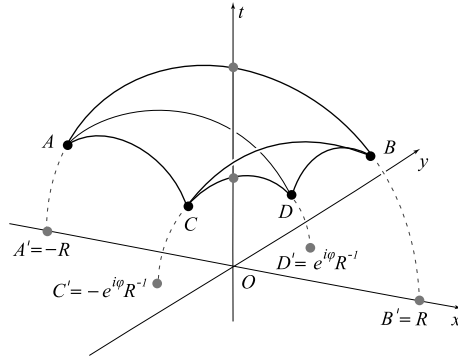


Рис. 1. Гиперболический тетраэдр  $ABCD$

Для вычисления гиперболического расстояния между вершинами тетраэдра воспользуемся формулой (2) (см. теорему 2.3):

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \rho(A, B) &= \frac{1 - \cos \varphi_A \cos \varphi_B}{\sin \varphi_A \sin \varphi_B}, & \operatorname{ch} \rho(C, D) &= \frac{1 - \cos \varphi_C \cos \varphi_D}{\sin \varphi_C \sin \varphi_D}, \\ \operatorname{ch} \rho(A, C) &= \frac{R^2 + R^{-2} - 2 \cos \varphi \cos \varphi_A \cos \varphi_C}{2 \sin \varphi_A \sin \varphi_C}, \\ \operatorname{ch} \rho(B, C) &= \frac{R^2 + R^{-2} - 2 \cos \varphi \cos \varphi_B \cos \varphi_C}{2 \sin \varphi_B \sin \varphi_C}, \\ \operatorname{ch} \rho(A, D) &= \frac{R^2 + R^{-2} - 2 \cos \varphi \cos \varphi_A \cos \varphi_D}{2 \sin \varphi_A \sin \varphi_D}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{ch} \rho(B, D) = \frac{R^2 + R^{-2} - 2 \cos \varphi \cos \varphi_B \cos \varphi_D}{2 \sin \varphi_B \sin \varphi_D}.$$

Составим матрицу Грама данного тетраэдра:

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -\operatorname{ch} \rho(A, B) & -\operatorname{ch} \rho(A, C) & -\operatorname{ch} \rho(A, D) \\ -\operatorname{ch} \rho(A, B) & -1 & -\operatorname{ch} \rho(B, C) & -\operatorname{ch} \rho(B, D) \\ -\operatorname{ch} \rho(A, C) & -\operatorname{ch} \rho(B, C) & -1 & -\operatorname{ch} \rho(C, D) \\ -\operatorname{ch} \rho(A, D) & -\operatorname{ch} \rho(B, D) & -\operatorname{ch} \rho(C, D) & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель матрицы  $G$ , имеем

$$\det(G) = -\frac{\sin^2 \varphi (R^4 - 1)^2 (\cos \varphi_A - \cos \varphi_B)^2 (\cos \varphi_C - \cos \varphi_D)^2}{4R^4 \sin^2 \varphi_A \sin^2 \varphi_B \sin^2 \varphi_C \sin^2 \varphi_D}. \quad (6)$$

Воспользовавшись формулой  $\operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch}^2 z - 1$ , получим

$$\operatorname{sh} \rho(A, B) = \frac{\cos \varphi_A - \cos \varphi_B}{\sin \varphi_A \sin \varphi_B},$$

$$\operatorname{sh} \rho(C, D) = \frac{\cos \varphi_C - \cos \varphi_D}{\sin \varphi_C \sin \varphi_D}.$$

Таким образом,

$$\det(G) = -\frac{(R^4 - 1)^2}{4R^4} \sin^2 \varphi \operatorname{sh}^2 \rho(A, B) \operatorname{sh}^2 \rho(C, D). \quad (7)$$

Учитывая что  $R = e^{\frac{\rho}{2}}$ , получим  $\frac{R^4 - 1}{2R^2} = \operatorname{sh} \rho$ . Тогда формула (7) примет вид

$$\det(G) = -\operatorname{sh}^2 \rho \sin^2 \varphi \operatorname{sh}^2 \rho(A, B) \operatorname{sh}^2 \rho(C, D). \quad (8)$$

Отметим, что формулы, эквивалентные формуле (8), но выраженные несколько в других геометрических терминах и доказанные совершенно другой техникой, получены в монографии Фенхеля [3, с. 169, формула (24)] и в неопубликованной рукописи Б. Д. С. МакКоннела [4].

Напомним, что псевдообъем гиперболического тетраэдра следующим образом вычисляется через матрицу Грама  $\tilde{V} = \sqrt{-\det(G)}$ . Различными авторами используются также следующие названия этой величины: амплитуда, контент, полярный синус и др. Подставляя данное выражение в (8), получим следующий аналог формулы Сервуа для гиперболического тетраэдра.

**Теорема 4.1.** *Псевдообъем  $\tilde{V}$  гиперболического тетраэдра, длины его противоположных ребер  $\rho(A, B)$  и  $\rho(C, D)$ , а также угол  $\varphi$  и расстояние  $\rho$  между этими ребрами связаны между собой следующим соотношением:*

$$\tilde{V} = \operatorname{sh} \rho \sin \varphi \operatorname{sh} \rho(A, B) \operatorname{sh} \rho(C, D). \quad (9)$$

В качестве следствия из формулы (9) получим теорему Штейнера для гиперболического тетраэдра.

**Теорема 4.2.** *Псевдообъем гиперболического тетраэдра не изменяется, если его противоположные ребра перемещать без изменения длины по прямым, содержащим эти ребра.*

В следующем разделе получена теорема, которая дает контрпример к теореме Штейнера для гиперболического объема тетраэдра.



### 5. Контрпример к теореме Штейнера

Рассмотрим гиперболический тетраэдр  $OABC$  с тремя попарно ортогональными гранями, пересекающимися в вершине  $O$ . Из вершины  $O$  прямого угла проведем три взаимно ортогональных геодезических, направленных вдоль его ребер, которые условно будем называть осями координат  $Ox, Oy$  и  $Oz$ . Будем считать, что вершины  $A, B, C$  лежат на соответствующих координатных осях.

Пусть  $\operatorname{ch} x, \operatorname{ch} y, \operatorname{ch} z$  — косинусы длин сторон тетраэдра, лежащие на соответствующих координатных осях  $Ox, Oy$  и  $Oz$ . Для удобства построенный тетраэдр (рис. 2) будем обозначать через  $T(x, y, z)$ .

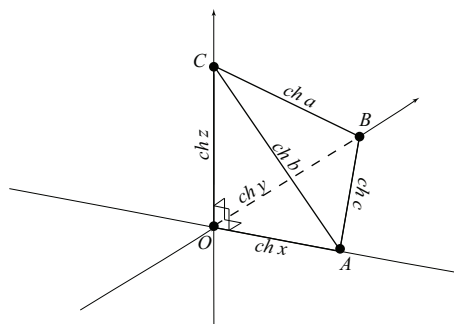


Рис. 2. Гиперболический тетраэдр  $OABC$  с тремя попарно ортогональными гранями

Согласно теореме Пифагора для гиперболических прямоугольных треугольников  $OBC, OAC$  и  $OAB$  имеем

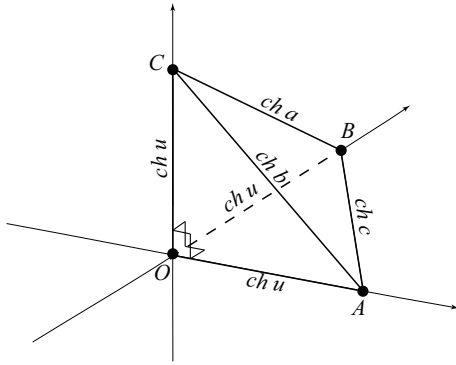
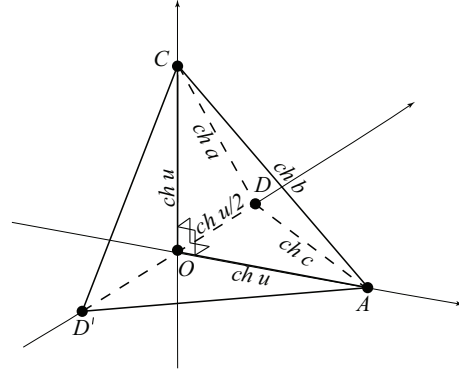
$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} y \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y. \quad (10)$$

В [5, с. 130] для двугранных углов  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  при ребрах  $BC, AC$  и  $AB$  с длинами  $a, b$  и  $c$  соответственно были получены следующие формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b)(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c)}{(\operatorname{ch}^2 a - 1)(\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a)}, \\ \operatorname{ctg}^2 \beta &= \frac{(\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a)(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c)}{(\operatorname{ch}^2 b - 1)(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b)}, \\ \operatorname{ctg}^2 \gamma &= \frac{(\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a)(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b)}{(\operatorname{ch}^2 c - 1)(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c)}. \end{aligned} \quad (11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В обозначениях работы [5] имеем  $\frac{A}{2} = \alpha, \frac{B}{2} = \beta$  и  $\frac{C}{2} = \gamma$ .

Искомый контрпример строится по следующей схеме. Положим  $x = y = z = u$  и рассмотрим тетраэдр  $T_1 = T(u, u, u)$  (рис. 3). На оси  $Oy$  выберем точки  $D, D'$ , зеркально симметричные относительно плоскости  $OAC$  и лежащие на расстоянии  $\frac{u}{2}$  от точки  $O$ . Пусть  $T_2$  — это тетраэдр  $ACDD'$  (рис. 4). Тогда  $T_1$  и  $T_2$  имеет общее ребро  $AC$  длины  $b$  и противоположные ей ребра  $OB$  и  $DD'$  длины  $u$ . Заметим, что ребро  $DD'$  получается из ребра  $OB$  параллельным сдвигом вдоль оси  $Oy$ . Таким образом, тетраэдры  $T_1$  и  $T_2$  удовлетворяют

Рис. 3. Тетраэдр  $T_1$ Рис. 4. Тетраэдр  $T_2$ 

условиям теоремы Штейнера. Наша цель — показать, что они имеют разные гиперболические объемы.

Доказательство опирается на следующие две леммы.

**Лемма 5.1.** Гиперболический объем тетраэдра  $\text{Vol}(T_1)$  находится по формуле

$$\text{Vol}(T_1) = \int_1^{\text{ch } u} f(t) dt, \quad (12)$$

где

$$f(t) = \frac{3 \operatorname{arch}(t^2)}{2\sqrt{1+t^2}(1+2t^2)}.$$

**Лемма 5.2.** Гиперболический объем тетраэдра  $T_2$  находится по формуле

$$\text{Vol}(T_2) = 2 \int_1^{\text{ch } u} g(t) dt, \quad (13)$$

где

$$g(t) = \frac{\operatorname{arch}\left(\frac{t\sqrt{1+t}}{\sqrt{2}}\right)(2+t)}{2(1+t+t^2)\sqrt{2+2t+t^2}} + \frac{\operatorname{arch}(t^2)(1-t)}{4(1+t+t^2)\sqrt{1+t^2}}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1.** Рассмотрим первый тетраэдр  $T_1 = T(u, u, u)$ . Введем обозначение  $t = \operatorname{ch} u$ , тогда  $\operatorname{ch} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1+t}{2}}$ . Найдем дифференциалы углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . В силу (11) имеем

$$\alpha = \beta = \gamma = \operatorname{arch} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

откуда

$$d(\alpha) = d(\beta) = d(\gamma) = -\frac{dt}{(1+2t^2)\sqrt{1+t^2}}. \quad (14)$$

Вычислим длины соответствующих сторон  $l_\alpha = a$ ,  $l_\beta = b$  и  $l_\gamma = c$ :

$$-\frac{l_\alpha}{2} = -\frac{l_\beta}{2} = -\frac{l_\gamma}{2} = -\frac{1}{2} \operatorname{arch}(t^2). \quad (15)$$

Подставляя формулы (14) и (15) в формулы Шлефли (3), получим формулу (12) для искомого объема тетраэдра  $T_1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.2. Рассмотрим второй тетраэдр  $T_2 = T(u, \frac{u}{2}, u)$ . Он состоит из двух зеркальных копий тетраэдра  $T'_2 = T(u, \frac{u}{2}, u)$ .

Найдем дифференциалы углов  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  тетраэдра  $T'_2$ . В силу (11)

$$\alpha = \gamma = \operatorname{arch} \frac{t}{\sqrt{2+2t+t^2}}, \quad \beta = \operatorname{arch} \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}},$$

откуда

$$\begin{aligned} d(\alpha) &= -\frac{2+t}{2(1+t+t^2)\sqrt{2+2t+t^2}} dt, \\ d(\beta) &= \frac{t-1}{2(1+t+t^2)\sqrt{1+t^2}} dt, \\ d(\gamma) &= -\frac{2+t}{2(1+t+t^2)\sqrt{2+2t+t^2}} dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Вычислим длины соответствующих сторон:

$$\begin{aligned} -\frac{l_\alpha}{2} &= -\frac{1}{2} \operatorname{arch} \left( t \sqrt{\frac{1+t}{2}} \right), & -\frac{l_\beta}{2} &= -\frac{1}{2} \operatorname{arch}(t^2), \\ -\frac{l_\gamma}{2} &= -\frac{1}{2} \operatorname{arch} \left( t \sqrt{\frac{1+t}{2}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

По формуле Шлефли

$$d \operatorname{Vol}(T'_2) = -\frac{l_\alpha}{2} d\alpha - \frac{l_\beta}{2} d\beta - \frac{l_\gamma}{2} d\gamma = g(t) dt,$$

где  $g(t)$  та же, что и в формулировке леммы 5.2. Отсюда, учитывая очевидное равенство  $\operatorname{Vol}(T_2) = 2 \operatorname{Vol}(T'_2)$ , приходим к (13).

Нетрудно убедиться, что функции, задаваемые интегралами (12) и (13), различны. Таким образом, теорема Штейнера не верна для гиперболических объемов тетраэдров.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 2. Стереометрия, преобразования пространства. М.: МЦНМО, 2006.
2. Вольнец И. А., Медных А. Д. Введение в теорию клейновых групп. Уч. пособие. Омск: ОмГУ, 1984.
3. Fenchel W. Elementary geometry in hyperbolic space. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1989.
4. McConnell B. D. S. Hedronometric formulas for a hyperbolic tetrahedron // [http://daylateanddollar short.com/mathdocs/Hedronometric-Formulas-for-a-Hyperbolic-Tetrahedron.pdf](http://daylateanddollarshort.com/mathdocs/Hedronometric-Formulas-for-a-Hyperbolic-Tetrahedron.pdf)

5. Абросимов Н. А., Байгонакова Г. А. Гиперболический октаэдр с  $m\bar{m}m$ -симметрией // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 9–14.

*Статья поступила 30 сентября 2015 г.*

Кудина Екатерина Сергеевна,  
Горно-Алтайский гос. университет,  
ул. Социалистическая, 32, Горно-Алтайск 649000  
[eskudina@hotmail.com](mailto:eskudina@hotmail.com)

Медных Александр Дмитриевич,  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
[mednykh@math.nsc.ru](mailto:mednykh@math.nsc.ru)

УДК 514.16

## ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ И МНОГОГРАННИКИ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Т. М. Лавшук

**Аннотация.** Исследуется вопрос о возможности построения правильных многоугольников и правильных многогранников над конечным полем заданной характеристики. Даны необходимые и достаточные условия для построения исследуемых объектов.

**Ключевые слова:** правильный многоугольник над  $F_p$ , правильный многогранник над  $F_p$ .

**Lavshuk T. M. Regular polygons and polyhedra over finite field.**

**Abstract:** We establish necessary and sufficient conditions for the existence of regular polygons and polyhedra over finite field of prescribed characteristics.

**Keywords:** regular polygon, regular polyhedron over finite field.

### 1. Введение

В данной работе речь пойдет о реализации правильных многоугольников и правильных многогранников над конечным полем  $F_p$ , где  $F_p$  — это поле вычетов по модулю простого числа  $p$ . Например, правильный многоугольник над  $F_p$  визуально представляет собой не тот многоугольник, который мы привыкли видеть на плоскости над  $\mathbb{R}$ . Лишь знание правил, как построить этот объект, задание условий его существования над  $F_p$  помогают увидеть общую картину для дальнейших исследований, связанных не только с многоугольником. Проблема построения многоугольников актуальна в теории римановых поверхностей, для построения которых отождествляют стороны фундаментального многоугольника. Для этого требуется реализовать многоугольник в евклидовой, гиперболической или сферической геометриях. Аналогичная проблема возникает в трехмерном случае при построении многообразий. Более общая постановка вопроса — это исследование римановых поверхностей и многообразий над конечным полем.

### 2. Правильные многоугольники над $F_p$ и их реализация

Определим правильный многоугольник ( $n$ -угольник) над  $F_p$  с помощью понятия регулярной звезды порядка  $n$  [1]. Будем использовать способ построения

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-01-07906).

его вершин, описанный Кокстером в [1], т. е. поворотом исходной вершины на угол  $\frac{2\pi}{n}$ . В случае конечного поля поворот заменим отражением точки относительно прямой.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если набор прямых  $[l_0, l_1, \dots, l_{n-1}]$  является регулярной звездой порядка  $n$  с общей точкой пересечения  $O$ , то полученное указанным выше способом множество из  $n$  точек (назовем их вершинами) с условием, что квадраты расстояний между соседними точками сравнимы по модулю  $p$ , и прямых, проходящих через эти точки (назовем их сторонами), называется *правильным многоугольником над конечным полем  $F_p$* .

Покажем, при каких значениях  $p$  возможна реализация правильного треугольника над  $F_p$ , используя теорему о существовании звезды 3-го порядка (см. [2]).

**Теорема** (звезда третьего порядка). *Регулярная звезда порядка три существует только тогда, когда число 3 является ненулевым квадратом.*

С доказательством этого результата можно ознакомиться в [2]. Докажем необходимое и достаточное условие существования правильного треугольника над  $F_p$ , используя иной подход.

**Теорема 2.1.** *Правильный треугольник над  $F_p$  существует тогда и только тогда, когда число 3 является ненулевым квадратом.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  и  $\vec{OC}$  — три неколлинеарных между собой вектора на плоскости, расположенных так, как показано на рис. 1(a), где точка  $O$  — центр тяжести точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Построим правильный треугольник над  $\mathbb{R}$ . Не ограничивая общности, будем считать, что точка  $O$  имеет координаты  $(0; 0)$ . Концы заданных векторов и прямые, проходящие через них, образуют правильный треугольник  $ABC$  (рис. 1(b)).

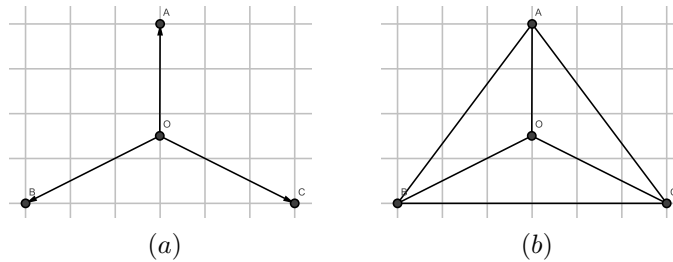


Рис. 1. Построение правильного треугольника  $ABC$

Ясно, что

$$|\vec{OA}|^2 = |\vec{OB}|^2 = |\vec{OC}|^2, \quad \angle AOB = \angle BOC = \angle AOC.$$

Это справедливо и над конечным полем  $F_p$ , если под равенством углов понимать равенство соответствующих скалярных произведений. Следовательно,

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OA} \cdot \vec{OC}.$$

Исходя из написанного выше, составим следующую систему:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OA})^2 = (\overrightarrow{OB})^2 = (\overrightarrow{OC})^2, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}, \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) эквивалентна системе

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OA})^2 = (\overrightarrow{OB})^2, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA})^2. \end{cases} \quad (2)$$

Если векторы  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$  имеют координаты  $(x, y)$  и  $(s, t)$  соответственно, то систему (2) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = s^2 + t^2, \\ xs + yt = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (3)$$

Решим систему (3), выражая  $x, y$  через  $s$  и  $t$ :

$$\left[ \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-s - \sqrt{3}t), \\ y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}s - t), \\ x = \frac{1}{2}(-s + \sqrt{3}t), \\ y = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}s - t). \end{cases} \right. \quad (4)$$

Для реализации правильного треугольника  $ABC$  над  $F_p$  необходимо, чтобы существовали координаты каждой его вершины. Согласно (4) для выполнения этого условия требуется существование в поле  $F_p$  числа  $\sqrt{3}$ . Всегда можно определить  $s$  и  $t$  как элементы поля  $F_p$ . Следовательно, выбираем такое  $p$ , чтобы 3 являлось ненулевым квадратом. Учитывая то, что два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости, приходим к выводу, что для каждого такого  $p$  будет существовать хотя бы один правильный треугольник над  $F_p$ .

Для правильного пятиугольника над  $F_p$  и правильного семиугольника над  $F_p$  можно сделать аналогичные выводы в силу следующих теорем из [2].

**Теорема** (звезда пятого порядка). *Регулярная звезда порядка пять существует только тогда, когда существует ненулевое число  $r$ , удовлетворяющее условиям: (i)  $r^2 = 5$ , (ii)  $2(5 - r)$  является квадратом.*

**Теорема** (звезда седьмого порядка). *Регулярная звезда порядка семь существует только тогда, когда существует ненулевое число  $s$ , для которого*

$$7 - 56s + 112s^2 - 64s^3 = 0$$

*и  $s(1 - s)$  является квадратом.*

Визуально сложно распознать правильные многоугольники над  $F_p$ . Возьмем в качестве примера правильный треугольник над  $F_p$  и проследим ход его построения.

Пусть  $A(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $B(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $C(1; 0)$  — вершины правильного треугольника над  $\mathbb{R}$ . Согласно теореме 2.1 и результатам из [3] выберем в качестве характеристики  $p$  последовательность A038874, т. е. простые числа, сравнимые с  $\{1, 2, 3, 11\}$  по модулю 12. Пусть  $p = 11$ , тогда, пересчитав координаты вершин заданного треугольника в  $F_{11}$ , получим  $A(5; 3)$ ,  $B(5; 8)$ ,  $C(1; 0)$ .

Далее составим уравнения прямых, проходящих через его соседние вершины:

$$AB : x = 5, \quad (5)$$

$$AC : 8x + 4y + 3 = 0, \quad (6)$$

$$BC : 3x + 4y + 8 = 0. \quad (7)$$

Найдем все точки, которые будут удовлетворять уравнениям (5)–(7), и вместе с точками  $A$ ,  $B$ ,  $C$  отметим их на решетке  $F_{11}^2$ .

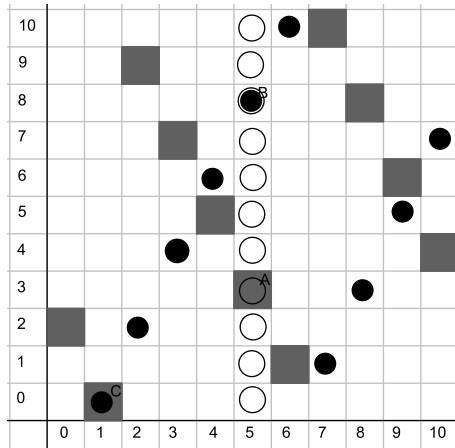


Рис. 2. Правильный  $\triangle ABC$  над  $F_{11}$

В поле  $F_p$  нет отношения порядка, поэтому для прямых, заданных уравнениями вида  $x = a$  или  $y = b$ , отмечаем на решетке все точки, которые им удовлетворяют. Для каждой прямой удобно выбирать свою маркировку (рис. 2). Согласно определению правильного  $n$ -угольника над  $F_p$  (в нашем случае  $n = 3$ ), необходимо проверить сравнимость по модулю 11 квадратов длин сторон  $\triangle ABC$ . Используя определение расстояния между точками, получим

$$|AB|^2 \equiv |AC|^2 \equiv |BC|^2 \equiv 3 \pmod{11}.$$

Итак, реализован правильный треугольник над конечным полем  $F_{11}$ .

Аналогичным образом осуществляем реализацию других правильных многоугольников над  $F_p$ . Результат такой реализации над  $F_{11}$  правильного шестиугольника показан на рис. 3.



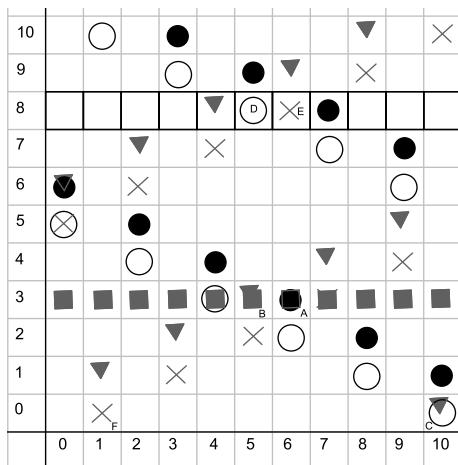


Рис. 3. Правильный шестиугольник над  $F_{11}$

### 3. Правильные многогранники в $F_p^3$ и их реализация

В данном пункте будут установлены критерии существования правильных многогранников в  $F_p^3$ , где  $F_p^3$  — трехмерное векторное пространство над  $F_p$ . Также будут предложены визуализации соответствующих объектов.

#### 3.1. Правильный тетраэдр в $F_p^3$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Правильным тетраэдром* в  $F_p^3$  будем называть множество, состоящее из четырех правильных треугольников, определенных над  $F_p$ , попарно пересекающихся по общей стороне.

Покажем, при каких  $p$  возможна реализация правильного тетраэдра в  $F_p^3$ .

**Теорема 3.1.1.** *Правильный тетраэдр реализуется над любым конечным полем  $F_p$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Наша цель — показать, что для каждого простого числа  $p$  существует хотя бы один правильный тетраэдр в  $F_p^3$ .

Пусть  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  и  $\vec{OC}$  — три базисных вектора трехмерного пространства, длины которых равны единице. Мы хотим получить правильный тетраэдр  $ABCD$  над  $\mathbb{R}$ . Для этого соединим концы базисных векторов  $A$ ,  $B$  и  $C$  сначала друг с другом прямыми, получим правильный треугольник  $ABC$ , а затем с точкой  $D$ , которая имеет координаты  $(t, t, t)$ , как показано на рис. 4.

Требуется, чтобы выполнялись равенства

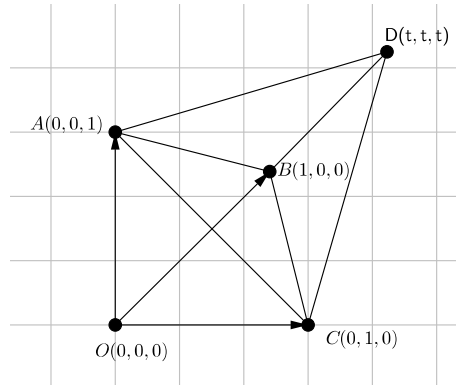
$$|AB|^2 = |BC|^2 = |AC|^2 = |AD|^2 = |BD|^2 = |CD|^2.$$

Используя определение расстояния между точками, получим

$$|AB|^2 = |BC|^2 = |AC|^2 = 2, \quad |AD|^2 = |BD|^2 = |CD|^2 = 3t^2 - 2t + 1.$$

Следовательно,

$$3t^2 - 2t + 1 = 2.$$

Рис. 4. Правильный тетраэдр над  $\mathbb{R}$ 

Решив данное уравнение, получим  $t = -\frac{1}{3}$  или  $t = 1$ . Тогда точка  $D$  будет иметь координаты  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$  или  $(1, 1, 1)$ . Для реализации правильного тетраэдра в  $F_p^3$  необходимо, чтобы существовали координаты каждой его вершины. Для  $ABCD$  они существуют в любом поле  $F_p$ . Таким образом, для любого  $p$  всегда найдется хотя бы один правильный тетраэдр, реализуемый в  $F_p^3$ , что и требовалось доказать.

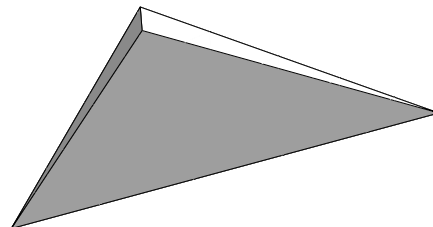
Реализуем в  $F_p^3$  правильный тетраэдр с координатами вершин

$$A\left(0; 0; \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right), \quad B\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2\sqrt{6}}\right),$$

$$C\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2\sqrt{6}}\right), \quad D\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; -\frac{1}{2\sqrt{6}}\right).$$

В качестве характеристики  $p$  можно выбрать последовательность простых чисел A130063 [3], т. е. простые числа сравнимые с 1 или 23 по модулю 24. Пусть  $p = 23$ , тогда, пересчитав координаты вершин правильного тетраэдра в поле  $F_{23}$ , получим  $A(0; 0; 20)$ ,  $B(5; 11; 1)$ ,  $C(5; 12; 1)$ ,  $D(13; 0; 1)$ .

С помощью команд пакета Wolfram Mathematica построим правильный тетраэдр в  $F_{23}^3$  (рис. 5).

Рис. 5. Правильный тетраэдр над  $\mathbb{R}$

Квадраты расстояний между соседними вершинами построенного тетраэдра сравнимы по модулю 23 с числом 1. Вершины грани правильного тетраэдра  $ABCD$  в  $F_{23}^3$  находятся в одной плоскости, что было проверено с помощью критерия компланарности трех векторов. Это распространяется на все его грани, причем для каждой грани своя плоскость. В итоге мы реализовали  $ABCD$  в  $F_{23}^3$ .

### 3.2. Гексаэдр в $F_p^3$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гексаэдром (кубом) в  $F_p^3$  будем называть множество точек и прямых, образующих шесть квадратов над  $F_p$ , любые два из которых пересекаются по общей стороне и двум общим вершинам или не пересекаются. При этом каждая вершина является вершиной двух других.

Приведем доказательство теоремы о реализации гексаэдра в  $F_p^3$ , с помощью которого докажем теоремы о реализации других правильных многогранников в  $F_p^3$ .

**Теорема 3.2.1.** Гексаэдр реализуется над любым конечным полем  $F_p$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим в пространстве три базисных вектора единичной длины, взаимно перпендикулярных друг другу, тогда легко сможем построить гексаэдр над  $\mathbb{R}$ . Координаты их концов  $A, B, C$  и начала  $O$  нам известны (рис. 6), тогда координаты других точек будут следующими:  $A_1(1; 0; 1)$ ,  $B_1(1; 1; 1)$ ,  $C_1(0; 1; 1)$ ,  $D(1; 1; 0)$ .

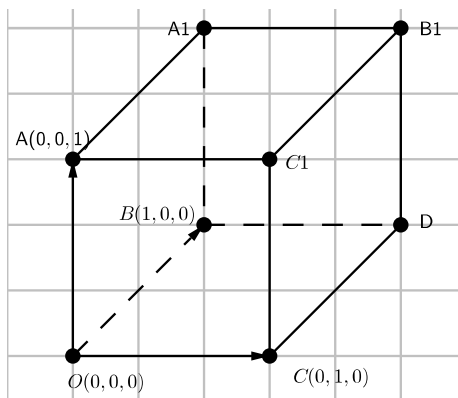


Рис. 6. Гексаэдр над  $\mathbb{R}$

Каждая из них существует над любым конечным полем  $F_p$ . Следовательно, для любого  $p$  всегда сможем построить хотя бы один гексаэдр, который реализуется в  $F_p^3$ .

Заметим, что теорему 3.1.1 также можно доказать с помощью теоремы 3.2.1, вписав правильный тетраэдр в гексаэдр. Визуально гексаэдр в  $F_p^3$  выглядит как обычный куб над  $\mathbb{R}$ .

### 3.3. Октаэдр в $F_p^3$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Октаэдром* в  $F_p^3$  будем называть множество точек и прямых, образующих 8 правильных треугольников над  $F_p$ , любые два из которых пересекаются по общей стороне и двум общим вершинам или не пересекаются. При этом каждая вершина таких треугольников является вершиной трех других.

С помощью теоремы 3.2.1 докажем аналогичный результат для октаэдра.

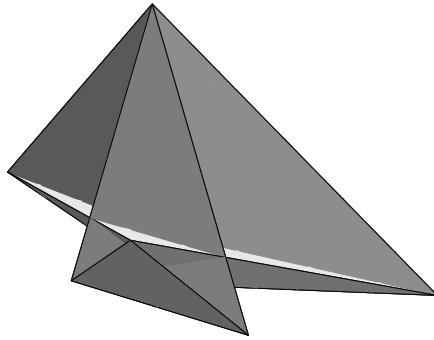


Рис. 7. Октаэдр в  $F_{17}^3$

**Теорема 3.3.1.** *Октаэдр реализуется над любым конечным полем  $F_p$  при  $p > 2$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $OBDCAA_1B_1C_1$  — гексаэдр над  $\mathbb{R}$ , который построен в доказательстве теоремы 3.2.1 (см. рис. 6). Впишем в него октаэдр над  $\mathbb{R}$ . Вершинами этого октаэдра будут середины граней гексаэдра, которые будут существовать над любым полем  $F_p$  при  $p > 2$ . Следовательно, октаэдр реализуется над любым полем  $F_p$  при  $p > 2$ .

На рис. 7 показан результат реализации в  $F_{17}^3$  октаэдра со следующими вершинами:

$$A_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0\right), \quad A_2\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), \quad A_3\left(0; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ A_4\left(0; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad A_5\left(0; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), \quad A_6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0\right).$$

### 3.4. Додекаэдр в $F_p^3$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Додекаэдром* в  $F_p^3$  будем называть множество точек и прямых, образующих 12 правильных пятиугольников над  $F_p$ , любые два из которых пересекаются по общей стороне и двум общим вершинам или не пересекаются. При этом каждая вершина таких пятиугольников является вершиной двух других.

**Теорема 3.4.1.** Додекаэдр реализуется над конечным полем  $F_p$  при  $p \equiv \{0, 1, 4\} \pmod{5}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задан гексаэдр над  $\mathbb{R}$  с вершинами

$$A_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad A_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad A_3\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad A_4\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right),$$

$$A_5\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \quad A_6\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \quad A_7\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \quad A_8\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Опишем около него додекаэдр. Выполнив некоторые вычисления, найдем координаты вершин додекаэдра, которые не совпадают с вершинами гексаэдра:

$$A_9\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}; 0; \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right), \quad A_{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}; 0; \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right), \quad A_{11}\left(0; \frac{\sqrt{5}+1}{4}; \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right),$$

$$A_{12}\left(0; \frac{\sqrt{5}+1}{4}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right), \quad A_{13}\left(0; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}; \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right), \quad A_{14}\left(0; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right),$$

$$A_{15}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}; 0; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right), \quad A_{16}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}; 0; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right), \quad A_{17}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}; \frac{\sqrt{5}-1}{4}; 0\right),$$

$$A_{18}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}; 0\right), \quad A_{19}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}; \frac{\sqrt{5}-1}{4}; 0\right), \quad A_{20}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}; 0\right).$$

Для реализации додекаэдра в  $F_p^3$  требуется существование координат каждой его вершины в заданном поле. Существование координат точек, совпадающих с вершинами гексаэдра, следует из теоремы 3.2.1.

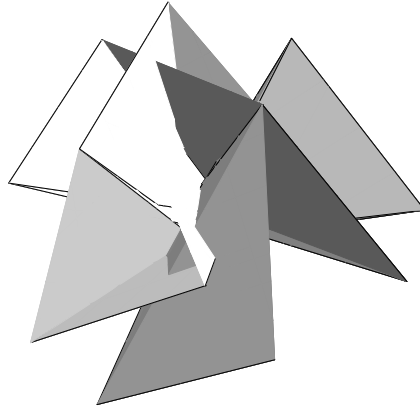


Рис. 8. Додекаэдр в  $F_{11}^3$

Для существования остальных вершин, координаты которых получены выше, требуется, чтобы число 5 являлось квадратом некоторого числа по модулю  $p$ . Следовательно, учитывая то, что любые три некопланарных вектора

образуют базис в пространстве, для каждого  $p$ , определенного последовательностью A038872 [3], т. е. для каждого простого числа, сравнимого с  $\{0, 1, 4\}$  по модулю 5, всегда найдется хотя бы один додекаэдр, который реализуется в  $F_p^3$ .

Результат реализации в  $F_{11}^3$  додекаэдра  $A_1 A_2 \dots, A_{20}$ , заданного в доказательстве теоремы 3.4.1, показан на рис. 8.

### 3.5. Икосаэдр в $F_p^3$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Икосаэдром* в  $F_p^3$  будем называть множество точек и прямых, образующих 20 правильных треугольников над  $F_p$ , любые два из которых либо пересекаются по общей стороне и двум общим вершинам, либо имеют одну общую вершину, либо не пересекаются. При этом каждая вершина таких треугольников является вершиной четырех других.

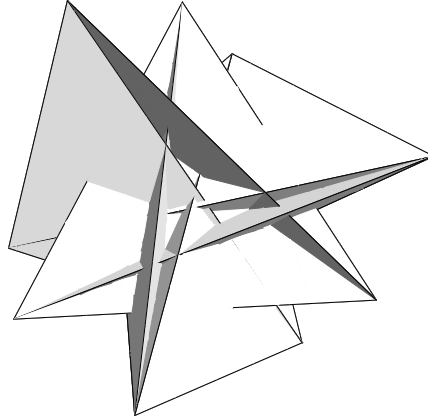


Рис. 9. Икосаэдр в  $F_{11}^3$

Икосаэдр и додекаэдр — двойственные друг другу многогранники. Если вписать икосаэдр в додекаэдр, то вершинами икосаэдра будут являться середины граней додекаэдра. Тогда, исключив случай  $p = 5$ , можно убедиться, что верна

**Теорема 3.5.1.** *Икосаэдр реализуется над конечным полем  $F_p$  при  $p > 5$  и  $p \equiv \{0, 1, 4\} \pmod{5}$ .*

Построим икосаэдр в  $F_p^3$ . Пусть  $A_1 A_2 \dots A_{12}$  — это икосаэдр, заданный над полем  $\mathbb{R}$ , с координатами вершин

$$A_1 \left( \frac{5+3\sqrt{5}}{20}; 0; \frac{-5-\sqrt{5}}{20} \right), A_2 \left( \frac{-5-3\sqrt{5}}{20}; 0; \frac{5+\sqrt{5}}{20} \right), A_3 \left( \frac{5+\sqrt{5}}{20}; \frac{-5-3\sqrt{5}}{20}; 0 \right),$$

$$A_4 \left( \frac{-5-\sqrt{5}}{20}; \frac{5+3\sqrt{5}}{20}; 0 \right), A_5 \left( 0; \frac{5+\sqrt{5}}{20}; \frac{-5-3\sqrt{5}}{20} \right), A_6 \left( \frac{5+\sqrt{5}}{20}; \frac{5+3\sqrt{5}}{20}; 0 \right),$$

$$A_7\left(\frac{-5-\sqrt{5}}{20}; \frac{-5-3\sqrt{5}}{20}; 0\right), A_8\left(0; \frac{-5-\sqrt{5}}{20}; \frac{5+3\sqrt{5}}{20}\right), A_9\left(0; \frac{-5-\sqrt{5}}{20}; \frac{-5-3\sqrt{5}}{20}\right), \\ A_{10}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{20}; 0; \frac{5+\sqrt{5}}{20}\right), A_{11}\left(\frac{-5-3\sqrt{5}}{20}; 0; \frac{-5-\sqrt{5}}{20}\right), A_{12}\left(0; \frac{5+\sqrt{5}}{20}; \frac{5+3\sqrt{5}}{20}\right).$$

В качестве характеристики  $p$  можно выбрать последовательность A038872 [3].

Пусть  $p = 11$ . Тогда, пересчитав координаты вершин икосаэдра в поле  $F_{11}$ , получим  $A_1(8; 0; 10)$ ,  $A_2(3; 0; 1)$ ,  $A_3(1; 3; 0)$ ,  $A_4(10; 8; 0)$ ,  $A_5(0; 1; 3)$ ,  $A_6(1; 8; 0)$ ,  $A_7(10; 3; 0)$ ,  $A_8(0; 10; 8)$ ,  $A_9(0; 10; 3)$ ,  $A_{10}(8; 0; 1)$ ,  $A_{11}(3; 0; 10)$ ,  $A_{12}(0; 1; 8)$ .

С помощью команд пакета Wolfram Mathematica построим икосаэдр в  $F_{11}^3$  (рис. 9).

Аналогичные результаты предполагается получить для полуправильных многогранников.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
2. Wildberger N. J. Divine proportions: rational trigonometry to universal geometry. Australia: Wild Egg Pty Ltd., 2005.
3. Sloane N. J. A. The on-line encyclopedia of integers sequences. 1964. <http://oeis.org/?language=english>

*Статья поступила 12 октября 2015 г.*

Лавщук Тамара Михайловна  
Новосибирский гос. университет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
[tamara\\_090391@mail.ru](mailto:tamara_090391@mail.ru)

УДК 514.123

## О СУЩЕСТВОВАНИИ ЕВКЛИДОВОЙ СТРУКТУРЫ НА УЗЛЕ ВОСЬМЕРКА С МОСТОМ

А. Д. Медных, Д. Ю. Соколова

**Аннотация.** Исследуются основные геометрические инварианты евклидова конического многообразия, сингулярным множеством которого является узел «восьмерка» с мостом, а носителем — трехмерная сфера. Получены условия существования указанного многообразия, вычислен его объем и длины сингулярных геодезических.

**Ключевые слова:** коническое многообразие, евклидова структура, объем, узел «восьмерка».

**A. D. Mednykh, D. Yu. Sokolova. On the existence of Euclidean structure on the figure eight knot with a bridge**

**Abstract:** In the present paper the basic geometrical invariants are investigated for the cone-manifold whose underlying space is the three dimensional sphere and the singular set is formed by the figure eight knot with a bridge. The existence of Euclidean structure on the manifold under consideration is established. The volume and the lengths of its singular geodesics are calculated.

**Keywords:** cone-manifold, Euclidean structure, volume, the figure eight knot.

### 1. Введение

В классических работах Кебе [1] были доказаны теоремы об униформизации римановых поверхностей с заданной сигнатурой. На современном языке это означает, что все «хорошие» двумерные орбиболды обладают универсальной накрывающей, представляющей собой единичный круг, комплексную плоскость, либо сферу Римана. С точки зрения геометрии последнее равносильно утверждению, что каждый «хороший» двумерный орбиболд обладает либо гиперболической, либо евклидовой, либо сферической структурой. Напомним, что орбиболд является «хорошим», если он не является сферой с одной особой точкой либо сферой с двумя особыми точками различных порядков. Аналогичное утверждение в трехмерном случае формулируется более сложно и носит название Гипотеза Геометризации Терстона. Она была полностью доказана в работах российского математика Г. Перельмана [2–4] и в качестве частного случая повлекла за собой решение знаменитой проблемы Пуанкаре.

Многообразия и орбиболды, обладающие геометрической структурой, можно представить в виде фактор-пространства  $X/\Gamma$ , где  $X$  — одна из известных

---

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–07906), второго автора — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–31–00138).



геометрий, а  $\Gamma$  — дискретная группа изометрий, действующая на  $X$  в общем случае с неподвижными точками. В малых размерностях все возможные геометрии известны. В частности, в двумерном случае  $X = \mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2$ , в трехмерном случае это одна из восьми геометрий Терстона:  $X = \mathbb{S}^3, \mathbb{E}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^2 + \mathbb{E}^1, \mathbb{H}^2 + \mathbb{E}^1, Nil, Sol, \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Пусть  $X$  — одна из перечисленных трехмерных геометрий. Тогда образами неподвижных точек группы  $\Gamma$  при каноническом отображении  $X \mapsto X/\Gamma$ , как правило, является узел, зацепление или заузленный граф. Проиллюстрируем это лишь на одном примере [5]. Пусть  $X = \mathbb{H}^3$ , а  $\Gamma = \mathbb{F}_{2n}$ ,  $n \geq 4$ , — группа Фибоначчи, действующая изометриями на  $X$ . Тогда  $X/\Gamma$  — трехмерная сфера, а образом неподвижных точек  $X$  в  $X/\Gamma$  является узел «восьмерка».

Однако в общем случае наличие геометрических структур не обязательно связано с дискретными группами. В результате возникают конические многообразия, которые можно рассматривать как непосредственное обобщение орби-фолдов. В свою очередь, в определении конического многообразия, приведенного в следующем параграфе, потребуем лишь локальную униформизацию с помощью указанных выше геометрий.

Цель настоящей работы — изучение евклидовых структур на узлах и зацеплениях. В 1975 г. Райли [6] обнаружил примеры гиперболических структур на некоторых узлах и дополнениях зацеплений в трехмерной сфере. Позднее, весной 1977 г., Терстон представил теорему существования для римановой метрики постоянной отрицательной кривизны на трехмерных многообразиях. На практике оказалось, что дополнения всех простых узлов, исключая торические и сателлитные, допускают гиперболическую структуру. Отметим следующие известные результаты: евклидова структура на узле «восьмерка»  $4_1$  возникает, когда его конический угол  $\alpha$  равен  $\frac{2\pi}{3}$ . Этот результат был получен Терстоном [7]. Явная конструкция фундаментального множества для конического многообразия  $4_1(\alpha)$  в  $E^3$  была предложена в работе А. Д. Медных и А. А. Расказова [8]. Это фундаментальное множество представляет собой невыпуклый двадцатигранник, вершины которого задаются целочисленными координатами. Вопрос существования евклидовой структуры на зацеплении Уайтхеда изучен в работе Р. Н. Шматкова [9]. В [10] было исследовано строение фундаментального многогранника для узла «трилистник» с мостом и даны условия существования евклидовой структуры соответствующего конического многообразия. В данной работе исследуем основные геометрические инварианты евклидова конического многообразия, сингулярным множеством которого является узел «восьмерка» с мостом, а носителем — трехмерная сфера. Мы установим условия существования такого многообразия, вычислим его объем и длины его сингулярных геодезических.

## 2. Предварительные сведения

*Трехмерным коническим многообразием* называется метрическое пространство, полученное из набора непересекающихся 3-симплексов в пространстве по-

стоянной секционной кривизны  $k$  путем изометрического отождествления их граней. При этом предполагается, что образованное в результате такого отождествления топологическое пространство (пространство-носитель) является многообразием.

Такое многообразие обладает римановой метрикой постоянной секционной кривизны  $k$  на объединении клеток размерностей 2 и 3. В случае  $k = 0$  будем говорить, что соответствующее коническое многообразие *имеет* (или *допускает*) *евклидову структуру*. Аналогично определяются конические многообразия со сферической ( $k = +1$ ) и гиперболической структурами ( $k = -1$ ).

Метрическая структура вокруг каждой 1-клетки определяется *коническим углом*, который является суммой двугранных углов при ребрах, дающих после отождествления эту клетку.

*Сингулярным множеством* конического многообразия назовем замыкание всех 1-клеток, конический угол вокруг которых не равен  $2\pi$ .

Следует отметить также, что точка сингулярного множества с коническим углом  $\alpha$  имеет окрестность, изометричную окрестности точки, лежащей на ребре клина с углом раствора  $\alpha$ , грани которого попарно отождествлены посредством поворота трехмерного пространства вокруг ребра клина. Наглядно коническое многообразие можно представить как трехмерное многообразие с вложенным в него графом, на котором происходит искажение метрики. При этом если измерить длину окружности бесконечно малого радиуса вокруг компоненты графа, вместо стандартного  $2\pi\varepsilon$  она будет равна  $\alpha\varepsilon$ , где  $\alpha$  — конический угол вдоль компоненты графа.

Дадим определение *группы голономий* для геометрического орбифолда. Пусть  $\mathcal{O}$  — геометрический орбифолд, обладающий  $(G, X)$ -структурой [7]. Рассмотрим ассоциированное с ним  $(G, X)$ -многообразие  $M = \mathcal{O} \setminus \Sigma$ , где  $\Sigma$  — сингулярное множество орбифолда  $\mathcal{O}$ . Пусть области  $U_1, U_2, \dots$  и отображения  $\varphi_i : U_i \rightarrow X$  задают локальные системы координат на  $M$  с функциями перехода

$$\gamma_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j).$$

По определению  $(G, X)$ -многообразия каждое отображение  $\gamma_{ij}$  локально действует как элемент из  $G$ , так что  $\gamma_{ij}$  можно рассматривать как локально постоянное отображение со значениями в  $G$ . После композиции с  $\varphi_j$  получаем локально постоянное отображение  $U_i \cap U_j \rightarrow G$ , которое будем также обозначать через  $\gamma_{ij}$ .

Предположим теперь, что две карты  $(U_i, \varphi_i)$  и  $(U_j, \varphi_j)$  покрывают одну и ту же точку  $x$ . Тогда можно так изменить отображение  $\varphi_j$  (рассмотрев ее композицию с  $\gamma_{ij}$ ), что оно будет совпадать с отображением  $\varphi_i$  вблизи точки  $x$ . На самом деле, если пересечение  $U_i \cap U_j$  связно, то эти отображения будут совпадать на всем пересечении, так что получится отображение  $U_i \cap U_j \rightarrow X$ , продолжающее  $\varphi_i$ . Но, вообще говоря, пытаясь таким образом продолжить координатное отображение на все многообразие, придем к несогласующимся значениям. Для того чтобы избежать несогласованности, надо перейти к универсальной накрывающей.

Выберем отмеченную точку  $x_0 \in M$  и карту  $(U_0, \varphi_0)$ , покрывающую эту точку. Пусть  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  — универсальная накрывающая пространства  $M$ . Будем представлять  $\widetilde{M}$  как пространство гомотопических классов путей в  $M$  с началом в отмеченной точке  $x_0$ , и рассмотрим путь  $\alpha$ , представляющий гомотопический класс  $[\alpha] \in \widetilde{M}$  (так что  $\alpha(1) = \pi([\alpha])$ ). Разобьем путь  $\alpha$  промежуточными точками

$$x_0 = \alpha(t_0), x_1 = \alpha(t_1), \dots, x_n = \alpha(t_n)$$

(где  $t_0 = 0$  и  $t_1 = 1$ ) таким образом, чтобы каждый из получившихся кусочков пути целиком покрывался какой-то одной картой  $(U_i, \varphi_i)$ . Затем, двигаясь вдоль пути  $\alpha$ , подправляем очередное отображение  $\varphi_i$  так, чтобы оно совпало с (уже подправленными) отображением  $\varphi_{i-1}$  в некоторой окрестности  $x_i \in U_{i-1} \cap U_i$ . Эти согласованные друг с другом карты образуют *аналитическое продолжение* отображения  $\varphi_0$  вдоль данного пути. Последнее из новых координатных отображений имеет вид

$$\psi = \gamma_{01}(x_1)\gamma_{12}(x_2) \dots \gamma_{n-1,n}(x_n)\varphi_n.$$

Фиксировав базисную точку и начальное отображение  $\varphi_n$ , определим *отображение развертки*  $D : \widetilde{M} \rightarrow X$  как отображение, заданное локально с помощью аналитического продолжения  $\varphi_0$  вдоль каждого пути, т. е.  $D = \varphi_0^\sigma \circ \pi$  в некоторой окрестности  $\sigma \in \widetilde{M}$ . При изменении начальных условий (базисной точки и исходного отображения) образ отображения развертки меняется под действием некоторого элемента из группы  $G$ .

Если наделить пространство универсальной накрывающей  $(G, X)$ -структурой, индуцированной накрытием  $\pi$ , то отображение развертки является локальным  $(G, X)$ -гомеоморфизмом между  $\widetilde{M}$  и  $X$ .

Хотя в наиболее интересных случаях группа  $G$  действует на  $X$  транзитивно, это условие не является необходимым для определения отображения  $D$ . Например, если группа  $G$  тривиальна, а многообразие  $X$  замкнуто, то замкнутые  $(G, X)$ -многообразия — в точности конечнолистные накрытия над  $X$  с проекцией  $D$ .

Рассмотрим теперь элемент  $\sigma$  фундаментальной группы пространства  $M$ . Аналитическое продолжение вдоль петли  $\sigma$  приводит к ростку  $\varphi_0^\sigma$ , который уже можно сравнить с  $\varphi_0$ , так как они оба определены в окрестности базисной точки. Обозначим через  $g_\sigma$  такой элемент группы  $G$ , для которого  $\varphi_0^\sigma = g_\sigma \varphi_0$ ;  $g_\sigma$  будем называть *голономией*  $\sigma$ . Из определения отображения развертки легко вывести, что

$$D \circ T_\sigma = g_\sigma \circ D,$$

где  $T_\sigma : \tau \rightarrow \sigma\tau$  есть преобразование накрытия, индуцированное элементом  $\sigma$ . Применяя это равенство к произведению петель, получаем, что отображение  $H : \sigma \rightarrow g_\sigma$  из  $\pi_1(M)$  в  $G$  является гомоморфизмом, который будем называть *голономией*  $M$ . Его образ называется *группой голономии* пространства  $M$ . Заметим, что отображение  $H$  зависит от произвола при построении  $D$ : при изменении  $D$  образ отображения  $H$  сопрягается элементом из  $G$ .

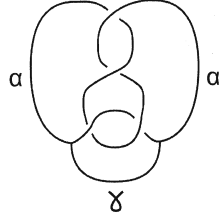


Рис. 1. Узел восьмерка  
с мостом

В работе исследуем коническое многообразие  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$ , носителем которого является трехмерная сфера  $\mathbb{S}^3$ , а сингулярным множеством  $\Sigma$  — узел восьмерка с одним мостом, который представляет собой граф, изображенный на рис. 1.

Фундаментальная группа  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \Sigma)$  дополнения к графу может быть найдена с помощью алгоритма Виртингера и имеет два порождающих элемента. Мы изучаем геометрическую структуру на данном коническом многообразии.

Коническое многообразие является пополнением метрического пространства, на котором введена неполная евклидова метрика. Значение конического угла  $\alpha$  вдоль компоненты узла определяется пополнением метрического пространства. Последнее означает, что если  $g$  и  $h$  — гомеоморфизмы, переводящие окрестность точки многообразия в шары вида  $B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$  с элементом площади поверхности  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , то гомеоморфизм  $g \circ h^{-1}$  состоит из движений евклидова пространства. Таким образом, он сохраняет евклидову метрику. Далее, представляя порождающие фундаментальной группы через матрицы вращения в евклидовом пространстве, получим условия существования евклидовой структуры на коническом многообразии. Для этого найдем группу голономий данного многообразия.

Рассмотрим отображение голономии  $\varphi : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \Sigma) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ , которое переводит порождающие  $s$  и  $t$  фундаментальной группы узла

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \Sigma) = \langle s, t : sl_s = l_s s \rangle, \quad \text{где } l_s = stst^{-1}s^{-1}tsts^{-1}t^{-1},$$

в линейные преобразования

$$\mathcal{S}(x) = (x - e_3)S + e_3, \quad \mathcal{T}(x) = (x + e_3)T - e_3 \quad (1)$$

соответственно, где  $e_3 = (0, 0, 1)$ ,  $S, T$  — матрицы вращений.

Следуя [9], положим  $M = \cot \frac{\alpha}{2}$ , тогда матрицы вращений  $S$  и  $T$  имеют вид

$$S = \frac{1}{M^2 + 1} \begin{pmatrix} M^2 + \cos \theta & \sin \theta & -2M \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta & M^2 - \cos \theta & 2M \cos \frac{\theta}{2} \\ 2M \sin \frac{\theta}{2} & -2M \cos \frac{\theta}{2} & -1 + M^2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{M^2 + 1} \begin{pmatrix} M^2 + \cos \theta & -\sin \theta & -2M \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \theta & M^2 - \cos \theta & -2M \cos \frac{\theta}{2} \\ 2M \sin \frac{\theta}{2} & 2M \cos \frac{\theta}{2} & -1 + M^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

соответственно, где  $\theta$  — угол относительного поворота между сингулярными компонентами.

При этом считаем, что отображение голономии переводит элемент  $l_s$  во вращение на угол  $\gamma$  вокруг сингулярной компоненты, соответствующей мосту узла.

*Группой голономий* исследуемого многообразия называется группа, порожденная вращениями  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{T}$  вокруг сингулярных компонент фундаментального множества на угол  $\alpha$ .

### 3. Структура фундаментального множества для узла «восьмерка» с мостом

Построим фундаментальное множество для многообразия  $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$ . Рассмотрим указанный на рис. 2 набор непересекающихся 3-симплексов в пространстве постоянной нулевой кривизны, из которого путем изометрического отождествления граней получается данное коническое многообразие. Фундаментальное множество представляет собой двадцатигранник  $\mathcal{F}$ , имеющий 12 вершин, который получается склеиванием симплексов вдоль общего ребра  $Q_0Q_1$ .

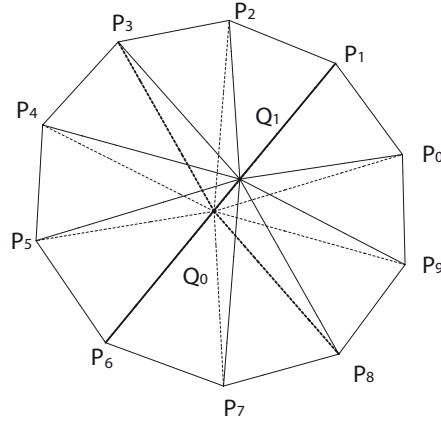


Рис. 2. Фундаментальный двадцатигранник  $\mathcal{F}$

Это множество может быть реализовано в любой из трех геометрий:  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  и  $\mathbb{E}^3$ . Отождествление криволинейных граней многогранника  $\mathcal{F}$  осуществляется изометрическими преобразованиями  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{T}$  по следующим правилам:

$$\mathcal{S} : P_1P_0P_9P_8P_7P_6 \rightarrow P_1P_2P_3P_4P_5P_6, \quad \mathcal{T} : P_4P_5P_6P_7P_8P_9 \rightarrow P_4P_3P_2P_1P_0P_9.$$

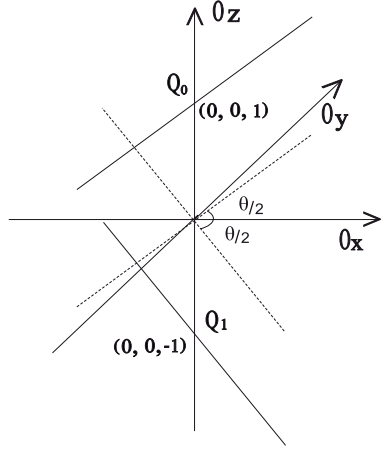
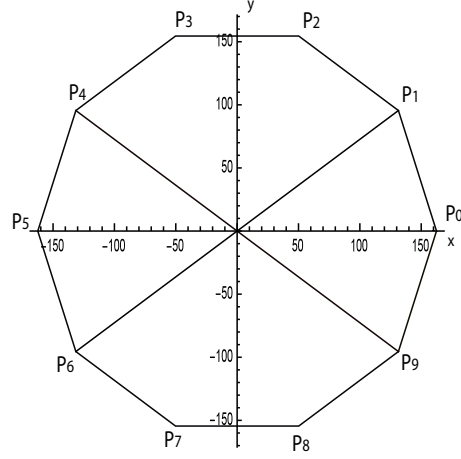
### 4. Реализация фундаментального множества в евклидовом пространстве

Опишем геометрическую реализацию фундаментального множества  $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$  в евклидовом пространстве. Для этого найдем координаты его вершин через некоторые параметры, имеющие геометрический смысл.

Положим  $X = \cos \frac{\theta}{2}$ ,  $Y = \sin \frac{\theta}{2}$ , где  $\theta$  — угол относительного поворота между компонентами узла. Тогда неподвижными множествами преобразований  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{T}$  из (1) будут следующие прямые:

$$\text{Fix}(\mathcal{S}) = (tX, tY, 1), \quad \text{Fix}(\mathcal{T}) = (tX, -tY, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

В трехмерном евклидовом пространстве оси вращений  $\text{Fix}(\mathcal{S})$  и  $\text{Fix}(\mathcal{T})$  расположены как скрещивающиеся прямые с общим перпендикуляром по оси  $Oz$  и углом  $\theta$  между ними (рис. 3).

Рис. 3. Оси вращений  $\text{Fix}(\mathcal{S})$  и  $\text{Fix}(\mathcal{T})$ Рис. 4. Проекция  $\mathcal{F}$  на плоскость  $Oxy$ 

Для фундаментального двадцатигранника  $\mathcal{F}$  (см. рис. 2) пары его вершин  $P_1, P_6$  и  $P_4, P_9$  лежат соответственно на осях  $\text{Fix}(\mathcal{S})$ ,  $\text{Fix}(\mathcal{T})$ . Узел восьмерка с мостом обладает тремя симметриями второго порядка. На фундаментальном многограннике они реализуются как вращения в осях  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . В частности, вращение второго порядка в оси  $Ox$  оставляет фундаментальный многогранник инвариантным. Отсюда следует, что две вершины  $\mathcal{F}$  лежат на оси  $Ox$ .

Согласно рис. 4 координаты вершин  $\mathcal{F}$  могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} P_0 &= (x, 0, 0), & P_1 &= (tX, tY, 1), & P_2 &= (a, b, c), \\ P_3 &= (-a, b, -c), & P_4 &= (-tX, tY, -1), & P_5 &= (-x, 0, 0), \\ P_6 &= (-tX, -tY, 1), & P_7 &= (-a, -b, c), & P_8 &= (a, -b, -c), \\ P_9 &= (tX, -tY, -1), & Q_0 &= (0, 0, 1), & Q_1 &= (0, 0, -1). \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим следующие равенства для вершины  $P_2$ :  $P_2 = P_0\mathcal{S} = P_6\mathcal{T}$ . Перепишем их в виде

$$\begin{cases} (a, b, c) = (x, 0, 0)\mathcal{S}, \\ (x, 0, 0)\mathcal{S} = (-tX, -tY, 1)\mathcal{T}. \end{cases} \quad (5)$$

Решая второе уравнение системы (5) относительно  $x$  и  $t$  и учитывая, что  $X^2 + Y^2 = 1$ , имеем

$$x = \frac{5 + 4M^2 - M^4 - 20X^2 - 4M^2X^2}{2MY(1 + M^2 - 8X^2)}, \quad t = \frac{X(3M^2 - 5)}{MY(1 + M^2 - 8X^2)}. \quad (6)$$

При этом, сравнивая первые координаты векторов  $(x, 0, 0)\mathcal{S}$  и  $(-tX, -tY, 1)\mathcal{T}$  и еще раз пользуясь равенством  $X^2 + Y^2 = 1$ , получим, что величины  $M$  и  $X$  связаны соотношением

$$5 + 6M^2 + M^4 - 60X^2 - 12M^2X^2 + 80X^4 = 0. \quad (7)$$

Подставляя равенства (6) и (7) в первое уравнение системы (5), найдем значения величин  $a$ ,  $b$  и  $c$ :

$$\begin{aligned} a &= \frac{4M^2 - 15X^2 - 7M^2X^2 + 20X^4}{MY(1 + M^2 - 8X^2)}, \\ b &= \frac{X(5 + M^2 - 20X^2)}{M(1 + M^2 - 8X^2)}, \quad c = \frac{M^2 + 4X^2 - 3}{1 + M^2 - 8X^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

### 5. Евклидов объем конического многообразия

Основным результатом настоящей работы являются две следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha \in [\frac{2\pi}{3}, \pi)$ . Тогда для некоторого  $\gamma \in (0, 2\pi]$  коническое многообразие  $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$  обладает евклидовой структурой. В частности,  $\mathcal{O}(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi) = 4_1(\frac{2\pi}{3})$  — евклидов орбифолд, носителем которого является трехмерная сфера, а сингулярным множеством — узел «восьмерка» с коническим углом  $\frac{2\pi}{3}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство теоремы будет завершено, если установим, что для каждого  $\alpha \in [\frac{2\pi}{3}, \pi)$  существует описанный в предыдущем параграфе многогранник  $\mathcal{F}$ , сумма двугранных углов которого при вписанных ребрах  $P_iP_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, 9$ , равна  $\gamma$ , где  $\gamma \in (0, 2\pi]$ . Для этого положим  $M = \cot \frac{\alpha}{2}$  и  $X = \cos \frac{\theta}{2}$  и рассмотрим кривую (рис. 5), задаваемую уравнением (5).

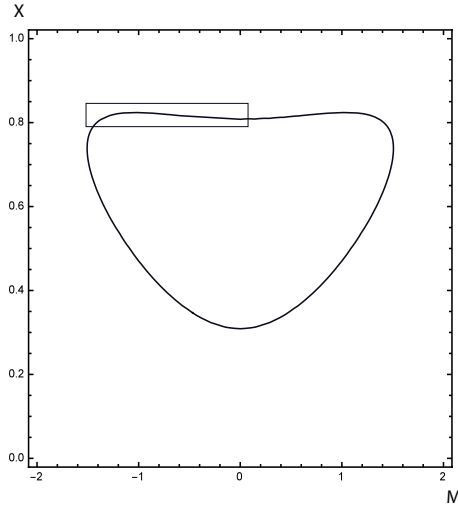


Рис. 5. Кривая существования евклидовой структуры для  $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$

Уравнение кривой (7) как основное соотношение, связывающее углы  $\alpha$  и  $\theta$ , получено из системы (5). При этом, как будет видно в дальнейшем, ее выделенная на рис. 5 часть соответствует моделируемой нами ситуации.

**Лемма 1.** Пусть  $M \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ ,  $X \in (\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{2}{3}}]$  и выполнено основное соотношение (7). Тогда существует фундаментальный многогранник  $\mathcal{F}$  (рис. 2), заданный параметрами  $\alpha$  и  $\theta$ , где  $M = \cot \frac{\alpha}{2}$  и  $X = \cos \frac{\theta}{2}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прежде всего проверим, что указанный многогранник существует при  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$  и  $\theta = 2 \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Действительно, в этом случае координаты вершин целочисленные и равны

$$\begin{aligned} P_0 &= (3, 0, 0), & P_1 &= (2, \sqrt{2}, 1), & P_2 &= (1, \sqrt{8}, 0), & P_3 &= (-1, \sqrt{8}, 0), \\ P_4 &= (-2, \sqrt{2}, -1), & P_5 &= (-3, 0, 0), & P_6 &= (-2, -\sqrt{2}, 1), \\ P_7 &= (-1, -2\sqrt{2}, 0), & P_8 &= (1, -\sqrt{8}, 0), & P_9 &= (2, -\sqrt{2}, -1). \end{aligned}$$

При этом  $\mathcal{F}$  является фундаментальным для орбифолда  $4_1(\frac{2\pi}{3})$  с носителем  $S^3$  и сингулярным множеством — узел «восьмерка» с коническим углом  $\frac{2\pi}{3}$ . Его структура подробно описана в работе [8]. В частности, ориентированные объемы  $V_i$  тетраэдров  $Q_0Q_1P_iP_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, 9$ , положительны и внутренности этих многогранников не пересекаются.

Напомним, что ориентируемый объем тетраэдра  $T$  с вершинами  $(x_j, y_j, z_j)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , определяется по формуле

$$\text{Vol } T = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{pmatrix}.$$

Можно выделить следующие три вида формул для объемов  $V_i$ :

$$\begin{aligned} V_0 &= V_9 = V_4 = V_5 = \frac{txY}{3}, \\ V_2 &= V_7 = \frac{2}{3}ab, \\ V_1 &= V_3 = V_6 = V_8 = \frac{1}{3}t(Xb - Ya). \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим области вырождения объемов  $V_i$ , используя соотношения (6), (7) и (8).

При  $M \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ ,  $X \in (\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{2}{3}}]$  ориентируемые объемы  $V_i$  не меняют знака и остаются положительными, следовательно, в условиях леммы многогранник не вырождается. В результате получим, что условие положительности объемов  $V_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, 9$ , эквивалентно неравенству  $a > 0$ , где  $a$  задано уравнением (8).

**Следствие.** Пусть многообразие  $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$  евклидово. Тогда

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{1}{1953125} \left( \frac{1}{(1+M^2)^{10}} 128M^2(M^2+5)^2(11M^2-25) \right. \\ &\quad \times (3125 - 21875M^2 + 1250M^4 - 9750M^6 - 11175M^8 - 2823M^{10})X^2 \\ &\quad - \frac{169869312}{(1+M^2)^9} + \frac{254803968}{(1+M^2)^8} + \frac{23461888}{(1+M^2)^7} - \frac{136282112}{(1+M^2)^6} - \frac{10575872}{(1+M^2)^5} \\ &\quad \left. + \frac{56000512}{(1+M^2)^4} + \frac{2232832}{(1+M^2)^3} - \frac{14626688}{(1+M^2)^2} - \frac{4716288}{(1+M^2)} + 1524197 \right). \end{aligned}$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутатор  $K = STST^{-1}S^{-1}TSTS^{-1}T^{-1}$ , соответствующую слову  $\ell_s = stst^{-1}s^{-1}tsts^{-1}t^{-1}$ . Матрица  $K$  представляет собой поворот на угол  $\gamma$  вокруг некоторого ребра вида  $P_iP_{i+1}$ , соответствующего мосту между компонентами узла «восьмерка» (см. рис. 1). След ортогональной матрицы  $K$  связан с углом поворота следующим образом:  $\text{tr } K = 2 \cos \gamma + 1$ . Упрощая выражение  $\cos \gamma = \frac{1}{2}(\text{tr } K - 1)$ , получим исходное равенство.

**Теорема 2.** Евклидов объем конического многообразия  $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$  равен

$$\text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)) = \frac{8X\sqrt{1-X^2}(M^4 - 50M^2X^2 + 150X^2 - 25)}{3M^2(1 + M^2 - 8X^2)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Евклидов объем конического многообразия  $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$  равен объему фундаментального многогранника  $\mathcal{F}$ , изображенного на рис. 2. Таким образом, евклидов объем  $\text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma))$  представляет собой сумму объемов  $V_i$  тетраэдров  $Q_0Q_1P_iP_{i+1}$ , где  $i = 0, \dots, 9$ , и  $P_{10} = P_0$ , и находится по формулам (6), (8) и (9):

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)) &= \sum_{i=0}^9 V_i = \frac{4}{3}(ab + t(Y(x-a) + Xb)) \\ &= -\frac{16X\sqrt{1-X^2}(15 + 3M^2 - 105X^2 + 19M^2X^2 + 40X^4)}{3M^2(1 + M^2 - 8X^2)^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что остаток от деления полинома  $P = 15 + 3M^2 - 105X^2 + 19M^2X^2 + 40X^4$  на полином  $Q = 5 + 6M^2 + M^4 - 60X^2 - 12M^2X^2 + 80X^4$  равен  $M^4 - 50M^2X^2 + 150X^2 - 25$ . Поскольку в нашем случае  $Q = Q(M, X) \equiv 0$ , окончательный результат можно представить в виде

$$\text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)) = \frac{8X\sqrt{1-X^2}(M^4 - 50M^2X^2 + 150X^2 - 25)}{3M^2(1 + M^2 - 8X^2)^2}.$$

Проиллюстрируем полученные результаты на следующих примерах.

## 6. Примеры

Ниже приведена таблица, в которой представлены результаты численных экспериментов. В ходе которых также были вычислены:

- длины сингулярных геодезических  $\ell_\alpha$  и  $\ell_\gamma$ , которые равны соответственно  $\ell_\alpha = 2t$ , где  $t$  представлено в (6), и  $\ell_\gamma = \sum_{i=0}^9 |P_iP_{i+1}|$ .
- приведенный евклидов объем

$$\text{vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)) = \frac{\text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma))}{d\ell_\alpha^2\ell_\gamma},$$

где  $d$  — наименьшее расстояние между сингулярными компонентами, в рассматриваемой модели  $d = |Q_0Q_1| = 2$ .

Данные таблицы расположены в порядке уменьшения приведенного евклидова объема конического многообразия  $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$ .

Таблица 1

Конический угол $\alpha$ многообразия $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\alpha, \alpha, \gamma)$ , параметры $X = \cos \frac{\theta}{2}$ , $g = \cos \gamma$	Евклидов объем $\text{Vol}(\mathcal{O})$ и приведенный евклидов объем $\text{vol}(\mathcal{O})$	Евклидовы длины $\ell_\alpha$ и $\ell_\gamma$ сингулярных геодезических $\mathcal{O}$
$\alpha = \frac{2\pi}{3}$ $X = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.8165$ , $g = 1$	$\frac{32\sqrt{2}}{3} = 15.0849$ $\frac{1}{45\sqrt{2}} = 0.01571$	$2\sqrt{6} = 4.89898$ 20
$\alpha = \frac{4\pi}{5}$ $X = 0.811618$ , $g = -0.6757$	48.5817 0.008185	9.61766 32.0835
$\alpha = \frac{5\pi}{6}$ $X = 0.810809$ , $g = -1$	11.6288 0.006679	11.814 38.416
$\alpha = \frac{19\pi}{20}$ $X = 0.809175$ , $g = 0.527436$	834.486 0.00192325	41.1951 127.838
$\alpha = \pi - 0.02$ $X = 0.80902$ , $g = 0.99163$	51707 0.000243936	324.897 1004.06

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. Koebe Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven // Nachr. Akad. Wiss. Gött., II. Math.-Phys. Kl. 1907. P. .
2. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications // arXiv: math.DG/ 0211159[math.DG]. 2002.
3. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifold // arXiv:math.DG/0303109[math.DG]. 2003.
4. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds // arXiv:math.DG/0307245[math.DG]. 2003.
5. Веснин А. Ю., Рассказов А. А.. Изометрии гиперболических многообразий Фибоначчи // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 14–29.
6. Riley R. An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structure // Topology of Low-Dimension manifolds. : Springer-Verl., 1979. P. 99–133. (Lect. Notes Math.; V. 722).
7. Thurston W. The geometry and topology of 3-manifold. Lecture notes. : Princeton Univ., 1980.
8. Mednykh A., Rasskazov A. Volumes and Degeneration of Cone-structures on the Figure-eight knot // Tokyo J. Math. 2006. V. 29, N 2. P. 445–464.
9. Shmatkov R. N. Properties of Euclidean Whitehead link cone-manifolds // Sib. Adv. Math. 2003. V. 13, N 1. P. 55–86.
10. Соколова Д. Ю. О существовании евклидовой структуры на узле трилистник с мостом // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 1. С. 128–140.

Статья поступила 24 сентября 2015 г.

Медных Александр Дмитриевич, Соколова Дарья Юрьевна  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
mednykh@math.nsc.ru

## КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С БОЛЬШОЙ СТЕПЕНЬЮ НЕПРИВОДИМОГО ХАРАКТЕРА

С. С. Поисеева

**Аннотация.** Изучается конечная неединичная группа  $G$ , обладающая неприводимым комплексным характером  $\Theta$ , для которого  $|G| \leq 2\Theta(1)^2$ . Доказано, что в случае  $\Theta(1) = p^2q$ , где  $p > q$  и  $p, q$  — различные простые числа, группа  $G$  является разрешимой группой с абелевой нормальной подгруппой  $M$  индекса  $p^2q$ . С помощью классификации простых конечных групп доказано, что конечная простая неабелева группа с абелевой силовской  $p$ -подгруппой  $P \neq 1$  порядка не более  $p^2$ , для которой  $2|P|^3 > |G|$ , изоморфна группе  $L_2(q)$ , где  $q$  — либо простое число, либо квадрат простого числа.

**Ключевые слова:** конечная группа, характер конечной группы, степень неприводимого характера конечной группы.

**S. S. Poiseeva. Finite groups with an irreducible character large degree.**

**Abstract:** We study a finite nontrivial group  $G$  with an irreducible complex character  $\Theta$  such that  $|G| \leq 2\Theta(1)^2$  and  $\Theta(1) = p^2q$ , where  $p > q$  and  $p, q$  are different primes. In this case we prove that  $G$  is solvable groups with abelian normal subgroup  $M$  of index  $p^2q$ . We use the classification of finite simple groups and prove that the group with abelian Sylow  $p$ -subgroup  $P \neq 1$  whose order less than  $p^2$  and  $2|P|^3 > |G|$  is isomorphic to  $L_2(q)$ .

**Keywords:** finite group, character of a finite group, irreducible character degree of a finite group.

### Введение

Пусть  $G$  — конечная группа, обладающая неприводимым представлением над полем комплексных чисел с характером  $\Theta$ .

В общем случае степени неприводимых характеров несут довольно скудную информацию о строении группы. Поэтому естественно изучать группы, у которых степени неприводимых характеров имеют некоторые дополнительные свойства и удовлетворяют определенным ограничениям.

Конечную группу  $G \neq 1$ , обладающую неприводимым комплексным характером  $\Theta$ , для которого  $2\Theta(1)^2 \geq |G|$ , будем называть  $LC(\Theta)$ -группой.

Цель настоящей работы — изучение конечных  $LC(\Theta)$ -групп с  $\Theta(1) = p^2q$ , где  $p$  и  $q$  — различные простые числа и  $p > q$ .

Так как  $|G| \leq 2p^4q^2 < 2p^6$ , где  $p > q$ ,  $p$  и  $q$  — различные простые числа, и силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$  имеет порядок не меньше  $p^2$ , сначала, используя классификацию конечных простых групп, опишем простые неабелевы группы  $G$  с абелевой силовской  $p$ -подгруппой  $P$  порядка  $p^2$ , для которых  $|G| < 2|P|^3$ .

Е. П. Вдовиным в [1] доказано, что  $|A|^3 < |G|$ , если  $G$  — конечная простая группа, неизоморфная  $PSL_2(q)$  и  $A$  — ее абелева подгруппа. С использованием классификации конечных простых групп получены следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — конечная простая неабелева группа с абелевой силовской  $p$ -подгруппой  $P \neq 1$  порядка не более  $p^2$ . Если  $2|P|^3 > |G|$ , то  $G$  изоморфна группе  $L_2(q)$ , где  $q$  — либо простое число, либо квадрат простого числа.

**Теорема 2.** Пусть  $G$  является  $LC(\Theta)$ -группой. Если  $\Theta(1) = p^2q$ , где  $p$  и  $q$  — различные простые числа,  $p > q$ , то  $G$  —  $p$ -разрешимая группа.

В доказательстве теоремы 2 также установлено, что при  $|G| \notin \{486, 648\}$  порядок группы  $|G|$  равен  $p^2q^b m$ , где  $(pq, m) = 1$ . Следующая теорема дает описание  $LC(\Theta)$ -групп.

**Теорема 3.** Пусть  $G$  является  $LC(\Theta)$ -группой с  $\Theta(1) = p^2q$ , где  $p > q$  и  $p, q$  — простые числа. Тогда  $G$  имеет абелеву нормальную подгруппу  $M$  индекса  $p^2q$ .

Все группы предполагаются конечными. Буквы  $p$  и  $q$  везде используются для обозначения различных простых чисел. Необходимые сведения, касающиеся обыкновенных и модулярных представлений конечных групп, можно найти в [2, 3]. Скалярное произведение характеров  $\chi$  и  $\psi$  группы  $G$  обозначается через  $\langle \chi, \psi \rangle$ . В частности, если эти характеры неприводимы, то  $\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi, \psi}$  ( $\delta$  — символ Кронекера). Множество неприводимых характеров группы  $G$  обозначается через  $\text{Irr}(G)$ .

## 1. Вспомогательные результаты

Напомним, фундаментальный результат Клиффорда об ограничении неприводимого характера  $\chi$  группы  $G$  на ее нормальную подгруппу  $N$ .

**Лемма 1** (Клиффорд). Пусть  $N \triangleleft G$  и  $\chi \in \text{Irr}(G)$ , а  $\theta \in \text{Irr}(N)$ . Тогда из  $\langle \chi_N, \theta \rangle_N \neq 0$  следует, что

$$\chi_N = e(\chi) \sum_{i=1}^t \theta_i,$$

где  $\theta_i$  — характеры, сопряженные  $\theta$ . Число  $t$  различных сопряженных характеров к характеру  $\theta$  равно индексу подгруппы инерции  $I_G(\theta)$  характера  $\theta$  (состоящей из всех  $g \in G$ , для которых  $\theta^g = \theta$ ), а число  $e = e(\chi)$  делит  $|I_G(\theta) : N|$ , если  $G/N$  — разрешимая группа.

**Доказательство.** См. теорему 6.2 из [3].

**Лемма 2.** Пусть  $N \triangleleft G$  и  $\chi \in \text{Irr}(G)$ , а  $\theta \in \text{Irr}(N)$ . Если  $I_G(\theta)/N$  — циклическая группа, то  $e(\chi) = 1$ , т. е.  $\chi_N = \sum_{i=1}^t \theta_i$ .

**Доказательство.** См. 9.12 из [4].

Напомним теорему Ито о степени неприводимого характера (теорема 6.15 в [3]).

**Лемма 3** (Ито). Пусть  $N \triangleleft G$  и  $N$  абелева. Тогда  $\chi(1) \mid |G : N|$  для всех  $\chi \in \text{Irr}(G)$ .

В дальнейшем нам потребуются следующие две теоремы В. И. Зенкова из [5].

**Лемма 4.** Пусть  $G$  — конечная группа с силовской  $p$ -подгруппой  $P$ . Если  $p \neq 2$  и не простое число Мерсенна, то  $P \cap P^x = O_p(G)$  для некоторого  $x \in G$ . Если  $O_p(G) = 1$ , то  $|P|^2 < |G|$ .

**Лемма 5.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $p$  — простое число,  $P$  — силовская  $p$ -подгруппа из  $G$ ,  $S(G)$  — разрешимый радикал группы  $G$  и  $|G| = p^a m$ , где  $(p, m) = 1$ . Если  $p^a \geq m$ , то справедливо одно из следующих утверждений:

- (1)  $G$  содержит характеристическую  $p$ -подгруппу порядка  $> p^a m^{-1}$ ;
- (2) в фактор-группе  $\overline{S(G)} = S(G)/O_p(G)$  выполняются утверждения одного из следующих пунктов:

(2а)  $p = 2, q = 2^n + 1$  — простое число Ферма и  $\overline{S(G)}$  содержит секцию, изоморфную  $(Z_{2^{n+1}} \rtimes Z_{2^n}) \wr Z_2$ , при  $n > 2$  и  $((Z_3 \rtimes Z_2) \wr Z_2) \wr Z_2, V_9 \rtimes SD_{16}, (V_9 \rtimes Z_8) \wr Z_2, (V_9 \rtimes Q_8) \wr Z_2$  при  $n = 1$ ;

(2б)  $p = 2^n - 1$  — простое число Мерсенна и  $\overline{S(G)}$  содержит секцию, изоморфную  $(Z_{2^n} \rtimes Z_p) \wr Z_p$ ;

(2в)  $p = 2$  и  $S(G)$  содержит секцию, изоморфную  $((V_{7^2} \rtimes SD_{2^5}) \wr Z_2) \wr Z_2$ , причем во всех трех случаях (2а), (2б) и (2в) действие точное;

(3)  $p = 2$  и фактор-группа  $\tilde{G} = G/S(G)$  содержит секцию  $L$ , изоморфную одной из следующих групп:  $((S_5 \wr Z_2) \wr Z_2) \wr Z_2, \text{Aut}(A_6) \wr Z_2, \text{Aut}(L_3(2)) \wr Z_2, \text{Aut}(L_3(4)) \wr Z_2$ , причем каждая компонента из  $L$  является изоморфным образом соответствующей компоненты из  $E(\tilde{G})$ .

В [6] доказаны два вспомогательных утверждения, которые будут использоваться при изучении  $LC(\Theta)$ -групп с  $\Theta(1) = p^2 q$ .

**Лемма 6.** Пусть  $G$  —  $LC(\Theta)$ -группа и  $M$  — ее собственная нормальная подгруппа. Тогда характер  $\Theta_M$  приводим.

**Лемма 7.** Пусть  $G$  —  $LC(\Theta)$ -группа и  $N$  — ее собственная нормальная подгруппа. Если  $\Theta(1) = m$ , то  $(|G/N|, m) \neq 1$ .

Приведем известный результат из [7] о разрешимости группы, обладающей самономализуемой силовской  $p$ -подгруппой ( $p > 3$ ).

**Лемма 8.** Пусть  $G$  — конечная группа с силовской  $p$ -подгруппой  $P$ ,  $p > 3$  и  $N_G(P) = P$ . Тогда  $G$  разрешима.

Для оценки порядков абелевых подгрупп простых групп нам потребуется следующий результат Е. П. Вдовина [1].

**Лемма 9.** Пусть  $G$  — неабелева конечная простая группа и  $G \not\cong L_2(q)$ , где  $q = p^t$  для некоторого простого числа  $p$ . Пусть  $A$  — абелева подгруппа группы  $G$ . Тогда  $|A|^3 < |G|$ .

**Лемма 10.** Пусть  $G = G'$  — не  $p$ -разрешимая группа с силовской  $p$ -подгруппой  $P$  порядка  $p > 3$ , не имеющая нормальных подгрупп порядка 2. Если  $|G| < p^3$ , то  $G \simeq L_2(r)$ , где  $r = p$  или  $r = 2^a = p - 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. следствие 5.2, гл. VIII из [8].

**Лемма 11** (Казарин). Пусть  $G$  — конечная группа,  $x \in G$  — элемент простого порядка  $q$ . Если  $|G : C_G(x)|$  — степень простого числа  $p$ , то  $\langle x^G \rangle' = O_p(\langle x^G \rangle)$ . В частности, нормальное замыкание  $x$  в  $G$  имеет коммутант, являющийся  $p$ -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9].

**Предложение 1.** Пусть  $G$  — конечная группа, и пусть  $x$  такой элемент группы  $G$ , что  $|G : C_G(x)|$  — степень простого числа  $p$ . Тогда

$$[x^G, x^G] \subseteq O_p(G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [10].

## 2. Доказательство теоремы 1

Согласно теореме классификации конечных простых неабелевых групп (см. [11] для более подробной информации) все простые неабелевы группы принадлежат одному из следующих семейств:

I. Классические простые группы лиева типа:  $L_n(q)$ ,  $n \geq 2$ ,  $U_n(q)$ ,  $n \geq 3$ ,  $S_{2n}(q)$ ,  $n \geq 2$ ,  $P\Omega_{2n+1}(q)$ ,  $n \geq 2$ ,  $P\Omega_{2n}^\pm(q)$ ,  $n \geq 4$ .

II. Исключительные простые группы лиева типа:  $G_2(q)$ ,  $F_4(q)$ ,  $E_6(q)$ ,  $E_7(q)$ ,  $E_8(q)$ ,  ${}^2G_3(q)$ ,  $({}^2F_4(q))'$ ,  ${}^3D_4(q)$ ,  ${}^2B_2(q)$ ,  $q$  — степень простого числа.

III. Спорадические простые группы.

IV. Знакопеременные группы  $A_n$ ,  $n \geq 5$ .

Доказательство теоремы 1 будем проводить шаг за шагом для всех перечисленных групп. Напомним, что в теореме 1 силовская  $p$ -подгруппа  $P \neq 1$  имеет порядок не выше  $p^2$ .

I. Классические простые группы лиева типа.

При изучении групп Шевалле полагаем:  $GF(q)$  — поле порядка  $q$ ,  $r$  — его характеристика.

(а) Пусть  $G \cong L_n(q)$ ,  $n \geq 2$ . Легко видеть, что  $|G| > q^{n^2-n}$ , а наибольший простой делитель порядка группы не превосходит  $q^n - 1 < q^n$ . Так как  $2p^6 < p^{7n}$ , то  $q^{7n} > q^{n^2-n}$ . Отсюда  $n^2 - n < 7n$  и  $n^2 - 8n < 0$ , значит,  $n < 8$ .

При  $n = 7$  имеем

$$|G| = 1/dq^{21}(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1) > q^{42},$$

где  $d = (7, q-1)$ . Так как  $q^7 - 1 = (q-1)(q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$ , наибольший простой делитель порядка группы не превосходит  $q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^6$ . Если  $p^2 | q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ , то  $p^2 < q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^6$ . Значит,  $2(2q^6)^3 = 2^4 q^{18} > |G| > q^{42}$ , что невозможно.

Если  $p^2 \nmid q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ , то  $p | q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ , ибо  $q^5 - 1 = (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$ . Так как  $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^4$  и  $q^5 - 1$  взаимно просто со всеми делителями вида  $q^i - 1$  при  $i \neq 5$  порядка группы, то  $p^2 < 2q^4$  и  $p^2 | q^5 - 1$ . Значит,  $2p^6 < 2(q^5 - 1)^3 < 2q^{15} < q^{42}$ , что исключает этот случай.

Пусть  $n = 6$ , тогда  $|G| > q^{30}$ . Так как  $q^5 - 1 = (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$ , наибольший простой делитель порядка группы не превосходит  $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^4$ . Если  $p^2 | q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ , то  $p^2 < q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^4$ . Значит,  $2(2q^4)^3 = 2^4 q^{12} > |G| > q^{30}$ , что неверно.

Если  $p^2 \nmid q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ , то  $p | q^2 + q + 1$ , ибо  $q^6 - 1 = (q^3 - 1)(q^3 + 1) = (q-1)(q^2 + q + 1)(q+1)(q^2 - q + 1)$ . Тогда  $p < q^2 + q + 1$ , а так как  $q^2 + q + 1 < 2q^2$  в разложении порядка группы имеет вторую степень, то  $p^2 < (2q^2)^2$ . Значит,  $2p^6 < 2(2q^2)^6 = 2^7 q^{12} < q^{30}$ , что исключает этот случай.

При  $n = 5$  наибольший простой делитель порядка группы также не превосходит  $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^4$  и  $|G| > q^{20}$ . Если  $p^2 | q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ , то  $p^2 < q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^4$ . Значит,  $2(2q^4)^3 = 2^4 q^{12} > |G| > q^{20}$ , что неверно.

Если  $p^2 \nmid q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ , то  $p | q^2 + q + 1$ , ибо  $q^3 - 1 = (q-1)(q^2 + q + 1)$ . А так как  $q^2 + q + 1 < 2q^2$  взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида  $q^i - 1$  при  $i \neq 3$ , то  $p^2 < 2q^2$  и  $p^2 | q^3 - 1$ . Значит,  $2p^6 < 2(q^3 - 1)^3 < q^{20}$ , что исключает и этот случай.

Если  $n = 4$ , то наибольший простой делитель порядка группы не превосходит  $q^2 + q + 1 < 2q^2$  и  $|G| > q^{12}$ . Если  $p^2 | q^2 + q + 1$ , то  $p^2 < q^2 + q + 1 < 2q^2$ . Значит,  $2(2q^2)^3 > |G| > q^{12}$ , что неверно. Если  $p^2$  не делит  $q^2 + q + 1$ , то  $p | q^2 + 1$ . Так как  $q^2 + 1$  взаимно прост со всеми делителями порядка группы вида  $q^i - 1$  при  $i \neq 3$ , то  $p^2 | q^2 + 1$ . Значит,  $2p^6 < 2(q^2 + 1)^3 < q^{12}$ , что исключает и этот случай.

Если  $n = 3$ , то  $|G| = (1/d)q^3(q^3 - 1)(q^2 - 1)$ ,  $d = (3, q-1)$ . Поэтому  $p^2$  делит либо  $(q-1)^2$ , либо  $q+1$ , либо  $q^2 + q + 1$ . Непосредственные вычисления показывают, что и этот случай исключен.

Таким образом, если  $G \simeq L_n(q)$  удовлетворяет условию теоремы 1, то  $n = 2$ .

(b) Пусть  $G \simeq U_n(q)$ ,  $n \geq 3$ . Легко видеть, что  $|G| > q^{n^2-n}$ , а наибольший простой делитель порядка группы не превосходит  $q^n$ . Так как  $2p^6 < p^{7n}$ , то  $q^{7n} > q^{n^2-n}$ . Отсюда  $n^2 - n < 7n$  и  $n^2 - 8n < 0$ , поэтому  $n < 8$ .

Допустим, что  $n = 7$ . Тогда

$$|G| = 1/dq^{21}(q^7 + 1)(q^6 - 1)(q^5 + 1)(q^4 - 1)(q^3 + 1)(q^2 - 1) > q^{42},$$

где  $d = (7, q+1)$ . Так как  $q^7 + 1 = (q+1)(q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1)$ , наибольший простой делитель порядка группы не превосходит  $q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^6$ . Если  $p^2 | q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$ , то  $p^2 < q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^6$ .

Значит,  $2(q^6)^3 > |G| > q^{42}$ , что неверно. Если  $p^2 \nmid q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$ , то  $p|q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$ , ибо  $q^5 + 1 = (q + 1)(q^4 - q^3 + q^2 - q + 1)$ . Так как  $q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^4$  взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида  $q^i - (-1)^i$ , то  $p^2 < q^4$  и  $p^2|q^5 + 1$ . Значит,  $2p^6 < 2(q^5 + 1)^3 < q^{42}$ , что исключает этот случай.

Пусть  $n = 6$ , тогда  $|G| > q^{30}$ . Так как  $q^5 + 1 = (q + 1)(q^4 - q^3 + q^2 - q + 1)$ , наибольший простой делитель порядка группы не превосходит  $q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^4$ . Если  $p^2|q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$ , то  $p^2 < q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^4$ . Значит,  $2(q^4)^3 = 2q^{12} > |G| > q^{30}$ , что неверно. Если  $p^2 \nmid q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$ , то  $p|q^2 + q + 1$ , ибо  $q^3 - 1 = (q - 1)(q^2 + q + 1)$ . Поэтому  $p < q^2 + q + 1$ . Так как  $q^2 + q + 1$  взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида  $q^i - (-1)^i$  при  $i \neq 3$ , то  $p^2|(q^2 + q + 1)$ . А значит,  $2p^6 < 2(q^2 + q + 1)^3 < q^{30}$ , что исключает и этот случай.

При  $n = 5$  наибольший простой делитель порядка группы также не превосходит  $q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^4$ . Если  $p^2|q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$ , то  $p^2 < q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^4$ . Значит,  $2(q^4)^3 > |G| > q^{20}$ , что невозможно. Если  $p^2$  не делит  $q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$ , то  $p|q^2 + 1$ . Так как  $q^2 + 1$  взаимно прост со всеми делителями порядка группы, имеем  $p^2|q^2 + 1$ . Тогда  $2p^6 < 2(q^2 + 1)^3 < q^{20}$ , что исключено.

Если  $n = 4$ , то  $|G| > q^{12}$  и наибольший простой делитель порядка группы не превосходит  $q^2 + 1$ . Если  $p^2|(q^2 + 1)$ , то  $p^2 < q^2 + 1$ . Значит,  $2(q^2 + 1)^3 > |G| > q^{12}$ , что неверно. Если  $p^2$  не делит  $(q^2 + 1)$ , то  $p|q^2 - q + 1$ , ибо  $q^3 + 1 = (q + 1)(q^2 - q + 1)$ . А так как  $q^2 - q + 1 < q^2$  взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида  $q^i - (-1)^i$ , то  $p^2 < q^2$  и  $p = q$ . Потому  $2p^6 < q^{12}$ , что тоже исключает этот случай.

Если  $n = 3$ , то  $|G| = (1/d)q^3(q^3 + 1)(q^2 - 1)$ ,  $d = (3, q + 1)$ . Поэтому  $p^2$  делит либо  $q - 1$ , либо  $(q + 1)^2$ , либо  $q^2 - q + 1$ . Непосредственные вычисления показывают, что и этот случай исключен.

(с) Пусть  $G$  изоморфна  $S_{2n}(q)$  или  $P\Omega_{2n+1}(q)$ ,  $n \geq 2$ . Порядок  $G$  равен

$$1/dq^{n^2}(q^{2n} - 1) \dots (q^2 - 1),$$

где  $d = (2, q - 1)$ . Если  $n \geq 2$ , то  $|G| > q^{2n^2}$ . Наибольший простой делитель порядка  $G$  не превосходит  $q^n + 1$ . Если  $p^2|(q^n + 1)$ , то  $2(q^n + 1)^3 < q^{3n+2} < q^{2n^2}$  для  $n \geq 3$ . При  $(q, n) = (2, 2)$  группа  $G \simeq S_4(2)$  не проста и  $S_4(2)' \simeq L_2(9)$ .

Если  $p^2 \nmid (q^n + 1)$ , то  $p|q^{n-1} + 1$ , значит,  $p^2|q^{n-1} + 1$ . Потому  $2p^6 < 2(q^{n-1} + 1)^3 < q^{3n-1} < q^{2n^2}$  для  $n \geq 3$ , что исключает этот случай.

(d) Пусть  $G \simeq P\Omega_{2n}^\pm(q)$ ,  $n \geq 4$ . Легко видеть, что  $|G| > q^{2n^2-2n}$ , а наибольший простой делитель ее порядка не превосходит  $q^n + 1$ . Если  $p^2|(q^n + 1)$ , то  $2(q^n + 1)^3 < q^{3n+2}$  при  $n \geq 4$ , то  $2p^6 < |G|$ .

Если  $p^2 \nmid (q^n + 1)$ , то  $p|q^{n-1} + 1$ , значит,  $p^2|q^{n-1} + 1$ . Потому  $2p^6 < 2(q^{n-1} + 1)^3 < q^{3n-1} < q^{2n^2-2n}$  для  $n \geq 4$ , что исключает этот случай.

II. Исключительные простые группы лиева типа.



(а) Пусть  $G \simeq G_2(q)$ . Порядок  $G$  равен  $q^6(q^6-1)(q^2-1)$ , так что наибольший простой делитель порядка группы не превосходит  $q^2+q+1 < 2q^2$ . Если  $p^2|q^2+q+1$ , то  $p^2 < q^2+q+1 < 2q^2$ . Значит,  $2(2q^2)^3 = 2^4q^6 > |G|$ . Однако  $|G| > q^{13}$ , так что этот случай исключен.

Если  $p^2 \nmid q^2+q+1$ , то  $p|q^2-q+1$ . Так как  $q^2-q+1$  взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида  $q^i \pm 1$  для  $i \neq 3$ , то  $p^2|q^2-q+1$ . Тогда  $p^2 < q^2-q+1 < q^2$ , потому что  $2p^6 < 2q^6 < q^{13}$ , что исключает этот случай.

(б) Пусть  $G \simeq F_4(q)$  порядка  $q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$ . Наибольший простой делитель порядка  $G$  не превосходит  $q^4+1$ . Так как  $2(q^4+1)^6 < |G|$ , этот случай исключен.

(с) Пусть  $G$  — одна из групп  $E_6(q), E_7(q), E_8(q)$  или  ${}^2E_6(q)$ . Порядок любой из этих групп больше  $q^7$ , а наибольший простой делитель порядка не превосходит  $q^9$ . Так что эти группы также исключены.

(д) Пусть  $G \simeq {}^2G_2(q)$ . Порядок этой группы равен  $q^3(q^3+1)(q-1)$ . При этом  $q = 3^{2n+1}, n \geq 1$ , а наибольший простой делитель  $p$  порядка группы не превосходит  $q + \sqrt{3q} + 1 < 2q$ . Пусть  $q > 3$ . Если  $p^2|q + \sqrt{3q} + 1$ , то  $p^2 < q + \sqrt{3q} + 1 < 2q$ . Значит,  $2(2q)^3 = 2^4q^3 < |G|$ , что невозможно. Если  $p^2 \nmid q + \sqrt{3q} + 1$ , то  $p = q$  — наибольший простой делитель порядка  $G$ . Тогда  $2q^6 \geq |G|$ , так что  $q = 3$  и  $G \simeq L_2(8).3$  — не простая группа.

(е) Пусть  $G \simeq ({}^2F_4(q))'$ . Ее порядок равен  $q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1) > 2q^{16}$ , где  $q = 2^{2n+1}, n \geq 2$ , а наибольший простой делитель  $p$  порядка группы не превосходит  $q^4 - q^2 + 1 < q^4$ . Если  $p^2|q^4 - q^2 + 1$ , то  $p^2|q^4 - q^2 + 1 < q^4$ . Значит,  $2(q^4)^3 = 2q^{12} < 2q^{16} < |G|$ . Если  $p^2 \nmid q^4 - q^2 + 1$ , то  $p|q^2 + 1$ . Значит,  $p < (q^2+1)$ , а так как  $q^2+1$  в разложении порядка группы имеет вторую степень, то  $p^2 < (q^2+1)^2$ . Потому что  $2p^6 < 2(q^2+1)^6 < |G|$ , что исключает и этот случай.

(ф) Пусть  $G \simeq {}^3D_4(q)$  порядка  $q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1) > q^{26}$ , а наибольший простой делитель  $p$  не превосходит  $q^4 - q^2 + 1 < q^4$ . Если  $p^2|q^4 - q^2 + 1$ , то  $p^2 < q^4 - q^2 + 1 < q^4$ . Значит,  $2(q^4)^3 = 2q^{12} < |G|$ .

Если  $p^2 \nmid q^4 - q^2 + 1$ , то  $p|q^2 + q + 1$ . Значит,  $p < (q^2 + q + 1)$ , а так как  $q^2 + q + 1 < 2q^2$  в разложении порядка группы имеет вторую степень, то  $p^2|q^2+q+1$ . Поэтому  $p^2 < q^2+q+1 < 2q^2$ , стало быть,  $2p^6 < 2(2q^2)^3 = 2^4q^6 < |G|$ , что исключает и этот случай.

(г) Пусть  $G \simeq {}^2B_2(q) \simeq Sz(q)$  порядка  $q^2(q^2+1)(q-1)$ , где  $q = 2^{2n+1}, n \geq 1$ . Наибольший простой делитель  $p$  порядка  $G$  не превосходит  $q + \sqrt{2q} + 1 < 2q$ . Если  $p^2|q + \sqrt{2q} + 1$ , то  $p^2 < q + \sqrt{2q} + 1 < 2q$ . Значит,  $2(2q)^3 < |G|$ . Если  $p^2 \nmid q + \sqrt{2q} + 1$ , то  $p|q - \sqrt{2q} + 1$ , откуда  $p^2|q - \sqrt{2q} + 1$  и  $p^2 < q - \sqrt{2q} + 1 < q$ . Потому что  $2p^6 < 2q^3 < |G|$ , что исключает и этот случай.

III. Спорадические простые группы. Все случаи исключены (см. [12]).

IV. Знакопеременные группы  $A_n, n \geq 5$ .

Так как  $|A_n| = n!/2 \leq 2n^6$ , то  $n! \leq 4n^6$ . С другой стороны, известно, что  $n! \geq n^{n/2}$ . Поэтому  $n^{n/2} \leq 4n^6 < n^7$ , откуда  $n/2 < 7$  и  $n < 14$ . При  $n = 5, 6$  появляются группы  $A_5, A_6$  порядков 60, 360 соответственно, с абелевой силовской  $p$ -подгруппой  $P$  порядков 4, 9 соответственно. Заметим, что  $A_5 \simeq$

$L_2(5)$  и  $A_6 \simeq L_2(9)$ . Все остальные возможности исключены. Теорема доказана.

### 3. Доказательство теоремы 2

Пусть  $G$  —  $LC(\Theta)$ -группа с  $\Theta(1) = p^2q$ , где  $p$  и  $q$  — различные простые числа и  $p > q$ . Зафиксируем данные обозначения.

В силу равенства  $\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)^2 = |G|$  и  $2\chi(1)^2 \geq |G|$  характер  $\Theta$  является единственным неприводимым характером группы  $G$  наибольшей степени, причем все значения  $\Theta(g)$ ,  $g \in G$ , являются целыми рациональными числами.

В [13] доказано, что любой неприводимый характер  $LC(\Theta)$ -группы, порядок которой не равен степени числа 2, является конституентой характера  $\Phi = \Theta^2$ . Отметим, что  $Z(G) = 1$  и  $\Theta$  — точный характер.

Допустим, что  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Так как  $G$  —  $LC(\Theta)$ -группа с  $\Theta(1) = p^2q$ , где  $p$  и  $q$  различные простые числа и  $p > q$ , причем  $p^4q^2 < |G| \leq 2p^4q^2$  и  $pq \mid |G|$ , то  $|G| = p^a q^b m$ ,  $a, b, m \in \mathbb{N}$  и  $2 \leq a$ , т. е. силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$  имеет порядок не меньше  $p^2$ . Заметим, что  $|G| \leq 2p^4q^2 < 2p^6$ , поскольку  $p > q$ .

Верхние границы порядка силовской  $p$ -подгруппы в  $LC(\Theta)$ -группе с  $\Theta(1) = p^2q$  сформулируем в виде следующей леммы.

**Лемма 12.** Пусть  $G$  —  $LC(\Theta)$ -группа с  $\Theta(1) = p^2q$ , где  $p$  и  $q$  — различные простые числа и  $p > q$ . Тогда силовская  $p$ -подгруппа  $P$  группы  $G$  имеет порядок не больше  $p^5$ . Если  $P \triangleleft G$ , то  $|G| = 486$ . Если  $P$  не нормальна в  $G$ , то  $|P| \leq p^3$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  —  $LC(\Theta)$ -группа с  $\Theta(1) = p^2q$ , где  $p > q$ . Так как  $|G| \leq 2p^4q^2 < p^7$ , то  $|P| \leq p^6$ , иначе  $q$  не делит  $|G|$ . Если  $|P| = p^6$ , то  $2p^4q^2 < 2p^6$  ввиду  $q < p$ . Значит,  $|G| = |P| = p^6$  что неверно, ибо в таком случае  $q$  не делит  $|G|$ . Значит,  $|P| \leq p^5$ .

Допустим, что  $|P| = p^5$ . Так как  $|G| = p^5 q^b m \leq 2p^4 q^2$ , где  $(m, pq) = 1$ , то  $b \leq 2$ . Однако  $p > q \geq 2$ . Следовательно, можно считать, что  $b = 1$ . В этом случае  $pm \leq 2q$ . Так как при  $m = 1$  подгруппа  $P \triangleleft G$ , то  $m \geq 2$  и  $p < q$  вопреки предположению. Стало быть,  $|P| \triangleleft G$  и  $|G| = p^5 q$ . При этом  $|Z(P)| = p$  и подгруппа  $Q$  порядка  $q$  из  $G$  действует нетривиально на  $Z(P)$ . Отсюда  $q \mid p - 1$ . Существует  $p - 1$  сопряженных характеров группы  $G$  степени  $p^2q$ , исчезающих на  $P \setminus Z(P)$ . Поэтому группа  $Q$  разбивает их на орбиты длины  $q$ . Таким образом, имеется  $(p - 1)/q$  характеров группы  $G$  степени  $p^2q$ . Так как может быть только один характер степени  $p^2q$ , то  $q = p - 1$ . Отсюда  $p = 3$ ,  $q = 2$  и  $|G| = 486$ .

Допустим, что  $P \triangleleft G$  и  $|P| = p^4$ . По лемме 1 имеем

$$\Theta_P = e \sum_{i=1}^s \chi_i,$$

где  $e, s \mid |G/P|$  и  $\chi_i \in \text{Irr}(P)$ . Так как  $G/P$  имеет порядок, взаимно простой с  $p$ , и  $\Theta(1) = p^2q$ , то  $\chi_i(1) = p^2$ , что приводит к противоречию, ибо сумма квадратов степеней неприводимых характеров группы  $P$  в этом случае больше  $p^4$ . Стало быть, в случае нормальной  $P$  ее порядок равен  $p^5$ . Лемма доказана.

Следующая лемма показывает, что когда  $\Theta(1) = 3^2 \cdot 2$ , порядок группы  $G$  содержится в  $\{342, 486, 504, 648\}$ .

**Лемма 13.** Пусть  $G$  —  $LC(\Theta)$ -группа с  $\Theta(1) = p^2q$ , где  $p$  и  $q$  — различные простые числа,  $p > q$ . Тогда либо  $p > 3$ , либо  $|G| \in \{342, 486, 504, 648\}$ .

**Доказательство.** Допустим, что  $p = 3$ . Тогда  $q = 2$ . Поэтому  $|G| \leq 3^4 \cdot 2^3 = 648$ , при этом порядок группы  $G$  делится на  $\Theta(1) = 3^2 \cdot 2 = 18$ . Учитывая, что

$$\frac{|G|}{|\Theta(1)|} = \frac{2^3 \cdot 3^4}{2 \cdot 3^2} \leq 2^2 \cdot 3^2 = 36,$$

и то, что неразрешимая группа порядка не более  $81 \cdot 8 = 648$  имеет неразрешимый композиционный фактор, содержащийся в [12], убеждаемся в том, что таких факторов не должно быть. Отсюда заключаем, что  $G$  разрешима и  $|G|$  делит одно из чисел:  $648 = 2^3 \cdot 3^4$ ,  $342 = 19 \cdot 2 \cdot 3^2$ ,  $486 = 2 \cdot 3^5$  или  $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ . Применяя GAP [14], убеждаемся, что каждая из этих возможностей реализуется.

Начиная с этого момента будем считать, что  $p > 3$ . Покажем, что порядок  $P$  может равняться  $p^3$  только при  $O_p(G) > 1$ .

**Лемма 14.** Если  $O_p(G) = 1$ , то либо  $P = N_G(P)$  и  $|P| = p^3$ , либо  $|G| = p^2q^b m$ , где  $(pq, m) = 1$ .

**Доказательство.** Допустим, что  $O_p(G) = 1$ . Так как  $|G|$  делится на  $\Theta(1) = p^2q$ , то  $|G| = p^a q^b m$ , где  $(pq, m) = 1$  и  $a, b, m \in \mathbb{N}$ . По леммам 12 и 13 имеем  $p > 3$ ,  $2 \leq a \leq 3$ . В силу леммы 4  $p^a < q^b m$  и из  $2\Theta(1)^2 \geq |G|$  получаем  $q^{b-2} m \leq 2p^{4-a}$ .

Пусть  $a = 3$  и  $|G| = p^3 q^b m$ , где  $p^3 q^b m \leq 2p^4 q^2$ . Тогда  $q^{b-2} m \leq 2p$ . Так как  $O_p(G) = 1$ , из леммы 4 получаем  $p^3 < q^b m \leq 2pq^2$ . Значит,  $p^2 \leq 2q^2$ .

Пусть  $|N_G(P)| = n|P| = np^3$ , где  $n > 1$ . Так как по лемме 4 хотя бы для одного  $x \in G$  выполнено  $P \cap P^x = 1$ , то

$$|G| \geq |N_G(P)| + \frac{n^2|P|^2}{d} = np^3 + \frac{n^2 p^6}{d},$$

где  $d = |N_G(P) \cap N_G(P)^x| |n|$ . Поэтому  $p^3 q^b m \geq np^3 + np^6$ , откуда  $q^b m > np^3$ . Так как  $np^3 < q^b m \leq 2pq^2$ , то  $np^2 < 2q^2$ , где  $n > 1$ , т. е.  $p^2 < q^2$ , что невозможно.

Поэтому при  $O_p(G) = 1$  имеем  $N_G(P) = P$  для  $|P| = p^3$  или  $|G| = p^2 q^b m$ , где  $(pq, m) = 1$ .

Следующая лемма показывает, что для не  $p$ -разрешимой группы  $G$  случай  $O_p(G) \neq 1$  невозможен.

**Лемма 15.** Если  $G$  не  $p$ -разрешима, то  $O_p(G) = 1$ .

**Доказательство.** Допустим, что  $O_p(G) > 1$ . По лемме 3 степень любого неприводимого характера группы  $G$  делит  $|G : O_p(G)|$ , если  $O_p(G)$  абелева. Так как  $G$  не  $p$ -разрешима,  $P$  не нормальна в  $G$ . Поэтому либо  $|O_p(G)| = p$ , либо  $|O_p(G)| = p^3$ . Покажем, что в любом случае  $G$  имеет нормальную подгруппу  $U$  порядка  $p$ . Если  $|O_p(G)| = p$  это верно.

По лемме 3 если  $|O_p(G)| = p^3$ , то  $P$  неабелева и потому  $|Z(P)| = p$  и  $U = Z(P) \triangleleft G$ . Пусть  $H = C_G(U)$ . Так как  $U \triangleleft G$ , то  $H \triangleleft G$  и  $G/H \leq \text{Aut}(U)$  и потому изоморфна циклической группе, имеющей порядок, делящий  $p - 1$ . Так как  $Z(G) = 1$ , то  $G/H \neq 1$  и является циклической группой. По лемме 7 получаем, что  $(p - 1) -$  степень числа  $q$ . Применяя теорему Клиффорда (лемма 1), имеем

$$\Theta_H = e \sum_{i=1}^s \chi_i,$$

где  $\chi_i$  — сопряженные неприводимые характеры,  $e$  и  $s$  делят  $|G/H| = q^\lambda$ . Отсюда  $p^2q = \Theta(1) = es\chi_i(1)$ . По лемме 2  $e = 1$  и  $\chi_i(1) = p^2$ ,  $s = q$ . Таким образом,  $H$  имеет  $q$  неприводимых характеров  $\chi_i$  степени  $p^2$ , откуда  $|H| > p^4q$  и  $|G| > p^4qq^\lambda$ . Поэтому  $\lambda = 1$ . Так как  $|G| = |H|q < 2p^4q^2$ , то  $|P|q^{b-1}m = |H| < 2p^4q$ .

Если  $|P| = p^4$ , то  $q^{b-1}m < 2q$ . При этом  $|H : P| = mq^{b-1} < 2q$ . При  $b \geq 2$  получаем, что  $m \leq 2$  и  $H$ , а потому и  $G$  разрешима. Если  $b = 1$ , то  $|H : P| = m < 2q$ . Напомним, что  $q \mid p - 1$ . Так как  $p$  нечетно, то  $q \leq (p - 1)/2$ . Поэтому  $|H : P| < p$  и  $P \triangleleft H \triangleleft G$ . В силу характеристичности  $P$  имеем  $P \triangleleft G$  и  $G$  будет  $p$ -разрешимой вопреки предположению. Поэтому случай  $|P| = p^4$  невозможен.

Теперь  $|P| = p^3$  и  $|H : P| = q^{b-1}m \leq 2pq$ . При  $b = 2$  имеем  $|H : P| = qm \leq 2qr$  и потому  $m \leq p$ . Тогда  $P \triangleleft H$ , откуда  $P \triangleleft G$  и  $G$  будет  $p$ -разрешимой вопреки предположению. Наконец, при  $b = 1$  имеем  $|H| = p^3m$ , где  $m \leq 2pq$ .

Заметим, что  $|O_p(G)| = p$  и  $m \leq 2pq \leq p(p - 1)$ . Поэтому в группе  $\bar{H} = H/O_p(G)$ , порядок которой меньше  $|P|^2$ , подгруппа  $O_p(\bar{H})$  нетривиальна по лемме 4; противоречие. Лемма доказана.

**Лемма 16.** Если  $P = N_G(P)$ , то  $G - p$ -нильпотентная группа порядка  $p^2q^b m$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8 группа  $G$  разрешима. Если  $|G| = p^2q^b m$ , где  $(pq, m) = 1$ , то  $G$   $p$ -нильпотентна по теореме Бернсайда.

По леммам 12 и 13  $|G| = p^a q^b m$ , где  $(pq, m) = 1$  и  $2 \leq a \leq 3$ . Предположим, что  $a = 3$ , причем  $q^{b-2}m < 2p$ .

Допустим, что  $1 \neq m \leq p$ . Если  $m \mid |O_{p'}(G)|$ , то для любого простого делителя  $r$  числа  $m$  в группе  $O_{p'}(G)P$  существует холлова  $\{r, p\}$ -подгруппа  $RP$ , являющаяся nilьпотентной, что противоречит условию. Аналогичным образом, не существует нормальной подгруппы  $K$  группы  $G$ , порядок которой делится на  $r$ , но не делится на  $|P|$ . Так как  $G$  разрешима, она и  $r$ -разрешима. Поэтому  $O_{r',r}(G)$  содержит  $P$  и по аргументу Фраттини  $N_G(P) \neq P$ ; противоречие. Стало быть, либо  $m = 1$ , либо  $m > p$  и является простым числом.

Если  $m > p -$  простое число, то  $q^{b-2} < 2$ , откуда  $1 \leq b \leq 2$ . При  $b = 1$  получаем противоречие аналогично предыдущему случаю. Поэтому  $b = 2$ . Так как  $P = N_G(P)$ , то при  $m \mid |O_{p'}(G)|$  подгруппа  $M$  порядка  $m$  будет нормальной в  $O_{p'}(G)$ , а потому и в  $G$ . В этом случае  $H = C_G(M) \triangleleft G$  и  $|G/H| \mid |\text{Aut}(M)| = m - 1$ . Так как  $m > p$  и  $m < 2p$ , то  $p$  не делит  $|G/H|$ . В то же время  $H \neq G$ , ибо

$Z(G) = 1$ ; противоречие. Следовательно,  $m$  не делит  $|O_{p'}(G)|$ . Таким образом, либо  $O_{p'}(G) = 1$ , либо  $q^2 = |O_{p'}(G)|$ .

Допустим, что  $|O_{p'}(G)| = q^2$ . Если  $Q \in \text{Syl}_q(G)$  циклическая, то  $G/C_G(Q)$  имеет порядок, делящий  $q - 1$  и отличный от единицы. Как и в предыдущем случае, это приводит к противоречию. Итак,  $O_{p'}(G) = 1$ .

По теореме 6.3.3 из [2] имеем  $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$ . Если  $|O_p(G)| = p$ , то  $|G| \mid p(p - 1)$ , что противоречиво. Если  $|O_p(G)| = p^3$ , то  $P \triangleleft G$  вопреки условию. Если же  $|O_p(G)| = p^2$ , то получаем противоречие с леммой 3.

Итак, можно считать, что  $m = 1$  и  $|G| = p^3q^b$ , где  $q^{b-2} \leq 2p$ . Из  $|P| = |N_G(P)| = p^3$  следует, что случай  $|O_p(G)| \neq 1$  ведет к противоречию. По теореме 6.3.3 в [2] и лемме 4 получаем, что  $|O_q(G)| = q^b$  и  $p^2 < 2q^2$ . В частности,  $G$  является  $p$ -нильпотентной группой. Отметим, что  $Q = O_q(G)$  является элементарной абелевой группой ввиду леммы 4 (в противном случае некоторый элемент порядка  $p$  индуцирует тривиальный автоморфизм на  $Q/\Phi(Q)$ ). По лемме 3 получаем, что  $G$  не имеет неприводимых характеров степени  $p^2q$ ; противоречие. Все случаи рассмотрены. Лемма доказана.

Далее будем считать, что  $|G| = p^2q^b m$ , где  $m$  взаимно просто с  $pq$ ,  $b \in \mathbb{N}$ .

**Лемма 17.** Пусть  $G$  — не  $p$ -разрешимая  $LC(\Theta)$ -группа. Тогда  $G$  не проста и любая простая не  $p$ -разрешимая секция  $L$  группы  $G$  изоморфна  $L_2(r)$ , где  $r$  — степень простого числа, причем  $r = p, p^2$  или  $p - 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  — простая  $LC(\Theta)$ -группа. По лемме 15 имеем  $O_p(G) = 1$ , а по леммам 14 и 16 порядка  $|G| = p^2q^b m$ , где  $p > q$ , будет  $(m, pq) = 1$ . Напомним, что  $\Theta(1) = p^2q$ . По теореме 1 группа  $G$  изоморфна группе  $L_2(r)$ . Так как порядок силовской  $p$ -подгруппы группы  $G$  делит  $p^2$ , то  $r$  равно  $p, p^2$  или  $p - 1$ .

Таблицы характеров данных групп имеются в [15]. Ни одна из перечисленных групп не является  $LC(\Theta)$ -группой при любом выборе неприводимого характера  $\Theta$ .

Предположим, что  $G$  имеет секцию  $S$ , изоморфную простой неабелевой группе. Так как порядок  $S$  равен  $p^a q^c m'$ , где  $a \leq 2, m' \leq m, c \leq b$  и  $|G| < 2|P|^3$ , из теоремы 1 следует, что  $S \simeq L_2(r)$ , где  $r$  — степень простого числа. Лемма доказана.

Перейдем к завершению доказательства теоремы 2.

**Доказательство теоремы 2.** В силу леммы 4 и условий, наложенных на группу  $G$ , имеем

$$p^4 q^2 < |G| = p^a q^b m \leq 2p^4 q^2,$$

где  $a \leq 4$  ввиду леммы 12. Так как  $G$  не является  $p$ -разрешимой группой, из лемм 15 и 16 следует, что  $a = 2$ , откуда  $q^{b-2} m \leq 2p^2$  и  $q^{b-2} m > p^2$ .

Покажем, что в композиционном ряде группы  $G$  не может содержаться двух не  $p$ -разрешимых композиционных факторов. В самом деле, по лемме 17 каждый из факторов будет изоморфен группе  $L_2(r)$ , где  $r = p, p^2$  или  $p - 1$ .

Допустим, что в  $G$  имеется два композиционных фактора, изоморфных  $L_2(p)$ . Тогда  $|G| \geq (1/4)p^2(p^2 - 1)^2$ , тогда как  $|G| < 2p^4q^2$ . Так как  $p > 3$ , то  $q \leq p - 1$ . Отсюда

$$\frac{8p^4q^2}{p^2(p^2 - 1)^2} = \frac{8p^2q^2}{(p^2 - 1)^2} \leq \frac{2p^2}{(p + 1)^2} < 8.$$

Учитывая, что  $Z(G) = 1$ , а внешняя группа автоморфизмов группы  $L_2(p)$  имеет порядок 2 для нечетного  $p$ , заключаем, что  $G$  имеет подгруппу индекса  $\leq 4$ , изоморфную  $L_2(p) \times L_2(p)$ .

Так как при  $r = p - 1$  и  $p > 3$  число  $r$  является степенью двойки, имеем  $|L_2(p - 1)| = p(p - 1)(p - 2) > |L_2(p)|$ . Поэтому случай, когда хотя бы одна из групп  $L_2(p)$  заменена на  $L_2(p - 1)$ , также исключен.

Докажем, что существование в композиционном ряде группы  $G$  фактора, изоморфного  $L_2(p^2)$  также невозможно. Действительно,

$$|L_2(p^2)| = (1/2)p^2(p^4 - 1) > |L_2(p) \times L_2(p)|.$$

По лемме 15  $O_p(G) = 1$ . Пусть  $M = O_{p'}(G)$ . Если  $C_G(M) \subseteq M$ , то из леммы 5 следует, что  $|M| \geq |P| + 1 = p^2 + 1$ . Так как  $|P| = p^2$ , получаем

$$2p^4q^2 \geq |G| \geq |M||L_2(p)|p = (1/2)(p^2 + 1)p^2(p^2 - 1).$$

Отметим, что  $q$  делит  $|L_2(p)|$ . Поэтому  $q \leq (p + 1)/2$  и, стало быть,  $G$  совпадает с подгруппой порядка  $(1/2)(p^2 + 1)p^2(p^2 - 1)$ . Причем в этом случае  $|M| = p^2 + 1$ . Последнее возможно только в том случае, когда  $P$  имеет единственную орбиту на  $M \setminus \{1\}$ . Тогда  $MP$  — группа Фробениуса и  $P$  — циклическая группа, что неверно.

Таким образом,  $C_G(M) \triangleleft G$  не является  $p$ -разрешимой группой, но порядок  $G$  делится на  $|M|p|L_2(p)|$ . Более того, имеется единственный не  $p$ -разрешимый фактор группы  $C_G(M)$ , изоморфный  $L_2(p)$ . Поэтому  $T \simeq L_2(p)$  или  $T \simeq SL_2(p)$  нормальна в  $G$ . В  $G$  имеется фактор, изоморфный  $C_p$ , циклической группе порядка  $p$ , причем наибольшая нормальная  $p$ -разрешимая подгруппа  $S$  группы  $G$  имеет  $p$ -длину один. Легко видеть, что  $G/S$  изоморфна  $L_2(p)$ , группе автоморфизмов  $L_2(q)$  порядка  $p(p^2 - 1)$ . Таким образом, имеются следующие возможности:

- a)  $G/S \simeq PGL_2(p)$ ,  $q = 2$  и  $|G| \leq 8p^4$ ;
- b)  $G/S \simeq L_2(p)$ ,  $S/M$  — расширение  $C_p$  с помощью подгруппы порядка  $q^m \mid (p - 1)$ ;
- c)  $G/S \simeq L_2(p)$ ,  $|S/M| = p$ ,  $q \mid (p + 1)/2$ .

Во всех случаях по теореме 6.3.3 в [2] имеем  $C_S(M) \subseteq M$  и потому  $|M| \geq p + 1$ . Так как  $Z(G) = 1$ , случай, когда подгруппа, изоморфная  $SL_2(p)$ , нормальна в  $G$ , исключен.

(a) Если  $q = 2$ , то  $|G| \leq 8p^4$ , тогда как  $|S|2|L_2(p)| \geq (p + 1)p^2(p^2 - 1)$ . Поэтому  $p \leq 7$ . Так как в этом случае подгруппа  $O_{p'}(G)$  должна иметь порядок не более 8, получаем противоречие. Случай (a) невозможен.

(b) В этом случае  $q \leq (p-1)/2$  и  $G \simeq S \times L$ , где  $L \simeq L_2(p)$ . Непосредственные вычисления дают оценку  $|M| \leq 2p - 2$ . Поэтому в  $M$  имеется не более одной орбиты длины  $p$ . В частности,  $M$  — элементарная абелева примарная группа. Отсюда степень любого неприводимого характера  $\psi$  группы  $S = M \rtimes C_p \rtimes C_d$  для  $d$ , делящего  $p-1$ , делит  $dp$ . Так как  $p^2 > |M|$ , то  $\psi(1) \leq d$ . Согласно [15, с. 262, 263]) степень любого неприводимого характера группы  $L_2(p)$  не превосходит  $p+1$ . По теореме 3.7.1 в [2] любой неприводимый характер группы  $G$  есть произведение неприводимых характеров групп  $S$  и  $L$ . Стало быть,  $G$  не имеет характеров степени  $p^2q$ .

(c) Группа  $G = S \times L$ . Так как  $|G| \leq 2p^4q^2$ , то  $|S||L| \leq 2p^4q^2$  и  $|S| \leq 4pq^2 + 2q$ . Так как  $L$  не имеет характеров степени больше, чем  $p+1$  (см. [15, с. 262, 263]), а степень любого неприводимого характера группы  $G$  является произведением степени неприводимого характера группы  $L$  и степени неприводимого характера группы  $S$ , то должен существовать неприводимый характер  $S$  степени  $pq$ . Поэтому  $|S| > p^2q^2$ , откуда  $p < 4q$ . Это означает, что  $q = (p+1)/2$ .

Напомним, что  $q^{b-2}m < 2p^2$ . Так как  $p-1$  делит в этом случае  $m$ , то  $m = t(p-1)$  для некоторого натурального  $t$ . При  $b = 4$  получим  $(p+1)^2m < 8p^2$ . Но тогда  $m \leq 7$  и  $p \leq 8$ . Несложные вычисления исключают эту возможность.

Предположим, что  $b = 3$ . Тогда  $m \leq 4(p-1)$ . В этом случае  $|M| = q^2m/(p-1) = tq^2$ , где  $t \leq 4$ . Если  $t = q = 2$ , то  $p = 3$ , что уже было исключено. Если  $t = q = 3$ , то  $p = 5$ . Но тогда  $p = 5$  не делит  $|Out(M)|$ . В остальных случаях группа  $S$  имеет абелеву силовскую  $q$ -подгруппу. По лемме 3  $S$  не может иметь неприводимого характера степени  $pq$ .

Предположим, что  $b = 2$ . Тогда  $p^2 < m < 2p^2$ . При этом  $m = t(p-1)$  для некоторого натурального  $t$ . Порядок  $M$  равен  $qm/(p-1)$ . Если  $t = q$  или  $t = 2q$ , то группа  $S$  не имеет неприводимого характера степени  $pq$ . В любом другом случае группа  $S$  имеет порядок, меньший  $p^2q^2$ , и потому  $b \neq 2$ .

Теперь  $b = 1$ ,  $|G| = p^2qm$ , где  $p^2q < m < 2p^2q$ ,  $q = (p+1)/2$ . В этом случае  $|S| = pm/(p-1)$ . Поскольку степень неприводимого характера должна делить порядок группы, отсюда следует, что  $S$  не имеет характера степени  $pq$ , а тогда и  $G$  не имеет характера степени  $p^2q$ . Все возможности исключены. Теорема 2 доказана.

#### 4. Доказательство теоремы 3

В теореме 2 было установлено, что  $G$  является  $p$ -разрешимой группой. В лемме 12 (при условии, что  $|G| \neq 486$ ) порядок силовской  $p$ -подгруппы  $P$  группы  $G$  не больше  $p^3$ . В леммах 14 и 16 доказано, что  $|P| = p^2$  при  $O_p(G) = 1$ .

**Лемма 18.**  $O_p(G) = 1$  и  $|P| = p^2$ .

**Доказательство.** Допустим, что  $U = O_p(G) = 1$ . По лемме 12 подгруппа  $P \in \text{Syl}_p(G)$  не нормальна в  $G$ . Из леммы 3 следует, что  $|U| \neq p^2$ . Поэтому  $|U| = p$ . Следовательно,  $H = C_G(P)$  содержит коммутант группы  $G$ , и в силу

леммы 7  $|G/H| = q^\lambda \neq 1$  и группа  $G/H$  циклическая. По леммам 1, 2 и 6 имеем

$$\Theta_H = \sum_{i=1}^q \chi_i,$$

где  $\chi_i \in \text{Irr}(P)$ . Так как  $G/H$  имеет взаимно простой с  $p$  порядок и  $\Theta(1) = p^2q$ , то  $\chi_i(1) = p^2$ . Поэтому  $H$  имеет  $q$  сопряженных неприводимых характеров степени  $p^2$ . Так как  $|H| > p^4q$  и  $|G/H| = q^\lambda$ , то  $\lambda = 1$ .

Имеется  $q$ -подгруппа  $Q$  группы  $G$ , не лежащая в  $H$ . Она действует сопряжениями на множестве неприводимых характеров степени  $p^2$  группы  $H$ . Группа Галуа действует на множестве характеров степени  $p^2q$  группы  $G$ . Общее количество неприводимых характеров степени  $p^2$  группы  $H$  равно  $p-1$ . В орбиту группы  $Q$  попадают  $q$  таких характеров. Поэтому количество неприводимых характеров степени  $p^2q$  у группы  $G$  не меньше  $(p-1)/q$ . Так как имеется ровно один характер, сопряженный с  $\Theta$ , то  $p-1 = q$ . Поэтому в данном случае  $p = 3, q = 2$ , что исключено в замечании перед леммой 14. Итак,  $O_p(G) = 1$  и  $|P| = p^2$ . Лемма доказана.

По теореме 2 группа  $G$  является  $p$ -разрешимой, а из леммы 18 получили, что силовская  $p$ -подгруппа  $P$  группы  $G$  абелева порядка  $p^2$ . По теореме 6.3.3 в [2] имеем  $G = O_{p',p,p'}(G)$ , причем  $H = O_{p',p}(G) = M \rtimes P$ , где  $M = O_{p'}(G)$ . Эти обозначения зафиксируем до конца доказательства теоремы 3.

**Лемма 19.** Если  $G \neq H$ , то  $|G : H| = q$  и  $\Theta_H = \sum_{i=1}^q \chi_i$ , где  $\chi_i \in \text{Irr}(H)$  — сопряженные характеры группы  $H$  степени  $p^2$ .

**Доказательство.** По теореме 2  $LC(\Theta)$ -группа  $G$   $p$ -разрешима и  $|G| = p^2q^b m$ , где  $\Theta(1) = p^2q$ , причем  $(pq, m) = 1$ . Допустим, что  $P \in \text{Syl}_p(G)$  и  $H = O_{p',p}(G)$ . Так как  $P$  — абелева группа порядка  $p^2$ , то  $P$  изоморфна либо циклической группе  $C_{p^2}$ , либо элементарной абелевой  $C_p \times C_p$ . Тем самым  $G/H \leq \text{Out}_G(P)$  является  $p'$ -группой. Обозначим  $f = |G : H|$ . По лемме 7 группа  $G/H$  не может иметь нормальных подгрупп простого индекса, отличного от  $q$ . Так как  $p'$ -группа  $\text{Out}_G(P)$  изоморфна либо циклической группе порядка, делящего  $p-1$  (случай  $P = C_{p^2}$ ), либо группе порядка, делящего  $(p^2-1)(p-1)$  (случай  $P \cong C_p \times C_p$ ), то  $q$  делит  $p \pm 1$ . По лемме 1 (теория Клиффорда) имеем

$$\Theta_H = e \sum_{i=1}^s \chi_i,$$

где  $\chi_i$  — сопряженные неприводимые характеры группы  $H$ , причем  $es\chi_1(1) = p^2q$ , где  $es$  делит  $|G : H|$ . В частности, из  $(p, es) = 1$  следует, что  $es = q$  и  $\chi_i(1) = p^2$ . В любом случае имеется нормальная подгруппа  $H_1 \geq H$  индекса  $q$  в  $G$ . Так как  $\Theta_{H_1}$  приводим ввиду леммы 7, то  $\Theta_{H_1} = e \sum_{i=1}^q \chi_i$ , где  $\chi_i(1) = p^2$ . В частности,  $|G : I_G(\chi_1)| = q$ . Поэтому получаем

$$\chi_1^G = \sum_{i=1}^t e_i \bar{\phi}_i,$$



где один из характеров, скажем  $\bar{\phi}_1$ , равен  $\Theta$  и

$$\sum_{i=1}^t e_i^2 = |I_G(\chi_1) : H| = f/g.$$

Понятно, что  $H_1 = I_G(\Theta)$ . Так как  $H_1$  имеет  $q$  неприводимых характеров степени  $p^2$ , то  $|H_1| \geq (p^4q + 1)$ . С другой стороны, подгруппа  $M = O_{p'}(G)$  не централизуется элементом из  $P^\#$  ввиду леммы 3 (теорема Ито). Поэтому  $|M| > p^2$  и потому  $|H| > p^4$ . Следовательно, из  $|G| = |G : H| < 2p^4q^2$  получаем, что  $f = |G : H| < 2q^2$ . Таким образом, ввиду леммы 7 имеются следующие возможности:

- (a)  $|G : H| = q^2$ ;
- (b)  $|G : H| = q(q + 1)$ , где либо  $q + 1$  — степень двойки, либо  $q + 1 = 3$ ,  $q = 2$ ;
- (c)  $|G : H| = q$ .

Однако в случаях (a) и (b) имеется более одного неприводимого характера степени  $p^2q$ , что неверно. Значит,  $|G : H| = q$  и лемма доказана.

**Лемма 20.** Если  $G \neq H$ , то для любого неприводимого характера  $\chi = \chi_i$  из разложения  $\Theta_H$  существует  $p^2$  линейных характеров  $\psi_j$ , сопряженных с характером  $\psi = \psi_1$ , таких, что  $\chi_M = \sum_{j=1}^{p^2} \psi_j$ . Группа  $M$  абелева.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\psi$  — неприводимый характер группы  $M$ , входящий в разложение характера  $\chi_M$ , где  $\chi = \chi_i$  — любой неприводимый характер группы  $H$ , определенный в лемме 19. Согласно лемме 1

$$\chi_M = e' \sum_{i=1}^t \psi_i,$$

где  $\psi_i$  — характеры, сопряженные с  $\psi$ ,  $e'$  и  $t$  делят  $|H : M| = p^2$ . В частности,

$$p^2 = \chi(1) = e't\psi(1).$$

Так как  $(|M|, p) = 1$ , то  $\psi_i(1)$  не делится на  $p$ . Поэтому  $e't = p^2$  и  $\psi_i(1) = 1$ . В частности,  $\ker(\psi_i)$  содержит коммутант группы  $M$ . Отсюда  $\psi_j(y) = 1$  для любого  $j$  и  $y \in M$ . Но тогда  $\chi(y) = p^2$  для любого характера  $\chi$ , сопряженного с  $\chi_1$ . Как результат  $\Theta(y) = p^2q$ . Так как  $\Theta$  — точный характер, то  $y = 1$ , т. е.  $M' = 1$  и  $M$  абелева группа, что и требовалось доказать.

**Лемма 21.** Пусть  $G = H$ ,  $G = M \rtimes P$  и  $G$  не содержит нормальных подгрупп индекса  $q$ . Тогда  $\Theta_M = \sum_{i=1}^{p^2} \alpha_i$ , где  $\alpha_i \in \text{Irr}(M)$  — сопряженные характеры группы  $M$  степени  $q$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\alpha \in \text{Irr}(M)$  — неприводимый характер группы  $M$ , входящий в разложение  $\Theta_M$ , и пусть  $I_G(\alpha)$  — его группа инерции. Согласно лемме 1

$$\Theta_M = e \sum_{i=1}^s \alpha_i,$$

где  $\alpha_i \in \text{Irr}(M)$ ,  $e$  делит  $|I_G(\alpha) : M|$ , а  $s$  делит  $|G : I_G(\alpha)|$ . По лемме 6  $\Theta_M$  — приводимый характер и потому  $s > 1$ . Так как  $\Theta(1) = p^2q = es\alpha(1)$ , причем  $(\alpha(1), p) = 1$  (порядок  $M$  не делится на  $p$ ), то  $es = p^2$  и  $\alpha(1) = q$ . Так как  $s \neq 1$ , то  $e = 1$ . Поэтому  $s = p^2$ . Лемма доказана.

**Лемма 22.** Если  $r$  — простой делитель  $|M|$ , то  $M$  содержит силовскую  $r$ -подгруппу  $R$ , допустимую относительно  $P$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Группа  $P$  действует с помощью сопряжения на множестве силовских  $r$ -подгрупп группы  $M$ . Их число — это индекс нормализатора силовской подгруппы, который взаимно прост с числом  $|P|$ . Так как каждая нетривиальная  $P$ -орбита группы имеет длину, делящуюся на  $p$ , то существует силовская  $r$ -подгруппа, допустимая относительно  $P$ . Лемма доказана.

**Лемма 23.** Группа  $G = M \rtimes P$  содержит подгруппы  $QP$  и  $RP$  порядков  $q^b p^2$  и  $r^\alpha p^2$  соответственно, причем  $r^\alpha | m$ , где  $P$  — силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ ,  $Q$  — силовская  $q$ -подгруппа  $G$ , а  $R$  — силовская  $r$ -подгруппа  $G$ . В частности,  $M$  имеет холловы  $\{p, q\}$  и  $\{p, r\}$ -подгруппы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как сказано выше,  $G = M \rtimes P$ , где  $|M| = q^b m$ ,  $|P| = p^2$  и  $(p, qm) = 1$ . Так как  $P$  действует с помощью сопряжений на множестве силовских  $q$ -подгрупп группы  $M$ , а их число не делится на  $p$ , то имеется силовская  $q$ -подгруппа  $Q$  группы  $M$ , инвариантная относительно  $P$ . Таким образом, в  $G$  содержится подгруппа  $L = QP$ , имеющая индекс  $m$  в  $G$ . По лемме 22 группа  $G$  содержит также подгруппу  $Y = RP$  индекса  $\frac{q^b m}{r^\alpha}$ . Лемма доказана.

**Лемма 24.** Если  $G = H$ , то верно одно из утверждений:

1.  $G = QC_G(P)$ , где  $|Q| = q^b$ , причем  $q^b > p^2$ .
2.  $G = RC_G(P)$ , где  $|R| = r^\alpha$  делит  $m$ .
3.  $G = C_G(a)C_G(u)$ , где  $P = \langle a \rangle \times \langle u \rangle$  порядка  $p^2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Напомним, что  $|G| = p^2 q^b m$  и  $(p, qm) = 1$ , причем  $q^{b-2} m < 2p^2$ .

Допустим, что  $R \in \text{Syl}_r(G)$ , где  $r | m$ . Если  $P$  нетривиально действует на  $R$ , то  $|R| \geq p + 1$ .

Предположим теперь, что  $P$  действует тривиально на всякой силовской подгруппе группы  $G$ , кроме  $R$ . В силу леммы 11 группа  $G$  имеет нормальную подгруппу  $Y_1$ , являющуюся нормальным замыканием подгруппы  $P$ , содержащуюся в  $Y = RP$ . Из теоремы Ито (лемма 3) следует, что  $P \neq Y_1$ . Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что  $Y_1 = R_1 \rtimes P = \langle P^G \rangle$ , где  $R_1$  — подгруппа группы  $R$ , на которой  $P$  действует нетривиально. В этом случае  $G = RC_G(P)$ , так что выполнено утверждение 2.

Если  $P$  действует нетривиально, кроме  $R \in \text{Syl}_r(G)$ , и на некоторую  $S \in \text{Syl}_s(G)$ , где  $s | m$ ,  $s \neq r$ , то  $|S| \geq p + 1$ , причем

$$m \geq |S||R| \geq (p + 1)(2p + 1) > 2p^2.$$

Значит,  $m > 2p^2$ . Так как  $q^{b-2} m < 2p^2$ , то  $b = 1$ . Стало быть,  $|G| = p^2 q m$ , где  $(m, pq) = 1$ .

Если для любого простого  $r \in \pi(M)$  группа  $P$  действует тривиально на некоторой  $R \in \text{Syl}_r(G)$ , то  $G = M \times P$ , что невозможно.

Пусть для любого  $r \neq q$  подгруппа  $P$  действует тривиально на некоторой силовской  $r$ -подгруппе группы  $M$  из  $M = O_{p'}(G)$ . По лемме 11 группа  $G$  имеет нормальную подгруппу  $L_1$ , являющуюся нормальным замыканием подгруппы  $P$ , содержащуюся в  $L = QP$ , порядка, делящегося на  $p^2$ . По лемме 3  $P \neq L_1$ , поэтому  $L_1 = Q_1 \rtimes P = \langle P^G \rangle$ , где  $Q_1 \leq Q$ . Тогда  $G = QC_G(P)$ , причем  $q^b > p^2$  и верно утверждение 1.

Наконец, возможен случай, когда  $P$  действует нетривиально как на  $R$ , так и на  $Q$ , где  $|Q| = q^b$ ,  $|R| = r^\alpha |m|$ .

Понятно, что  $|R| \geq 1 + p$ . Если  $|R| \geq p^2$ , то  $m \geq p^2 + 1$  и из  $mq^{b-2} \leq 2p^2$  следует, что  $q^{b-2} \leq 1$ , так что  $b = 1$  или  $2$ .

Однако в этом случае  $|P| > |Q|$  и  $P$  не может действовать нетривиально на  $Q$  за исключением случая, когда  $q = 2, p = 3$ . Этот случай рассмотрен ранее. Поэтому далее считаем, что  $b \geq 3$ .

Стало быть,  $|R| < p^2$  и потому существует элемент порядка  $p$ , действующий тождественно на  $R$ . При этом  $m \geq |R| \geq p + 1$ .

Рассмотрим  $L = Q \rtimes P$ . Так как по теореме 5.1.4. Бернсайда из [2] элемент порядка  $p$ , не централизующий  $Q$ , должен действовать нетривиально на  $Q/\Phi(Q)$ , то  $|\Phi(Q)| \leq q$ .

Таким образом, имеются следующие возможности:

1)  $Q$  экстраспециальная порядка  $q^b$ , где  $p$  делит  $q^{b-1} - 1$ , причем  $\Phi(Q) = Z(Q) = Q'$  порядка  $q$  и  $|Q/\Phi(Q)| = q^{b-1}$ .

В этом случае  $b-1$  — четное число. Пусть  $b-1 = 2s$ , тогда  $q^{2s} - 1$  делится на  $p$  и  $(q^s - 1)(q^s + 1)$  делится на  $p$ . Значит,  $p \leq q^{\frac{b-1}{2}} + 1 < q^{b-2}$ , однако  $q^{b-2}m < 2p^2$ . Тогда  $m < p$ , что невозможно.

2)  $Q$  — абелева не элементарная и  $|\Phi(Q)| = q$ . Тогда  $Q = \langle a \rangle \times Q_1$ , причем  $|\langle a \rangle| = q^2$ ,  $|Q_1| = q^{b-2}$ . Понятно, что  $\langle a^q \rangle$  централизуется  $P$  и  $\langle a^q \rangle \times Q_1 = \Omega(Q) \triangleleft L$ . По теореме Машке существует  $\widetilde{Q}_1$  порядка  $q^{b-2}$  и  $\langle a^q \rangle \times \widetilde{Q}_1 = \Omega(Q)$ , следовательно  $P$  действует тривиально на  $Q$ , что исключено.

3)  $Q$  — элементарная абелева порядка  $q^b$ , причем  $q^{b-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ . Так как  $q^b = q(q^{b-1} - 1) + q = qpt + q + p^2 > q^b > p$ , то существует элемент  $a$  порядка  $p$ , централизующий  $Q$ . Также существует элемент  $u$  порядка  $p$ , централизующий  $R$ . При этом  $\langle a \rangle \neq \langle u \rangle$ , ибо  $Z(G) = 1$ . Поэтому  $C_G(a)C_G(u) \geq G$  и  $P = \langle a \rangle \times \langle u \rangle$ , где  $a^p = u^p = 1$ , т. е. верно утверждение 3. Лемма доказана.

**Лемма 25.** Пусть  $\alpha$  — неприводимый характер группы  $M$  степени  $q$ , входящий в разложение  $\Theta_M$ . Тогда для  $K \triangleleft M$  характер  $\alpha_K$  приводим.

**Доказательство.** Из лемм 11 и 24 следует, что  $M$  не простая группа. Это очевидно, если  $\pi(m) = 1$ . То же верно при  $\pi(m) = 2$ , в самом деле, если  $G = RC_G(P)$  для некоторой силовской подгруппы  $R$  группы  $M$ , то по лемме 11 имеется нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в  $M$  (случаи 1 и 2 леммы 24). Если же ни один неединичный элемент группы  $P$  не централизует хотя

бы пару силовских подгрупп группы  $M$ , скажем  $R$  и  $S$ , которые  $P$  нормализует, причем одна из них является  $r$ -силовской из  $M$ , а вторая  $s$ -силовская, где  $r \neq s \in \pi(m)$ , то  $m > (p+1)(2p+1) > 2p^2$ . Отсюда  $b = 1$  и  $|G| = p^2qm$ .

В этом случае  $P$  централизует  $Q \in \text{Syl}_q(M)$ . Пусть  $|\pi(m)| = 2$ . Предположим, что  $C_P(R) = \langle a \rangle$ . Тогда  $|G : C_G(a)|$  — степень числа  $s$ . По лемме 11 заключаем, что подгруппа  $\langle a^G \rangle$  — разрешимая  $\{p, s\}$ -подгруппа, так что  $M$  не проста. Если  $|\pi(m)| \geq 3$  и если в  $P^\#$  нет элементов, у которых индекс централизатора — степень простого числа, то  $m \geq 2(p+1)^3$ , так что  $mq^{-1} > 2p^2$ ; противоречие. Итак, в любом случае  $M$  не проста.

Допустим, что  $K$  — наибольшая собственная нормальная подгруппа группы  $M$ . По лемме 1 имеем

$$\alpha_K = e \sum_{s=1}^d \lambda_s,$$

где  $d, e$  — натуральные числа, делящие  $|M : K|$ , и  $\lambda_s$  — неприводимые характеры группы  $K$ , сопряженные с  $\lambda_1 = \lambda$ . Отсюда  $q = \alpha(1) = ed\lambda(1)$ . Если  $\alpha_K$  неприводим для любого  $\alpha$ , входящего в разложение  $\Theta_M$ , то подгруппа  $K$  имеет  $p^2$  неприводимых характеров степени  $q$ . Но тогда ее порядок равен не меньше, чем  $q^2p^2 + 1$ , тогда как  $|K| \leq |M|/(|M : K|) \leq p^2q^2 + 1$ ; противоречие. Значит,  $\alpha_K = \sum_{s=1}^q \lambda_s$ , где  $\lambda_s$  — линейные характеры. Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из леммы 25 следует, что пересечение ядер характеров  $\lambda_s$ , входящих в разложение  $\Theta_K$ , содержит коммутант  $K$  и потому тривиально. Поэтому подгруппа  $K$  группы  $G$ , имеющая индекс  $p^2q$  в  $G$ , абелева, что и утверждалось. Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вдовин Е. П. Максимальные порядки абелевых подгрупп в конечных простых группах // Алгебра и логика. 1999. Т. 38. С. 131–160.
2. Gorenstein D. Finite group. New York: Harper and Row, 1968.
3. Isaacs I. M. Character theory of finite groups. New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1976.
4. Feit W. Characters of finite groups. New York; Amsterdam: Yale University, 1967.
5. Зенков В. И. Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундамент. и прикл. математика. 1996. Т. 2, № 1. С. 1–92.
6. Казарин Л. С., Поисеева С. С. О конечных группах с большой степенью неприводимого характера // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, № 4. С. 483–499.
7. Guralnick R. M., Malle G., Navarro G. Self-normalizing Sylow subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 132, N 4. P. 973–979.
8. Фейт У. Теория представлений конечных групп. М.: Наука, 1990.
9. Казарин Л. С. О  $p^\alpha$ -лемме Бернсайда // Мат. заметки. 1990. Т. 4, № 2. С. 45–48.
10. Camina A. R., Camina R. D. Implications of conjugacy class size // J. Group Theory. 1998. V. 1. P. 257–269.
11. Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
12. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. ATLAS of finite groups: maximal subgroups and ordinary characters for simple groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

13. Казарин Л. С., Поисеева С. С. Конечные группы с большим неприводимым характером // Мат. заметки. 2015. Т. 98, № 2. С. 237–246.
14. The GAP Group. GAP — Groups, Algorithms and Programming. Version 4.4.10. (Aachen, St. Andrews, 2008.) <http://www.gap-system.org>
15. Белоногов В. А. Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990.

*Статья поступила 15 октября 2015 г.*

Поисеева Саргылана Семеновна  
Ярославский гос. университет им. П. Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, Ярославль 150000  
[pss.iii@mail.ru](mailto:pss.iii@mail.ru)

УДК 512.6:519.61

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ

Ф. М. Федоров, О. Ф. Иванова, Н. Н. Павлов

**Аннотация.** На основе ранее полученных результатов по исследованию гауссовых бесконечных систем изучены основные принципиальные отличия общих бесконечных систем от конечных. В частности, показано, что для общих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений не выполняются теоремы Фредгольма и Нётер. Кроме того, уточнено понятие метода редукции, в частности, показано, что он может сходиться, но не к решению рассматриваемой бесконечной системы. Также указано, что метод редукции для решения однородных бесконечных систем проявляет двойственность. Отмечено, что решение однородных бесконечных систем имеет противоречивый характер по отношению к решению конечных однородных систем. В частности, показано, что однородная бесконечная система может иметь нетривиальные решения, если даже ее бесконечный определитель не равен нулю.

Кроме того, решение линейной однородной бесконечной системы необходимым образом сводится к решению нелинейного уравнения, так называемого характеристического уравнения, чего быть не может для конечных систем.

**Ключевые слова:** бесконечные гауссовы системы, линейные алгебраические уравнения, теоремы Фредгольма и Нётер, преобразование Гаусса, метод редукции, однородные системы.

**Fedorov F. M., Ivanova O. F., Pavlov N. N. About the particularities of infinite systems.**

**Abstract:** Based on previous results on the study of infinite systems studied basic common fundamental differences of general infinite systems from finite. In particular, it is shown that are not fulfilled Fredholm and Noether's theorems to the general infinite system of linear algebraic equations. In addition, to clarify the concept of the reduction method. In particular, we show that it can converge, but not to the solution considered infinite system. It is also pointed out that the reduction method for solution of homogeneous infinite systems exhibits duality. It is noted that the solution of homogeneous infinite systems is controversial in relation to the solution of finite homogeneous systems. In particular, it is shown that an infinite homogeneous system may have non-trivial solutions, even though its infinite determinant is not zero. In addition, the solution of the linear homogeneous infinite system is necessarily reduced to the solution of the nonlinear equation, the so-called characteristic equation, which is impossible for finite systems.

**Keywords:** Gaussian infinite system, linear algebraic equations, Fredholm theorems, Noether theorem, transformation of Gauss, method of reduction, homogeneous systems.

### Введение

Напомним, что за более чем 200-летнюю историю исследований бесконечных систем их общая теория до настоящего времени не была создана, хотя

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект №3047).

© 2015 Федоров Ф. М., Иванова О. Ф., Павлов Н. Н.

для отдельных видов бесконечных систем разработаны конкретные теории [1, 2]. Общая теория оказалась, с одной стороны, чрезвычайно сложной, а с другой стороны, она имеет очень богатое содержание и широкие приложения во многих областях математики, механики и физики. Все это заставило математиков всего мира пойти по пути исследований частных классов бесконечных систем. Интенсивное исследование по бесконечным системам и становление теории функционального анализа практически совпали по времени: конец XIX-го и начало XX-го веков. Успехи развития функционального анализа и его широкое приложение в различных областях математики и физики предопределили применение его методов в исследовании бесконечных систем. В настоящее время практически полностью изучен десяток классов бесконечных систем: нормальные системы, регулярные и вполне регулярные системы, мультипликативные системы, системы с разностными индексами и др. [2]. Во всех этих исследованиях успешно применены методы функционального анализа, но их применение предусматривает некоторые ограничительные допущения относительно коэффициентов матрицы и свободных членов бесконечной системы, связанные с изучением бесконечных систем в нормированных пространствах. Сходимость по норме в банаховых пространствах подразумевает сильную сходимость.

Поэтому во всех известных до настоящего времени исследованиях [2, 3] допускается, что свободные члены  $b_j$  ограничены в совокупности, т. е.  $b_j \leq B$ . Кроме того, для коэффициентов системы  $a_{i,j}$  самое слабое ограничение, которое необходимым образом допускается, заключается в следующем:  $\sum_{i=1}^{\infty} |d_{i,j}| < \infty$ , где  $a_{i,i} = 1 + d_{i,i}$  при  $i = j$  и  $a_{i,j} = d_{i,j}$  при  $i \neq j$ . Системы, для которых эти условия не выполняются, априори не рассматриваются как предмет исследования, что и привело в конечном счете к критической ситуации.

Именно разработка теории периодических бесконечных систем [1] дала возможность изучения бесконечных систем с общих позиций и позволила сдвинуться в последние годы с кризисной ситуации.

Во всех своих исследованиях мы придерживаемся понятия слабой сходимости, точнее, покоординатной сходимости. Поэтому заранее избегаем ограничительных допущений относительно коэффициентов и свободных членов бесконечной системы, придерживаясь только определения решения системы.

В настоящей статье на основании ранее полученных результатов и на примерах решения конкретных бесконечных систем покажем основные особенности их решения относительно решения конечных систем. В связи с этим также укажем, какие трудности можно встретить при их решении.

Основные сведения о бесконечных системах, матрицах, определителях и минорах можно найти в работах [1–3].

Прежде всего остановимся на хорошо известных теоремах Фредгольма и Нётер о решениях конечных систем линейных уравнений.

### 1. О теоремах Фредгольма и Нётер

Сначала рассмотрим вопросы разрешимости конечной системы  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными. Каждую такую систему можно записать в виде одного линейного уравнения:

$$Ax = b, \quad (1)$$

где  $b$  — заданный вектор,  $x$  — искомый вектор-решение,  $A$  — линейный оператор в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ , определяемый матрицей системы.

Сначала напомним основные факты из линейной алгебры, относящиеся к конечной системе (1) [4, 5].

1. Уравнение (1) разрешимо при любой правой части тогда и только тогда, когда соответствующее однородное уравнение  $Ax = 0$  имеет только тривиальное решение  $x = 0$ .

2. Уравнение (1) разрешимо при любой правой части тогда и только тогда, когда сопряженное уравнение

$$A^*y = f \quad (2)$$

разрешимо при любой правой части.

3. Уравнения  $Ax = 0$  и  $A^*y = 0$  имеют одинаковое число линейно независимых решений.

4. Если однородное уравнение  $Ax = 0$  имеет нетривиальные решения, то неоднородное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть  $b$  ортогональна ко всем решениям сопряженного однородного уравнения  $A^*y = 0$ .

Свойства 1, 3, 4 для конечных систем алгебраических уравнений полностью отражают теоремы Фредгольма.

Необходимо подчеркнуть, что свойства 1 и 2 имеют место, когда определитель  $|A|$  системы (1) не равен нулю, а свойство 4 интересно, в основном, наоборот, когда определитель  $|A|$  равен нулю.

Теперь отметим теоремы Нётер для конечных систем [6]: *разность числа  $n$  линейно независимых решений однородного уравнения  $Ax = 0$  и числа  $n'$  линейно независимых решений сопряженного уравнения  $A^*y = 0$  равна индексу  $\kappa$  оператора  $A$  (индекс уравнения (1)):  $n - n' = \kappa(A)$ .*

Как обстоит дело в случае бесконечных систем? Какие свойства выполнимы, а какие не выполнимы в теории бесконечных систем? Возникают ли новые свойства? На эти вопросы можем ответить только на основании полученных результатов. Поэтому рассмотрим конкретный пример решения бесконечной системы. Следует подчеркнуть, что приводимая ниже система появилась при решении вполне реальной краевой задачи математической физики граничным методом [7, 8], т. е. она не является какой-то абстрактной системой.

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим следующую простейшую модель тепловой задачи



с переменными краевыми условиями [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} &= 0, \quad x = 0, \\ T(x, t) &= V \exp(\nu t), \quad x = 1, \\ T(x, t) &= 0, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Первый этап решения тепловой задачи (3) граничным методом [8] сводится к решению следующей бесконечной системы [7]:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2j+2p)!}{(2p)!} x_{j+p} = V \exp(\nu t) \left( \frac{\nu}{\alpha} \right)^j, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad b = \frac{\nu}{\alpha} = \text{const} > 0, \quad (4)$$

где  $x_j = a_j(t)$ ,  $a_j(t)$  — соответствующие коэффициенты разложения функции температуры  $T(x, t)$  в степенной ряд по пространственной координате  $x$ .

Ясно, что все строчные ряды из абсолютных величин коэффициентов матрицы системы (4) расходятся:

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{j,j+p}| = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2j+2p)!}{(2p)!} = \infty, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

кроме того, свободные члены системы (4) при  $b > 1$  не ограничены в совокупности. Тем не менее данная система имеет решение, полученное методом редукции в широком смысле [7]:

$$\begin{aligned} x_j^{(k)} &= \frac{(-1)^{j+1} V \exp(\nu t)}{(2j)! \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}} \left\{ \left[ \frac{\pi(2k+1)}{2} \right]^{2j} - \left( -\frac{\nu}{\alpha} \right)^j \right\} \\ &\quad + \frac{(-1)^j x_0}{(2j)!} \left[ \frac{\pi(2k+1)}{2} \right]^{2(j-1)}, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $x_0$  — произвольное вещественное число.

В силу произвольности величины  $x_0$  решение (5) можем представить в общем виде следующим образом:

$$x_j^{(k)} = \frac{V \exp(\nu t)}{(2j)! \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}} \left( \frac{\nu}{\alpha} \right)^j + \frac{(-1)^j x_0}{(2j)!} \left[ \frac{\pi(2k+1)}{2} \right]^{2j} = x_j + \tilde{x}_j^{(k)}, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где  $x_j$  — частное решение неоднородной системы (4),  $\tilde{x}_j^{(k)}$  — независимые по  $k$  решения однородной системы (4), т. е. при  $b = 0$ .

Выражение (6) наглядно показывает, что для бесконечных систем в общем случае нарушаются все свойства 1–4 для линейных конечных уравнений (1), тем более не выполняются теоремы Фредгольма, тем самым и альтернатива Фредгольма. Кроме того, также нарушаются теоремы Нётер. Действительно,  $\tilde{x}_j^{(k)}$  является нетривиальным решением соответствующей однородной системы

(4), тем не менее бесконечная неоднородная система (4) имеет решение, т. е. свойство 1 не выполняется.

Касательно свойства 1 можно привести более общие рассуждения. Бесконечную систему также представим как линейное уравнение (1), но в матричной форме  $AX = B$ . Пусть бесконечный определитель системы  $|A|$  существует и отличен от нуля. Но существование (или не существование) обратной матрицы  $A^{-1}$  в общем случае не зависит от наличия нетривиального решения соответствующего однородного уравнения. Поэтому разрешимость бесконечной системы также не зависит от существования нетривиального решения однородной системы. Теперь пусть существует хотя бы левосторонняя обратная матрица  $A^{-1}$ . Тогда из (1) получим  $X = A^{-1}B$ , но произведение  $A^{-1}B$  может и не существовать, поскольку соответствующий ряд может быть расходящимся, тогда и решение системы может не существовать.

Свойство 2 также нарушается. В случае гауссовых матриц  $A$  транспонированная матрица  $A^T$ , т. е. в нашем случае это то же, что и сопряженная матрица  $A^*$ , является треугольной бесконечной матрицей. Для таких треугольных матриц еще Куком [9] показано, что эти матрицы имеют единственную обратную матрицу. Отсюда следует, что сопряженное уравнение (2) имеет единственное решение при любой правой части  $f$ , поскольку у треугольной матрицы строки конечные и потому существует произведение соответствующих матриц:

$$(A^*)^{-1}A^*y = (A^*)^{-1}f, \quad y = (A^*)^{-1}f. \quad (7)$$

Но уравнение (1) не всегда разрешимо, если даже бесконечный определитель отличен от нуля. Подробно об этом речь пойдет ниже (примеры 2 и 3). Как следует из (7), сопряженное однородное уравнение (2) всегда имеет только тривиальное решение, следовательно, как показывает пример 1, свойство 3 тоже нарушается. Поскольку разрешимость уравнения (1) не зависит от разрешимости однородного сопряженного уравнения (2), невыполнимость свойства (4) становится очевидной. Решение (6) примера 1 прямо указывает на нарушение теорем Нётер.

Таким образом, для общих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (1) теряются теоремы разрешимости, теоремы Фредгольма и Нётер, т. е. линейное уравнение (1) полностью невозможно исследовать с помощью фредгольмовских или нётеровских операторов  $A$ .

Главное отличие конечных систем от бесконечных заключается в том, что если даже бесконечный определитель отличен от нуля, то однородная бесконечная система может иметь и нетривиальные решения, чего быть не может для конечных систем.

Но существуют бесконечные системы, которые сводятся к конечным системам и для них было предложено ввести приставку «квази».

## 2. «Псевдо»бесконечные системы

Наряду с приставкой «квази» введем понятие «псевдо»бесконечные систе-

мы. По видимому, впервые этот термин был введен относительно регулярных бесконечных систем [3]. *Квазирегулярными* называются системы, в которых условие регулярности выполнено лишь во всех строках, начиная с некоторой, т. е. условие регулярности не выполняется для некоторого конечного числа уравнений. Как показано в работе [3], вопрос существования решения такой системы сводится к вопросу о существовании решения конечной системы. Совершенно аналогично можно ввести понятие квазиоднородных систем. Таким же образом были введены квазипериодические системы [2]. Здесь введем понятие псевдобесконечных систем, но другого рода, чем вышеприведенные «квази»системы. Существуют бесконечные системы, которые занимают промежуточное положение между конечными и бесконечными системами. Лучше всего это можно выяснить при решении конкретной бесконечной системы.

ПРИМЕР 2. Пусть задана бесконечная система с разностными индексами:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p x_{j+p} = b^j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = a$ ,  $a_2 = a_3 = \dots = 0$ ,  $a = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ ,  $1 + ab \neq 0$ . Найти строго частное решение системы (8), если оно существует.

РЕШЕНИЕ. Отметим, что гауссова система (8) существенно отличается от общей гауссовой бесконечной системы, а именно, в каждом уравнении системы содержится только конечное число членов (неизвестных). В данном случае таких членов только два. В силу этого при применении метода редукции возникают два принципиально разных подхода. Во-первых, бесконечную систему (8) можно решать, не отбрасывая членов самих уравнений, а ограничиваясь только числом уравнений, тогда конечная система будет иметь вырожденную матрицу. Поэтому в таком случае удобно использовать метод редукции в широком смысле [1, 2]. Во-вторых, эту конечную систему можно замкнуть, отбрасывая один член только в последнем уравнении, полагая, что  $x_n = b^n$ . Тогда возникает возможность использования метода редукции в узком смысле [1, 2], т. е. обычной простой редукции.

Бесконечная система (8) привлекательна еще и тем, что ее можно решить по крайней мере четырьмя различными способами. Ее общее решение как пример решения периодических бесконечных систем приведено в [1]:

$$x_j = \frac{b^j}{1 + ab} + \frac{(-1)^j C}{a^j}, \quad 1 + ab \neq 0, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

где  $C$  — произвольная константа.

Во-вторых, гауссову систему (8) можно рассматривать как разностное уравнение, теорию которых можно найти в классических трудах, например, в [10], и, естественно, применяя ее, получим решение (9).



Вычисляя главные миноры определителя матрицы (14) (или по формуле (12)), легко получить  $A_p = a^p$ . Тогда вычисление по выражению (11) дает

$$\Delta^{(j+1)} = b^j \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a^p b^p, \quad j = 0, \dots, \infty. \quad (15)$$

Но ряд в (15) сходится тогда и только тогда, когда  $|ab| < 1$ , в этом случае из (15) найдем

$$x_j = \Delta^{(j+1)} = \frac{b^j}{1+ab}, \quad 1+ab \neq 0. \quad (16)$$

Подставляя выражение (16) в систему (8), убеждаемся, что оно является строго частным решением системы (8) при  $|ab| < 1$ . Таким образом, для сходимости метода редукции необходимо и достаточно выполнения условия  $|ab| < 1$ . Но это условие, очевидно, является одновременно условием и для матрицы  $A$ , и для свободных членов  $b$  системы (8). Вместе с тем известно [12], что линейный оператор, определяемый основной матрицей  $A$  бесконечной системы, должен быть представлен в виде суммы положительно определенного и вполне непрерывного операторов. При этих условиях оператор  $A$  допускает редукцию относительно любого ортонормированного базиса, тем самым получено сильное условие сходимости редукции. Этот результат является следствием сильной сходимости, т. е. сходимости по норме пространства, а мы рассматриваем слабую сходимость, т. е. сходимость покоординатную, что дает более слабое условие сходимости метода редукции.

Очевидно, решение (9) не зависит от того, будет ли  $|ab|$  больше или меньше единицы. Вместе с тем имеется основная теорема [11]: *бесконечная гауссова система совместна тогда и только тогда, когда существует ее строго частное решение*. Как показано выше, система (8) при  $|ab| > 1$  не имеет строго частного решения, следовательно, на основании основной теоремы она несовместна, но система (8) имеет решение (9) и при  $|ab| > 1$ . Получили как бы противоречие, в чем дело? При применении метода редукции для доказательства указанной теоремы подразумевается, что в каждом уравнении (точнее, для бесконечного числа уравнений) отбрасываются бесконечные наборы членов. Другими словами, бесконечная гауссова система рассматривается в полном виде в том смысле, что бесконечное число уравнений содержит бесконечное число неизвестных, а система (8), как указано выше, в каждом уравнении содержит только два неизвестных, что дает возможность, не прибегая к редукции, получить решение. Это и будет четвертый подход. Итак, систему (8) рассмотрим как одно рекуррентное уравнение:

$$x_{j-1} + ax_j = b^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Решая уравнение (17) относительно  $x_j$ , получим

$$x_j = \frac{b^{j-1} - x_{j-1}}{a}. \quad (18)$$

Повторяя формулу (18)  $j$  раз, имеем

$$x_j = \frac{1}{a^j} \left( \sum_{p=0}^{j-1} (-1)^p (ab)^{j-p-1} + (-1)^j x_0 \right), \quad j > 0, \quad (19)$$

где  $x_0$  — произвольная константа.

Представим постоянную  $x_0$  в виде  $x_0 = \frac{1}{1+ab} + C$ , где  $C$  — произвольная константа. Подставляя последнее выражение в (19), после несложных преобразований получим

$$x_j = \frac{1}{a^j} \left( \sum_{p=0}^{j-1} (-1)^p (ab)^{j-p-1} + \frac{(-1)^j}{1+ab} + (-1)^j C \right) = \frac{b^j}{1+ab} + \frac{(-1)^j C}{a^j}, \quad j > 0. \quad (20)$$

Таким образом, приходим к решению (9).

Поскольку  $\frac{(-1)^j C}{a^j(1+ab)}$  является общим решением соответствующей однородной системы, выражение

$$\frac{1}{a^j} \left( \sum_{p=0}^{j-1} (-1)^p (ab)^{j-p-1} \right), \quad j > 0,$$

очевидно, есть частное решение системы (8), полученное как следствие конечности каждого уравнения системы (8). Вместе с тем при  $|ab| > 1$  оно не является строго частным решением, хотя при  $|ab| < 1$ , как показано выше, является таковым. Таким образом, бесконечная система (8) ведет себя отчасти как бесконечная система, отчасти — как конечная система. Естественно, в последнем случае некоторые свойства бесконечных систем теряются, в частности, метод редукции не сходится, поскольку в выражении (19) имеется только конечная сумма, а ряда, как в (15), нет.

Теперь бесконечную систему (8) решим методом редукции в узком смысле, т. е. методом простой редукции. В этом случае, как сказано выше, в силу конечности самих уравнений отбрасывается только последний член последнего уравнения, в результате получается система из трех уравнений с тремя неизвестными  $x_{n-2}$ ,  $x_{n-1}$ ,  $x_n$ :

$$\begin{cases} x_{n-2} + ax_{n-1} = b^{n-2}, \\ x_{n-1} + ax_n = b^{n-1}, \\ x_n = b^n. \end{cases} \quad (21)$$

Отсюда ясно, что при любом  $n \geq 2$  все уравнения конечной системы (21) точно соответствуют уравнениям бесконечной системы (8), кроме последнего. Решая систему (21), получим  $x_{n-2} = b^{n-2} - ab^{n-1} + a^2b^n$ ,  $x_{n-1} = b^{n-1} - ab^n$ ,  $x_n = b^n$ . Отсюда индуктивно заключаем, что

$$x_{n-j} = \sum_{p=0}^j (-1)^p a^p b^{n-j+p}, \quad j = 0, \dots, n.$$

Переобозначив, окончательно получим редуцированное решение

$$x_j^n = \sum_{p=0}^{n-j} (-1)^p a^p b^{j+p}.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в последнем выражении, очевидно, приходим к ряду (15) при  $|ab| < 1$ , что подтверждает необходимость применения метода редукции в узком смысле при решении неоднородных бесконечных систем.

Таким образом, бесконечные системы с бесконечным числом конечных уравнений не обладают в полной мере свойствами общих бесконечных систем, вместе с тем содержат некоторые черты конечных систем. Поэтому такие системы можно называть по-особому, например, «полубесконечные» или «квазибесконечные» системы и изучать их отдельно от общих (полных) систем. Мы все-таки предлагаем применять термин *псевдобесконечные системы* и изучать их отдельно от общих (полных систем). Типичным примером псевдобесконечной системы является бесконечная система с диагональной матрицей, т. е. бесконечная система:  $a_j x_j = b_j$ , где  $a_j \neq 0$ . На самом деле, данная система конечная, точнее, одно уравнение с одним неизвестным, и его решение, очевидно,  $x_j = \frac{b_j}{a_j}$ . Но если мы рассмотрим ее как бесконечную, то ясно, что получим абсурдные результаты хотя бы потому, что при  $|a| > 1$  бесконечного определителя данной системы не существует. Таким образом, под бесконечной системой в общем случае понимается система, которая содержит бесконечное число уравнений с бесконечным числом ненулевых коэффициентов ( $a_{j,i} \neq 0$ ).

### 3. Нелинейный характер решений бесконечных однородных систем. Двойственность метода редукции

Чтобы показать нелинейный характер решений бесконечных однородных систем, снова обратимся к примеру 1, точнее, к решению (6) периодической системы (4) в однородном случае ( $b = 0$ ):

$$x_j^{(k)} = \frac{x_0}{(2j)!} \left[ \frac{\pi(2k+1)}{2} \right]^{2j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (22)$$

где  $x_0$  — произвольное вещественное число.

Подчеркнем, что при  $x_0 = 1$  выражение (22) дает базис бесконечномерного подпространства нетривиальных решений однородной бесконечной системы (4), а само решение типа (22) при  $x_0 \equiv x_0^k = \text{const}$  в [1] названо *фундаментальным решением* однородной системы.

Более подробно повторим метод получения решения (22) с тем, чтобы ответить на вопрос, в чем же состоит его особенность?

Для этого рассмотрим однородную периодическую гауссову систему

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

где коэффициенты  $a_{j,j+p}$  в силу периодичности системы (23) имеют вид  $a_{j,j+p} = a_p a_{j+p,j+p}$ , и применим к ней общий подход исследования бесконечных систем [11].

Чтобы решить систему (23), сначала укорачиваем ее по методу редукции в широком смысле и получаем решение урезанной однородной конечной гауссовой системы в виде [11]:

$$x_j = -S_{n-j} x_{j+1}, \quad (24)$$

где

$$S_{n-j} = \frac{a_{j,j+1}}{a_{j,j}} + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^{p+1} a_{j,j+p}}{a_{j,j} \prod_{k=1}^{p-1} S_{n-j-k}}, \quad S_1 = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}, \quad j = \overline{1, n-2}, \quad (25)$$

Здесь  $S_{n-j}$  является функцией от  $j$ , т. е.  $S_{n-j} = S_{n-j}(j)$ .

Нами в [1, 11] показано, что если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-j}(j) = S(j)$  и в выражении (25) возможен предельный переход под знаком суммы, то справедливо  $x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^n$ . Последнее соотношение позволяет найти нетривиальное решение однородной системы (23). При этом числа  $S(j)$  составляют так называемые характеристические числа соответствующего нетривиального решения однородной системы (23). Решая полученное рекуррентное уравнение, получим нетривиальное решение в виде

$$x_j = \frac{(-1)^j x_0}{\prod_{k=0}^{j-1} S(k)}, \quad j = \overline{1, \infty}, \quad (26)$$

где  $x_0$  — произвольное вещественное число,  $S(j)$  — неизвестные характеристические числа.

Для определения чисел  $S(j)$  предельный переход в (25) дает систему нелинейных уравнений

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_{j,j+p}}{a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} S(j+k)} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (27)$$

где для унификации обозначений принято  $\prod_{k=0}^{-1} S(j+k) = 1$  для любого  $j$ .

Необходимо отметить, что подставляя решение (26) в систему (23), также получим систему (27) в силу произвольности  $x_0$ . Если система уравнений (27) не имеет решения относительно  $S(j)$ , то однородная система (23) имеет только тривиальное решение.

Особо следует подчеркнуть следующее. На самом деле действие метода редукции для однородных бесконечных систем заканчивается формулой (26) и системой (27). Для пояснения этого положения вернемся к примеру 1, точнее, к решению (22).



Поскольку решения систем периодических и с разностными индексами изоморфны, достаточно рассмотреть систему с разностными индексами ( $a_{j,j} \equiv 1$ ) [1], при этом изоморфность осуществляется соответствием  $y_j = \frac{x_j}{a_{j,j}}$ , где  $y_j$  — решение периодической системы, а  $x_j$  — системы с разностными индексами. Тогда вместо системы (23) можно рассмотреть систему ( $a_p = \frac{1}{(2p)!}$ ):

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} x_{j+p} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

Нас прежде всего интересуют характеристические числа  $S(j)$ , которые определяют независимые нетривиальные решения однородных систем. Этот вопрос подробно исследован в [13]. На основании этой работы в первую очередь можно предположить, что  $S(j) = S = \text{const}$ , т. е. характеристические числа не зависят от индекса  $j$ , на что указывает структура самой системы (28). Тогда, очевидно, выражение (26) инициирует решение

$$x_j = \frac{(-1)^j x_0}{S^j}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

где  $x_0$  — произвольное вещественное число. При этом  $S$  определяется из нелинейного уравнения, полученного от системы (27), которая преобразуется в одно уравнение:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)! S^p} = 0. \quad (30)$$

Очевидно, что на основании соотношения (30) можем составить аналитическую функцию

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^p \quad (31)$$

и найти ее нули. В [1] функция  $f(x)$  названа *характеристикой* самих периодических систем, в частности, системы (4).

Здесь сделаем некоторое отступление. Для конечных систем, применяя как бы метод редукции в широком смысле, получим соответствующее решение, подобно решению (24), (25), но с той разницей, что в нем все параметры, входящие в него, известные величины, а в (29) величина  $S$  является неизвестной, которую нужно определить из нелинейного уравнения (30). В этом заключается основное отличие решения конечных однородных систем от решения однородных бесконечных систем, поскольку в бесконечном случае появляется новая неизвестная величина  $S = S(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-j}$ .

В общем случае, очевидно, метод решения уравнения (31) не зависит от метода решения бесконечной системы (28). Следовательно, отражая линейный характер решения однородной бесконечной системы (28), действие метода редукции заканчивается формулой (29) и уравнением (31). Таким образом, метод редукции в широком смысле дает только структуру нетривиального решения, если оно существует, и соотношение для определения неизвестного, в данном

случае  $S$ . Найдем значение  $S$  в случае характеристики  $f(x)$ . Очевидно, уравнение (31) для характеристики  $f(x)$  дает:  $f(x) = \cos \sqrt{x} = 0$ . Отсюда определяем все нули функции  $f(x)$ :  $x'_k = \left[\frac{\pi(2k+1)}{2}\right]^2$ , следовательно,  $S_k = \frac{1}{x'_k} = \left[\frac{2}{\pi(2k+1)}\right]^2$ , тем самым с учетом периодичности системы (4) приходим к решению (22).

Еще раз подчеркнем, что метод редукции сходится всегда, если только существует нетривиальное решение системы (23). Это положение можно интерпретировать очень просто. Пусть множество чисел  $\{x_j\}_0^\infty$  образуют нетривиальное решение однородной системы (23). Сделаем замену  $\frac{x_j}{x_{j+1}} = -S(j)$ . Структура системы (23) позволяет предположить, что  $S(j) = S = \text{const}$ , т. е. не зависит от индекса  $j$ . Тогда имеет место  $x_j = -Sx_{j+1}$ , решая его рекуррентно, очевидно, получим (29). Дальнейшее действие уже известно.

Но, по чистой случайности, процесс (25) при определенных условиях выступает как численный алгоритм определения конкретного корня уравнения (30), т. е. отражает нелинейный характер решения системы (23). В этой роли метод редукции не всегда сходится, и в этом проявляется двойственность метода редукции, обусловленная двойственностью решения системы (23). Более подробно сходимость процесса (25) для определения нулей алгебраических уравнений бесконечного порядка исследована в работах [1, 14, 15]. В этих работах показано, что если уравнение (30) имеет единственное наименьшее по модулю решение, то процесс (30) сходится к этому решению. Если таких нулей несколько, то метод (25) не сходится. Здесь уместно отметить, что процесс (25) является обобщением классического метода Бернулли вычисления наибольшего по модулю нуля полинома [15].

#### 4. Трудности поиска решений бесконечных систем

Здесь в основном отметим только те сложности решения бесконечных систем, которые возникают из-за принципиальных отличий конечных и бесконечных систем.

Пусть бесконечная система задана в операторном (а) или в матричном (б) видах

$$(a) \quad Ax = b, \quad (b) \quad AX = B, \quad (32)$$

где  $A$  — линейный оператор в матричном виде или сама матрица,  $x, X$  — столбец неизвестных,  $b, B$  — столбец свободных членов.

Таким образом, бесконечную систему уравнений часто рассматривают как одно линейное уравнение (32(а)) и решают ее с помощью теории линейных операторов. Но таким подходом нельзя полностью разрешить бесконечную систему уравнений, на это указывают веские доводы.

Во-первых, как показано выше, теоремы Фредгольма и Нётер, справедливые для конечных систем, не работают для бесконечных систем. Если бесконечную матрицу рассматривать как линейный оператор, то получим только строго частное решение бесконечной системы, которое в случае однородной системы является только тривиальным решением. Вместе с тем подробное решение в

однородном случае системы примера 1 показывает, что матрица  $A$ , т. е. оператор  $A$ , фактически не играет никакой роли при получении нетривиальных решений однородной системы. Поэтому никакие условия, заранее налагаемые на оператор  $A$ , не обеспечивают единственность решения.

Во-вторых, немаловажное значение для исследования бесконечных систем имеет следующее отличие последних от конечных систем. Пусть бесконечная система (32 (b)) записана в матричном виде  $AX = B$ , где  $A$  — гауссова матрица, причем она имеет единственную обратную матрицу  $A^{-1}$ . Тогда решение системы в конечном случае запишется в виде  $X = A^{-1}B$ . Но это решение, всегда верное для конечных систем, не всегда является решением бесконечных систем. Рассмотрим это положение на конкретном примере.

Пусть задана общая бесконечная система в гауссовой форме ( $a_{j,j} \neq 0$ ):

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = b_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

Не нарушая общности, можем положить, что основная гауссова матрица  $A$  системы (33) имеет ненулевой бесконечный определитель  $|A|$ . Поскольку для гауссовых матриц имеет место  $a_{j,j} \neq 0$ , формально разделив на диагональные элементы, получим систему с диагональными элементами, равными единице, т. е. определителем, не равным нулю.

Тогда частное решение неоднородной гауссовой системы (33), подобное решению (6), учитывающее нетривиальное решение, если оно существует, однородной системы (33) ( $b_j = 0$  для всех  $j$ ) будет [11]:

$$x_j = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A_p(j) b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}} + \frac{(-1)^j x_0}{\prod_{k=0}^{j-1} S(k)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Ясно, что ряд в правой части (34) является строго частным решением системы (33), кроме того, с одной стороны, он равен бесконечному определителю Крамера  $\Delta^{(j)}$ , с другой стороны, — значению строки матрицы  $A^{-1}B$ . Последнее следует из того, что бесконечная обратная матрица  $A^{-1}$  любой гауссовой системы (33) будет иметь вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -A_1(1) & A_2(1) & \cdot & (-1)^p A_p(1) & (-1)^{p+1} A_{p+1}(1) & \cdot \\ 0 & 1 & -A_1(2) & \cdot & (-1)^{p-1} A_{p-1}(2) & (-1)^p A_p(2) & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & (-1)^{p-2} A_{p-2}(3) & (-1)^{p-1} A_{p-1}(3) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (-1)^{p+1-j} A_{p+1-j}(j) & (-1)^{p+2-j} A_{p+2-j}(j) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -A_1(p) & A_2(p) & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & -A_1(p+1) & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Выражение (35) легко получить из соотношений (11)–(13).

Теперь вернемся к примеру 2 и возьмем следующие значения параметров:  $a = -10$ ,  $b = 1$ . Тогда коэффициентами обратной матрицы  $A^{-1}$  для матрицы (10) по выражению (35) будут  $a'_{i,j} = \begin{cases} 10^{j-i}, & j \geq i \\ 0, & j < i \end{cases}$ . В этом также можно убедиться непосредственным умножением обратной матрицы  $A^{-1}$  на матрицу  $A$ . Формальное умножение матриц  $A^{-1}B$  дает столбец, элементами которого являются  $\bar{b}_j = \sum_{p=0}^{\infty} 10^p b_{j+p}$ ,  $j \geq 1$ . Но эти ряды могут быть не сходящимися, например, при  $b_j \equiv 1$ , тогда умножение бесконечных матриц невозможно по определению, кроме того, бесконечный определитель Крамера  $\Delta^{(j)}$  не существует. Следовательно, в этом случае метод редукции не сходится и вопрос решения псевдобесконечной системы (8) остается открытым. Заметим, что для полной бесконечной системы (каждое уравнение системы содержит бесконечное число неизвестных) данная ситуация показывает неразрешимость рассматриваемой системы [11]. Пусть теперь  $b = 1/20$ , тогда последний ряд сходится, умножение матриц осуществимо и, как показано выше, решение системы (8) имеет вид (16) и равно определителю Крамера. При  $b = 1$  умножение матриц неосуществимо, тем не менее система (8) имеет решение (16), но оно не равно определителю Крамера, поскольку последний не существует.

Хотя метод редукции может сходиться к определителю Крамера, этот определитель может и не быть решением данной системы, т. е. в данном случае правило Крамера не работает.

ПРИМЕР 3. Пусть дана бесконечная гауссова система

$$\sum_{p=0}^{\infty} x_{j+p} = \frac{b^j}{(1-b)^2}, \quad b \neq 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

Найдем строго частное решение гауссовой неоднородной системы (36) по соотношениям (11) и (12). По рекуррентной формуле (12) вычислим значения  $A_p(j)$ , тогда  $A_1(j) = a_{j,j}A_0(j) = 1$  и  $A_2(j) = -A_0(j) + A_1(j) = 0$ , следовательно,  $A_p = 0$  при  $p \geq 2$ . С учетом этих значений  $A_p(j)$  из (11) найдем, что

$$\Delta^{(j+1)} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_p(j) b_{j+p} = b_j - b_{j+1} = \frac{b^j}{1-b} < \infty$$

для любого фиксированного  $j$  при любых  $b \neq 1$ , т. е. метод редукции сходится и независимо от  $j$  существует определитель Крамера  $\Delta^{(j+1)}$ .

Найдем условие того, когда определитель  $\Delta^{(j+1)}$  является решением системы (36), т. е. найдем достаточное условие существования строго частного решения.

Подставляя выражение  $x_j = \Delta^{(j+1)} = \frac{b^j}{1-b}$  в систему (36), имеем

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Delta^{(j+1+p)} = \frac{b^j}{(1-b)} \sum_{p=0}^{\infty} b^p, \quad (37)$$

но последний ряд сходится тогда и только тогда, когда  $|b| < 1$ . Следовательно, при  $|b| < 1$  система (36) удовлетворяется, поэтому  $x_j = \frac{b^j}{1-b}$  является строго частным решением.

Очевидно, что при  $|b| \geq 1$  ряд в правой части (37) не сходится, следовательно, не существует строго частного решения, поэтому на основании основной теоремы система (36) несовместна. Таким образом, хотя бесконечный определитель  $\Delta^{(j+1)}$  существует, т. е. метод редукции сходится, он может и не быть решением системы. Поэтому в таком случае правило Крамера не дает решения бесконечной системы.

Обратим внимание еще на один момент. Как отмечается в [16], бесконечная матрица может иметь бесконечное число обратных матриц, что, очевидно, создает дополнительные сложности решения таких систем.

В-третьих, решение однородной системы никак не зависит от структуры бесконечного определителя системы. Поэтому если бесконечный определитель не равен нулю, однородная система может иметь нетривиальное решение, чего быть не может для конечных систем. Подпространство решений однородной системы может быть даже бесконечномерным. Данное обстоятельство создает дополнительные сложности при исследовании единственности решения бесконечной системы.

В-четвертых, нелинейный характер решений бесконечных однородных систем выявляется только при решении ее методом редукции в широком смысле, т. е. в каждой урезанной системе количество неизвестных на единицу больше, чем количество уравнений. Точнее, предполагается, что конечная урезанная система для каждого  $n$  имеет вырожденную матрицу. Метод редукции в широком смысле сходится всегда, если только существует нетривиальное решение однородной системы. При этом решение бесконечной системы он сводит к решению нелинейного (характеристического) уравнения. Но при определенных условиях он может выступать как численный алгоритм определения конкретного корня характеристического уравнения однородной системы, т. е. может отражать нелинейный характер решения однородной системы. В этой роли метод редукции в широком смысле не всегда сходится, и в этом проявляется двойственность данного метода, обусловленная двойственностью решения однородной системы.

Прежде всего отметим противоречивый характер решения (34) с теорией конечных систем в двух аспектах. Во-первых, если однородная система (33) имеет нетривиальное решение, то решения  $\{y_j\}$  однородной системы могут быть линейно зависимы, что противоречит представлениям теории конечных систем, поскольку определитель системы (33) не равен нулю. Во-вторых, решение линейной однородной системы необходимым образом, как видели выше, сводится к решению нелинейного уравнения, чего не может быть для конечных систем.

Кроме того, как уже указали в разд. 1, оператор  $A$ , представляющий бесконечную матрицу  $A$  линейного уравнения (33), не является ни фредгольмовым, ни нётеровым оператором, поэтому общая бесконечная система (33) не может

быть полностью исследована с помощью теории линейных операторов фредгольмовского или нётеровского типов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. М. Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.
2. Федоров Ф. М. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и их приложения. Новосибирск: Наука, 2011.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
4. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1975.
5. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
6. Nöther F. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen // Math. Ann. 1921. V. 82. P. 42–63.
7. Федоров Ф. М., Осипова Т. Л. Граничный метод в задачах с переменными граничными условиями // Мат. заметки ЯГУ. 2005. Т. 12, № 1. С. 116–120.
8. Федоров Ф. М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.
9. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Физматгиз, 1960.
10. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука, 1973.
11. Федоров Ф. М., Иванова О. Ф., Павлов Н. Н. Сходимость метода редукции и совместность бесконечных систем // Вестн. СВФУ им. М. К. Аммосова. 2014. Т. 11, № 2. С. 14–21.
12. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
13. Федоров Ф. М. К теории периодических бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 1. С. 141–152.
14. Федоров Ф. М. О новом подходе изучения вещественных корней полиномиального уравнения // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т. 10, № 1. С. 105–113.
15. Федоров Ф. М., Абрамова М. Е. О решении алгебраических уравнений бесконечной степени обобщенным методом Бернулли // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, № 2. С. 80–88.
16. Холубовски В. М. Алгебраические свойства групп бесконечных матриц: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. СПб, 2007.

*Статья поступила 20 сентября 2015 г.*

Федоров Фома Михайлович, Иванова Оксана Федотовна, Павлов Никифор Никитич  
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
Институт математики и информатики,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)  
foma\_46@mail.ru

УДК 517.9

## ФОРМАЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ТИПИЧНЫХ РОСТКОВ ПОЛУГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

П. А. Шайхуллина

**Аннотация.** Рассматриваются ростки полугиперболических отображений, т. е. двумерных голоморфных отображений, один из мультипликаторов которых параболический, а другой — гиперболический. Получена формальная классификация типичных полугиперболических ростков и доказана теорема о полужормальной нормализации.

**Ключевые слова:** полугиперболический росток, формальная классификация, полужормальная нормализация.

**Shaikhullina P. A. Formal normalization of generic germs for semihyperbolic maps.**

**Abstract:** The subject of research are germs of semihyperbolic maps, i. e. of two-dimensional maps such that one of its multiplier is parabolic and another one is hyperbolic. A formal classification of generic semihyperbolic germs is obtained and a theorem on semihyperbolic normalization is proved.

**Keywords:** semihyperbolic germ, formal classification, semiformal normalization.

### Введение

Задача об аналитической классификации ростков векторных полей (отображений) была поставлена в работах Пуанкаре [1–4]. Ее вариантом является так называемая задача о нормализации, т. е. о приведении ростка аналитической заменой координат к простейшему виду — нормальной форме. Обе эти задачи были решены, в основном, в работах Пуанкаре [1–5], Зигеля [6] и Брюно [7]. Неисследованными оставались лишь ростки типа Зигеля при наличии резонансов или патологической близости к резонансам [8]. В 1980-е гг. существенные продвижения были получены и для этих «особых» случаев в работах Йоккоза [9] для «лиувиллевых» ростков, в работах С. М. Воронина [10], Экаля [11], Мартине и Рамиса [12, 13] — для резонансных. Оказалось, что в резонансном случае препятствием к нормализации ростка являются так называемые «функциональные инварианты». Более того, они же содержат полную информацию об «аналитическом» типе ростка.

Функциональные инварианты аналитической классификации были изначально построены для ростков параболических отображений (одномерных голоморфизмов, касательных к тождественному) [10, 11, 14], для резонансных седловых [14] и седлоузловых [15] ростков векторных полей. В дальнейшем функ-

циональные инварианты были обнаружены во многих других задачах аналитической классификации [16–19].

Одним из способов построения функциональных инвариантов является следующий. Проколота окрестность неподвижной (особой) точки покрывается секториальными областями. На каждой из них строится аналитическая замена координат, нормализующая росток. Функции перехода полученного «нормализующего» атласа и доставляют искомые функциональные инварианты. Поэтому задача о секториальной нормализации, т. е. задача о нормализации ростка на области, для которой неподвижная (особая) точка является не внутренней, а граничной — первый и важнейший этап решения задачи об аналитической классификации резонансных ростков.

Как отмечено выше, такую секториальную нормализацию удалось провести для одномерных резонансных отображений, седловых и седлоузловых резонансных векторных полей. Следующими по сложности являются двумерные отображения и трехмерные векторные поля.

Ростки двумерных отображений и трехмерных векторных полей (при чрезвычайно сильных ограничениях, выделяющих в пространстве ростков подмножества коразмерности бесконечность) рассматривались в [20], для таких ростков намеченная выше программа была реализована полностью. Однако для типичных резонансных случаев сделано пока мало. Единственные, по-видимому, к настоящему моменту результаты о нормализации получены для так называемых полугиперболических ростков, т. е. ростков двумерных отображений, один из мультипликаторов которых гиперболический (по модулю не равен 0 или 1), а второй параболический (равен 1). А именно, в [15] доказана теорема о секториальной нормализации ростков для класса формальной эквивалентности одного конкретного полугиперболического ростка. В дальнейшем предполагалось из функций перехода построенного нормализующего атласа изготовить функциональные инварианты аналитической классификации ростков рассмотренного класса. Следует отметить, что рассмотренный в [15] класс состоял из ростков, струи которых (достаточно высокого порядка) были нормализованы во всех точках их инвариантного гиперболического подмногообразия. Наличие такой «предварительной» нормализации было существенным для построения секториальных нормализующих отображений. Однако возможность такой предварительной нормализации не является прямым следствием формальной приводимости ростка к его нормальной форме.

Частные результаты для ростков полугиперболических отображений о существовании голоморфного («секториального») центрального многообразия получены в работах [21, 22].

В настоящей работе рассматриваются типичные полугиперболические ростки. В перспективе планируется получить их аналитическую классификацию по указанному выше плану. Здесь же в качестве первого шага, необходимого для построения секториальной нормализации, будет получена их формальная классификация и «предварительная» нормализуемость.



§ 1. Классы ростков  $\mathcal{S}\mathcal{H}$  и  $\mathcal{S}\mathcal{H}_0$ .

## Теорема о формальной классификации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Росток голоморфизма  $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  будем называть *полугиперболическим*, если один его мультипликатор равен 1, а другой — гиперболический:

$$F(x, y) = (x + \dots, \Lambda y + \dots), \quad \text{где } |\Lambda| \neq 0, 1.$$

Полугиперболический росток будем называть *типичным*, если в разложении

$$F(x, y) = (x + cx^2 + \dots, \Lambda y + \dots)$$

постоянная  $c$  не равна нулю.

Класс типичных полугиперболических диффеоморфизмов будем обозначать через  $\mathcal{S}\mathcal{H}$ . Заметим, что росток  $F \in \mathcal{S}\mathcal{H}$  имеет инвариантное аналитическое подмногообразие, соответствующее гиперболическому мультипликатору (теорема Адамара — Перрона [23]). Его можно выпрямить голоморфной заменой координат. Поэтому без ограничения общности можно считать, что это инвариантное подмногообразие является прямой  $\{x = 0\}$ . Класс ростков  $F \in \mathcal{S}\mathcal{H}$ , инвариантное многообразие которых совпадает с прямой  $\{x = 0\}$ , будем обозначать через  $\mathcal{S}\mathcal{H}_0$ .

Заметим, что росток класса  $\mathcal{S}\mathcal{H}_0$  резонансный. По теореме Пуанкаре — Дюлака [8] формальной заменой координат такой росток можно привести к виду

$$(x, y) \mapsto (f(x), yK(x)).$$

Однако такие ростки допускают и дальнейшую нормализацию. А именно, первая компонента  $x \mapsto f(x)$  является параболическим отображением. Формальная классификация параболических ростков хорошо известна [10]: в типичном случае класс формальной эквивалентности такого ростка определяется одним числовым модулем. Удобно использовать в качестве формальной нормальной формы параболического ростка сдвиг за единичное время  $g_{v_a}^1$  вдоль векторного поля

$$v_a(x) = \frac{x^2}{1 + ax} \frac{\partial}{\partial x}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Далее, имеется известная параллельность результатов по классификации отображений и векторных полей. Формальная классификация векторных полей с особой точкой типа седлоузла в двумерном случае получена в [17]. Для типичных векторных полей с такой особой точкой (сдвиг за единичное время вдоль такого векторного поля как раз и есть полугиперболическое отображение) формальная классификация имеет три числовых параметра. Так что в качестве формальной нормальной формы (ФНФ) для типичных полугиперболических отображений можно было бы взять сдвиги за единичное время вдоль ФНФ седлоузловых векторных полей из [17]. Однако для наших целей будет удобно использовать другие ФНФ, которые, впрочем, также будут зависеть от трех

параметров. Кроме того, для того чтобы формальную классификацию ростков полугиперболических отображений получить из классификации седлоузловых векторных полей, надо доказать теорему о формальном включении ростков полугиперболических отображений в поток, что само по себе нетривиально.

Кроме того, как отмечалось выше, для дальнейших исследований полугиперболических ростков нам потребуется нечто большее нежели просто приводимость к формальной нормальной форме. Однако ни теорема Пуанкаре — Дюлака, ни теорема о формальном включении в поток не дают необходимого результата. Поэтому теорема о формальной классификации будет доказана прямыми выкладками, а теорему о формальном включении в поток (и даже в ее усиленном «полуформальном» варианте) получим в качестве простого следствия. При этом мы получим существенно более сильный результат, состоящий в том, что росток класса  $\mathcal{S}\mathcal{H}_0$  приводится к ФНФ полуформальной заменой.

**Теорема 1.** Пусть  $F \in \mathcal{S}\mathcal{H}_0$ . Тогда существуют комплексные числа  $a, \lambda, \beta$  такие, что  $F$  формально эквивалентно  $F_{a,\lambda,\beta} = g_{\omega_{a,\lambda,\beta}}^1$  — сдвигу за единичное время вдоль векторного поля

$$\omega_{a,\lambda,\beta} = v_a(x) + y(\lambda + \beta v'_a(x)) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (a, \lambda, \beta) \in \mathbb{C}^3, \quad (1)$$

где  $v_a(x) = \frac{x^2}{1+ax} \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\text{Im } \lambda \in [0; 2\pi)$ ,  $\text{Re } \lambda \neq 0$ . Более того, нормализующее преобразование может быть выбрано формальным по переменным  $x$  и аналитическим по переменным  $y$ . (Преобразования такого типа будем называть *полуформальными*).

**Замечание 1.** Будет показано также, что ФНФ единственна, т. е. по заданному ростку  $F \in \mathcal{S}\mathcal{H}_0$  параметры  $a, \lambda, \beta$  его ФНФ определяются однозначно, а нормализующая замена единственна с точностью до «суперпозиционного» домножения на сдвиг  $g_{\omega_{a,\lambda,\beta}}^t$  за фиксированное время  $t \in \mathbb{C}$  и растяжения  $(x, y) \mapsto (x, ky)$ ,  $k \neq 0$ .

**Следствие 1.** Пусть  $F_{a,\lambda,\beta}$  — формальная нормальная форма ростка  $F \in \mathcal{S}\mathcal{H}_0$ . Тогда для любого  $N \in \mathbb{N}$  существует такой росток  $\mathcal{G} \in \mathcal{S}\mathcal{H}_0$ , аналитически эквивалентный ростку  $F$ , что

$$\mathcal{G}(x, y) - F_{a,\lambda,\beta}(x, y) = O(x^N) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

**Следствие 2.** Для любого ростка  $F \in \mathcal{S}\mathcal{H}_0$  можно построить такое формальное векторное поле  $v$  с особой точкой типа седлоузел, что  $F = g_v^1$ .

Теорема о полуформальной классификации будет доказана в два этапа. В § 2 (первый этап) стандартным методом последовательных приближений полугиперболический росток будет приведен с помощью полуформальных замен координат к так называемой предварительной формальной нормальной форме (ПФНФ). На втором этапе в § 3 ПФНФ будет приведена к полиномиальному виду, окончание доказательства — в § 4. В § 5 покажем единственность формальной нормальной формы (и «почти единственность» формальной нормализующей замены). Следствия 1 и 2 будут доказаны в § 6 и § 7 соответственно.

## § 2. Предварительная формальная нормальная форма

Пусть росток  $\mathcal{F}$  из класса  $\mathcal{S}\mathcal{H}_0$ ,  $F$  — его представитель. В первую очередь преобразуем отображение  $F$  к более простому виду. Фактически это и будет классическая формальная нормальная форма Пуанкаре — Дюлака. Однако мы покажем приводимость к такому виду «полуформальными» заменами координат.

**Лемма 1.** *Существует формальная замена координат, приводящая типичное полугиперболическое отображение  $F$  из  $\mathcal{S}\mathcal{H}_0$  к некоторому виду, который будем называть предварительная формальная нормальная форма (ПФНФ)*

$$F_0(x, y) = (f(x), yK(x)), \quad \text{где } f(x) = x + x^2 + O(x^3), \quad K(x) = \Lambda + O(x). \quad (2)$$

Нормализующее преобразование при этом может быть выбрано в виде

$$(x, y) \mapsto \left( \sum_i \alpha_i(y)x^i; \sum_j \beta_j(y)x^j \right), \quad i, j = 0, 1, \dots,$$

с  $\alpha_i, \beta_j$  — аналитическими функциями, определенными для всех  $i, j$  в некоторой фиксированной окрестности начала координат.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 0. Для ростка  $\mathcal{F}$  класса  $\mathcal{S}\mathcal{H}_0$  прямая  $\{x = 0\}$  является инвариантной, поэтому  $F(\{x = 0\}) = \{x = 0\}$ . Представим отображение  $F$  в виде ряда Хартогса в полидиске  $S_{rR} = \{|x| < r, |y| < R\}$ :

$$F(x, y) = (xa_1(y) + x^2a_2(y) + \dots, b_0(y) + b_1(y)x + \dots),$$

в котором функции  $a_i(y), b_j(y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots$ , голоморфны. Тогда они удовлетворяют условиям:  $a_1(0) = 1, a_2(0) \neq 0, b_0(0) = 0, b'_0(0) = \Lambda, |\Lambda| \neq 0, 1$ . Всюду ниже будем использовать такие же разложения в ряды Хартогса и отслеживать лишь значения параметра  $R$  (радиус сходимости круга, в котором голоморфны все коэффициенты ряда), не обращая внимания на другой параметр.

Сужение  $f$  отображения  $F$  на прямую  $\{x = 0\}$  — это гиперболическое отображение  $y \mapsto b_0(y)$ . По теореме Шредера [24] оно может быть линеаризовано аналитической заменой координат. Таким образом, без ограничения общности можем считать, что  $b_0(y) = \Lambda y$ .

1. Нормализация коэффициента  $a_1$ . Аналитическая на  $S_{rR}$  замена координат  $H_1(x, y) = (k(y)x, y)$  преобразует  $F$  к виду

$$F_1(x, y) = H_1^{-1} \circ F \circ H_1(x, y) = \left( xa_1(y)k(y) \frac{1}{k(\Lambda y + \dots)} + \dots, \Lambda y + \dots \right).$$

Хотим выбрать такое  $k(y)$ , чтобы было

$$a_1(y) \frac{k(y)}{k(\Lambda y)} = 1. \quad (3)$$

Если  $|\Lambda| > 1$ , то искомое голоморфное решение уравнения (3) дается формулой

$$k(y) = \prod_{n=1}^{\infty} a_1 \left( \frac{y}{\Lambda^n} \right).$$

Если же  $0 < |\Lambda| < 1$ , то голоморфным решением уравнения (3) будет функция

$$k(y) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_1(\Lambda^n(y))}.$$

Сходимость бесконечных произведений и их голоморфность в круге  $\{|y| < R\}$  следует из соответствующих теорем комплексного анализа. Таким образом, голоморфной на  $S_{rR}$  заменой координат коэффициент  $a_1$  можно сделать равным 1. Всюду далее будем считать  $a_1 \equiv 1$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что после выполненной замены второй параметр полидиска  $S_{rR}$  — радиус сходимости коэффициентов разложения в ряд Хартогса нормализуемого отображения — не изменился.

2. Нормализация коэффициентов  $a_2$  и  $b_1$ . Рассмотрим преобразование

$$H_2(x, y) = (x + \alpha(y)x^2, y + \beta(y)x)$$

и обратное к нему

$$H_2^{-1}(x, y) = (x - \alpha(y)x^2 + O(x^3), y - \beta(y)x + O(x^2)).$$

Тогда при  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} F_2(x, y) &= H_2^{-1} \circ F_1 \circ H_2(x, y) \\ &= (x + x^2(\alpha(y) - \alpha(\Lambda y) + a_2(y)) + O(x^3), \Lambda y + x(\Lambda\beta(y) - \beta(\Lambda y) + b_1(y)) + O(x^2)). \end{aligned}$$

Мы бы хотели решить два уравнения:

$$\alpha(\Lambda y) - \alpha(y) = a_2(y), \quad (4)$$

$$\beta(\Lambda y) - \Lambda\beta(y) = b_1(y). \quad (5)$$

Это позволило бы максимально упростить, т. е. сделать равными нулю соответствующие коэффициенты ряда  $F_2$ . Рассмотрим сначала уравнение (4). Представим функции  $a_2(y)$  и  $\alpha(y)$  в виде степенных рядов

$$\alpha(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k y^k, \quad a_2(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2,k} y^k.$$

Здесь первый ряд является разложением неизвестной функции  $\alpha$ , а второй ряд сходится в круге  $\{|y| < R\}$ . Подставим эти разложения в уравнение и, сравнивая левую и правую части, получим

$$(\Lambda^k - 1)\alpha_k = a_{2,k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Для любого  $k \neq 0$  уравнение (6) разрешимо; при  $k = 0$  решение существует только в случае  $a_{2,0} = 0$ . Повторяя те же рассуждения для (5), получаем для коэффициентов  $\beta_k$  и  $b_{1,k}$  разложений

$$\beta(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(y), \quad b_1(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{1,k}(y)$$

систему

$$(\Lambda^k - \Lambda)\beta_k = b_{1,k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

уравнения которой разрешимы для всех  $k \neq 1$ . При  $k = 1$  необходимым условием разрешимости является равенство нулю коэффициента  $b_{1,1}$ . Итак, при замене координат указанного вида коэффициент  $a_2$  можно сделать равным константе, а коэффициент  $b_1$  привести к линейному виду. Отметим, что из условий типичности следует, что  $a_2(0) \neq 0$ . Поэтому без ограничения общности можем ниже считать, что  $a_2(y) = \text{const} \neq 0$ ,  $b_1(y) = b_{1,1}y$ . Наконец, используя дополнительное преобразование  $(x, y) \mapsto (mx, y)$ , можем добиться того, что  $a_2(y) = 1$ .

Так как функции  $a_2(y)$  и  $b_1(y)$  аналитические в области  $\{|y| < R\}$ , ряды  $\alpha(y)$  и  $\beta(y)$  также сходятся в круге  $\{|y| < R\}$ . Поэтому построенное преобразование  $H$  голоморфно на  $S_{rR}$  и по-прежнему справедливо замечание из предыдущего пункта.

3. Индукция. Пусть на некотором шаге отображение  $F_{N-1}$  имеет вид

$$F_{N-1}(x, y) = (x + x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_{N-1} x^{N-1} + \alpha_N(y) x^N + O(x^{N+1}); \\ y(\Lambda + \beta_1 x + \dots + \beta_{N-2} x^{N-2}) + \beta_{N-1}(y) x^{N-1} + O(x^N)),$$

где  $\alpha_3, \dots, \alpha_{N-1}, \beta_1, \dots, \beta_{N-2}$  являются константами, функции  $\alpha_N(y)$  и  $\beta_{N-1}(y)$  голоморфны на  $\{|y| < R\}$ . Будем использовать преобразование

$$H_N(x, y) = (x + \alpha(y) x^N, y + \beta(y) x^{N-1}).$$

Тогда, как и на предыдущем шаге, можем сделать коэффициент  $\alpha_N$  равным константе, а коэффициент  $\beta_{N-1}$  — линейным по переменной  $y$ , при этом  $H_N(x, y)$  будет голоморфно на  $S_{rR}$  и, опять же, будет справедливо замечание 2.

4. Выполняя для любого  $N$  замену из предыдущего пункта, построим последовательность замен  $H_N$ , каждая из которых «улучшает» по одной паре «мономов» из разложения нормализуемого преобразования в ряд Хартогса. Заметим, что в суперпозиции  $\mathcal{H}_N = H_1 \circ H_2 \circ \dots \circ H_N$  происходит стабилизация «мономов» в разложении  $\mathcal{H}_N$ . То же происходит и с нормализуемым отображением  $F_N = \mathcal{H}_N^{-1} \circ F \circ \mathcal{H}_N$ . Поэтому бесконечная суперпозиция  $\mathcal{H} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{H}_N$  сходится в пространстве формальных рядов по переменной  $x$  с коэффициентами, голоморфными по переменной  $y$  в круге  $\{|y| < R\}$  и является искомой полуформальной нормализующей заменой координат, поскольку  $F_N$  сходятся к ПФНФ (2) в том же пространстве рядов.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из специфики построения замен следует, что бесконечная суперкомпозиция, приводящая  $F$  к ПФНФ, является формальным рядом по переменной  $x$  с коэффициентами, голоморфными в одной и той же окрестности начала координат.

### § 3. Второй шаг формальной нормализации

Выше типичное полугиперболическое отображение приведено к виду (2). Вторичная нормализация, приводящая его к ФНФ, будет выполнена с помощью замены вида

$$H(x, y) = (p(x), yq(x)), \quad (7)$$

$$p'(0) = 1. \quad (8)$$

Эта замена приводит ПФНФ (2) к виду  $\tilde{F} = H^{-1} \circ F_0 \circ H = (\tilde{f}(x), \tilde{K}(x)y)$ , где

$$\tilde{f}(x) = p^{-1} \circ f \circ p, \quad \tilde{K}(x) = K \circ p \cdot \frac{q}{q \circ f}. \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Значения

$$f'''(0) = \tilde{f}'''(0), \quad K(0) = \tilde{K}(0), \quad K'(0) = \tilde{K}'(0) \quad (10)$$

не меняются при действии замены координат (7), (8) (являются инвариантами формальной классификации типичных полугиперболических отображений). Для второго и третьего равенств это очевидно, а первое показано в [10] (но, конечно, легко может быть проверено прямыми выкладками).

Напомним, что  $f$  является типичным параболическим отображением и  $\tilde{f}$  — сопряженное к нему. Из формальной классификации параболических отображений известно (см. [10]), что существуют константа  $a$  и формальная замена координат  $p(x)$ , приводящая отображение  $f$  к  $\tilde{f} = g_{v_a}^1(x)$ , где  $g_{v_a}^1(x)$  является сдвигом за единичное время вдоль векторного поля (1). Более того, если  $f(x)$  имеет вид  $f(x) = x + x^2 + \dots$  (а для первой компоненты отображения (2) это так), то для замены  $p(x)$  будет выполнено условие (8). Далее, положим  $\varphi = \ln q$ ,  $k = \ln \left( \frac{\tilde{K}}{K \circ p} \right)$ , тогда второе уравнение из (9) принимает вид

$$-\varphi \circ \tilde{f} + \varphi = k. \quad (11)$$

**Лемма 2.** Для любого формального параболического отображения  $\tilde{f}$  и любой функции  $k(x)$  такой, что  $k(0) = k'(0) = 0$ , существует единственное формальное решение  $\varphi(x)$  уравнения (11) такое, что  $\varphi(0) = 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\tilde{f} = x + cx^2 + \dots, \quad c \neq 0, \quad k(x) = \sum_{j=2}^{\infty} k_j x^j; \quad \varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j x^j.$$

Подставляя эти разложения в (11), получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j x^j - \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j (x + cx^2 + \dots)^j = \sum_{j=2}^{\infty} k_j x^j.$$

Приравнивая коэффициенты при  $x^j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , приходим к бесконечной системе уравнений

$$-c(j-1)\varphi_{j-1} + \dots = k_j, \quad j = 2, 3, \dots,$$

где многоточием обозначены члены, зависящие от  $\varphi_s$  с номерами  $s$ , меньшими, чем  $j-1$ . Так как  $c \neq 0$  для типичного параболического отображения, эти уравнения можно решать последовательно. Это дает существование, а так же и единственность формального решения.  $\square$

**Лемма 3.** Для любых параболических диффеоморфизмов  $f(x) = x + x^2 + \dots$  и  $p(x) = x + \dots$ , любых  $K$  и  $\tilde{K}$ , удовлетворяющих (10), существует формальное решение  $q$  второго уравнения системы (9), такое что  $q(0) = 1$ . Это решение является единственным (с точностью до умножения на константу). В частности, любое отображение  $F \in \mathcal{S}\mathcal{H}_0$  вида (2) может быть приведено формальной заменой вида (7) к форме

$$\tilde{F}_{a,\lambda,b}(x,y) = (g_{v_a}^1(x), y(\Lambda + bx)), \quad \Lambda = e^\lambda.$$

**Доказательство.** Первое утверждение данной леммы следует из леммы 2, а второе — из первого.  $\square$

#### § 4. Окончание доказательства теоремы о формальной классификации

Пусть  $F_{a,\lambda,\beta} = g_{\omega_{a,\lambda,\beta}}^1(x,y)$  — сдвиг за единичное время вдоль векторного поля  $\omega_{a,\lambda,\beta}$ . Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = v_a(x), \\ \dot{y} = y(\lambda + \beta v'_a(x)). \end{cases}$$

Пусть  $(x(t), y(t))$  — ее решение с начальными условиями  $(x(0) = x_0, y(0) = y_0)$ . Получим

$$x(t) = g_{v_a}^t(x_0), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda y \frac{1}{v_a(x)} + y\beta \frac{v'_a(x)}{v_a(x)}.$$

Тогда

$$dy = \lambda y dt + d(y \ln v_a(x)),$$

и

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t} \left( \frac{v_a(x_0)}{v_a(x(t))} \right)^\beta.$$

Обозначив  $f_a = g_{v_a}^1$ , имеем

$$F_{a,\lambda,\beta}(x_0, y_0) = (f_a(x_0), e^\lambda y_0 (f'_a(x_0))^\beta).$$

Наконец, если

$$\Lambda = e^\lambda, \quad \Lambda(x) = \Lambda(f'_a(x))^\beta,$$

то  $F_{a,\lambda,\beta} = (f_a(x), y\Lambda(x))$ .

Вычислим инварианты (10) для  $F_{a,\lambda,\beta}$ . Это и будут в точности параметры  $a$ ,  $\Lambda = e^\lambda$ ,  $\beta$ . Поэтому по лемме 3  $F_{a,\lambda,\beta}$  приводится к  $\tilde{F}_{a,\lambda,\beta}$  заменой вида (7). Но и исходное отображение  $F$  в соответствии с построением этого и предыдущего пунктов приводится к некоторой форме  $\tilde{F}_{a,\lambda,\beta}$  полуформальными заменами. Следовательно, исходное отображение  $F$  можно привести к виду  $F_{a,\lambda,\beta}$  полуформальными заменами переменных. Теорема о формальной нормализации доказана.

**§ 5. Единственность ФНФ  
и формальной нормализующей замены**

Пусть  $F = F_{a,\lambda,\beta}$  и  $F' = F_{a',\lambda',\beta'}$  — две формальные нормальные формы из теоремы о формальной классификации, и пусть формальная замена координат  $H$  сопрягает  $F$  и  $F'$ :

$$H \circ F = F' \circ H. \quad (12)$$

Заметим, что для формальных нормальных форм прямые  $\{x = 0\}$  и  $\{y = 0\}$  являются инвариантными (первая из них — их общее инвариантное гиперболическое подмногообразие, вторая — центральное многообразие). Поэтому замена координат  $H$  должна их сохранять. Значит, замена  $H$  имеет вид

$$H(x, y) = (xa(x, y); yb(x, y)), \quad (13)$$

где  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$  — формальные степенные ряды, причем  $a(0, 0) \cdot b(0, 0) \neq 0$ . Но тогда формальное отображение  $h(x) = xa(x, 0)$  сопрягает отображения  $f_a(x)$  и  $f_{a'}(x)$ :

$$h \circ f_a = f_{a'} \circ h. \quad (14)$$

В силу единственности ФНФ параболических отображений [10] отсюда следует совпадение параметров  $a$  и  $a'$ . Аналогично формальный диффеоморфизм  $g(y) = yb(0, y)$  сопрягает сужения  $F$  и  $F'$  на прямую  $\{x = 0\}$ :

$$g(\Lambda y) = \Lambda' g(y). \quad (15)$$

Дифференцируя (15) по  $y$  и подставляя  $y = 0$ , получим  $\Lambda = \Lambda'$ , а из условия  $\text{Im } \lambda, \text{Im } \lambda' \in [0; 2\pi)$  вытекает, что  $\lambda = \lambda'$ . Сравнивая в (14) коэффициенты при  $x^2$ , с учетом того, что  $a = a'$ , имеем

$$h'(0) = a(0, 0) = 1. \quad (16)$$

Подставляя (13) в (12) и вычисляя коэффициент при  $xy$  во второй компоненте полученного равенства, из равенства (16) выводим, что  $\beta = \beta'$ . Это завершает доказательство единственности ФНФ.

Для изучения вопроса единственности нормализующей замены достаточно рассмотреть формальные замены координат, сохраняющие ФНФ. Таким образом, надо найти все формальные замены  $H(x, y)$ , удовлетворяющие условию (12) (для случая  $F = F'$ ). Повторяя те же рассуждения, что и выше, и используя те же обозначения, получим опять же равенства (14) и (15), в которых  $a = a'$ ,  $\Lambda = \Lambda'$ . Из (14) следует, что  $h$  коммутирует с  $f_a$ . Как показано в [10], все формально коммутирующие с  $f_a$  отображения  $h$  имеют вид  $h = g_{v_a}^t$  для некоторого  $t \in \mathbb{C}$ . Рассмотрим отображение  $H_t = g_{\omega_{a,\lambda,\beta}}^t$ ; так как  $F = g_{\omega_{a,\lambda,\beta}}^1$ , то  $H_t$  и  $F$  коммутируют:  $H_t \circ F = F \circ H_t$ . Но тогда и  $H_t^{-1} \circ H$  коммутирует с  $F$ . Поэтому без ограничения общности можем считать, что  $h = \text{id}$  (этого можно добиться, заменив  $H$  на  $H_t^{-1} \circ H$ ).

Далее, из (15) следует линейность  $g$ :  $g(y) = ky$ ,  $k \neq 0$ . Линейное отображение  $L : (x, y) \mapsto (x, ky)$  также коммутирует с ФНФ  $F$ . Повторяя те же



выкладки, что и выше, мы можем тем самым считать, что и отображение  $g$  тождественно. Наконец, как и выше, подставляя (13) в (12) и используя условие « $H = \text{id}$  на прямых  $\{x = 0\}$  и  $\{y = 0\}$ », последовательным приравниванием коэффициентов при степенях  $x^k$  (т. е. фактически, повторяя все рассуждения из § 2–4 и решая соответствующие, в данном случае однородные, уравнения), получим  $H \equiv \text{id}$ . С учетом двух сделанных поправок нормализующей замены это и дает ее единственность с точностью до растяжения вдоль  $y$  и сдвига вдоль векторного поля  $\omega_{a,\lambda,\beta}$ .

### § 6. Доказательство следствия 1

Пусть  $H(x, y) = (H_1(x, y), H_2(x, y))$  — формальная нормализующая замена, построенная выше в теореме о формальной классификации. Заметим, что каждый из формальных рядов  $H_j(x, y)$ ,  $j = 1, 2$ , представим в виде

$$H_j(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^j(y)x^k,$$

где функции  $c_k^j(y)$  голоморфны в некоторой фиксированной окрестности начала координат. Рассмотрим замену

$$H_N(x, y) = (H_{1N}(x, y), H_{2N}(x, y)),$$

где

$$H_{jN}(x, y) = \sum_{k=0}^N c_k^j(y)x^k.$$

Это голоморфная замена, и она переводит росток  $F$  в росток требуемого вида.

### § 7. Доказательство следствия 2

Пусть  $F$  — произвольный росток из  $\mathcal{S}\mathcal{H}_0$ ,  $F_{a,\lambda,\beta} = g_{\omega_{a,\lambda,\beta}}^1$  — его ФНФ, и пусть  $H$  — полуформальная замена координат, сопрягающая  $F$  и  $F_{a,\lambda,\beta}$ :  $H \circ F = F_{a,\lambda,\beta} \circ H$ . Пусть замена  $H^{-1}$  переводит векторное поле  $\omega_{a,\lambda,\beta}$  в векторное поле  $\omega$ :  $H' \cdot \omega = \omega_{a,\lambda,\beta} \circ H$ . Тогда  $F = g_{\omega}^1$ , что и требовалось доказать.

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** Так как замена координат, обратная к полуформальной замене, также является полуформальной заменой, векторное поле  $\omega$ , построенное выше, является «полуформальным»: его компоненты разлагаются в ряды Хартогса (по степеням  $x$ ) с коэффициентами, аналитическими в некоторой фиксированной окрестности начала координат.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré H. Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle. I // J. Math. Pures Appl. 1881. V. 7. P. 375–422.
2. Poincaré H. Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle. II // J. Math. Pures Appl. 1882. V. 8. P. 251–286.

3. *Poincare H.* Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle. III // J. Math. Pures Appl. 1885. V. 1. P. 167–244.
4. *Poincare H.* Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle. IV // J. Math. Pures Appl. 1886. V. 2. P. 151–217.
5. *Poincare H.* Sur le problem des trois corps et les equations de la dinamique // Acta Math. 1890. V. XIII. P. 1–270.
6. *Siegel C. L.* Vorlesungen uber Himmelsmechanik. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1957.
7. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. 1971. Т. 25. С. 199–239.
8. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. *Yoccoz J. C.* Linearisation des germes de diffeomorphismes holomorphes de  $(\mathbb{C}, 0)$  // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math. 1988. V. 306, N 1. P. 55–58.
10. *Воронин С. М.* Аналитическая классификация ростков конформных отображений  $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  с тождественной линейной частью // Функцион. анализ. 1981. Т. 15, № 1. С. 1–17.
11. *Ecalte J.* Sur les fonctions resurgentes. Orsay: Publ. Math. d’Orsay, 1981.
12. *Martinet J., Ramis J. P.* Problème de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1982. N 55. P. 63–164.
13. *Martinet J., Ramis J. P.* Classification analytique des équations différentielles non linéaires resonnantes du premier ordre // Ann. Sci. École Norm. Supér. 1983. V. 16, N 4. P. 571–621.
14. *Malgrange B.* Travaux d’Ecalte et de Martinet-Ramis sur les systemes dinamique // Asterisque. 1982. N 582. P. 59–73.
23. *Воронин С. М., Фомина П. А.* Секториальная нормализация полугиперболических отображений // Вестн. Челяб. гос. ун-та Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 16. 2013. № 28. С. 94–114.
16. *Воронин С. М., Мещерякова Ю. И.* Аналитическая классификация типичных вырожденных элементарных особых точек ростков голоморфных векторных полей на комплексной плоскости // Изв. вузов. Математика. 2005. № 1. С. 13–16.
17. *Воронин С. М., Мещерякова Ю. И.* Аналитическая классификация седлоузлов // Тр. Моск. мат. о-ва. 2005. Т. 66. С. 93–113.
18. *Воронин С. М.* Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 2. С. 21–29.
19. *Воронин С. М., Ортис-Бобадилла Л., Росалес-Гонсалес Э.* Проблема Тома в задаче об орбитальной аналитической классификации вырожденных особых точек голоморфных векторных полей на плоскости // Докл. АН. 2010. Т. 434, № 4. С. 443–446.
20. *Ueda T.* Local structure of analytic transformations of two complex variables // Int. J. Math. Kyoto Univ. 1986. V. 26, N 2. P. 233–261.
21. *Ueda T.* Local structure of analytic transformations of two complex variables // Int. J. Math. Kyoto Univ. 1991. V. 31, N 3. P. 695–711.
22. *Voronin S. M.* Darboux–Whitney’s problem and related questions // Adv. Sov. Math. Non-linear Stokes phenomena. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. V. 14. P. 139–233.
24. *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундаментальные направления. 1985. Т. 1. С. 7–150.
25. *Schröder E.* Uber iterierte Functionen // Ann. Math. 1871. V. 3. P. 296–322.

*Статья поступила 10 октября 2015 г.*

Шайхуллина Полина Алексеевна  
Челябинский гос. университет,  
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001  
fominapa@gmail.com

УДК 519.633

FINITE DIFFERENCE METHOD FOR THE INVERSE  
PROBLEM OF THE SIMULTANEOUS  
DETERMINATION OF THE RIGHT-HAND  
SIDE AND THE LOWEST COEFFICIENTS  
IN PARABOLIC EQUATIONS

L.-D. Su

Су Л.-Д. Конечно-разностный метод для одновременного определения в обратной задаче правой части и младших коэффициентов в параболическом уравнении.

**Аннотация.** Предлагается разностная схема для решения обратной задачи определения двух младших коэффициентов, зависящих от времени только в параболическом уравнении. Зависимость от времени в правой части параболического уравнения с использованием значений дополнительного решения в точках области вычислений. Для решения нелинейной обратной задачи строятся линейные аппроксимации по времени с использованием стандартной конечно-разностной процедуры в пространстве. Представлены результаты численных экспериментов, подтверждающих возможность применения предлагаемых алгоритмов для решения обратной задачи нахождения коэффициентов.

**Ключевые слова:** обратная задача, конечно-разностный метод, параболическое уравнение, нахождение коэффициентов.

**Abstract:** We propose a numerical scheme to solve the inverse problem of determining two lower coefficients that depends on time only in the parabolic equation. The time dependence of the right-hand side of a parabolic equation is determined using additional solution values at points of the computational domain. For solving the nonlinear inverse problem, linearized approximations in time are constructed using standard finite difference procedures in space. The results of numerical experiments are presented, confirming the capabilities of the proposed computational algorithms for solving the coefficients inverse problem.

**Keywords:** inverse problem, finite difference method, parabolic partial differential equation, identification of the coefficients.

In this paper, we consider an inverse problem of finding the two coefficients  $\gamma(t)$  and  $f(t)$  in the following equation

$$u_t - u_{xx} + \gamma(t) \cdot u = f(t) \cdot g(x, t), \quad (1)$$

where  $g(x, t)$  is known analytic function, the solution  $u(x, t)$  and the two coefficients  $\gamma(t)$ ,  $f(t)$  are unknown.

Many inverse problems arise throughout engineering and mathematical sciences [1–4]. In a direct problem, it is required to find a solution that satisfies some given

partial differential equation and some initial and boundary conditions. Different from direct problem, in inverse problems, the master equation, initial conditions and boundary conditions are not fully specified, instead, some additional information is available.

There are many different kinds of inverse problems in physics: coefficient inverse problems (in which the equation is not specified completely as some equation coefficients are unknown), boundary inverse problems (in which boundary conditions are unknown), and evolutionary inverse problems (in which initial conditions are unknown) [5, 6]. In this paper, we concentrate on the inverse problem of the parabolic equations is a coefficient inverse problem.

Many inverse problems are formulated as non-classical problems for PDEs. In other words, most standard numerical methods cannot achieve good accuracy in solving this problems. To solve approximately these problems, emphasis is on the development of stable computational algorithms that take into account peculiarities of inverse problems [7, 8]. Several regularization methods have been developed for solving ill-conditioning problems [8–10].

Much attention is paid to the problem of determining the lower coefficient of a parabolic equation of second order. The existence and uniqueness of the solution for such an inverse problem and well-posed of this problem in various functional classes were examined [11, 12]. Numerical methods for solving the problem of the identification of the lower coefficient of parabolic equations are also considered in many works [13–15].

In this paper, we consider the problem of determining the two lower coefficient that depends on time only. Approximation in space is performed using standard finite difference. The main features of the nonlinear inverse problem are taken into account via a proper choice of the linearized approximation in time. Linear problems at a particular time level are solved on the basis of a special decomposition into new standard elliptic problems.

The layout of the article is as follows: In section 1, we briefly introduce the formulation of the problem. In section 2, we introduce the method and apply this method on the time-dependent problems. The results of numerical experiments are presented in section 3. Section 4 is dedicated to a brief conclusion. Finally, some references are introduced at the end.

### 1. The problem formulation

Let  $\Omega$  is a bounded domain with a smooth boundary  $\partial\Omega$ . The direct problem is formulated as follows

$$u_t - u_{xx} + \gamma(t) \cdot u = f(t) \cdot g(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

with initial condition

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (3)$$

and the Dirichlet boundary condition

$$u(0, t) = \Phi_1(t), \quad u(l, t) = \Phi_2(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

where  $\gamma(t)$ ,  $f(t)$ ,  $g(x, t)$  and  $\Phi_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) are known functions,  $u(x, t)$  is the solution of the parabolic equation of second order (2), the initial condition  $u_0(x)$  is known.

In this paper, we consider the coefficients inverse problem, in (2), where the coefficients  $\gamma(t)$  and  $f(t)$  are unknown. The additional conditions often formulated as:

$$\int_{\Omega} u(x, t)\omega(x) dx = \varphi(t), \quad \int_{\Omega} u(x, t)\chi(x) dx = \psi(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (5)$$

where  $\omega(x)$  and  $\chi(x)$  are weight functions. Specifically, choosing  $\omega(x) = \delta(x - x^*)$  and  $\chi(x) = \delta(x - x^{**})$ , ( $x^*, x^{**} \in \Omega$ ), where  $\delta(x)$  is the Dirac  $\delta$ -function, from (5), we get

$$u(x^*, t) = \varphi(t), \quad u(x^{**}, t) = \psi(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (6)$$

The inverse problem is to find  $u(x, t)$ ,  $\gamma(t)$  and  $f(t)$  from problems (2)–(4) and additional conditions (5) or (6) is well-posed. The corresponding conditions for existence and uniqueness of the solution are available in the above-mentioned works.

In this paper, we consider only the numerical solution of these inverse problems with one dimension omitting theoretical issues of the convergence of an approximate solution to the exact one.

## 2. The computational algorithm

The inverse problem (2)–(5) (or (2)–(4), (6)) is nonlinear. The standard approach is based on the simplest approximations in time and involves the iterative solution of the corresponding nonlinear problem for the evaluation of the approximate solution at a new level. In our work, we apply such approximations in time that lead to linear problems for evaluating the solution at the new time level.

**2.1. The inverse problem.** We consider the inverse problem (2)–(4), (6) where  $\Omega = [0, l]$ . To solve the parabolic problem numerically, we introduce the grid in space

$$\bar{\omega}_h = \{x \mid x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, M, Mh = l\},$$

for the time we also have

$$\bar{\omega}_\tau = \{t^n \mid t^n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N, N\tau = T\}.$$

For all grid nodes, except boundary ones, using the operator  $D$  written as

$$Du = -\frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}, \quad x \in \omega_h.$$

Finite difference approximations in space are employed. Using the fully implicit scheme for approximation in time and the operator  $D$ , the notation  $u^n = u(x, t^n)$ ,  $t^{n+1} = t^n + \tau$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ), we obtain the following variational problem

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + Du^{n+1} + \gamma^{n+1} \cdot u^n = f^{n+1} \cdot g^{n+1}, \quad x \in \omega_h, \quad (7)$$

the initial condition

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (8)$$

and the boundary conditions

$$u(0, t) = \Phi_1(t), \quad u(l, t) = \Phi_2(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (9)$$

the additional conditions (6) take the form:

$$u^n(x^*) = \varphi^n, \quad u^n(x^{**}) = \psi^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

We use the following decomposition for the solution  $u^{n+1}$  at the new time level

$$u^{n+1}(x) = y^{n+1}(x) + \gamma^{n+1}v^{n+1}(x) + f^{n+1}w^{n+1}(x). \quad (11)$$

To find  $y^{n+1}(x)$ , substituted (11) in (7), we employ the equation

$$\frac{y^{n+1} - u^n}{\tau} + Dy^{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad x \in \omega_h, \quad (12)$$

with the boundary conditions

$$y(0, t) = \Phi_1(t), \quad y(l, t) = \Phi_2(t).$$

The functions  $v^{n+1}(x)$  and  $w^{n+1}(x)$  are determined from

$$\frac{v^{n+1}}{\tau} + Dv^{n+1} = -u^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad x \in \omega_h, \quad (13)$$

$$\frac{w^{n+1}}{\tau} + Dw^{n+1} = g^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad x \in \omega_h, \quad (14)$$

with the boundary condition  $v(0, t) = v(l, t) = 0$  and  $w(0, t) = w(l, t) = 0$ .

To evaluate  $\gamma^{n+1}$  and  $f^{n+1}$ , the addition conditions (10) are used, substituted (11) into (10), we get

$$\begin{aligned} \gamma^{n+1}v^{n+1}(x^*) + f^{n+1}w^{n+1}(x^*) &= \varphi^{n+1} - y^{n+1}(x^*), \\ \gamma^{n+1}v^{n+1}(x^{**}) + f^{n+1}w^{n+1}(x^{**}) &= \psi^{n+1} - y^{n+1}(x^{**}), \end{aligned} \quad (15)$$

where  $x^*, x^{**} \in [0, l]$  and  $x^* \neq x^{**}$ . To solve  $\gamma^{n+1}$  and  $f^{n+1}$  from (15), we assume  $v^{n+1}(x^*)w^{n+1}(x^{**}) - v^{n+1}(x^{**})w^{n+1}(x^*) \neq 0$ , where  $v^{n+1}$  and  $w^{n+1}$  are determined from (13) and (14).

Thus, the computational algorithm for solving the inverse problem (2)–(4), (6) based on the linearized scheme (7)–(10) involves the solution of three standard grid elliptic equations for the auxiliary functions  $y^{n+1}(x)$  from equation (12),  $v^{n+1}(x)$  from equation (13) and  $w^{n+1}(x)$  from equation (14), the further evaluation of  $\gamma^{n+1}$  and  $f^{n+1}$  from (15), and the final calculation  $u^{n+1}(x)$  from the relation (11).

**2.2. The solutions of  $y^{n+1}(x)$ ,  $v^{n+1}(x)$  and  $w^{n+1}(x)$ .** To calculate

$$u^{n+1}(x) = y^{n+1}(x) + \gamma^{n+1}v^{n+1}(x) + f^{n+1}w^{n+1}(x), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

we should find  $y^{n+1}(x)$ ,  $v^{n+1}(x)$  and  $w^{n+1}(x)$  from (12)–(14).

To find  $y^{n+1}(x)$ ,  $v^{n+1}(x)$  and  $w^{n+1}(x)$ , using the notation

$$y_i^n = y(x_i, t^n), \quad t^{n+1} = t^n + \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

converting (12)–(14) to the following forms with the boundary conditions:

$$\begin{aligned} y_{i+1}^{n+1} - \left(2 + \frac{h^2}{\tau}\right) y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1} + \frac{h^2}{\tau} u_i^n &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \\ y_0^{n+1} &= \Phi_1(t^{n+1}), \quad y_M^{n+1} = \Phi_2(t^{n+1}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} v_{i+1}^{n+1} - \left(2 + \frac{h^2}{\tau}\right) v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1} + h^2 u_i^n &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \\ v_0^{n+1} &= v_M^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} w_{i+1}^{n+1} - \left(2 + \frac{h^2}{\tau}\right) w_i^{n+1} + w_{i-1}^{n+1} + h^2 g_i^{n+1} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \\ w_0^{n+1} &= w_M^{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Using the following decompositions for the solutions  $y_i^{n+1}$ ,  $v_i^{n+1}$  and  $w_i^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} y_i^{n+1} &= \alpha_i^{n+1} \cdot y_{i+1}^{n+1} + \beta_i^{n+1}, \quad v_i^{n+1} = \alpha_i^{n+1} \cdot v_{i+1}^{n+1} + \gamma_i^{n+1}, \\ w_i^{n+1} &= \alpha_i^{n+1} \cdot w_{i+1}^{n+1} + \delta_i^{n+1}, \quad i = M-1, M-2, \dots, 0, \end{aligned} \quad (19)$$

and

$$y_M^{n+1} = \Phi_2(t^{n+1}), \quad v_M^{n+1} = w_M^{n+1} = 0.$$

By combining (16)–(19), we can get:

$$\begin{aligned} \alpha_i^{n+1} &= \frac{1}{2 + \kappa - \alpha_{i-1}^{n+1}}, \quad \beta_i^{n+1} = \frac{\kappa u_i^n + \beta_{i-1}^{n+1}}{2 + \kappa - \alpha_{i-1}^{n+1}}, \\ \gamma_i^{n+1} &= \frac{h^2 u_i^n + \gamma_{i-1}^{n+1}}{2 + \kappa - \alpha_{i-1}^{n+1}}, \quad \delta_i^{n+1} = \frac{h^2 g_i^{n+1} + \delta_{i-1}^{n+1}}{2 + \kappa - \alpha_{i-1}^{n+1}}, \\ & i = 1, 2, 3, \dots, M. \end{aligned} \quad (20)$$

with the conditions  $\alpha_0 = \gamma_0 = \delta_0 = 0$ ,  $\beta_0 = \Phi_1$ , where  $\kappa = \frac{h^2}{\tau}$ . From (20) we can get all the  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  and  $\delta$ , so we can get all the solutions of  $y$ ,  $v$ ,  $w$ .

### 3. Numerical examples

In this section we present numerical results to test the efficiency of the new scheme for solving the coefficients inverse problems, in the example, we put  $x \in [0, 1]$  with the conditions

$$\begin{aligned} u_0 &= 5 \exp(-100(x - 0.5)^2), \quad g(x) = 4(1 - x)x, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (21)$$

The coefficients  $\gamma(t)$  and  $f(t)$  are taken in the forms

$$\gamma(t) = -\frac{t^3}{1 + \exp(\zeta_1(t - 0.7T))}, \quad f(t) = \frac{0.1(T - t)}{1 + \exp(\zeta_2((T - t) - 0.8T))}. \quad (22)$$

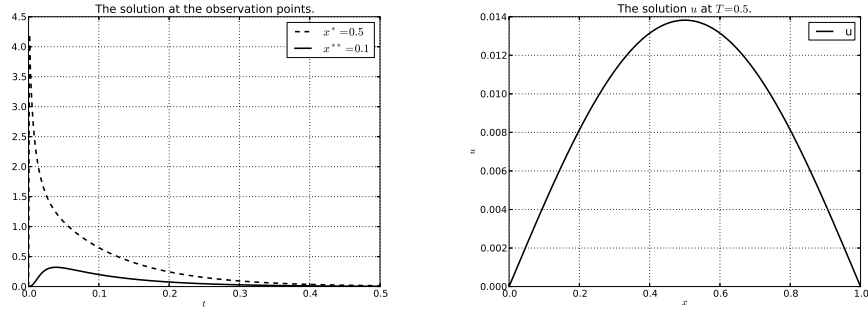


Рис. 1. The solution at the observation point and the solution at  $T = 0.5$

We consider the inverse problem with  $h = \frac{1}{M}$ ,  $\tau = \frac{T}{N}$ ,  $M = 200$ ,  $N = 400$ . The observation points are  $x^* = 0.5$  and  $x^{**} = 0.1$ . The solution of the direct problem at the observation point are depicted in fig. 1(a), the solution at the final time moment ( $T = 0.5$ ) is presented in fig. 1(b), with  $\zeta_1 = 1000$ ,  $\zeta_2 = 250$ .

We also give the solution of  $\gamma(t)$  (fig. 2(a)) and  $f(t)$  (fig. 2(b)) of the inverse problem with  $\zeta_1 = 1000$ ,  $\zeta_2 = 250$ . The graphs show the very good accuracy and efficiency of the new approximate scheme.

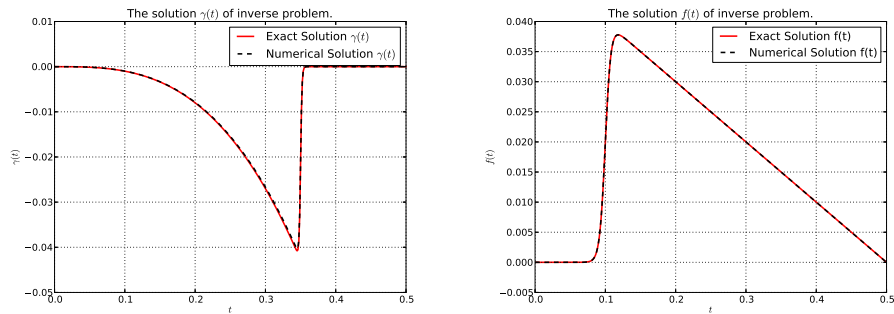


Рис. 2. The exact and numerical solutions of the inverse problem

The solution  $\gamma(t)$  of the inverse problem with different  $\zeta_1$  are present in fig. 3(a). For large  $\zeta_1$  (see fig. 3(a)),  $\gamma(t)$  approaches discontinuous functions with a discontinuity point at  $t = 0.7T$ .

The solution  $f(t)$  of the inverse problem with different  $\zeta_2$  are present in fig. 3(b). For large  $\zeta_2$  (see fig. 3(b)),  $f(t)$  also approaches discontinuous functions with a discontinuity point at  $t = 0.2T$ .

#### 4. Conclusions

In this paper, we proposed a numerical scheme to solve the inverse problems



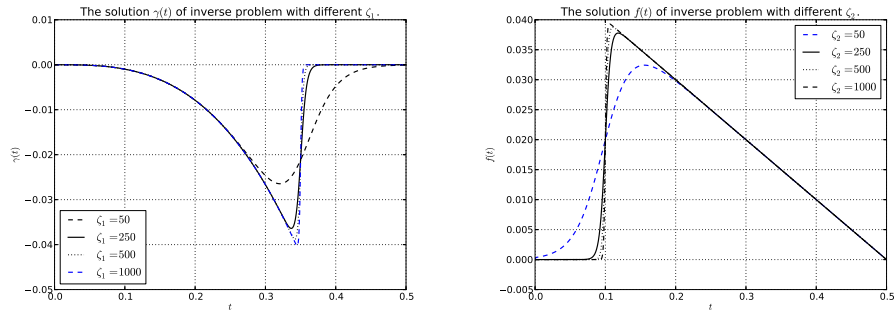


Рис. 3. The solutions of the inverse problem with different variables

using the finite difference method. The numerical implementation using the linearized approximations in time and standard finite difference procedures in space, based on a decomposition of the approximate solution, where the transition to a new time level involves the solutions of three standard elliptic problems. Numerical solutions of the model problem demonstrate the convergence of the approximate solution of the inverse problem.

## 5. Acknowledgments

Professors V. I. Vasil'ev and P. N. Vabishchevich have carefully reviewed this paper. As a result of their careful analysis, this paper has been improved. The author would like to express his thankfulness to them for their helpful constructive comments.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Colton D., Ewing R., Rundell W. Inverse problems in partial differential equations. Philadelphia, PA: SIAM, 1990.
2. Engl H. W., Rundell W. Inverse problems in diffusion processes. Philadelphia, PA: SIAM, 1995.
3. Conca C., Manasevich R., Uhlmann G., Vogelius M. S. Partial differential equations and inverse problems // Contemp. Math. 2004. V. 362. P. 410.
4. Muller T. G., Timmer J. Parameter identification in partial differential equations // Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. 2004. V. 14, N 6. P. 2053–2060.
5. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics. Utrecht: VSP, 2007.
6. Jiang T. S., Li M., Chen C. S. The Method of particular solutions for solving inverse problems of a nonhomogeneous convection-diffusion equation with variable coefficients // Numerical Heat Transfer. Part A: Applications. , 2012. V. 61. P. 338–352.
7. Hansen P. C. The  $L$ -curve and its use in the numerical treatment of inverse problems // Computational inverse problems in electrocardiology (ed. P. Johnston). (Adv. Comput. Bioeng. Ser.) Southampton: WITPress, 2000. P. 119–142.
8. Hansen P. C. Regularization tools: a Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems // Numer. Algorithms. 1994. V. 6, N 1. P. 1–35.
9. Hansen P. C., O'Leary D. P. The use of the  $L$ -curve in the regularization of discrete ill-posed problems // SIAM J. Sci. Comput. 1993. V. 14, N 6. P. 1487–1503.

10. *Hao D. N.* A mollification method for ill-posed problem // Numer. Math. 1994. V. 68, N 4. P. 469–506.
11. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2006. (Appl. Math. Sci.; V. 127).
12. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. Berlin: Marcel Dekker, 2000.
13. *Dehghan M.* An inverse problem of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation // Appl. Math. Modelling. 2001. V. 25, N 9. P. 743–754.
14. *Chan T. F., Tai X. C.* Level Set And Total Variation Regularization For Elliptic inverse problems with discontinuous coefficients // J. Comput. Phys. 2004. V. 193, N 1. P. 40–66.
15. *Vabishchevich P. N., Vasil'ev V. I., Vasil'eva M. V.* Computational identification of the right-hand side of a parabolic equation // Comput. Math. Math. Phys. 2015. V. 55, N 9. P. 1015–1021.

*Статья поступила 18 сентября 2015 г.*

Ling-De Su (Су Линг-Де)

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
Научно-исследовательский институт математики,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)  
sulingde@gmail.com

## УКАЗАТЕЛЬ

		Номер
Popivanov N., Popov T., and Scherer R.	Singular Solutions of the $(3 + 1)$ -D Protter Problem for the Wave Equation	1
Popov T.	см. Popivanov N., Popov T., and Scherer R.	
Scherer R.	см. Popivanov N., Popov T., and Scherer R.	
Su L.-D.	Finite difference method for the inverse problem of the simultaneous determination of the right-hand side and the lowest coefficients in parabolic equations	4
Агошков В. И., Гребенников Д. С., Шелопут Т. О.	Исследование и численное решение одной обратной задачи моделирования циркуляции в акваториях с «жидкими» границами	2
Антипин В. И., Попов С. В.	О гладких решениях задачи Жевре для уравнения третьего порядка	1
Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.	О влиянии нелинейных эффектов на стабильность общества	3
Блохин А. М., Ткачев Д. Л., Егитов А. В.	Линейная неустойчивость решений математической модели, описывающей течения полимеров в беско- нечном канале	2
Борель Л. В.	О разрешимости вырожденных нагруженных систем уравнений	4
Бубякин И. В.	К дифференциальной геометрии пятимерных $B$ - комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве $P^5$	1
Булгатова Е. Н., Павлова Е. Б.	Оптимальное распределение узлов квадратурной формулы с весом	2
Васильева Е. Г., Цыренжапов Н. Б.	Оценка сверху функционала погрешности квадра- турных формул с симметричным пограничным сло- ем	2
Волчков Ю. М., Полтавская Е. Н.	Моделирование напряженно-деформированного со- стояния в слоистых ортотропных пластинах	2
Воронов Д. А.	см. Кабанихин С. И., Криворотько О. И., Ермолен- ко Д. В., Воронов Д. А.	
Галаев С. В.	Почти контактные метрические структуры, опреде- ляемые $N$ -продолженной связностью	1
Глинский Б. М., Мартынов В. Н., Сапетина А. Ф.	3D-моделирование сейсмических волновых полей в средах, характерных для вулканических структур	3
Гребенников Д. С.	см. Агошков В. И., Гребенников Д. С., Шелопут Т. О.	

<b>Егитов А. В.</b>	см. Блохин А. М., Ткачев Д. Л., Егитов А. В.	
<b>Егоров И. Е.</b>	Применение модифицированного метода Галёркина к первой краевой задаче для уравнения смешанного типа	<b>3</b>
<b>Ермоленко Д. В.</b>	см. Кабанихин С. И., Криворотько О. И., Ермоленко Д. В., Воронов Д. А.	
<b>Жильцов А. В., Намм Р. В.</b>	Метод множителей Лагранжа для решения модельной задачи с трещиной	<b>1</b>
<b>Иванова Н. Д., Федоров В. Е.</b>	Нелокальная на полуоси задача для вырожденных эволюционных уравнений	<b>1</b>
<b>Иванова О. Ф.</b>	см. Федоров Ф. М., Иванова О. Ф., Павлов Н. Н.	
<b>Кабанихин С. И., Криворотько О. И., Ермоленко Д. В., Воронов Д. А.</b>	Сравнение градиентного и симплекс методов численного решения обратной задачи для простейшей модели инфекционного заболевания	<b>2</b>
<b>Каменецкий Е. С.</b>	см. Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.	
<b>Короткова Е. М., Пятков С. Г.</b>	Обратные задачи об определении функции источников для систем теплопереноса	<b>1</b>
<b>Криворотько О. И.</b>	см. Кабанихин С. И., Криворотько О. И., Ермоленко Д. В., Воронов Д. А.	
<b>Кудина Е. С., Медных А. Д.</b>	О псевдообъеме гиперболического тетраэдра	<b>4</b>
<b>Кулагина М. Ф., Микишанина Е. А.</b>	Построение почти-периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений	<b>3</b>
<b>Лавшук Т. М.</b>	Правильные многоугольники и многогранники над конечным полем	<b>4</b>
<b>Лазарев Н. П.</b>	Оптимальный угол наклона плоской трещины в задаче о равновесии пластины Кирхгофа — Лява	<b>1</b>
<b>Луцкий А. Е., Ханхасаева Я. В.</b>	Трехмерная задача обтекания модели летательного аппарата при активном воздействии на поток	<b>2</b>
<b>Мартынов В. Н.</b>	см. Глинский Б. М., Мартынов В. Н., Сапетина А. Ф.	
<b>Мартынов В. Н.</b>	см. Михайлов А. А., Мартынов В. Н.	
<b>Медных А. Д., Соколова Д. Ю.</b>	О существовании евклидовой структуры на узле восьмерка с мостом	<b>4</b>
<b>Медных А. Д.</b>	см. Кудина Е. С., Медных А. Д.	
<b>Микишанина Е. А.</b>	см. Кулагина М. Ф., Микишанина Е. А.	
<b>Михайлов А. А., Мартынов В. Н.</b>	Математическое моделирование распространения акустико-гравитационных и сейсмических волн в неоднородной модели «Земля — атмосфера» при наличии стратификации ветра в атмосфере	<b>2</b>
<b>Намм Р. В.</b>	см. Жильцов А. В., Намм Р. В.	
<b>Никитина Т. Н.</b>	О $\bar{\partial}\bar{\partial}$ -уравнении на положительном потоке	<b>2</b>
<b>Николаев Н. Н., Попов С. В.</b>	Разрешимость обратной коэффициентной задачи для неклассического уравнения третьего порядка	<b>3</b>

Павлов Н. Н.	см. Федоров Ф. М., Иванова О. Ф., Павлов Н. Н.	
Павлов С. С.	Коэффициентные обратные задачи для квазигиперболических уравнений высокого порядка с интегральным переопределением	3
Павлова Е. Б.	см. Булгатова Е. Н., Павлова Е. Б.	
Поисеева С. С.	Конечные группы с большой степенью неприводимого характера	4
Полтавская Е. Н.	см. Волчков Ю. М., Полтавская Е. Н.	
Попов С. В.	см. Антипин В. И., Попов С. В.	
Попов С. В.	см. Николаев Н. Н., Попов С. В.	
Пятков С. Г.	см. Короткова Е. М., Пятков С. Г.	
Сапетина А. Ф.	см. Глинский Б. М., Мартынов В. Н., Сапетина А. Ф.	
Семенов М. Ф., Шадрин В. Ю.	Равномерное разбиение сферы и его применение для вычисления коэффициентов облученности	1
Соколова Д. Ю.	см. Медных А. Д., Соколова Д. Ю.	
Суродина И. В.	Параллельные алгоритмы для решения прямых задач электрического каротажа на графических процессорах	2
Телешева Л. А.	Восстановление параметров в краевых задачах для линейных параболических уравнений четвертого порядка	3
Ткачев Д. Л.	см. Блохин А. М., Ткачев Д. Л., Егитов А. В.	
Фатьянов А. Г.	Аналитическое моделирование волновых полей для сред сложного строения и структуры на сверхдальние расстояния	3
Фаязов К. С., Хажиев И. О.	Оценка устойчивости и приближенное решение краевой задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка	1
Федоров В. Е.	см. Иванова Н. Д., Федоров В. Е.	
Федоров Ф. М., Иванова О. Ф., Павлов Н. Н.	Об особенностях бесконечных систем	4
Хажиев И. О.	см. Фаязов К. С., Хажиев И. О.	
Ханхасаева Я. В.	Луцкий А. Е., Ханхасаева Я. В.	
Хосаева З. Х.	см. Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х.	
Цыренжапов Н. Б.	см. Васильева Е. Г., Цыренжапов Н. Б.	
Черников П. В.	О мощности финально компактного $T_1$ -пространства счетного псевдохарактера	1
Шадрин В. Ю.	см. Семенов М. Ф., Шадрин В. Ю.	
Шайхуллина П. А.	Формальная классификация типичных ростков полугиперболических отображений	4
Шелопут Т. О.	см. Агошков В. И., Гребенников Д. С., Шелопут Т. О.	
Экаль Ж. Р.	Резургентные функции и сингулярные ОДУ	3
Юмова Ц. Ж.	Асимптотически оптимальные функционалы погрешности решетчатых кубатурных формул	3

## ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья может быть представлена в виде файла в формате pdf или распечатки, подготовленной с использованием какой-либо компьютерной системы подготовки математических текстов.

5. В начале статьи указывается индекс УДК. Статья сопровождается краткой аннотацией, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках. Подготовленная с использованием компьютера графика должна быть высококаче-

ственной, не ниже 600 DPI, и не использующей шрифты Adobe, отсутствующие в пакете MikTeX.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних трех лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в издательстве и в редакции издания в течение пяти лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство образования и науки Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. Если статья принимается к опубликованию после доработки, то автор направляет в редакцию файл ее последней версии. При подготовке файла следует использовать, как правило, макропакет AMS-TEX со стилевым файлом `amsrpt`.

11. Предоставление файлов в форматах TEX или LaTeX возможно только при согласовании с редакцией. Автор не должен использовать необязательные авторские командные последовательности, введенные для облегчения набора. Запрещается переопределять греческие буквы, стандартные команды и т. п.

12. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

13. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их

публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

14. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.