СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 23, № 1 (89) **Январь—март, 2016**

СОДЕРЖАНИЕ

Mathematical Notes of North-East Federal University

Contents

Адрес редакции:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/

e-mail: prokopevav85@gmail.com; madu@ysu.ru; ivanegorov51@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

А. А. Алсыкова

Аннотация. Рассматривается разрешимость нелокальных задач с интегральными условиями для уравнения Буссинеска. Доказаны теоремы существования и единственности решения рассматриваемых задач.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, уравнение Буссинеска, интегральное условие, существование и единственность регулярного решения.

В работе изучается разрешимость некоторых задач с пространственно-интегральными условиями для уравнения Буссинеска

$$Lu(x,t) \equiv u_{tt}(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) - \beta u_{xxtt}(x,t) = f(x,t). \tag{1}$$

Уравнение Буссинеска возникает при математическом моделировании длинных волн, при описании волн в плазме, при описании продольных колебаний в стержне (см. [1]). Разрешимость тех или иных краевых или начально-краевых задач для уравнения (1) изучались в [1–5], разрешимость задач с пространственно-интегральными условиями — в [6–8]. В настоящей работе продолжено исследование разрешимости задач с интегральными условиями, при этом методы исследования близки к методам из [9].

Перейдем к содержательной части работы.

Пусть Ω — интервал $(0,1)$ оси Ox, Q — прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, α и β — заданные положительные числа, $f(x,t)$, $K(x,t)$, $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$ — заданные функции, определенные при $(x,t) \in \overline{Q}$.

Нелокальная задача I. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия*

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad \int_0^1 K(x,t)u(x,t)\,dx = 0, \quad 0 < t < T. \tag{3}$$

Нелокальная задача II. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условие*

$$u_x(0,t)=0, \quad \int\limits_0^1 K(x,t)u(x,t)dx=0, \quad 0<t<T. \tag{4}$$

Нелокальная задача III. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условия*

$$\int\limits_0^1 K_1(x,t)u(x,t)\,dx=0, \quad \int\limits_0^1 K_2(x,t)u(x,t)\,dx=0, \quad 0<t<T. \tag{5}$$

1. Разрешимость нелокальной задачи I

Пусть H — следующее пространство функций:

$$H=\big\{v(x,t): v(x,t)\in W_2^2(Q),\ v_{tt}(x,t)\in L_2\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big)\big\}.$$

Определим функцию $v_1(x,t)$ как решение задачи

$$Lv_1(x,t)=f(x,t), \quad (x,t)\in Q,$$

$$v_1(x,0)=v_{1t}(x,0)=0, \quad x\in\Omega,$$

$$v_1(0,t)=v_1(1,t)=0, \quad t\in(0,T).$$

При принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ функция $v_1(x,t)$ определена корректно и принадлежит пространству H (см. [5]).

Пусть $w_{1,k}(x)$ и $\lambda_{1,k}$, $k=1,2,\ldots$, суть соответственно собственные функции и собственные числа задачи

$$w''(x)=\lambda w(x) \quad \text{при } x\in\Omega,$$

$$w(0)=w(1)=0.$$

Известно, что числа $\lambda_{1,k}$ отрицательны и имеют единственную предельную точку $-\infty$. Будем считать, что эти числа упорядочены по убыванию.

Положим $V_1(x,t)=x\varphi(t)$, где $\varphi(t)=u(1,t)$.

Решение $u(x,t)$ задачи I будем искать в виде

$$u(x,t)=v_1(x,t)+V_1(x,t)+w_1(x,t),$$

здесь функция $w_1(x,t)$ является решением задачи

$$Lw_1(x,t)=-x\varphi''(t), \quad (x,t)\in Q,$$

$$w_1(x,0)=w_{1t}(x,0)=0, \quad x\in\Omega,$$

$$w_1(0,t) = w_1(1,t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

Будем искать ее в виде ряда Фурье

$$w_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{1,k}(t) w_{1,k}(x).$$

Функции $c_{1,k}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, определим следующим образом:

$$c_{1,k}(t) = b_{1,k}\varphi(t) - b_{1,k}\mu_{1,k} \int\limits_0^t \varphi(\tau) \sin[\mu_{1,k}(t-\tau)]\, d\tau,$$

где

$$\mu_{1,k} = \sqrt{\frac{\alpha\lambda_{1,k}}{\beta\lambda_{1,k} - 1}}, \quad a_{1,k} = \int\limits_0^1 x w_{1,k}(x) dx, \quad b_{1,k} = \frac{a_{1,k}}{\beta\lambda_{1,k} - 1}.$$

Введем обозначения:

$$\gamma_{1,j,k} = b_{1,k}\mu_{1,k}^j, \ j = \overline{1,3}, \quad d_{1,k}(t) = \int\limits_0^1 K(x,t) w_{1,k}(x)\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\psi_1(t) = \int\limits_0^1 K(x,t) v_1(x,t)\, dx, \quad A_1(t) = -\beta \sum_{k=1}^{\infty} b_{1,k}\lambda_{1,k} d_{1,k}(t),$$

$$G_1(t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1,1,k} d_{1,k}(t) \sin[\mu_{1,k}(t-\tau)].$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*
(а) $K(x,t) \in C^2(\overline{Q})$,
(б) *функциональные ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1,1,k} d_{1,k}(t) \sin[\mu_{1,k}(t-\tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1,1,k} d'_{1,k}(t) \sin[\mu_{1,k}(t-\tau)],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1,2,k} d_{1,k}(t) \cos[\mu_{1,k}(t-\tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1,2,k} d'_{1,k}(t) \cos[\mu_{1,k}(t-\tau)],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{1,1,k} d''_{1,k}(t) - \gamma_{1,3,k} d_{1,k}) \sin[\mu_{1,k}(t-\tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_{1,k}\lambda_{1,k} d_{1,k}(t)$$

абсолютно и равномерно сходятся при t из отрезка $[0,T]$,
(в) $|A_1(t)| \geq \overline{a} > 0$ *при* $t \in [0,T]$.

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача I *разрешима в пространстве H.*

Доказательство. Представления функций $u(x,t)$ и $c_{1,k}(t)$ дают равенство

$$u(x,t) = v_1(x,t) - \varphi(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{1,k}\beta\lambda_{1,k}}{1-\beta\lambda_{1,k}}w_{1,k}(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{1,1,k}w_{1,k}(x)\int_0^t \varphi(\tau)sin[\mu_{1,k}(t-\tau)]\,d\tau.$$

Учитывая условие (3), получим

$$\int_0^1 K(x,t)v_1(x,t)dx - \varphi(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{1,k}\beta\lambda_{1,k}}{1-\beta\lambda_{1,k}}\int_0^1 K(x,t)w_{1,k}(x)\,dx - \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{1,1,k}\int_0^1 K(x,t)w_{1,k}(x)\,dx\int_0^t \varphi(\tau)\sin[\mu_{1,k}(t-\tau)]\,d\tau = 0.$$

Перепишем это уравнение, используя введенные обозначения:

$$\psi_1(t) = A_1(t)\varphi(t) + \int_0^t G_1(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Полученное уравнение представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Известно (см., например, [10]), что при выполнении условий теоремы решением данного уравнения является функция $\varphi(t)$ из $W_2^2([0,T])$. Значит, определенная выше функция $u(x,t)$ и будет искомым решением нелокальной задачи I.

Теорема доказана.

2. Разрешимость нелокальной задачи II

Определим функцию $v_2(x,t)$ как решение задачи

$$Lv_2(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in Q,$$

$$v_2(x,0) = v_{2t}(x,0) = 0, \quad x\in\Omega,$$

$$v_{2x}(0,t) = v_2(1,t) = 0, \quad t\in(0,T).$$

При принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ функция $v_2(x,t)$ определена корректно и принадлежит пространству H (см. [5]).

Пусть $w_{2,k}(x)$ и $\lambda_{2,k}$ суть соответственно собственные функции и собственные числа задачи

$$w''(x) = \lambda w(x) \quad \text{при } x\in\Omega,$$

$$w'(0) = w(1) = 0.$$

Числа $\lambda_{2,k}$ отрицательны и имеют единственную предельную точку $-\infty$. Будем считать, что эти числа упорядочены по убыванию.

Введем обозначения:

$$\mu_{2,k}=\sqrt{\frac{\alpha\lambda_{2,k}}{\beta\lambda_{2,k}-1}},\quad a_{2,k}=\int\limits_0^1(2\beta-x^2)w_{2,k}(x)\,dx,\quad b_{2,k}=2\alpha\int\limits_0^1 w_{2,k}(x)\,dx,$$

$$\gamma_{2,j,k}=\frac{a_{2,k}^2-b_{2,k}}{(1-\beta\lambda_{2,k})}\mu_{2,k}^{j-2},\ j=\overline{1,3},\quad d_{2,k}(t)=\int\limits_0^1 K(x,t)w_{2,k}(x)\,dx,\quad k=1,2,\dots,$$

$$\psi_2(t)=\int\limits_0^1 K(x,t)v_2(x,t)\,dx,\quad A_2(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2,k}^2d_{2,k}(t)}{(\beta\lambda_{2,k}-1)\mu_{2,k}}-\int\limits_0^1 x^2K(x,t)\,dx,$$

$$G_2(t,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{2,1,k}d_{2,k}(t)\sin[\mu_{2,k}(t-\tau)].$$

Положим $V_2(x,t)=x^2\varphi(t)$, где $\varphi(t)=u(1,t)$. Решение $u(x,t)$ задачи II будем искать в виде

$$u(x,t)=v_2(x,t)+V_2(x,t)+w_2(x,t),$$

здесь функция

$$w_2(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_{2,k}(t)w_{2,k}(x)$$

является решением задачи

$$Lw_2(x,t)=(2\beta-x^2)\varphi''(t)+2\alpha\varphi(t),\quad (x,t)\in Q,$$

$$w_2(x,0)=w_{2t}(x,0)=0,\quad x\in\Omega,$$

$$w_{2x}(0,t)=w_2(1,t)=0,\quad t\in(0,T).$$

Функции $c_{2,k}(t)$, $k=1,2,\dots$, определим следующим образом:

$$c_{2,k}(t)=\frac{a_{2,k}^2}{(1-\beta\lambda_{2,k})\mu_{2,k}}\varphi(t)-\gamma_{2,1,k}\int\limits_0^t\varphi(\tau)\sin[\mu_{2,k}(t-\tau)]\,d\tau.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия:*
(а) $K(x,t)\in C^2(\overline{Q})$,
(б) *функциональные ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{2,1,k}d_{2,k}(t)\sin[\mu_{1,k}(t-\tau)],\quad \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{2,1,k}d'_{2,k}(t)\sin[\mu_{1,k}(t-\tau)],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{2,2,k}d_{2,k}(t)\cos[\mu_{1,k}(t-\tau)],\quad \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{2,2,k}d'_{2,k}(t)\cos[\mu_{1,k}(t-\tau)],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_{2,1,k}d''_{2,k}(t)-\gamma_{2,3,k}d_{2,k})\sin[\mu_{1,k}(t-\tau)],\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2,k}^2d_{2,k}(t)}{(1-\beta\lambda_{2,k})\mu_{2,k}}$$

абсолютно и равномерно сходятся в каждой точке отрезка $[0,T]$,

(в) $|A_2(t)| \geq \overline{a} > 0$ *при* $t \in [0,T]$.

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *из пространства* $L_2(Q)$ *нелокальная задача* II *разрешима в пространстве* H.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

3. Разрешимость нелокальной задачи III

Пусть функции $v_3(x,t)$, $w_{3,k}(x)$ и числа $\mu_{3,k}$, $\lambda_{3,k}$ определены аналогично $v_1(x,t)$, $w_{1,k}(x)$, $\mu_{1,k}$ и $\lambda_{1,k}$ при $k=1,2,\dots$.

Введем обозначения:

$$a_{3,k} = \frac{1}{1-\beta\lambda_{3,k}}\int\limits_0^1 (x-1)w_{3,k}(x)\,dx, \quad b_{3,k} = \frac{1}{\beta\lambda_{3,k}-1}\int\limits_0^1 xw_{3,k}(x)\,dx,$$

$$\psi_{3,i}(t) = \int\limits_0^1 K_i(x,t)v_3(x,t)\,dx, \quad d_{3,i,k}(t) = \int\limits_0^1 K_i(x,t)w_{3,k}(x)\,dx,$$

$$\gamma_{3,j,k} = a_{3,k}\mu_{3,k}^j, \quad \gamma_{4,j,k} = b_{3,k}\mu_{3,k}^j, \quad j=\overline{1,3},\ k=1,2,\dots,$$

$$A_{3,i}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{3,k}\beta\lambda_{3,k}d_{3,i,k}(t), \quad A_{4,i}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{3,k}\beta\lambda_{3,k}d_{3,i,k}(t),$$

$$G_{3,i}(t,\tau) = -\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{3,1,k}d_{3,i,k}(t)\sin[\mu_{3,k}(t-\tau)],$$

$$G_{4,i}(t,\tau) = -\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{4,1,k}d_{3,i,k}(t)\sin[\mu_{3,k}(t-\tau)], \quad i=1,2.$$

Положим $V_3(x,t) = x\varphi_1(t) + (1-x)\varphi_2(t)$, где $\varphi_1(t) = u(0,t)$, $\varphi_2(t) = u(1,t)$ пока неизвестные функции такие, что

$$\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = 0.$$

Решение $u(x,t)$ задачи III будем искать в виде

$$u(x,t) = v_3(x,t) + V_3(x,t) + w_3(x,t),$$

здесь функция

$$w_3(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{3,k}(t)w_{3,k}(x)$$

является решением задачи

$$Lw_3(x,t) = (x-1)\varphi_1''(t) - x\varphi_2''(t), \quad (x,t)\in Q,$$

$$w_3(x,0) = w_{3t}(x,0) = 0, \quad x\in\Omega,$$

$$w_3(0,t) = w_3(1,t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

Функции $c_{3,k}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, определим следующим образом:

$$c_{3,k}(t) = a_{3,k}\varphi_1(t) + b_{3,k}\varphi_2(t) - a_{3,k}\mu_{3,k}\int\limits_0^t \varphi_1(\tau)\sin[\mu_{3,k}(t-\tau)]\,d\tau$$
$$- b_{3,k}\mu_{3,k}\int\limits_0^t \varphi_2(\tau)\sin[\mu_{3,k}(t-\tau)]\,d\tau.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*
(а) $K_i(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $i = 1, 2$,
(б) *функциональные ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{m,1,k}d_{3,i,k}(t)\sin[\mu_{1,k}(t-\tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{m,1,k}d'_{3,i,k}(t)\sin[\mu_{1,k}(t-\tau)],$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{m,2,k}d_{3,i,k}(t)\cos[\mu_{1,k}(t-\tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{m,2,k}d'_{3,i,k}(t)\cos[\mu_{1,k}(t-\tau)],$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_{m,1,k}d''_{3,i,k}(t) - \gamma_{m,3,k}d_{3,i,k})\sin[\mu_{1,k}(t-\tau)], \quad i = 1, 2,\ m = 3, 4,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{3,k}\beta\lambda_{3,k}d_{3,i,k}(t), \quad \sum_{k=1}^{\infty}b_{3,k}\beta\lambda_{3,k}d_{3,i,k}(t)$$

абсолютно и равномерно сходятся при t из отрезка $[0,T]$,
(в) $A_{3,1}(t)A_{4,2}(t) \neq A_{3,2}(t)A_{4,1}(t)$, $t \in [0,T]$.

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача III *разрешима в пространстве H.*

Доказательство. Учитывая, что функции $v_3(x,t)$, $V_3(x,t)$ и $w_3(x,t)$ определены, перепишем функцию $u(x,t) = v_3(x,t) + V_3(x,t) + w_3(x,t)$:

$$u(x,t) = v_3(x,t) - \varphi_1(t)\sum_{k=1}^{\infty}a_{3,k}\beta\lambda_{3,k}w_{3,k}(x) - \varphi_2(t)\sum_{k=1}^{\infty}b_{3,k}\beta\lambda_{3,k}w_{3,k}(x)$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty}a_{3,k}\mu_{3,k}w_{3,k}(x)\int\limits_0^t \varphi_1(\tau)\sin[\mu_{3,k}(t-\tau)]\,d\tau$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty}b_{3,k}\mu_{3,k}w_{3,k}(x)\int\limits_0^t \varphi_2(\tau)\sin[\mu_{3,k}(t-\tau)]\,d\tau.$$

Подставляя функцию $u(x,t)$ в интегральные условия (5), получаем систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\psi_1(t) = A_{3,1}\varphi_1(t) + A_{4,1}\varphi_2(t) + \int\limits_0^t G_{3,1}(t,\tau)\varphi_1(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t G_{4,1}(t,\tau)\varphi_2(\tau)\,d\tau,$$

$$\psi_2(t) = A_{3,2}\varphi_1(t) + A_{4,2}\varphi_2(t) + \int\limits_0^t G_{3,2}(t,\tau)\varphi_1(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t G_{4,2}(t,\tau)\varphi_2(\tau)\,d\tau.$$

Вследствие условий теоремы эта система разрешима относительно функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, принадлежащих пространству $W_2^2([0;T])$. Тогда функция $u(x,t)$ будет искомым решением нелокальной задачи III.

Комментарии

1. Условия (б) теорем 1–3 означают, что коэффициенты Фурье функций $K(x,t)$ и $K_i(x,t)$, $i = 1,2$, в разложениях по соответствующим системам $\{w_{1,k}(x)\}$, $\{w_{2,k}(x)\}$ и $\{w_{3,k}(x)\}$ должны достаточно быстро убывать. Для этого нужно, чтобы функции $K(x,t)$ и $K_i(x,t)$ были гладкими по переменной x, а их пространственные производные в граничных точках обращались в нуль.

2. Условия (в) теорем 1–3 означают, что функция $K(x,t)$ в задачах I, II не может быть тождественно нулевой и функции $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$ в задаче III линейно независимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
2. *Kiguradze T.* On the correctness of the Dirichlet problem in a characteristic rectangle for fourth order linear hyperbolic equations // Georgian Math. J. 1999. V. 6, N 5. P. 447–470.
3. *Уткина Е. А.* Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 4. С. 400–404.
4. *Уткина Е. А.* Характеристические граничные задачи для линейных уравнений высокого порядка со старшими частными производными: Автореф. дис. … докт. физ.-мат. наук. Казань, 2011.
5. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
6. *Пулькина Л. С.* Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд. «Самарский университет», 2012.
7. *Кириченко С. В.* Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений гиперболического, псевдогиперболического и смешанного типов: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Казань, 2015.
8. *Pulkina L. S.* Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations // Electron. J. Differ. Equ. 2014. N 116. P. 1–9.
9. *Кожанов А. И.* Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // Докл. АН. 2014. Т. 457, № 2. С. 152–156.
10. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004.

Статья поступила 20 февраля 2016 г.

Алсыкова Аюна Андреевна
Бурятский гос. университет,
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 675000
888552@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

UDC 517.956

NONLOCAL PROBLEMS WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR BOUSSINESQ EQUATION

A. A. Alsykova

Abstract: We examine solvability of nonlocal problems with integral conditions for Boussinesq equation. The theorems of existence and uniqueness of the solution of these problems are proved.
Keywords: nonlocal boundary value problem, Boussinesq equation, integral condition, existence and uniqueness of regular solution.

REFERENCES

1. *Demidenko G. V. and Uspenski S. V.*, Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative, Marcel Dekker, New York; Basel (2003).
2. *Kiguradze T.* "On the correctness of the Dirichlet problem in a characteristic. rectangle for fourth order linear hyperbolic equations," Georgian Math. J. **6**, No. 5, 447–470 (1999).
3. *Utkina E. A.* "Dirichlet problem for a fourth-order equation," Differ. Equ. **47**, No. 4. 400–404 (2011).
4. *Utkina E. A.* Characteristic Boundary-Value Problems for Higher-Order Linear Equations with Higher Partial Derivatives [in Russian], Diss. Dokt. Fiz.-Mat. Nauk, Kazan, 2011.
5. *Yakubov S. Ya.* Linear Differential-Operator Equations and Their Applications [in Russian], Elm, Baku (1985).
6. *Pul'kina L. S.* Some Problems with Nonclassical Conditions for Hyperbolic Equations [in Russian]. Samara: Izdat. Samarsk. Univ., 2012.
7. *Kirichenko S. V.* Nonlocal problem with integral conditions dlyagiperbolicheskogo, pseudo-hyperbolic and mixed types of equations: Diss. Dokt. Fiz.-Mat. Nauk, Kazan, 2015.
8. *Pulkina L. S.* "Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations," Electron. J. Differ. Equ. No. 116. 1–9 (2014).
9. *Kozhanov A. I.* "Problems with the terms of the integral type for some classes of non-stationary equations," Dokl. Akad. Nauk. **457**, No. 2, 152–156 (2014).
10. *Vladimirov V. S. and Zharinov V. V.*, Equations of Mathematical Physics, Fizmatlit, Moscow, (2004).

Submitted February 20, 2016

Alsykova Ayuna Andreevna
Buryat State University,
Smolina st., 24a, Ulan-Ude 675000, Russia
888552@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

УДК 517.982.27

ИЗОМОРФИЗМ ПРОСТРАНСТВ СЛЕДОВ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ПРОСТРАНСТВ Л. Н. СЛОБОДЕЦКОГО

В. П. Аносов

Аннотация. Доказывается изоморфизм пространств следов векторных функций пространств Л. Н. Слободецкого.

Ключевые слова: изоморфизм пространств, след векторной функции, пространство.

Вначале введем основные понятия и определим цель работы.

Действующий в банаховом пространстве E оператор A называется *сильно позитивным* (см. [1]), если он имеет плотную в E область определения $D(A)$ и для любого комплексного числа λ с $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ оператор $A+\lambda I$ имеет ограниченный обратный, для которого справедлива оценка

$$\|(A+\lambda I)^{-1}; E \to E\| \leq c(1+|\lambda|)^{-1}. \tag{1}$$

Здесь c — положительная постоянная, не зависящая от λ. (В дальнейшем через c, C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, различные в разных случаях.)

Оператор A сильно позитивен, если и только если (см. [1]) для полугруппы $T(t) = \exp\{-At\}$ $(t \geq 0)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\|\exp\{-At\}; E \to E\| \leq c\exp\{-\delta t\} \quad (\delta > 0, t \geq 0), \\ &\|A\exp\{-At\}; E \to E\| \leq Ct^{-1}\exp\{-\delta t\} \quad (t > 0), \end{aligned} \tag{2}$$

т. е. если полугруппа $\exp\{-At\}$ аналитична и ее норма экспоненциально убывает.

Пространство следов $E(\alpha, p, A)$ (см. [2–4]) введем следующим образом. Для любого $v_0 \in D(A)$ положим

$$|v_0|^p_{E(\alpha,p,A)} = \int\limits_0^\infty t^{p-\alpha p}\|A^\gamma \exp\{-At\}v_0\|^p\,dt,$$

где $\gamma = 2$, если $0 < \alpha < \frac{1}{p} \leq 1$, и $\gamma = 1$, если $0 < \frac{1}{p} < \alpha < 1$.

Нетрудно показать, что функционал $|v_0|_{E(\alpha,p,A)}$ обладает всеми свойствами нормы. Замыкание $D(A)$ в этой норме образует базис банахова пространства $E(\alpha, p, A)$.

Пространство $E(\alpha + j, p, A)$ состоит из таких элементов v_0, для которых $A^j v_0 \in E(\alpha, p, A)$, $j \in \mathbb{N}$.

Мы видим, что это определение зависит от оператора A. Наша задача состоит в установлении условий, при которых пространства $E(\alpha+j, p, A)$ и $E(\alpha+j, p, B)$, где B — сильно позитивный оператор, изоморфны.

Теорема. *Пусть операторы A и B сильно позитивны и $D(A) = D(B)$. Тогда при $0 < \alpha < \frac{1}{p} \leq 1$ и $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ с учетом ограниченности операторов $A^j B^{-j}$, $A^{j+1} B^{-j-1}$ $(j \in \mathbb{N} \cup 0)$ пространства $E(\alpha + j, p, A)$ и $E(\alpha + j, p, B)$ изоморфны.*

Доказательство вначале проведем для случая, когда $\alpha p > 1$. Достаточно установить эквивалентность норм $|v_0|_{E(\alpha+j,p,A)}$ и $|v_0|_{E(\alpha+j,p,B)}$. Докажем, например, что

$$|v_0|_{E(\alpha+j,p,A)} \leq C(\alpha, p) |v_0|_{E(\alpha+j,p,B)}. \qquad (3)$$

Пусть $v_0 \in D(A^{j+1})$. Воспользуемся тождеством

$$\exp\{-At\}v_0 = \exp\{-Bt\}v_0 + \int_0^t \exp\{-A(t-s)\}(B - A)\exp\{-Bs\}v_0\, ds. \qquad (4)$$

Разбив промежуток $[0, t]$ пополам и применив ко второму интегралу формулу интегрирования по частям, приведем (4) к виду

$$\exp\{-At\}v_0 = A^{-1}B\exp\{-Bt\}v_0 - A^{-1}\exp\left\{-A\frac{t}{2}\right\}(B-A)\exp\left\{-B\frac{t}{2}\right\}v_0$$
$$+ \int_0^{\frac{t}{2}} \exp\{-A(t-s)\}(B-A)\exp\{-Bs\}v_0\, ds$$
$$+ A^{-1}\int_{\frac{t}{2}}^t \exp\{-A(t-s)\}(B-A)B\exp\{-Bs\}v_0\, ds.$$

Отсюда с учетом оценок (2) и ограниченности операторов $A^j B^{-j}$, $A^{j+1}B^{-j-1}$ следует, что

$$\|A^{j+1}\exp\{t\}v_0\|_E \leq C\left(\left\|B^{j+1}\exp\left\{-B\frac{t}{2}\right\}v_0\right\|_E + t^{-1}\int_0^t \left\|B^{j+1}\exp\left\{-B\frac{s}{2}\right\}v_0\right\| ds\right).$$

Из этого неравенства и неравенства Харди (9.9.10) из [5] вытекает справедливость неравенства (3).

Для случая, когда $\alpha p < 1$, воспользуемся леммой 2 из [2], согласно которой имеет место неравенство

$$c\int_0^\infty t^{-\alpha p}\|A\exp\{-At\}v_0\|_E^p\, dt \leq |v_0|^p_{E(\alpha,p,A)} \leq C\int_0^\infty t^{-\alpha p}\|A\exp\{-At\}v_0\|_E^p\, dt,$$

а затем, используя его, повторим приведенные выше рассуждения. Теорема доказана.

Замечание 1. Для случая $j = 0$ и $\alpha p < 1$ изоморфизм пространств $E(\alpha, p, A)$ и $E(\alpha, p, B)$ установлен в [3].

Замечание 2. Результаты данной работы применялись (см. [3]) и будут применяться в дальнейшем при разрешимости краевых задач для линейных эллиптических уравнений с неограниченными операторными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А. Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

2. *Аносов В. П.* О следах функций из абстрактных пространств Л. Н. Слободецкого // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 36, № 5. С. 973–989.

3. *Аносов В. П., Соболевский П. Е.* О коэрцитивной разрешимости параболических уравнений // Мат. заметки. 1972. Т. 11, № 4. С. 409–419.

4. *Da-Prato G., Grisvard P.* Sommes d'opérateurs linéaires et equations différentielles opérationnelles // J. Math. Pures Appl. 1975. V. 54. P. 305–387.

5. *Харди Г., Литтлвуд Д., Пойа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

Статья поступила 15 марта 2015 г.

Аносов Виктор Петрович
Новосибирский гос. педагогический университет,
ул. Вилюйская, 32, Новосибирск 630126
averi@ngs.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

UDC 517.982.27

ISOMORPHISM OF SPACES OF TRACES OF VECTOR FUNCTIONS IN SPACES OF L. N. SLOBODETSKII

V. P. Anosov

Abstract: The isomorphism of spaces of traces of vector functions in abstract spaces of L. N. Slobodetskii proved.
Keywords: isomorphism of spaces, traces of vector functions, space.

REFERENCES

1. *Krasnosel'skii M. A., Zabreyko P. P., Pustylnik E. I., and Sobolevskii P. E.* Integral Operators in Spaces of Summable Functions. Noordhoff Int. Publ., 1976.
2. *Anosov V. P.* “On traces of functions in abstract spaces of L. N. Slobodetskii,” Sib. Math. J., **35**, No 5, 863–877 (1994).
3. *Anosov V. P. and Sobolevskii P. E.* “On coercive solvability of parabolic equations,” Math. Notes, **11**, No 4, 251–256 (1972).
4. *Da-Prato G. et Grisvard P.* “Sommes d'opérateurs linéaires et equations diff.erentielles opérationnelles,” J. Math. Pures Appl., **54**, 305–387 (1975).
5. *Hardy G. H., Littlewood J. E., and Polya G.* Inequalities. Gambr. Univ. Press, Gambridge (1934).

Submitted March 15, 2015

Anosov Victor Petrovich
Novosibirsk State Pedagogical University,
Viluiskaya st., 32, Novosibirsk 630126, Russia
averi@ngs.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

УДК 517.946

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Е. И. Атласова

Аннотация. Исследована разрешимость задач сопряжения (обобщенных задач дифракции) для квазипараболических уравнений нечетного порядка. Для изучаемых задач доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений.
Ключевые слова: квазипараболическое уравнение, задача сопряжения, существование, единственность, априорная оценка, регулярное решение.

Введение

Квазипараболическими уравнениями в математической литературе условно можно назвать уравнения вида

$$(-1)^p D_t^{2p+1} u - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t), \tag{$*$}$$

в которых $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, $p > 0$ (p целое), Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным. В случае $p = 0$ эти уравнения являются обычными параболическими уравнениями.

В настоящей работе мы рассматриваем в цилиндре $Q = \Omega \times (-T, T)$, $-T < T < +\infty$, задачу сопряжения для уравнения третьего порядка

$$h(t) D_t^3 u + \Delta u + c(x,t)u = f(x,t), \tag{$**$}$$

где $c(x,t)$, $f(x,t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, функция $h(t)$ строго положительна при $t \in [-T, T]$, непрерывна на множествах $[-T, 0]$ и $(0, T]$ и, быть может, имеет разрыв первого рода при $t = 0$.

Разрешимость тех или иных краевых задач для уравнений $(**)$ в случае непрерывной функции $h(t)$ достаточно хорошо изучена (см., например, работы [1–4] и имеющуюся в них библиографию). Вместе с тем заметим, что задачи сопряжения для уравнений $(**)$ (или для более общих уравнений $(*)$) с разрывным коэффициентом $h(t)$ ранее не изучались. С другой стороны, близкие задачи сопряжения, но для уравнений четного порядка по переменной t с разрывной функцией $h(t)$, изучались автором в [5].

1. Постановки задач

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (-T, T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0, T)$. Пусть $h(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные функции, определенные для $x \in \overline{\Omega}$ и $t \in [-T, T]$, причем функция $h(t)$ строго положительна при $t \in [-T, T]$, непрерывна на отрезках $[-T, 0]$ и $[0, T]$ и имеет разрыв первого рода при $t = 0$, α_i, $i = \overline{0, 2}$, — заданные действительные числа. Обозначим через L дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv = h(t) D_t^3 v + \Delta v + c(x,t) v.$$

Обозначим $Q_- = \Omega \times (-T, 0)$, $Q_+ = \Omega \times (0, T)$, $Q = Q_- \bigcup Q_+$

Задача сопряжения I. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения*

$$Lu = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=-T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = \overline{0,1}, \tag{2}$$

$$D_t^1 u(x,t)\big|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(x,t)|_S = 0, \quad t \in (-T, T), \tag{4}$$

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=-0} = \alpha_k D_t^k u(x,t)\big|_{t=+0}, \quad x \in \Omega, \quad k = \overline{0,2}. \tag{5}$$

Задача сопряжения II. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (4), *а также условия*

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = \overline{0,1}, \tag{6}$$

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=-0} = \alpha_k D_t^k u(x,t)\big|_{t=+0}, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, 2. \tag{7}$$

Задача сопряжения III. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (4), (5), *а также условие*

$$u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

Задача сопряжения IV. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (4), (5), *а также условие*

$$D_t^2 u(x,t)\big|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{9}$$

Определим пространство, в котором будут изучаться свойства единственности и существования решений задач сопряжения I и II. Именно, через $W_2^{2,3}(Q_\mp)$

будем обозначать анизотропное пространство функций, имеющих обобщенные производные по пространственным переменным до второго порядка включительно и по переменной t до третьего порядка включительно. Нормируем пространство $W_2^{2,3}(Q_\mp)$:

$$\|v\|_{W_2^{2,3}(Q_\mp)} = \left(\int\limits_{Q_\mp} \left[v^2 + \sum_{i,j=1}^{n} v_{x_i x_j}^2 + \left(D_t^3 v\right)^2 \right] dxdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим

$$V = \left\{ v(x,t) : v(x,t) \in W_2^{2,3}(Q_-),\ v(x,t) \in W_2^{2,3}(Q_+) \right\}.$$

Норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_V = \|v\|_{W_2^{2,3}(Q_-)} + \|v\|_{W_2^{2,3}(Q_+)};$$

очевидно, что V с такой нормой есть банахово пространство.

2. Единственность решений

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$h(t) \in C^1([-T,0]), \quad h(t) \in C^1([0,T]), \quad c(x,t) \in C^1(\overline{Q}_-) \quad c(x,t) \in C^1(\overline{Q}_+); \tag{10}$$

$$h(t) \geq h_0 > 0, \quad h'(t) \geq 0 \quad \text{при } t \in [-T,T]; \tag{11}$$

$$c(x,t) \leq 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{c(x,t)}{h(t)}\right] \geq 0 \quad \text{при } (x,t) \in \overline{Q}; \tag{12}$$

$$\alpha_1\alpha_2 > 0; \tag{13}$$

$$\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2 \geq 0; \tag{14}$$

$$h(+0)\alpha_0^2 - h(-0)\alpha_1\alpha_2 \geq 0; \tag{15}$$

$$h(-0)\alpha_1\alpha_2 c(x,+0) - h(+0)\alpha_0^2 c(x,-0) \geq 0 \quad \text{при } x \in \overline{\Omega}; \tag{16}$$

$$\text{если } \alpha_2^2 = \alpha_1\alpha_2, \text{ то } \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) = 0. \tag{17}$$

Тогда задача сопряжения I *имеет единственное решение в пространстве* V*.*

Доказательство. Пусть $f(x,t)$ — тождественно нулевая в $\overline{Q}$ функция. Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{Q_-} \frac{1}{h(t)} Lu \cdot u_t\, dxdt - \gamma \int\limits_{Q_+} \frac{1}{h(t)} Lu \cdot u_t\, dxdt = 0, \tag{18}$$

в котором γ есть число, значение которого будет указано ниже. Интегрируя по частям и используя условия (2)-(5), получим

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 0, \tag{19}$$

$$I_1=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_-}\frac{1}{h'(t)}u_{x_i}^2\,dxdt+\frac{\gamma}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_+}\frac{1}{h'(t)}u_{x_i}^2\,dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_-}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{c(x,t)}{h(t)}\right]u^2\,dxdt+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{Q_+}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{c(x,t)}{h(t)}\right]u^2\,dxdt,$$

$$I_2=\int\limits_{\Omega}[\gamma u_{tt}(x,+0)u_t(x,+0)-u_{tt}(x,-0)u_t(x,-0)]\,dx,$$

$$I_3=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[u_{tt}^2(x,-0)-\gamma u_{tt}^2(x,+0)\right]dx,$$

$$I_4=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{h(-0)}u_{x_i}^2(x,-0)-\frac{\gamma}{h(+0)}u_{x_i}^2(x,+0)\right]dx,$$

$$I_5=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\gamma c(x,+0)}{h(+0)}u^2(x,+0)-\frac{c(x,-0)}{h(-0)}u^2(x,-0)\right]dx,$$

$$I_6=\gamma\int\limits_{\Omega}u_{tt}^2(x,T)\,dx+\frac{\gamma}{2h(T)}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_i}^2(x,T)\,dx-\frac{\gamma}{2h(T)}\int\limits_{\Omega}c(x,T)u^2(x,T)\,dx.$$

Выберем γ: $\gamma=\alpha_1\alpha_2$. Из условий (11)-(16) следует теперь, что $I_j=0$, $j=\overline{2,6}$.

Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{Q_-}\frac{A-t}{h(t)}Lu\cdot u_t\,dxdt-\gamma\int\limits_{Q_+}\frac{A-t}{h(t)}Lu\cdot u_t\,dxdt=0, \tag{20}$$

в котором A — фиксированное число такое, что $A>T$. Интегрируя по частям и используя условия (2)–(5), получим

$$\int\limits_{Q_-}u_{tt}^2\,dxdt+\gamma\int\limits_{Q_+}u_{tt}^2\,dxdt-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_-}\left(\frac{A-t}{h(t)}\right)_t u_{x_i}^2\,dxdt$$
$$-\frac{\gamma}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_+}\left(\frac{A-t}{h(t)}\right)_t u_{x_i}^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_-}\left(\frac{(A-t)c(x,t)}{h(t)}\right)_t u^2\,dxdt$$
$$+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{Q_+}\left(\frac{(A-t)c(x,t)}{h(t)}\right)_t u^2\,dxdt-\frac{A(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_2)}{2}\int\limits_{\Omega}u_{tt}^2(x,+0)\,dx$$
$$+\frac{A}{2}\left(\frac{\alpha_0^2}{h(-0)}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{h(+0)}\right)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_i}^2(x,+0)\,dx$$
$$+\frac{A}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2 c(x,+0)}{h(+0)}-\frac{\alpha_0^2 c(x,-0)}{h(-0)}\right)u^2(x,+0)\,dx$$
$$+\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)\int\limits_{\Omega}u_{tt}(x,+0)u_t(x,+0)\,dx+\alpha_1\alpha_2(A-T)\int\limits_{\Omega}u_{tt}^2(x,T)\,dx$$

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2(A-T)}{2h(T)}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_i}^2(x,T)\,dx-\frac{\alpha_1\alpha_2(A-T)}{2h(T)}\int\limits_{\Omega}c(x,T)u^2(x,T)\,dx=0. \quad (21)$$

Если $\alpha_2^0-\alpha_1\alpha_2$ — положительное число, то из $I_3=0$ следует, что $u_{tt}(x,-0)=u_{tt}(x,+0)=0$ при $x\in\Omega$. Но тогда из (21) очевидным образом вытекает, что $u(x,t)\equiv 0$ в Q_- и Q_+. Если же $\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_2=0$, то выполняется $\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)=0$. Но тогда из (21) вновь следует, что $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{Q}$.

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (10), *а также условия*

$$\begin{gathered}h(t)\ge h_0>0 \quad \textit{при } t\in[-T,T],\\ h'(t)\ge 0 \quad \textit{при } t\in[-T,0], \quad h'(t)\le 0 \quad \textit{при } t\in[0,T];\end{gathered} \quad (22)$$

$$\begin{gathered}c(x,t)\le 0 \quad \textit{при } (x,t)\in\overline{Q}, \quad c_t(x,t)\ge 0 \quad \textit{при } (x,t)\in\overline{Q}_-,\\ c_t(x,t)\le 0 \quad \textit{при } (x,t)\in\overline{Q}_+;\end{gathered} \quad (23)$$

$$\alpha_0\alpha_2<0. \quad (24)$$

Тогда задача сопряжения II *имеет в пространстве* V *единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим равенство (18), в котором положим $\gamma=\alpha_1\alpha_2$. Краевые условия (2), (4)–(7), условия (10), (22)–(24) теоремы приводят к равенствам

$$u(x,+0)=u(x,-0)=0, \quad u_{tt}(x,+0)=u_{tt}(x,-0)=0, \quad x\in\Omega. \quad (25)$$

Тогда задача сопряжения II в цилиндре Q_- представляет собой самостоятельную задачу; анализируя для решения $u(x,t)$ этой задачи равенство

$$\int\limits_{Q_-}\frac{1}{h(t)}Lu\cdot u_t\,dxdt=0,$$

интегрируя по частям и используя условия теоремы и равенства (25), получим

$$u_{tt}(x,t)\equiv 0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\overline{Q}_-. \quad (26)$$

Анализируя равенство

$$\int\limits_{Q_+}\frac{1}{h(t)}Lu\cdot u_t\,dxdt=0$$

и используя условия теоремы, равенства (25) и (26), получим

$$u_{tt}(x,t)\equiv 0 \quad \text{при } (x,t)\in\overline{Q}_+. \quad (27)$$

Из (26) и (27) очевидным образом получаем $u(x,t)\equiv 0$ в Q.

Теорема полностью доказана.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (10), (12), *а также условия*

$$h(t) \geq h_0 > 0 \quad \textit{при } t \in [-T, T]; \tag{28}$$

$$\alpha_0 \alpha_2 > 0; \tag{29}$$

$$\alpha_1^2 - \alpha_0 \alpha_2 \geq 0; \tag{30}$$

$$h(-0)\alpha_1 \alpha_2 c(x, +0) - h(+0)\alpha_0^2 c(x, -0) \geq 0 \quad \textit{при } x \in \overline{\Omega}. \tag{31}$$

Тогда задача сопряжения III *имеет в пространстве* V *единственное решение.*

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (10)–(12), *а также условия*

$$\alpha_0 \alpha_1 > 0; \tag{32}$$

$$\alpha_2^2 - \alpha_0 \alpha_1 \geq 0. \tag{33}$$

Тогда задача сопряжения IV *имеет в пространстве* V *единственное решение.*

Доказательство теорем 3 и 4 проводится вполне аналогично доказательству теорем 1 и 2.

3. Существование решений

Для доказательства разрешимости задач сопряжения I–IV будем использовать метод ε-регуляризации и метод продолжения по параметру.

Рассмотрим вначале задачу сопряжения I. Положим

$$\beta_j = \frac{1}{\alpha_j}, \quad j = \overline{0, 2}, \quad \alpha_j \neq 0.$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* (10)–(12). *Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q),$$

$$f(x,T) = \alpha_0 h(+0) f(x,-0) - \alpha_1 \alpha_2 h(-0) f(x,+0) = 0 \quad \textit{при } x \in \Omega,$$

задача сопряжения I *разрешима в пространстве* V.

Доказательство. Пусть ε — положительное число, L_ε — оператор, действие которого определяется равенством

$$L_\varepsilon u \equiv Lu - \varepsilon h(t) D_t^3 \Delta u = f(x,t). \tag{1_ε}$$

Обозначим

$$V_1 = \big\{ v(x,t) : v(x,t) \in V,\ D_t^3 v_{x_i x_j}(x,t) \in L_2(Q_-), \\ D_t^3 v_{x_i x_j}(x,t) \in L_2(Q_+),\ i,j{=}1,\ldots,n \big\}.$$

Норму в пространстве V_1 определим естественным образом:

$$\|v\|_{V_1} = \left(\|v\|_V^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q_-} \left(D_t^3 v_{x_i x_j}\right)^2 dxdt + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q_+} \left(D_t^3 v_{x_i x_j}\right)^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндрах Q_- и Q_+ решением уравнения*

$$L_\varepsilon u \equiv f(x,t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(5). Покажем, что при фиксированном ε краевая задача (1_ε), (2)–(5) разрешима в пространстве V_1 для любой функции $f(x,t)$, принадлежащей пространству $L_2(Q)$. Воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство задач: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндрах Q_- и Q_+ решением уравнения* (1_ε) *и такую, что для нее выполняются условия* (2)–(4), *а также условия*

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=+0} = \lambda\beta_k D_t^k u(x,t)\big|_{t=-0}, \quad x \in \Omega,\ k=\overline{0,1}, \tag{34_λ}$$

$$D_t^2 u(x,t)\big|_{t=-0} = \lambda\alpha_2 D_t^2 u(x,t)\big|_{t=+0}, \quad x \in \Omega. \tag{35_λ}$$

Покажем, что при фиксированном ε краевая задача (1_ε), (2)–(4), (34_λ), (35_λ) разрешима в V_1 для любой функции $f(x,t)$, принадлежащей $L_2(Q)$.

Обозначим через Λ множество чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых задача (1_ε), (2)–(4), (34_λ), (35_λ) разрешима в пространстве V_1 для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$. Если окажется, что множество Λ непусто, открыто и замкнуто одновременно (в метрическом пространстве $X=[0,1]$), то оно будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$ (см. [12, с. 153]). Совпадение же множества Λ с отрезком [0,1] и будет означать разрешимость в пространстве V_1 задачи (1_ε), (2)–(5).

Заметим, что задача (1_ε), (2)–(4), (34_0), (35_0) распадается на две независимые задачи в цилиндрах Q_- и Q_+, разрешимость каждой из которых в пространстве V_1 очевидна (при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$). Следовательно, число 0 принадлежит множеству Λ и тем самым множество Λ непусто.

Для того чтобы установить наличие необходимых свойств у множества Λ, нам понадобятся априорные оценки. Покажем их наличие.

Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{Q_-} L_\varepsilon u \cdot \frac{A-t}{h(t)} u_t\,dxdt - \gamma\int\limits_{Q_+} L_\varepsilon u \cdot \frac{A-t}{h(t)} u_t\,dxdt = -\int\limits_{Q_-} \frac{A-t}{h(t)} f u_t\,dxdt - \gamma\int\limits_{Q_+} \frac{A-t}{h(t)} f u_t\,dxdt,$$

в котором γ, как и раньше, есть число $\alpha_1\alpha_2$. Из этого равенства с помощью интегрирования по частям получим

$$\varepsilon\int\limits_{Q_-} u_{x_i tt}^2\,dxdt + \varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_+} u_{x_i tt}^2\,dxdt + \int\limits_{Q_-} u_{tt}^2\,dxdt + \gamma\int\limits_{Q_+} u_{tt}^2\,dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_-}\left(\frac{A-t}{h(t)}\right)_t u_{x_i}^2\,dxdt-\frac{\gamma}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_+}\left(\frac{A-t}{h(t)}\right)_t u_{x_i}^2\,dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_-}\left(\frac{(A-t)c(x,t)}{h(t)}\right)_t u^2\,dxdt+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{Q_+}\left(\frac{(A-t)c(x,t)}{h(t)}\right)_t u^2\,dxdt\\
&+\varepsilon A\big(1-\gamma\lambda^2\beta_2^2\big)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_itt}^2(x,-0)\,dx+A\big(1-\gamma\lambda^2\beta_2^2\big)\int\limits_{\Omega}u_{tt}^2(x,-0)\,dx\\
&+A\left[\frac{1}{h(-0)}-\frac{\gamma\lambda^2\beta_0^2}{h(+0)}\right]\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_i}^2(x,-0)\,dx\\
&+\frac{A}{2}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\lambda^2\beta_0^2c(x,+0)}{h(+0)}-\frac{c(x,-0)}{h(-0)}\right]u^2(x,-0)\,dx=\int\limits_{Q_-}(A-t)fu_t\,dxdt\\
&-\gamma\int\limits_{Q_+}\frac{A-t}{h(t)}fu_t\,dxdt-\varepsilon(\gamma\lambda^2\beta_1\beta_2-1)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_itt}(x,-0)u_{x_it}(x,-0)\,dx\\
&-(\gamma\lambda^2\beta_1\beta_2-1)\int\limits_{\Omega}u_{tt}(x,-0)u_t(x,-0)\,dx. \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Используя условия (10)–(16), а в случае равенства $\alpha_2^2=\alpha_1\alpha_3$ дополнительно используя условие $\alpha_1=\alpha_2$ (напомним, что $\alpha_1\neq 0$), применяя в правой части (36) неравенство Юнга, а также неравенства

$$
\int\limits_{\Omega}u_t^2(x,-0)\,dx\le T\int\limits_{Q_-}u_{tt}^2\,dxdt,\qquad \int\limits_{\Omega}u_{x_it}^2(x,-0)\,dx\le T\int\limits_{Q_-}u_{x_itt}^2\,dxdt,
$$

и, наконец, выбирая число A достаточно большим, получим первую априорную оценку:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_-}u_{x_itt}^2\,dxdt+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_+}u_{x_itt}^2\,dxdt+\int\limits_{Q_-}u_{tt}^2\,dxdt+\int\limits_{Q_+}u_{tt}^2\,dxdt\\
&\le M_1\Big(\int\limits_{Q_-}f^2\,dxdt+\int\limits_{Q_+}f^2\,dxdt\Big), \qquad (37)
\end{aligned}
$$

постоянная M_1 в которой зависит только от числа T.

Рассмотрим равенство

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_-}L_\varepsilon u\cdot\frac{A-t}{h(t)}\Delta u_t\,dxdt+\gamma\int\limits_{Q_+}L_\varepsilon u\cdot\frac{A-t}{h(t)}\Delta u_t\,dxdt\\
&=\int\limits_{Q_-}\frac{A-t}{h(t)}f\Delta u_t\,dxdt+\gamma\int\limits_{Q_+}\frac{A-t}{h(t)}f\Delta u_t\,dxdt. \qquad (38)
\end{aligned}
$$

Вновь интегрируя по частям, используя условия (10)–(16), условия теоремы и применяя неравенство Юнга, получаем, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (1_ε), (2)–(4), (34_λ), (35_λ) будет выполняться оценка

$$\varepsilon\int\limits_{Q_-}(\Delta u_{tt})^2\,dxdt+\varepsilon\int\limits_{Q_+}(\Delta u_{tt})^2\,dxdt+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_-}u_{x_itt}^2\,dxdt+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_+}u_{x_itt}^2\,dxdt$$
$$+\int\limits_{Q_-}(\Delta u)^2\,dxdt+\int\limits_{Q_+}(\Delta u)^2\,dxdt\le M_2\Bigg(\int\limits_{Q_-}f^2\,dxdt+\int\limits_{Q_+}f^2\,dxdt\Bigg),\qquad(39)$$

в которой постоянная M_2 определяется числами T и ε, функцией $c(x,t)$ и областью Ω.

Анализируя равенство

$$\int\limits_{Q_-}L_\varepsilon u\cdot D_t^3u\,dxdt+\int\limits_{Q_+}L_\varepsilon u\cdot D_t^3u\,dxdt=\int\limits_{Q_-}fD_t^3u\,dxdt+\int\limits_{Q_+}fD_t^3u\,dxdt,\qquad(40)$$

используя условия теоремы, оценки (37) и (39) и применяя неравенство Юнга, получим, что имеет место оценка

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_-}\left(D_t^3u_{x_i}\right)^2dxdt+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_+}\left(D_t^3u_{x_i}\right)^2dxdt+\int\limits_{Q_-}\left(D_t^3u\right)^2dxdt$$
$$+\int\limits_{Q_+}\left(D_t^3u\right)^2\,dxdt\le M_3\Bigg(\int\limits_{Q_-}f^2\,dxdt+\int\limits_{Q_+}f^2\,dxdt\Bigg)\qquad(41)$$

с постоянной M_3, определяющейся числами T и ε, функцией $c(x,t)$ и областью Ω.

Последняя априорная оценка

$$\varepsilon^2\int\limits_{Q_-}\left(D_t^3\Delta u\right)^2dxdt+\varepsilon^2\int\limits_{Q_+}\left(D_t^3\Delta u\right)^2dxdt\le M_4\Bigg(\int\limits_{Q_-}f^2\,dxdt+\int\limits_{Q_+}f^2\,dxdt\Bigg)\qquad(42)$$

очевидным образом следует из оценок (37), (39) и (41).

Полученные оценки вместе со вторым основным неравенством для эллиптических операторов [6] дают окончательную априорную оценку

$$\|u\|_{V_1}\le M_0\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Эта оценка, теорема о методе продолжения по параметру [7, с. 153], а также техника работы [5] позволяют установить требуемую открытость и замкнутость множества Λ. Как говорилось выше, открытость и замкнутость Λ вместе с его непустотой означают, что задача (1_ε), (2)–(5) (другими словами, задача (1_ε), (2)–(4), (34_1), (35_1)) разрешима в пространстве V_1.

Итак, при фиксированном ε краевая задача (1_ε), (2)–(5) имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$, принадлежащее пространству V_1. Для семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ имеет место равномерная по ε априорная оценка (37). Далее, для семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ будет выполняться равномерная по ε вторая оценка, подобная приведенной выше оценке (38), но с дополнительным интегрированием по частям в правой части и в слагаемом, содержащем функцию $c(x,t)$:

$$\varepsilon\int\limits_{Q_-}\left(\Delta u^\varepsilon_{tt}\right)^2 dxdt+\varepsilon\int\limits_{Q_+}\left(\Delta u^\varepsilon_{tt}\right)^2 dxdt+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_-}\left(u^\varepsilon_{x_itt}\right)^2 dxdt$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_+}\left(u^\varepsilon_{x_itt}\right)^2 dxdt+\int\limits_{Q_-}(\Delta u^\varepsilon)^2\,dxdt+\int\limits_{Q_+}(\Delta u^\varepsilon)^2\,dxdt$$
$$\leq M_2'\Bigg[\int\limits_{Q_-}\left(f^2+f_t^2\right)dxdt+\int\limits_{Q_+}\left(f^2+f_t^2\right)dxdt\Bigg] \quad (43)$$

с постоянной M_2', определяющейся лишь числом T, функцией $c(x,t)$ и областью Ω.

Третья априорная оценка

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_-}\left(D_t^3u^\varepsilon_{x_i}\right)^2 dxdt+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_+}\left(D_t^3u^\varepsilon_{x_i}\right)^2 dxdt+\int\limits_{Q_-}\left(D_t^3u^\varepsilon\right)^2 dxdt$$
$$+\int\limits_{Q_+}\left(D_t^3u^\varepsilon\right)^2 dxdt\leq M_3'\Bigg[\int\limits_{Q_-}\left(f^2+f_t^2\right)dxdt+\int\limits_{Q_+}\left(f^2+f_t^2\right)dxdt\Bigg], \quad (44)$$

вновь равномерная по ε, выводится из равенства (40) с помощью оценки (42). Последняя же оценка

$$\varepsilon^2\int\limits_{Q_-}\left(D_t^3\Delta u^\varepsilon\right)^2 dxdt+\varepsilon^2\int\limits_{Q_+}\left(D_t^3\Delta u^\varepsilon\right)^2 dxdt$$
$$\leq M_4'\Bigg[\int\limits_{Q_-}\left(f^2+f_t^2\right)dxdt+\int\limits_{Q_+}\left(f^2+f_t^2\right)dxdt\Bigg] \quad (45)$$

очевидным образом вытекает из предыдущих; постоянная M_4' в этой оценке определяется лишь числом T, функцией $c(x,t)$ и областью Ω.

Из оценок (37), (43)–(45), свойства рефлексивности гильбертова пространства (пространства $L_2(Q)$) и свойств слабого предела следует возможность выбора из семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ последовательности $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$, слабо сходящейся в пространстве V к некоторой функции $u(x,t)$, такой, что выполняется

$$\varepsilon_m\to 0\quad \text{при } m\to\infty,$$

$$\varepsilon_mD_t^3u_m(x,t)\to 0\quad \text{при } m\to\infty \text{ слабо в пространстве } L_2(Q).$$

Предельная функция $u(x,t)$ и будет искомым решением задачи сопряжения I.

Теорема полностью доказана.

Теорема 6. *Пусть выполняется условие* (10), *а также условия* (22)–(24). *Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q),$$

$$\alpha_0 h(+0)f(x,-0) - \alpha_1\alpha_2 h(-0)f(x,+0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega,$$

задача сопряжения II *разрешима в пространстве* V.

Доказательство теоремы проводится вполне аналогично доказательству теоремы 5, а именно с помощью теоремы о методе продолжения по параметру и априорных оценок.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия* (10), (12), *а также условия* (28)–(31). *Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q),$$

$$\alpha_0 h(+0)f(x,-0) - \alpha_1\alpha_2 h(-0)f(x,+0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega,$$

задача сопряжения III *разрешима в пространстве* V.

Теорема 8. *Пусть выполняются условия* (10)–(12), *а также условия* (32) *и* (33). *Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q),$$

$$\alpha_0 h(+0)f(x,-0) - \alpha_1\alpha_2 h(-0)f(x,+0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega,$$

задача сопряжения IV *разрешима в пространстве* V.

Доказательство теорем 7 и 8 проводится вполне аналогично доказательству соответствующих теорем 5 и 6 о разрешимости задач сопряжения I и II.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубинский Ю. А.* Краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 1. С. 32–35.
2. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
3. *Лукина Г. А.* О разрешимости пространственно-нелокальных задач для уравнения третьего порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, № 1. С. 35–46.
4. *Шубин В. В.* Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 11. С. 126–138.
5. *Атласова Е. И.* Задача сопряжения для квазигиперболических уравнений высокого порядка // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 3–13.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
7. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 24 января 2016 г.

Атласова Елена Ивановна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
elena.131190@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

UDC 517.946

SOLVABILITY OF CONJUGATE PROBLEMS FOR QUASIPARABOLIC EQUATIONS OF THIRD ORDER

E. I. Atlasova

Abstract: We study solvability of conjugate problems (generalized diffraction problems) for quasiparabolic equations of odd order. We prove existence and uniqueness theorems for regular solutions to these problems.
Keywords: quasiparabolic equation, conjugation problem, existence, uniqueness, a priori estimate, regular solution.

REFERENCES

1. *Dubinskii Yu. A.* "Boundary value problems for some differential-operator equations of high order," Soviet Math. Dokl., **196**, No. 1, 32–35 (1971).
2. *Egorov I. E. and Fedorov V. E.*, Nonclassical equations of mathematical physics of high order, Comput. Center SB RAS, Novosibirsk (1995).
3. *Lukina G. A.* "On solvability of space-nonlocal problems for an equation of third order," Mat. Zam. YAGU, **17**, No 1, 35–46 (2010).
4. *Shubin V. V.* "Boundary-value problems for equations of third order with a discontinuous coefficient," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh., Inform., **12**, No. 11, 126–138 (2012).
5. *Atlasova E. I.* "A conjugate problem for quasihyperbolic equarions of high order," Mat. Zam. SVFU, **21**, No. 4, 3–13 (2014).
6. *Ladyzhenskaya O. A. and Uraltseva N. N.*, Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type, Nauka, Moscow (1973).
7. *Trenogin V. A.*, Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

Submitted 24, January 2016

Atlasova Elena Ivanovna
Nord-East Federal University,
Kulakovskogo st., 48, Yakutsk 677000, Russia
elena.131190@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

УДК 517.95

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

М. М. Дышаев, В. Е. Федоров

Аннотация. Проведена групповая классификация семейства уравнений Сиркара — Папаниколау со свободным параметром, включающего в себя в простейшем случае уравнение Блэка — Шоулса. С помощью найденной пятимерной группы преобразований эквивалентности такого уравнения осуществлен поиск трехмерного ядра основных алгебр Ли и четырехмерных основных алгебр Ли уравнения в случае двух спецификаций свободного элемента. Для каждой из алгебр найдены оптимальные системы подалгебр и соответствующие этим подалгебрам инвариантные решения или инвариантные подмодели уравнения. Вычисленные инвариантные решения включены в более общие многопараметрические семейства решений, инвариантные относительно всей основной алгебры Ли.

Ключевые слова: нелинейное уравнение в частных производных, уравнение Блэка — Шоулса, модель Сиркара — Папаниколау, ценообразование опционов, групповой анализ, инвариантное решение, инвариантная подмодель, динамическое хеджирование, эффекты обратной связи при хеджировании.

Введение

В последние годы все большее внимание исследователей в теории финансовых рынков привлекают различные обобщения модели Блэка — Шоулса [1], более адекватные реальным процессам, протекающим на финансовых рынках (см. [2, 3]). Одной из наиболее общих моделей этого класса является модель Сиркара — Папаниколау [4]. Данная модель разработана на основании модели Блэка — Шоулса для того, чтобы учесть эффекты обратной связи, возникающие при хеджировании на рынке базового актива (например, акций) купленных или проданных производных финансовых инструментов, таких, например, как опционы. Для учета данного эффекта ослаблена одна из основных предпосылок модели Блэка — Шоулса, а именно требование абсолютной эластичности рынка, когда большие трейдеры не влияли своими объемами операций на цены в равновесии. Следуя работам [5, 6], авторы [4] предположили, что на рынке опционов оперируют два типа трейдеров. Первый тип — «реферальные» трейдеры (reference traders) — в основном инвестируют в активы, ожидая их подъема, тогда как трейдеры второго типа — «программные» (program traders) —

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

торгуют активами для страхования портфеля, используя вытекающие из модели Блэка — Шоулса стратегии динамического хеджирования. Взаимодействие этих двух групп ведет к стохастическому процессу цены актива, который зависит от хеджирующих стратегий программных трейдеров. Модель Сиркара — Папаниколау

$$C_t + \frac{1}{2}\left[\frac{V(1-\rho C_x)U'(V(1-\rho C_x))}{V(1-\rho C_x)U'(V(1-\rho C_x)) - \rho x C_{xx}}\right]^2 \sigma^2 x^2 C_{xx} + r(xC_x - C) = 0, \quad (1)$$

позволяет количественно оценить эффекты обратной связи, возникающей между ценами актива и производных инструментов. Здесь t — время, x — цена акции, C — цена опциона, σ — волатильность акции, ρ — отношение количества хеджируемых опционов к общему числу единиц базового актива в предложении на рынке, V — обратная функция к функции U, которая задает в модели функцию спроса D реферальных трейдеров относительно предложения равенством $U(y^\delta/x) = D(x,y)$ в предположении, что последняя не зависит от t.

Методы исследования моделей финансовых рынков традиционны и весьма различны: численные методы, методы теории временных рядов, теории нейронных сетей и др. [7, 8]. Как всегда, когда идет речь о процессах, моделируемых нелинейными дифференциальными уравнениями, одними из самых эффективных методов, позволяющих осуществлять поиск точных решений, являются методы группового анализа [9–11]. С применением таких методов близкие к (1) уравнения, в том числе его некоторые частные случаи, исследовалось в [12–16].

Данная работа посвящена групповой классификации [9, 11] уравнения (1) и поиску его точных решений методами группового анализа. Для этого в разд. 2 найдены группы преобразований эквивалентности этого уравнения. С их помощью в разд. 3 удалось показать, что для двух спецификаций свободного элемента $V(1-\rho C_x)$ уравнение имеет четырехмерную основную алгебру Ли, а в случаях, не приводимых к указанным преобразованиями эквивалентности, основная алгебра Ли трехмерная. Разд. 4–6 посвящены поиску инвариантных решений и подмоделей уравнения (1) с различными алгебрами Ли (при различных спецификациях свободного элемента V). В разд. 7 подведены итоги исследования и найдены общие семейства точных решений уравнения (1), инвариантных относительно всей допускаемой группы Ли в каждом из рассмотренных случаев. В разд. 8 сформулированы характерные для теории финансовых рынков граничные условия, которым удовлетворяют найденные решения уравнения Сиркара — Папаниколау.

1. Группы преобразований эквивалентности уравнения Сиркара — Папаниколау

Учитывая формулу для производной обратной функции, уравнение (1) перепишем в виде

$$C_t + \frac{1}{2}\left[1 - \rho x C_{xx}\frac{V'(1-\rho C_x)}{V(1-\rho C_x)}\right]^{-2} \sigma^2 x^2 C_{xx} + r(xC_x - C) = 0. \quad (2)$$

Домножим уравнение (2) на константу ρ, сделаем замену $\rho C = u$ и переобозначение $V'(1-\rho C_x)/V(1-\rho C_x) = v(u_x)$. Получим уравнение

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1 - xv(u_x)u_{xx})^2} + r(xu_x - u) = 0. \tag{3}$$

Сразу отметим, что при $v \equiv 0$ уравнение является линейным и имеет гораздо более богатую алгебраическую структуру, которая исследована ранее [10] (классическое уравнение Блэка — Шоулса). Поэтому здесь вариант нулевой функции v из рассмотрений исключен.

При $r = 0$ групповая структура уравнения (3) исследовалась в работах [15, 16], где был осуществлен также поиск инвариантных решений. Но преобразования эквивалентности при этом не вычислялись и не использовались (см. по этому поводу замечание 1).

Для нахождения спецификаций функции $v = v(u_x)$, при которых появляются дополнительные к задаваемым ядром главных алгебр Ли симметрии уравнения (3), найдем непрерывную группу преобразований эквивалентности этого уравнения. Для этого запишем уравнение (3) в виде

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1 - xvu_{xx})^2} + r(xu_x - u) = 0, \tag{4}$$

подразумевая, что v — это дополнительная переменная, зависящая от переменных t, x, u, u_t, u_x. Генераторы непрерывной группы преобразований эквивалентности будем искать в виде $Y = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u + \mu\partial_v$, где функции τ, ξ, η зависят от t, x, u, а μ зависит от t, x, u, u_t, u_x, v. Здесь и далее для краткости используется запись $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t$ и т. п. Дополним уравнение (4) уравнениями

$$v_t = 0, \quad v_x = 0, \quad v_u = 0, \quad v_{u_t} = 0, \tag{5}$$

означающими, что в исходной постановке задачи v зависит только от u_x.

Будем рассматривать систему (4), (5) как многообразие $\mathfrak{N}$ в расширенном пространстве соответствующих переменных. Подействуем на левую часть системы (4), (5) продолженным оператором

$$\widetilde{Y} = Y + \varphi^t\partial_{u_t} + \varphi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \mu^t\partial_{v_t} + \mu^x\partial_{v_x} + \mu^u\partial_{v_u} + \mu^{u_t}\partial_{v_{u_t}},$$

сузим результат действия на многообразие $\mathfrak{N}$ и получим уравнения

$$\varphi^t + \frac{\sigma^2 x u_{xx}\xi}{(1 - xvu_{xx})^3} + \frac{\sigma^2 x^2(1 + xvu_{xx})\varphi^{xx}}{2(1 - xvu_{xx})^3} + \frac{\sigma^2 x^3 u_{xx}^2 \mu}{(1 - xvu_{xx})^3} + r(u_x\xi + x\varphi^x - \eta)\Big|_{\mathfrak{N}} = 0, \tag{6}$$

$$\mu^t|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^x|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^u|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^{u_t}|_{\mathfrak{N}} = 0. \tag{7}$$

Коэффициенты оператора $\widetilde{Y}$ могут быть вычислены по формулам продолжения [9], например,

$$\mu^t = \widetilde{D}_t(\mu) - v_t\widetilde{D}_t(\tau) - v_x\widetilde{D}_t(\xi) - v_u\widetilde{D}_t(\eta) - v_{u_t}\widetilde{D}_t(\varphi^t) - v_{u_x}\widetilde{D}_t(\varphi^x),$$

где

$$\widetilde{D}_t = \partial_t + v_t\partial_v + v_{tt}\partial_{v_t} + v_{tx}\partial_{v_x} + v_{tu}\partial_{v_u} + v_{tu_t}\partial_{v_{u_t}} + v_{tu_x}\partial_{v_{u_x}},$$

и т. д. Тогда уравнения (7) примут вид

$$\mu_t - v'(u_x)\varphi_t^x = 0, \quad \mu_x - v'(u_x)\varphi_x^x = 0, \quad \mu_u - v'(u_x)\varphi_u^x = 0, \quad \mu_{u_t} - v'(u_x)\varphi_{u_t}^x = 0.$$

Поскольку

$$\varphi^x = \eta_x + u_x\eta_u - u_t\tau_x - u_t u_x\tau_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u, \tag{8}$$

эти уравнения можно расписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mu_t &- v'(u_x)(\eta_{tx} + u_x\eta_{tu} - u_t\tau_{tx} - u_t u_x\tau_{tu} - u_x\xi_{tx} - u_x^2\xi_{tu})|_{\mathfrak{N}}\\ &= \mu_t - v'(u_x)\biggl(\eta_{tx} + u_x\eta_{tu} - u_x\xi_{tx} - u_x^2\xi_{tu} + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}(\tau_{tx} + u_x\tau_{tu})}{2(1 - xvu_{xx})^2}\\ &\qquad + (rxu_x - ru)(\tau_{tx} + u_x\tau_{tu})\biggr) = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\mu_x &- v'(u_x)(\eta_{xx} + u_x\eta_{xu} - u_t\tau_{xx} - u_t u_x\tau_{xu} - u_x\xi_{xx} - u_x^2\xi_{xu})|_{\mathfrak{N}}\\ &= \mu_x - v'(u_x)\biggl(\eta_{xx} + u_x\eta_{xu} - u_x\xi_{xx} - u_x^2\xi_{xu} + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}(\tau_{xx} + u_x\tau_{xu})}{2(1 - xvu_{xx})^2}\\ &\qquad + (rxu_x - ru)(\tau_{xx} + u_x\tau_{xu})\biggr) = 0,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\mu_u &- v'(u_x)(\eta_{xu} + u_x\eta_{uu} - u_t\tau_{xu} - u_t u_x\tau_{uu} - u_x\xi_{xu} - u_x^2\xi_{uu})|_{\mathfrak{N}}\\ &= \mu_u - v'(u_x)\biggl(\eta_{xu} + u_x\eta_{uu} - u_x\xi_{xu} - u_x^2\xi_{uu} + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}(\tau_{xu} + u_x\tau_{uu})}{2(1 - xvu_{xx})^2}\\ &\qquad + (rxu_x - ru)(\tau_{xu} + u_x\tau_{uu})\biggr) = 0,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\mu_{u_t} + v'(u_x)(\tau_x + u_x\tau_u) = 0. \tag{12}$$

Уравнение (6) в силу равенства

$$\begin{aligned}\varphi^{xx} &= \eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + u_x^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u - u_t\tau_{xx} - 2u_t u_x\tau_{xu} - 2u_{tx}\tau_x - u_t u_x^2\tau_{uu}\\ &\quad - 2u_x u_{tx}\tau_u - u_t u_{xx}\tau_u - u_x\xi_{xx} - 2u_x^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - u_x^3\xi_{uu} - 3u_x u_{xx}\xi_u\end{aligned}$$

примет вид

$$
\begin{aligned}
\eta_t &+ u_t\eta_u - u_t\tau_t - u_t^2\tau_u - u_x\xi_t - u_tu_x\xi_u + \frac{\sigma^2 x}{2(1-xvu_{xx})^3}(2u_{xx}\xi + 2x^2u_{xx}^2\mu \\
&+ x(1+xvu_{xx})(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + u_x^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u \\
&- u_t\tau_{xx} - 2u_tu_x\tau_{xu} - 2u_{tx}\tau_x - u_tu_x^2\tau_{uu} - 2u_xu_{tx}\tau_u \\
&- u_tu_{xx}\tau_u - u_x\xi_{xx} - 2u_x^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - u_x^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u)) \\
&+ ru_x\xi + rx(\eta_x + u_x\eta_u - u_t\tau_x - u_tu_x\tau_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u) - r\eta|_{\mathfrak{N}} \\
&= \eta_t + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}(\tau_t - \eta_u)}{2(1-xvu_{xx})^2} + (rxu_x - ru)(\tau_t - \eta_u) - \frac{\sigma^4x^4u_{xx}^2\tau_u}{4(1-xvu_{xx})^4} \\
&- (rxu_x - ru)^2\tau_u - \frac{\sigma^2x^2u_{xx}(rxu_x - ru)\tau_u}{(1-xvu_{xx})^2} - u_x\xi_t \\
&+ \frac{\sigma^2x^2u_xu_{xx}\xi_u}{2(1-xvu_{xx})^2} + (rxu_x - ru)u_x\xi_u + \frac{\sigma^2 x}{2(1-xvu_{xx})^3}\Bigg(2u_{xx}\xi + 2x^2u_{xx}^2\mu \\
&+ x(1+xvu_{xx})\Bigg(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + u_x^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}\tau_{xx}}{2(1-xvu_{xx})^2} \\
&+ (rxu_x - ru)\tau_{xx} + \frac{\sigma^2x^2u_xu_{xx}\tau_{xu}}{(1-xvu_{xx})^2} + 2(rxu_x - ru)u_x\tau_{xu} - 2u_{tx}\tau_x \\
&+ \frac{\sigma^2x^2u_x^2u_{xx}\tau_{uu}}{2(1-xvu_{xx})^2} + (rxu_x - ru)u_x^2\tau_{uu} - 2u_xu_{tx}\tau_u + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}^2\tau_u}{2(1-xvu_{xx})^2} \\
&+ (rxu_x - ru)u_{xx}\tau_u - u_x\xi_{xx} - 2u_x^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - u_x^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u\Bigg)\Bigg) \\
&+ ru_x\xi + rx(\eta_x + u_x\eta_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u) - r\eta \\
&+ \frac{r\sigma^2x^3u_{xx}(\tau_x + u_x\tau_u)}{2(1-xvu_{xx})^2} + (rxu_x - ru)(\tau_x + u_x\tau_u) = 0. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Дифференцированием последнего уравнения по u_{tx} получим

$$
(1 + xvu_{xx})(\tau_x + u_x\tau_u) = 0,
$$

отсюда $\tau = \tau(t)$. Следовательно, уравнения (9)–(13) примут вид

$$
\mu_t - v'(u_x)\big(\eta_{tx} + u_x\eta_{tu} - u_x\xi_{tx} - u_x^2\xi_{tu}\big) = 0, \qquad (14)
$$

$$
\mu_x - v'(u_x)\big(\eta_{xx} + u_x\eta_{xu} - u_x\xi_{xx} - u_x^2\xi_{xu}\big) = 0, \qquad (15)
$$

$$
\mu_u - v'(u_x)\big(\eta_{xu} + u_x\eta_{uu} - u_x\xi_{xu} - u_x^2\xi_{uu}\big) = 0, \qquad (16)
$$

$$
\mu_{u_t} = 0, \qquad (17)
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_t &+ \frac{\sigma^2x^2u_{xx}(\tau'(t) - \eta_u)}{2(1-xvu_{xx})^2} + (rxu_x - ru)(\tau'(t) - \eta_u) - u_x\xi_t \\
&+ \frac{\sigma^2x^2u_xu_{xx}\xi_u}{2(1-xvu_{xx})^2} + (rxu_x - ru)u_x\xi_u + \frac{\sigma^2 x}{2(1-xvu_{xx})^3}\big(2u_{xx}\xi + 2x^2u_{xx}^2\mu \\
&+ x(1+xvu_{xx})\big(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + u_x^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u - u_x\xi_{xx} \\
&- 2u_x^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - u_x^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u\big)\big) + ru_x\xi \\
&+ rx(\eta_x + u_x\eta_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u) - r\eta = 0. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Домножим уравнение (18) на $2(1-xvu_{xx})^3$ и получим

$$\begin{aligned}2(1-xvu_{xx})^3(\eta_t+(rxu_x-ru)(\tau'(t)-\eta_u+u_x\xi_u))+(1-xvu_{xx})\sigma^2x^2u_{xx}(\tau'(t)-\eta_u)\\ -2(1-xvu_{xx})^3u_x\xi_t+(1-xvu_{xx})\sigma^2x^2u_xu_{xx}\xi_u+\sigma^2x\big(2u_{xx}\xi+2x^2u_{xx}^2\mu\\ +x(1+xvu_{xx})\big(\eta_{xx}+2u_x\eta_{xu}+u_x^2\eta_{uu}+u_{xx}\eta_u-u_x\xi_{xx}\\ -2u_x^2\xi_{xu}-2u_{xx}\xi_x-u_x^3\xi_{uu}-3u_xu_{xx}\xi_u\big)\big)\\ +2(1-xvu_{xx})^3\big(ru_x\xi+rx\big(\eta_x+u_x\eta_u-u_x\xi_x-u_x^2\xi_u\big)-r\eta\big)=0.\end{aligned} \quad (19)$$

Расщепляя уравнение (19) по переменной u_{xx}, получим для $v\neq 0$ при u_{xx}^3 множитель

$$\eta_t+rxu_x\tau'(t)-ru(\tau'(t)-\eta_u+u_x\xi_u)-u_x\xi_t+ru_x\xi+rx(\eta_x-u_x\xi_x)-r\eta,$$

поэтому

$$\eta_t+rx\eta_x+ru\eta_u-r\eta-ru\tau'(t)=0, \quad (20)$$

$$rx\tau'(t)-\xi_t-rx\xi_x-ru\xi_u+r\xi=0. \quad (21)$$

При u_{xx} в нулевой степени после дальнейшего расщепления (19) по u_x имеем

$$\xi=A(t,x)u+B(t,x),\quad \eta=A_x(t,x)u^2+C(t,x)u+D(t,x),$$

и с учетом (20), (21)

$$2\eta_t-2ru\tau'+2ru\eta_u+2rx\eta_x-2r\eta+\sigma^2x^2\eta_{xx}=\sigma^2x^2\eta_{xx}=0, \quad (22)$$

$$2rx\tau'-2ru\xi_u-2\xi_t+2r\xi-2rx\xi_x+\sigma^2x^2\xi_{xx}+2\sigma^2x^2\eta_{xu}=\sigma^2x^2\xi_{xx}+2\sigma^2x^2\eta_{xu}=0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$A_{xx}=0,\quad A(t,x)=A_1(t)x+A_0(t),\quad C(t,x)=-B_x(t,x)+E(t),$$

$$\xi=A_1(t)xu+A_0(t)u+B(t,x),\quad \eta=A_1(t)u^2-B_x(t,x)u+E(t)u+D(t,x).$$

Тогда из (22) получим

$$B_{xxx}=0,\quad D_{xx}=0,$$

$$\xi=A_1(t)xu+A_0(t)u+B_2(t)x^2+B_1(t)x+B_0(t),$$

$$\eta=A_1(t)u^2-2B_2(t)xu-B_1(t)u+E(t)u+D_1(t)x+D_0(t).$$

Теперь из равенства (21) следует, что $A_1(t)=Fe^{-rt}$, $A_0(t)$ — константа,

$$B_2(t)=Ge^{-rt},\quad B_1(t)=r\tau(t)+H,\quad B_0(t)=Je^{rt},$$

поэтому

$$\xi=Fe^{-rt}xu+A_0u+Ge^{-rt}x^2+r\tau(t)x+Hx+Je^{rt},$$

$$\eta=Fe^{-rt}u^2-2Ge^{-rt}xu-r\tau(t)u-Hu+E(t)u+D_1(t)x+D_0(t).$$

Наконец, в силу (20) D_1 — постоянная,

$$D_0(t)=Ke^{rt},\quad E(t)=2r\tau(t)+L,$$

$$\xi = Fe^{-rt}xu + A_0u + Ge^{-rt}x^2 + r\tau(t)x + Hx + Je^{rt},$$

$$\eta = Fe^{-rt}u^2 - 2Ge^{-rt}xu - Hu + r\tau(t)u + Lu + D_1x + Ke^{rt}.$$

При u_{xx} в уравнении (19) приравняем коэффициент к нулю и получим уравнение

$$\begin{gathered}- 6xv\eta_t - 6xv(rxu_x\tau'(t) - ru\tau'(t) + ru\eta_u - ruu_x\xi_u) + \sigma^2x^2\tau'(t) \\ + 6xvu_x\xi_t + 2\sigma^2x\xi - 2\sigma^2x^2\xi_x - 2\sigma^2x^2u_x\xi_u + 2\sigma^2x^3vu_x\eta_{xu} + \sigma^2x^3vu_x^2\eta_{uu} \\ - \sigma^2x^3vu_x\xi_{xx} - 2\sigma^2x^3vu_x^2\xi_{xu} - 6xv(ru_x\xi + rx\eta_x - rxu_x\xi_x - r\eta) = 0.\end{gathered}$$

Подставив в него найденные выражения для ξ, η, получим

$$F = A_0 = G = J = \tau'(t) = 0,$$

$$\tau = T, \quad \xi = Mx, \quad \eta = Nu + D_1x + Ke^{rt}. \tag{23}$$

Осталось аналогичные вычисления провести с коэффициентом при u_{xx}^2 в уравнении (19). Отсюда приходим к уравнению

$$\begin{gathered}3v^2(\eta_t - rxu_x\eta_u + ru\eta_u) + \sigma^2xv\eta_u + \sigma^2x\mu - \sigma^2xv\xi_x \\ + 3v^2(ru_x\xi + rx\eta_x + rxu_x\eta_u - rxu_x\xi_x - r\eta) = 0,\end{gathered}$$

которое влечет равенство

$$\mu = (M - N)v. \tag{24}$$

Уравнения (14)–(17) при этом также выполняются.

Таким образом, решение системы уравнений, определяющей генераторы непрерывных групп преобразований эквивалентности, задается формулами (23), (24). Отсюда получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Базис алгебры Ли инфинитезимальных операторов групп преобразований эквивалентности уравнения* (3) *с функцией* v*, не равной тождественно нулю, образуют операторы* $Y_1 = \partial_t$, $Y_2 = x\partial_u$, $Y_3 = e^{rt}\partial_u$, $Y_4 = x\partial_x + u\partial_u$, $Y_5 = x\partial_x + v\partial_v$.

При этом сделана линейная замена в базисе алгебры Ли, полученном по формулам (23), (24).

С учетом формулы (8) получим продолжения базисных операторов

$$\widetilde{Y}_1 = \partial_t, \quad \widetilde{Y}_2 = x\partial_u + \partial_{u_x}, \quad \widetilde{Y}_3 = e^{rt}\partial_u, \quad \widetilde{Y}_4 = x\partial_x + u\partial_u, \quad \widetilde{Y}_5 = x\partial_x + v\partial_v - u_x\partial_{u_x}. \tag{25}$$

Отсюда следует, что базис ядра основных алгебр Ли уравнения (3) составляют операторы Y_1, Y_3, Y_4, продолжения которых не содержат дополнительных переменных v, u_x.

Следствие 1. *Базис ядра основных алгебр Ли уравнения* (3) *с функцией* v*, не равной тождественно нулю, образуют операторы* $X_1 = \partial_t$, $X_2 = e^{rt}\partial_u$, $X_3 = x\partial_x + u\partial_u$.

2. Групповая классификация уравнения

Рассмотрим алгебру Ли, полученную из проекций операторов (25) на подпространство переменных v, u_x, т. е. алгебру с базисом

$$Z_1 = \partial_{u_x}, \quad Z_2 = v\partial_v - u_x\partial_{u_x}. \tag{26}$$

Заметим сразу, что оператору Z_1 соответствует оператор Y_2, а оператору Z_2 — оператор Y_5.

Ненулевыми структурными константами для алгебры Ли с базисом (26) являются $c^1_{12} = -1$, $c^1_{21} = 1$. По формуле $E_\alpha = c^\gamma_{\alpha\beta}e^\beta\partial_{e^\gamma}$ найдем генераторы внутренних автоморфизмов алгебры Ли $E_1 = -e^2\partial_{e^1}$, $E_2 = e^1\partial_{e^1}$ и соответствующие им группы преобразований — E_1: $\bar{e}^1 = e^1 - e^2a_1$, E_2: $\bar{e}^1 = e^1e^{a_2}$. Здесь e^i — коэффициент при операторе Z_i в разложении элемента рассматриваемой алгебры Ли по ее базису, $i = 1, 2$, a_j — параметр группы внутренних автоморфизмов, $j = 1, 2$.

Пусть $e^2 \neq 0$, тогда $e^1 = 0$ в силу E_1. Получим подалгебру с базисом Z_2. Иначе имеем одномерную подалгебру с базисом Z_1. Таким образом, оптимальная система одномерных подалгебр алгебры L_2 с базисом (26) имеет вид $\Theta_1 = \{\langle Z_1\rangle, \langle Z_2\rangle\}$.

Для операторов Z из оптимальной системы вычислим выражения

$$Z(F(u_x) - v)|_{v=F} = 0.$$

Получим

$$Z_1(F(u_x) - v)|_{v=F} = F' = 0, \quad F \equiv \beta,$$
$$Z_2(F(u_x) - v)|_{v=F} = -F - u_xF' = 0, \quad F = \frac{\beta}{u_x}.$$

Первая из спецификаций преобразованием эквивалентности Y_5 сводится к $F \equiv 1$. Во втором случае преобразования эквивалентности, найденные в предыдущем разделе, не позволяют изменить константу β.

Для каждого базисного оператора из оптимальной системы вычислим проекцию соответствующего генератора группы преобразований эквивалентности (Y_2 или Y_5) на подпространство переменных t, x, u. Получится соответствие (с точностью до множителя) Z_1: $x\partial_u$, Z_2: $x\partial_x$. Поэтому спецификации свободного элемента $v \equiv 1$ соответствует дополнительная симметрия $x\partial_u$, а спецификациям

$$v = \beta u_x^{-1}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

соответствует симметрия $x\partial_x$.

Теорема 2. 1. *Базис основной алгебры Ли уравнения*

$$u_t + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}}{2(1 - xu_{xx})^2} + r(xu_x - u) = 0$$

имеет вид

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = e^{rt}\partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + u\partial_u, \quad X_4 = x\partial_u.$$

2. *Базис основной алгебры Ли уравнений*

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2\left(1 - \frac{\beta x u_{xx}}{u_x}\right)^2} + r(xu_x - u) = 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

имеет вид

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = e^{rt}\partial_u, \quad X_3 = x\partial_x, \quad X_4 = u\partial_u.$$

3. *В случаях функции v, не приводимой к единице и к функциям* (27) *преобразованиями эквивалентности, основная алгебра Ли уравнения*

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1 - xv(u_x)u_{xx})^2} + r(xu_x - u) = 0$$

совпадает с ядром основных алгебр Ли и имеет вид

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = e^{rt}\partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + u\partial_u.$$

Во втором пункте теоремы использована возможность линейного преобразования базиса с целью упрощения вида его элементов.

Замечание 1. При $r = 0$ утверждения теорем 1, 2 и следствия 1 также справедливы. Отметим, что в работе [15] при рассмотрении модели Шенбухера — Уилмотта, редуцируемой к виду (3) при $r = 0$, помимо спецификаций функции v из пп. 2, 3 теоремы 2 указаны еще спецификации

$$v = \beta(1 - u_x)^{-1}, \quad \beta \in \mathbb{R} \tag{28}$$

(см. п. 4 теоремы 4.2.1 в [15]), имеющие дополнительную четвертую симметрию. Однако с помощью преобразования $v \to -v$, которое, очевидно, является внутренним автоморфизмом группы преобразований эквивалентности, соответствующей алгебре L_5 из теоремы 1, а также используя порождаемое оператором Y_3 преобразование эквивалентности, осуществляющее сдвиг аргумента функции v, можно преобразовать эти спецификации к виду (27) из п. 2 теоремы 2. Описанные преобразования соответствуют замене переменных $\overline{t} = t$, $\overline{x} = x$, $\overline{u} = x - u$, где черта над символом переменной означает новую переменную. Нетрудно проверить, что при таких преобразованиях алгебра Ли уравнения со спецификацией (28) преобразуется к алгебре Ли уравнения со спецификацией (27). Поэтому с точки зрения группового анализа спецификации (27) и (28) эквивалентны.

В дальнейшем упрощение вида $r = 0$ в некоторых случаях позволяет проинтегрировать инвариантные подмодели, однако эти случаи достаточно очевидны и рассматриваться отдельно не будут.

Кроме того, будем рассматривать только оптимальные системы одномерных подалгебр, так как подалгебрам большей размерности не соответствуют новые содержательные инвариантные решения.

3. Инвариантные подмодели в общем случае

Рассмотрим уравнение

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1 - xv(u_x)u_{xx})^2} + r(xu_x - u) = 0, \tag{29}$$

алгебра Ли L_3 которого имеет базис

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = e^{rt}\partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + u\partial_u. \tag{30}$$

Ненулевые структурные константы ее суть

$$c^2_{12} = r, \quad c^2_{21} = -r, \quad c^2_{23} = 1, \quad c^2_{32} = -1,$$

поэтому группы внутренних автоморфизмов имеют вид

$$E_1\colon \bar{e}^2 = e^2 e^{ra_1}, \quad E_2\colon \bar{e}^2 = e^2 + a_2(e^3 - re^1), \quad E_3\colon \bar{e}^2 = e^2 e^{-a_3}.$$

Используя их, осуществим поиск оптимальной системы одномерных подалгебр данной алгебры Ли L_3. Инфинитезимальные генераторы искомых базисных для этих подалгебр операторов будут иметь вид

$$X = \sum_{k=1}^{3} e^k X_k = (e^1, e^2, e^3).$$

Сделаем сначала замену $e^3 - re^1$ на $\tilde{e}^3$. Тогда это коэффициент при базисном векторе $\tilde{X}_3 = x\partial_x + u\partial_u - r\partial_t$.

1. Пусть $\tilde{e}^3 \neq 0$, тогда с помощью E_2 получим $e^2 = 0$, поэтому базисный вектор подалгебры имеет вид $X = (a, 0, 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

2.1. При $\tilde{e}^3 = 0$, $e^1 \neq 0$, $e^2 \neq 0$ получим $X = (1, 1, 0)$. При этом использованы внутренние автоморфизмы E_3 и $\bar{e}^2 = -e^2$.

2.2. Остались случаи $X = (1, 0, 0)$ и $X = (0, 1, 0)$.

Вернемся к исходному базису, в первой полученной подалгебре константу $a - r$ переобозначим через a, в остальных случаях вместо $\tilde{e}^3 = 0$ надо взять $e^3 = re^1$. При этом подалгебра $\langle X_1 + rX_3 \rangle$ будет частным случаем семейства подалгебр $\langle aX_1 + X_3 \rangle$ при $a = 1/r$.

Лемма 1. *Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры L_3 с базисом* (30) *имеет вид* $\Theta_1 = \{\langle X_2 \rangle, \langle X_1 + X_2 + rX_3 \rangle, \langle aX_1 + X_3 \rangle, a \in \mathbb{R}\}$.

Используя операторы оптимальной системы, найдем инвариантные подмодели уравнения (29) и, по возможности, его инвариантные решения. Результаты вычислений записаны в таблице, где во втором столбце записана одномерная подалгебра из оптимальной системы, в третьем — ее инварианты, а в четвертом — соответствующая инвариантная подмодель исходного уравнения или вид решения при условии, что ограничения, следующие из вида уравнения или области определения самой функции v, выполнены. Здесь и далее учитывается, что цена акции x положительна (поэтому знак модуля при x, возникающий

	Подалгебра	Инварианты	Подмодель или решение
1	$\langle X_2 \rangle$	$t,\ x$	нет
2	$\langle X_1 + X_2 + rX_3 \rangle$	$rt - \ln x,\ e^{-rt}u - t$	$\frac{\sigma^2(\varphi''+\varphi')}{2(1-e^z v(-e^z\varphi')(\varphi'+\varphi''))^2} + 1 = 0,$ $u = e^{rt}(t + \varphi(rt - \ln x))$
3	$\langle X_3 \rangle$	$t,\ x^{-1}u$	$u = Ax$
4	$\langle X_1 + rX_3 \rangle$	$rt - \ln x,\ ux^{-1}$	$u = Ax + Be^{rt}$
5	$\langle aX_1 + X_3 \rangle$	$a\ln x - t,\ x^{-1}u$	$\frac{a\sigma^2(\varphi'+a\varphi'')}{(1-a(\varphi'+a\varphi'')v(\varphi+a\varphi'))^2} + 2(ar-1)\varphi' = 0,$ $u = x\varphi(a\ln x - t)$

при интегрировании, опускается). Символами A, B обозначены произвольные константы интегрирования.

Здесь и далее частные случаи инвариантных подмоделей рассматриваются отдельно, если они интегрируются (кроме случаев $r = 0$, как об этом сказано выше). В данной таблице в третьей и четвертой строках рассмотрены частные случаи подмодели из пятой строки.

4. Инвариантные решения и подмодели в случае $v \equiv \beta$

Уравнение

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2(1 - \beta x u_{xx})^2} + r(xu_x - u) = 0, \quad \beta \neq 0, \tag{31}$$

имеет алгебру Ли L_4 с базисом

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = e^{rt}\partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + u\partial_u, \quad X_4 = x\partial_u. \tag{32}$$

Группы внутренних автоморфизмов этой алгебры имеют вид

$$E_1\colon \bar{e}^2 = e^2 e^{ra_1}, \quad E_2\colon \bar{e}^2 = e^2 + a_2(e^3 - re^1), \quad E_3\colon \bar{e}^2 = e^2 e^{-a_3}.$$

Заменив, как в разд. 3, e^3 на $\tilde{e}^3 = e^3 - re^1$, найдем оптимальную систему одномерных подалгебр данной алгебры Ли L_4.

1. Пусть $\tilde{e}^3 \neq 0$, тогда с помощью E_2 получим $e^2 = 0$, поэтому базисный вектор подалгебры имеет вид $X = (a, 0, 1, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2.1. При $\tilde{e}^3 = 0$, $e^2 \neq 0$ получим следующее.

2.1.1. Если $e^1 \neq 0$, то $X = (1, 1, 0, a)$, $a \in \mathbb{R}$. При этом использованы внутренние автоморфизмы E_3 и $\bar{e}^2 = -e^2$.

2.1.2. Пусть $e^1 = 0$, тогда $X = (0, 1, 0, 1)$ или $X = (0, 1, 0, 0)$. В первом случае также использованы E_3 и $\bar{e}^2 = -e^2$.

2.2. Если $e^2 = \tilde{e}^3 = 0$, то $X = (1, 0, 0, a)$, $a \in \mathbb{R}$, или $X = (0, 0, 0, 1)$.

После замены $\tilde{e}^3$ на $e^3 - re^1$, как и в предыдущем разделе, получим следующую оптимальную систему. При этом учтено, что $\langle X_1 + rX_3 + bX_4 \rangle$ — подсемейство семейства подалгебр $\langle aX_1 + X_3 + bX_4 \rangle$ (надо взять $a = 1/r$).

Лемма 2. *Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры L_4 с базисом* (32) *имеет вид*

$$\Theta_1 = \{\langle X_2\rangle, \langle X_4\rangle, \langle X_2 + X_4\rangle, \langle X_1 + X_2 + rX_3 + aX_4\rangle, \langle aX_1 + X_3 + bX_4\rangle, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Для подалгебр из оптимальной системы Θ_1 получим следующую таблицу.

	Подалгебра	Инварианты	Подмодель или решение
1	$\langle X_1 + X_2 + rX_3 + aX_4\rangle$	xe^{-rt}, $ue^{-rt} - (axe^{-rt} + 1)t$	$\varphi'' = \frac{1}{\beta z} - \frac{\sigma^2 \pm \sqrt{\sigma^4 - 8\beta\sigma^2(a+1/z)}}{4\beta^2(az+1)}$, $u = (ax + e^{rt})t + e^{rt}\varphi(xe^{-rt})$
2	$\langle aX_1 + X_3 + bX_4\rangle$	$a\ln x - t$, $\frac{u}{x} - b\ln x$	$br + (ar-1)\psi + \frac{\sigma^2(b+a\psi+a^2\psi')}{2(1-\beta(b+a\psi+a^2\psi'))^2} = 0$, $\psi = \varphi'$, $u = bx\ln x + x\varphi(a\ln x - t)$
3	$\langle X_3 + bX_4\rangle$, $b \neq 1/\beta$	t, $\frac{u}{x} - b\ln x$	$u = bx\ln x + Ax - b\big(r + \frac{\sigma^2}{2(1-\beta b)^2}\big)tx$
4	$\langle \frac{X_1}{r} + X_3 + bX_4\rangle$, $b \neq 0$	$\ln x - rt$, $\frac{u}{x} - b\ln x$	$u = Ax + Be^{rt} + brtx$ $+\big(\frac{1}{\beta} - \frac{\sigma^2 \pm \sqrt{\sigma^4 - 8\beta br\sigma^2}}{4\beta^2 br}\big)(x\ln x - rtx)$
5	$\langle \frac{X_1}{r} + X_3\rangle$	$\ln x - rt$, u/x	$u = Ax + Be^{rt}$

Операторы из оптимальной системы X_2, X_4, $X_2 + X_4$, $\beta X_3 + X_4$ не имеют инвариантных решений. В третьей и четвертой строках выписаны решения инвариантной подмодели из второй строки в частных случаях. В пятой строке — частный случай подмодели из четвертой строки.

5. Инвариантные решения и подмодели в случае $v = \beta u_x^{-1}$

Для уравнения

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2\big(1 - \frac{\beta x u_{xx}}{u_x}\big)^2} + r(xu_x - u) = 0, \quad \beta \neq 0, \tag{33}$$

базис алгебры Ли L_4 имеет вид

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = e^{rt}\partial_u, \quad X_3 = x\partial_x, \quad X_4 = u\partial_u. \tag{34}$$

Нетрудно заметить, что структура данной алгебры Ли совпадает со структурой алгебры из разд. 4 с точностью до перенумерации операторов X_3, X_4. Из этого наблюдения и леммы 2 сразу получим следующее утверждение.

Лемма 3. *Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры L_4 с базисом* (34) *имеет вид*

$$\Theta_1 = \{\langle X_2\rangle, \langle X_3\rangle, \langle X_2 + X_3\rangle, \langle X_1 + X_2 + aX_3 + rX_4\rangle, \langle aX_1 + bX_3 + X_4\rangle, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Используя операторы оптимальной системы Θ_1, найдем инвариантные подмодели уравнения (33) и по возможности его инвариантные решения.

Операторы X_2, X_3, X_4, а также операторы $X_2 + X_3$ при $\beta = -1$ и $\frac{\beta}{\beta+1}X_3 + X_4$ при $\beta \neq -1$ инвариантных решений не имеют. В строках 4, 5, 6 описаны частные случаи подмодели из строки 3.

	Подалгебра	Инварианты	Подмодель или решение
1	$\langle X_2 + X_3 \rangle$	$t,\ u - e^{rt}\ln x$	$u = e^{rt}\big(\ln x + \frac{\sigma^2 t}{2(1+\beta)^2} - rt + A\big),\ \beta \neq -1$
2	$\langle X_1 + X_2 + aX_3 + rX_4 \rangle$	$\ln x - at,\ ue^{-rt} - t$	$\frac{\sigma^2(\psi' - \psi)}{2\left(1 - \beta\frac{\psi' - \psi}{\psi}\right)^2} + (r - a)\psi + 1 = 0,\ \psi = \varphi',$ $u = te^{rt} + e^{rt}\varphi(\ln x - at)$
3	$\langle aX_1 + bX_3 + X_4 \rangle,\ a \neq 0$	$a\ln x - bt,\ e^{-t/a}u$	$\frac{a\sigma^2(a\varphi'' - \varphi')}{2\left(1 - \beta\frac{a\varphi'' - \varphi'}{\varphi'}\right)^2} + (ar - b)\varphi' - (r - \frac{1}{a})\varphi = 0,$ $u = e^{t/a}\varphi(a\ln x - bt)$
4	$\left\langle \frac{X_1}{r} + bX_3 + X_4 \right\rangle,\ b \neq 1$	$\ln x - brt,\ e^{-rt}u$	$u = Ax^{\alpha}e^{(1-\alpha b)rt} + Be^{rt},$ $\alpha = 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{\sigma^2 \pm \sqrt{\sigma^4 + 8\beta(b-1)r\sigma^2}}{4\beta^2(b-1)r},\ A \neq 0$
5	$\left\langle \frac{X_1}{r} + X_3 + X_4 \right\rangle$	$\ln x - rt,\ e^{-rt}u$	$u = Ax + Be^{rt},\ A \neq 0$
6	$\langle bX_3 + X_4 \rangle,\ b \neq 0;$ $b \neq \frac{\beta}{\beta+1}$ при $\beta \neq -1$	$t,\ x^{-1/b}u$	$u = Ae^{t\left(\frac{\sigma^2(b-1)}{2(b(\beta+1)-\beta)^2} + \frac{r(b-1)}{b}\right)}x^{1/b},\ A \neq 0$

6. Решения уравнений Сиркара — Папаниколау

Проанализируем полученные результаты в терминах исходной задачи. При этом для найденных спецификаций v вычислим функции V, U и функцию спроса реферальных трейдеров $D(x,y) = U(y^\delta/x)$ при некотором $\delta > 0$.

Во первых, заметим, что модель

$$C_t + \frac{\sigma^2 x^2 C_{xx}}{2(1 - \rho x C_{xx} V'(1 - \rho C_x)/V(1 - \rho C_x))^2} + r(xC_x - C) = 0$$

при всех $v(u_x) = V'(1 - \rho C_x)/V(1 - \rho C_x)$, $u = \rho C$, для которых определено значение в точке $1 - A\rho$, имеет решение

$$C(t,x) = Ax + Be^{rt}. \tag{35}$$

Функции $v \equiv \beta$ соответствует модель

$$C_t + \frac{\sigma^2 x^2 C_{xx}}{2(1 - \beta\rho x C_{xx})^2} + r(xC_x - C) = 0 \tag{36}$$

с функцией $V(1 - \rho C_x) = Ge^{\beta(1 - \rho C_x)}$ при постоянной G. В таком случае

$$U(z) = \frac{1}{\beta}\ln\frac{z}{G} = \frac{1}{\beta}\ln z + H, \quad D(x,y) = \frac{\delta}{\beta}\ln y - \frac{1}{\beta}\ln x + H,$$

где H — константа, зависящая от произвольной константы G, не присутствующей в дифференциальном уравнении. Анализируя полученные инвариантные решения, нетрудно найти содержащее их семейство решений

$$C(t,x) = Ax + Be^{rt} + Kx\ln x - K\left(r + \frac{\sigma^2}{2(1 - K\beta\rho)^2}\right)tx, \quad K \neq \frac{1}{\beta\rho}, \tag{37}$$

инвариантное относительно трехмерной допускаемой группы уравнения (36).

Функции $v = \frac{\beta}{u_x}$ преобразованием эквивалентности, соответствующим оператору Y_2, могут быть приведены к эквивалентному виду

$$v = \frac{\beta}{u_x + \gamma - 1}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Таким функциям соответствуют функции

$$V(1 - \rho C_x) = G(\gamma - \rho C_x)^\beta,$$

$$U(z) = \left(\frac{z}{G}\right)^{1/\beta} + 1 - \gamma = Hz^{1/\beta} + 1 - \gamma, \quad D(x,y) = Hy^{\delta/\beta}x^{-1/\beta} + 1 - \gamma$$

и модель

$$C_t + \frac{\sigma^2 x^2 C_{xx}}{2\left(1 - \frac{\beta\rho x C_{xx}}{\gamma - \rho C_x}\right)^2} + r(xC_x - C) = 0. \tag{38}$$

Асимптотический и численный анализ этой модели при $\beta = \gamma = 1$ проведен в [4].

Нетрудно заметить, что решения уравнения (38) связаны с решениями уравнения (33) равенством $C(t,x) = (\gamma x - u(t,x))\rho^{-1}$, при этом β надо заменить на $-\beta$. Поэтому согласно таблице из предыдущего раздела уравнение (38) имеет точные решения (везде предполагается, что $A \neq 0$)

$$C(t,x) = Ae^{rt}\left(\ln x + \frac{\sigma^2 t}{2(1-\beta)^2} - rt + B\right) + \frac{\gamma}{\rho}x, \quad \beta \neq 1, \tag{39}$$

$$C(t,x) = Ae^{t\left(\frac{\sigma^2\alpha(1-\alpha)}{2(\beta(\alpha-1)+1)^2} + r(1-\alpha)\right)}x^\alpha + Be^{rt} + \frac{\gamma}{\rho}x, \quad \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1 - \frac{1}{\beta}. \tag{40}$$

При этом семейство решений (39) получено из решения, инвариантного оператору $X_2 + X_3$, действием оператора X_1 из (34). Семейство (40) включает в себя как частные случаи решения, инвариантные операторам $\frac{1}{r}X_1 + bX_3 + X_4$, $bX_3 + X_4$ (строки 4, 5, 6 соответствующей таблицы).

Отметим, что в [15] при $r = 0$ симметрии модели (36) в случаях $\gamma = 0$ и $\gamma \neq 0$ исследуются отдельно. Этого можно было не делать, установив возможность перехода от одной из них к другой с помощью группы преобразований эквивалентности исследуемого класса уравнений (см. замечание 1).

Понятно, что если придерживаться требования монотонного возрастания функции спроса U, используемого при выводе модели Сиркара — Папаниколау [4], то в рассмотренных случаях надо наложить условие $\beta > 0$.

7. Граничные задачи

Для однозначной разрешимости уравнения (1) необходимо задать финальное и краевые условия для него, образующие граничную задачу. Перечислим типы возможных граничных условий для полученных в разд. 6 решений, которые в перспективе могут способствовать осмыслению полученных решений с точки зрения их экономической сути (если таковая имеется).

Очевидно, что функция (35) является решением уравнения (1) с краевыми условиями

$$C(t,0) = Be^{rt}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{C(t,x)}{x} = A \tag{41}$$

(означающими, что при нулевой цене акции x стоимость опциона имеет вид Be^{rt}, а при неограниченном росте цены акции она растет линейно по x) и финальным условием

$$C(T,x) = Ax + Be^{rT}, \tag{42}$$

определяющим стоимость опциона к моменту экспирации (окончания срока опциона). Классическим для уравнения Блэка — Шоулса краевым условиям, т. е. условиям (41) при $A = 1$, $B = 0$, соответствует частное решение $C(t,x) = x$.

Решением граничной задачи

$$C(t,0) = Be^{rt},$$

$$\lim_{x\to\infty} C(t,x)e^{-t\left(\frac{\sigma^2\alpha(1-\alpha)}{2(\beta(\alpha-1)+1)^2}+r(1-\alpha)\right)}x^{-\alpha} = A,$$

$$C(T,x) = Ae^{T\left(\frac{\sigma^2\alpha(1-\alpha)}{2(\beta(\alpha-1)+1)^2}+r(1-\alpha)\right)}x^{\alpha} + Be^{rT} + \frac{\gamma}{\rho}x$$

для уравнения (38) при $\alpha > 1$ является функция (40). При $\alpha = 1$ начально-краевые условия примут вид (41), (42) с другой константой A, а значению $\alpha \in (0,1) \setminus \{1 - 1/\beta\}$ соответствует граничная задача

$$C(t,0) = Be^{rt},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{C(t,x)}{x} = \frac{\gamma}{\rho},$$

$$C(T,x) = Ae^{T\left(\frac{\sigma^2\alpha(1-\alpha)}{2(\beta(\alpha-1)+1)^2}+r(1-\alpha)\right)}x^{\alpha} + Be^{rT} + \frac{\gamma}{\rho}x$$

для уравнения (38).

Решение (39) уравнения (38) имеет предел в нуле только в случае $A = 0$, в противном случае для него имеют смысл, например, граничные условия

$$\lim_{x\to 0+} xC(t,x) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{C(t,x)}{x} = \frac{\gamma}{\rho},$$

$$C(T,x) = Ae^{rT}\left(\ln x + \frac{\sigma^2 T}{2(1-\beta)^2} - rT + B\right) + \frac{\gamma}{\rho}x, \quad \beta \neq 1.$$

Аналогичный анализ решения (37) уравнения (36) приводит к постановке граничной задачи

$$C(t,0) = Be^{rt},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{C(t,x)}{x\ln x} = K,$$

$$C(T,x) = Ax + Be^{rT} + Kx\ln x - K\left(r + \frac{\sigma^2}{2(1-K\beta\rho)^2}\right)Tx, \quad K \neq \frac{1}{\beta\rho}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // J. Political Econ. 1973. V. 81. P. 637–659.
2. *Derman E., Taleb N.* The illusions of dynamic replication // Quant. Finance. 2005. V. 5, N 4. P. 323–326.
3. *Haug E. G., Taleb N. N.* Option traders use (very) sophisticated heuristics, never the Black–Scholes–Merton formula // J. Econ. Behavior Organization. 2011. V. 77, N 2. P. 97–106.
4. *Sircar K. R., Papanicolaou G.* General Black–Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies // Appl. Math. Finance. 1998. V. 5. P. 45–82.
5. *Frey R., Stremme A.* Market volatility and feedback effects from dynamic hedging // Math. Finance. 1997. V. 7, N 4. P. 351–374.
6. *Schonbucher P., Wilmott P.* The feedback effect of hedging in illiquid markets. Tech. Rep. Oxford: Univ. Oxford, Math. Inst., Nov. 1993.
7. *Brandimarte P.* Numerical methods in finance & economics. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons Publ., 2004.
8. *Morelli M. J., Montagna G., Nicrosini O., Treccani M., Farina M., Amato P.* Pricing financial derivatives with neural networks // Phys. A. 2004. V. 338. P. 160–165.
9. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
10. *Gazizov R. K., Ibragimov N. H.* Lie symmetry analysis of differential equations in finance // Nonlinear Dyn. 1998. V. 17. P. 387–407.
11. *Чиркунов Ю. А., Хабиров С. В.* Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ, 2012.
12. *Bordag L. A., Chmakova A. Y.* Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives // Int. J. Theor. Appl. Finance. 2007. V. 10, N 1. P. 1–21.
13. *Bordag L. A., Frey R.* Pricing options in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions // Nonlinear models in mathematical finance: New research trends in option pricing (ed. M. Ehrhardt). Ch. 3. New York: Nova Sci. Publ., Inc., 2008. P. 83–109.
14. *Bordag L. A.* On option-valuation in illiquid markets: invariant solutions to a nonlinear model // Mathematical control theory and finance (eds. A. Sarychev, A. Shiryaev, M. Guerra, and M. R. Grossinho). Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2008. P. 71–94.
15. *Mikaelyan A.* Analytical study of the Schönbucher–Wilmott model of the feedback effect in illiquid markets: Master's thes. (financial mathematics). Halmstad Univ., 2009.
16. *Bordag L. A., Mikaelyan A.* Models of self-financing hedging strategies in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions // J. Lett. Math. Phys. 2011. V. 96, N 1–3. P. 191–207.

Статья поступила 1 февраля 2016 г.

Дышаев Михаил Михайлович, Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский гос. университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001
`Mikhail.Dyshaev@gmail.com`, `kar@csu.ru`

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

UDC 517.95

SYMMETRY ANALYSIS AND EXACT SOLUTIONS FOR A NONLINEAR MODEL OF THE FINANCIAL MARKETS THEORY

M. M. Dyshaev and V. E. Fedorov

Abstract: Group classification is obtained for the Sircar–Papanicolaou equations family with a free parameter that contains the Black–Scholes equation as the simplest partial case. The five-dimensional group of equivalence transformations is calculated and three-dimensional kernel of principal Lie algebras and four-dimensional principal Lie algebras in cases of two free element specifications are found. Optimal subalgebras systems and corresponding invariant solutions or invariant submodels are calculated for every Lie algebra. Invariant solutions are included in more general multiparameter solutions families that are invariant with respect to the whole Lie algebra.
Keywords: nonlinear partial differential equation, Black–Scholes equation, Sircar–Papanicolaou model, pricing options, group analysis, invariant solution, invariant submodel, dynamic hedging, feedback effects of hedging.

REFERENCES

1. *Black F. and Scholes M.* “The pricing of options and corporate liabilities ,” J. Political Econ., **81**, 637–659 (1973).
2. *Derman E. and Taleb N.* “The illusions of dynamic replication,” Quant. Finance, **5**, No. 4, 323–326 (2005).
3. *Haug E. G. and Taleb N. N.* “Option traders use (very) sophisticated heuristics, never the Black–Scholes–Merton formula,” J. Econ. Behavior Org., **77**, No. 2, 97–106 (2011).
4. *Sircar K. R. and Papanicolaou G.* “General Black–Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies,” Appl. Math. Finance, **5**, 45–82 (1998).
5. *Frey R. and Stremme A.* “Market volatility and feedback effects from dynamic hedging,” Math. Finance, **7**, No. 4, 351–374 (1997).
6. *Schonbucher P. and Wilmott P.* The feedback effect of hedging in illiquid markets. Tech. Rep., Univ. Oxford, Math. Inst., Oxford (Nov. 1993).
7. *Brandimarte P.*, Numerical Methods in Finance & Economics, John Wiley & Sons Publ., Hoboken, NJ (2004).
8. *Morelli M. J., Montagna G., Nicrosini O., Treccani M., Farina M., and Amato P.* “Pricing financial derivatives with neural networks,” Phys. A, **338**, 160–165 (2004).
9. *Ovsiannikov L. V.*, Group Analysis of Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1978).
10. *Gazizov R. K. and Ibragimov N. H.* “Lie symmetry analysis of differential equations in finance,” Nonlinear Dyn., **17**, 387–407 (1998).
11. *Chirkunov Yu. A. and Khabirov S. V.*, Elements of symmetry analysis of differential equations of continuum mechanics, NGTU, Novosibirsk (2012).
12. *Bordag L. A. and Chmakova A. Y.* “Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives,” Int. J. Theor. Appl. Finance, **10**, No. 1, 1–21 (2007).

13. *Bordag L. A. and Frey R.* "Pricing options in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions, in: Nonlinear Models in Mathematical Finance: New Research Trends in Option Pricing (ed. M. Ehrhardt), Ch. 3, Nova Sci. Publ., Inc., New York, (2008), pp. 83–109.

14. *Bordag L. A.* "On option-valuation in illiquid markets: invariant solutions to a nonlinear model," in: Mathematical Control Theory and Finance (A. Sarychev, A. Shiryaev, M. Guerra, and M. R. Grossinho eds.) , Springer-Verl., Berlin, Heidelberg, (2008), pp. 71–94.

15. *Mikaelyan A.* Analytical Study of the Schönbucher–Wilmott Model of the Feedback Effect in Illiquid Markets: Master's Thes. (Financial Mathematics). Halmstad Univ., 2009.

16. *Bordag L. A. and Mikaelyan A.* "Models of self-financing hedging strategies in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions," J. Lett. Math. Phys. **96**, No. 1–3, 191–207 (2011).

Submitted February 1, 2016

Dyshaev Mikhail Mikhayilovich, Fedorov Vladimir Evgen′evich
Cheliabinsk State University,
Br. Kashirinykh st., 129, Cheliabinsk 454001, Russia
Mikhail.Dyshaev@gmail.com, kar@csu.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

УДК 519.172.2

ТОЧНОЕ ОПИСАНИЕ 4–ЦЕПЕЙ В 3–МНОГОГРАННИКАХ С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 5

А. О. Иванова

Аннотация. В 1922 г. Франклин доказал, что каждый 3-многогранник P_5 с минимальной степенью 5 содержит 5-вершину, смежную с двумя вершинами степени не более 6, причем результат неулучшаем. В дальнейшем он был уточнен в нескольких направлениях. В частности, Йендроль и Мадараш (1996) доказали существование 4-цепи, сумма степеней вершин которой не превышает 23. Цель данной заметки — доказать, что каждый P_5 содержит $(5,6,6,6)$-цепь или $(5,5,5,7)$-цепь, причем результат не улучшаем ни по одному из параметров.
Ключевые слова: плоский граф, плоская карта, структурные свойства, 3-многогранник, 4-цепь.

1. Введение

Степень $d(x)$ вершины или грани x плоского графа G есть число инцидентных ей ребер. k*-Вершина* (k*-грань*) есть вершина (грань) степени k, k^+*-вершина* имеет степень не менее k, и т. д. Минимальную степень вершин в G обозначим $\delta(G)$. Мы будем опускать аргумент всякий раз, когда он ясен из контекста.

k*-Цепью* называется цепь на k вершинах. Цепь $v_1,\dots,v_k$ называется $(d_1,\dots,d_k)$*-цепью*, если $d(v_i) \le d_i$, где $1 \le i \le k$. *Весом* $w(H)$ подграфа H графа G называется сумма степеней в G вершин подграфа H. Через $\mathbf{P}_\delta$ обозначим класс 3-многогранников с минимальной степенью δ; в частности, $\mathbf{P_3}$ есть множество всех 3-многогранников.

В 1904 г. Вернике [1] доказал, что если $P_5 \in \mathbf{P_5}$, то P_5 содержит 5-вершину, смежную с 6^--вершиной. Франклин [2] в 1922 г. усилил этот результат, доказав существование $(6,5,6)$-цепи в каждом $P_5 \in \mathbf{P_5}$.

Теорема 1 [2]. *Каждый 3-многогранник с минимальной степенью* 5 *содержит* $(6,5,6)$*-цепь, причем результат неулучшаем.*

Заметим, что описание 3-цепей является *точным*, если ни один из параметров не может быть усилен и ни один из членов не может быть отброшен.

Работа выполнена в рамках государственной работы «Организация проведения научных исследований» и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15–01–05867, 16–01–00499).

Точность описания Франклина следует из конструкции, получающейся из додекаэдра путем вставки вершины в каждую его грань и соединения этой новой вершины ребрами с пятью граничными вершинами.

Теорема 1 Франклина является основополагающей в структурной теории плоских графов. Она была усилена и обобщена в нескольких направлениях, см. [3–35].

Упомянем лишь несколько просто формулируемых результатов для $\mathbf{P_5}$, которые наиболее близки к теореме Франклина и все параметры в которых точны.

Бородин [5] доказал, что существует 3-грань веса не более 17. Из результата Йендроля и Мадараша [24] следует существование 5-вершины с весом трех ее соседей не более 18, а также 4-цепи веса не более 23. Результат Мадараша [31] дает нам 5-цепь веса не более 29.

Недавно О. В. Бородин и А. О. Иванова [36] доказали следующий факт, возможно наиболее близкий к теореме Франклина среди отсутствовавших в литературе.

Теорема 2 [36]. *Каждый 3-многогранник с минимальной степенью 5 содержит $(5,6,6)$-цепь, причем результат неулучшаем.*

В [13] О. В. Бородин и А. О. Иванова доказали, что существует в точности семь точных описаний 3-цепей в 3-многогранниках без треугольников.

Теорема 3 [13]. *Существует в точности семь точных описаний 3-цепей в 3-многогранниках без треугольников:*

(i) $(5,3,6) \vee (4,3,7)$,
(ii) $(3,5,3) \vee (3,4,4)$,
(iii) $(5,3,6) \vee (3,4,3)$,
(iv) $(3,5,3) \vee (4,3,4)$,
(v) $(5,3,7)$,
(vi) $(3,5,4)$,
(vii) $(5,4,6)$.

Проблема 4 [18]. *Дать все точные описания 3-цепей в $\mathbf{P_3}$.*

В [36] также был сделан следующий скромный вклад в решение проблемы 4.

Теорема 5 [36]. *Не существует точных описаний 3-цепей в $\mathbf{P_5}$, отличных от данных в теореме Франклина и в теореме 2.*

В [37] дано доказательство следующее совместного уточнения теоремы 2 и вышеупомянутого результата Йендроля и Мадараша [24] о 4-цепи веса не более 23.

Теорема 6 [37]. *Каждый 3-многогранник с минимальной степенью 5 содержит $(6,5,6,6)$-цепь или $(5,5,5,7)$-цепь, причем результат неулучшаем.*

Целью данной заметки является доказательство следующего факта.

Теорема 7. *Каждый 3-многогранник с $\delta = 5$ содержит $(5,6,6,6)$-цепь или $(5,5,\ 5,7)$-цепь, причем результат неулучшаем.*

Проблема 8. *Дать все точные описания* 4*-цепей в* $\mathbf{P_5}$.

2. Доказательство теоремы 7

На рис. 1 изображена половина триангуляции, содержащей только 5-вершины и 7^{+}-вершины и не содержащая $(5,5,5,5)$-цепи, откуда следует точность члена $(5,5,5,7)$ в теореме 7. Действительно, достаточно сдвинуть одну половину на одну позицию и соединить с другой половиной по граничному циклу. Точность члена $(5,6,6,6)$ следует из хорошо известной конструкции, содержащей только 5-вершины и 6-вершины, в которой 5-вершины расположены сколь угодно далеко друг от друга.

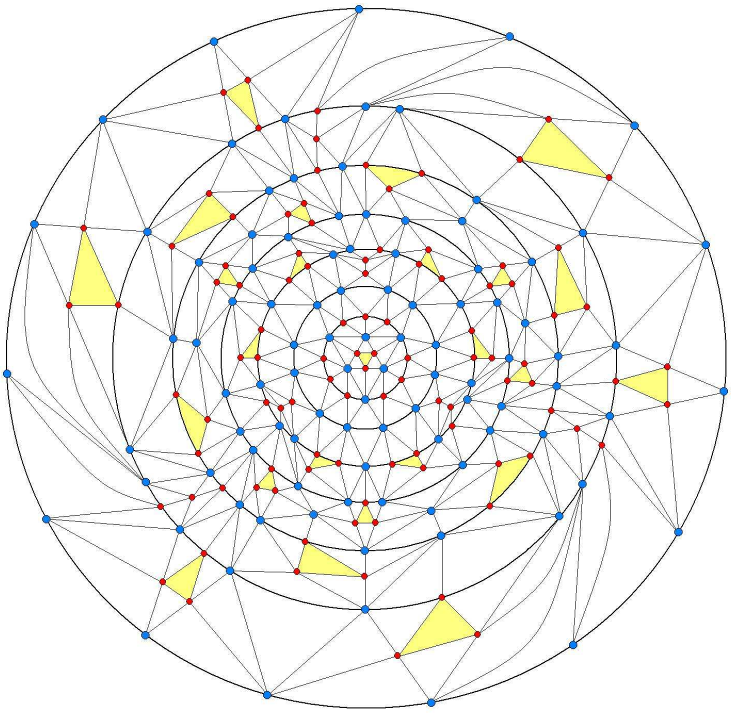

Рис. 1. Конструкция, подтверждающая точность $(5,5,5,7)$ в теореме 7 (см. [37])

Предположим, что 3-многогранник P_5' противоречит теореме 7, избегая $(5,6,6,6)$-цепи и $(5,5,5,7)$-цепи. Пусть P_5 есть контрпример к теореме 7 на тех же вершинах, что и P_5', имеющий максимальное число ребер.

В ходе всего доказательства мы должны следить, чтобы запрещенные 4-цепи не вырождались в 3-циклы. В большинстве случаев это невозможно благодаря выбору запрещенной 4-цепи в окрестности центральной вершины, где все вершины попарно различны из-за отсутствия в P_5 петель и кратных ребер.

Обозначим через $v_1, \ldots, v_{d(x)}$ соседей вершины или грани x в циклическом порядке вокруг x.

Утверждение 9. *P_5 является триангуляцией.*

Доказательство. Пусть P_5 содержит 4^+-грань $f = v_1, \ldots, v_{d(f)}$. Заметим, что $v_i \neq v_j$, где $1 \leq i < j \leq d(f)$, благодаря отсутствию точек сочленения в P_5. Если $d(v_1) + d(v_3) \geq 11$, то добавление диагонали $d = v_1v_3$ дает нам контрпример P_5^* к теореме 7 с большим числом ребер, поскольку d в P_5^* соединяет 6^+-вершину с 7^+-вершиной, а это противоречит определению P_5. Таким образом, $d(v_1) = d(v_3) = 5$ в P_5. Из симметрии имеем также $d(v_2) = d(v_4) = 5$. Следовательно, P_5 содержит $(5,5,5,5)$-цепь; противоречие. $\square$

Утверждение 10. *P_5 не содержит разделяющего 3-цикла $C = xyz$, где $d(x) = d(y) = 5$ и $d(z) = 6$.*

Доказательство. Предположим противное. Через $d_{\text{int}}(x)$ и $d_{\text{ext}}(x)$ обозначим число соседей вершины x, лежащих внутри и снаружи C соответственно. Такие же обозначения используем для вершин y и z. Очевидно, что $d_{\text{int}}(x) + d_{\text{ext}}(x) = d_{\text{int}}(y) + d_{\text{ext}}(y) = 3$ и $d_{\text{int}}(z) + d_{\text{ext}}(z) = 4$.

Поскольку P_5 является триангуляцией, а C разделяющим, получаем $d_{\text{int}} \geq 1$ и $d_{\text{ext}} \geq 1$ для каждой из x, y, z.

Если $d_{\text{int}}(x) = d_{\text{int}}(y) = 1$, то имеем вершину w внутри C такую, что существуют грани wxy, wxz и wyz, откуда следует $d(w) = 3$; противоречие.

Из симметрии то же следует для внешности C, поэтому мы можем предположить, что $d_{\text{int}}(x) = 1$ и $d_{\text{int}}(y) = 2$. Теперь существуют грани wxy, wxz, uyz и uwy. Если $d_{\text{int}}(z) = 2$, то $d(w) = 4$ и $d(u) = 3$; противоречие. В противном случае имеем $d_{\text{int}}(z) + d_{\text{ext}}(z) \geq 6$ по симметрии. $\square$

Обозначим множества вершин, ребер и граней контрпримера P_5 через V, E и F соответственно. Из формулы Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для P_5 получаем

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) = -12. \tag{1}$$

Определим *начальный заряд* формулой $\mu(v) = d(v) - 6$ для каждой $v \in V$. Заметим, что только 5-вершины имеют отрицательный начальный заряд.

Используя свойства P_5 как контрпримера к теореме 7, зададим локальное перераспределение зарядов, сохраняя их сумму, таким образом, что *новый заряд* $\mu'(v)$ будет неотрицательным для всех $v \in V$. Полученное противоречие с (1) завершит доказательство теоремы 7.

5-Вершина v называется *сильной*, если она имеет не менее четырех 7^+-соседей, в противном случае v называется *слабой*.

Используем следующие правила перераспределения зарядов (рис. 2).

R1. Каждая 6^+-вершина v_1 дает $\frac{1}{4}$ каждой смежной 5-вершине v за следующими исключениями:

(e1) $d(v_1) \geq 8$ и v инцидентна 3-грани vv_1v_2, где $d(v_2) \geq 8$. В этом случае v_1 дает $\frac{3}{8}$ вершине v (это же верно для v_2).

(e2) $d(v_1) = 6$ и v является сильной. В этом случае v_1 ничего не дает вершине v.

R2. Каждая 7^+-вершина v_1 дает каждой смежной 6-вершине v следующий заряд:

(a) $\frac{1}{8}$, если v смежна со слабой 5-вершиной, за исключением случая, когда существуют 3-грани v_1vv_2, v_1v_2x, где $d(v_1) = 7$ и $d(v_2) = d(x) = 5$; и тогда v_1 ничего не дает вершине v;

(b) 0, если существуют 3-грани v_1vv_2 и v_1vv_6, где $d(v_2) = d(v_6) = 5$.

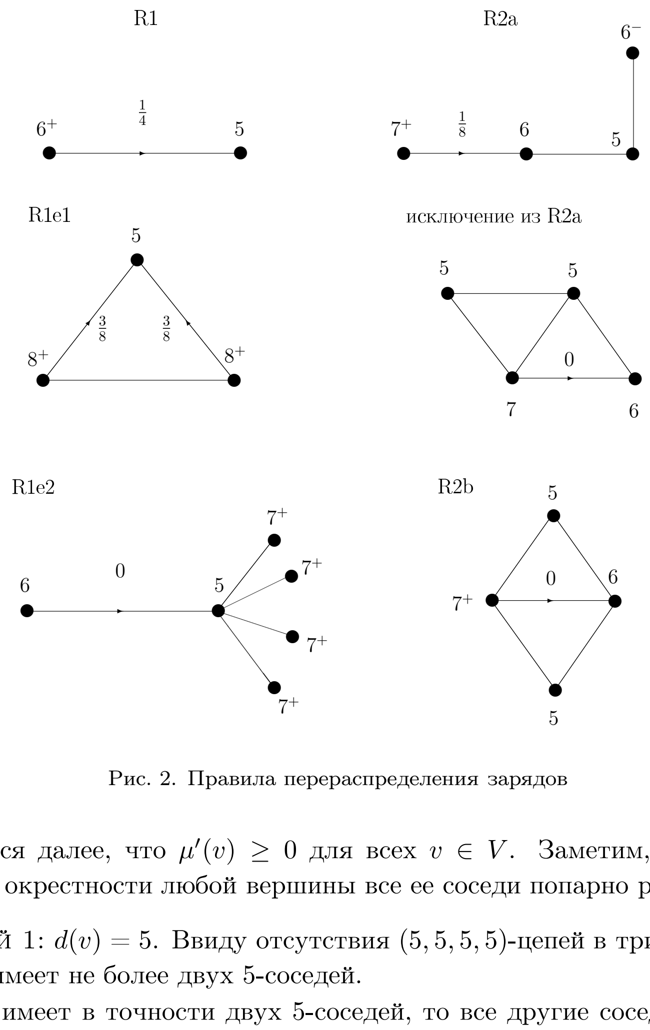

Рис. 2. Правила перераспределения зарядов

Убедимся далее, что $\mu'(v) \geq 0$ для всех $v \in V$. Заметим, что ввиду 3-связности в окрестности любой вершины все ее соседи попарно различны.

Случай 1: $d(v) = 5$. Ввиду отсутствия $(5,5,5,5)$-цепей в триангуляции P_5 вершина v имеет не более двух 5-соседей.

Если v имеет в точности двух 5-соседей, то все другие соседи имеют степень не менее 8 ввиду отсутствия $(5,5,5,7)$-цепей в окрестности вершины v, следовательно, $\mu'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 0$ по R1.

Предположим, что v имеет только одного 5-соседа. Поскольку R1e2 неприменимо, получаем $\mu'(v) \geq -1 + 4 \times \frac{1}{4} = 0$ по R1.

Наконец, v не имеет 5-соседей. Если найдется в точности один 6-сосед, то v получает $\frac{1}{4}$ четыре раза от 7^+-соседей по R1 с учетом R1e2. В противном случае v получит $\frac{1}{4}$ от каждого из своих соседей по R1, откуда $\mu'(v) \geq -1 + 5 \times \frac{1}{4} > 0$.

Случай 2: $d(v) = 6$. Если v не имеет 5-соседей, то $\mu'(v) = \mu(v) = 6 - 6 = 0$.

Пусть v имеет в точности одного 5-соседа, v_1. Если v_1 имеет 6^--соседа, отличного от v, скажем x (не исключено, что x смежна с v), то v_1 является слабой, а значит, получает $\frac{1}{4}$ от v по R1. Таким образом, мы должны убедиться, что v получит по меньшей мере $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ от своих 7^+-соседей согласно R2. По симметрии можем считать, что $d(v_2) \geq 7$ ввиду отсутствия $(5,6,6,6)$-цепей в окрестности вершины v. Более того, хотя бы одна из v_3, v_4 также является 7^+-вершиной. Если $d(x) = 6$, то v получает $\frac{1}{8}$ от каждой из этих двух 7^+-вершин, поскольку исключение из R2a не применяется. Таким образом, $\mu'(v) \geq 0 - \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} = 0$ по R2. Если $d(x) = 5$, то $d(v_i) \geq 7$, где $2 \leq i \leq 6$, поскольку запрещенная $(5,5,6,6)$-цепь через вершины x, v_1 и v невозможна. Теперь исключение из R2a возможно только для v_2 или v_6, откуда следует $\mu'(v) \geq 0 - \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} > 0$ по R2a, R1. Если v_1 не имеет 6^--соседа (т. е. является сильной), то v ничего не дает вершине v_1 согласно R1e2, откуда $\mu'(v) = \mu(v) = 6 - 6 = 0$.

Далее предположим, что v имеет не менее двух 5-соседей, x и y. Если v инцидентна 3-грани xyv, то v имеет четырех 7^+-соседей ввиду отсутствия $(5,6,6,6)$-цепей в ее окрестности. Заметим, что x не может быть смежна с 5-вершиной, отличной от y, из-за отсутствия $(5,6,6,6)$-цепей в окрестности вершины x. По симметрии то же верно и для y. Следовательно, исключение из R2a (как и R2b) не применимо ни к одному из 7^+-соседей вершины v, откуда $\mu'(v) \geq 0 - 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} = 0$ по R2a и R1.

В противном случае x и y не могут быть смежны в P_5 согласно утверждению 10. Более того, каждый из 5-соседей вершины v является сильной вершиной, поскольку не существует $(5,6,5,6)$-цепей, проходящих через x, v, y, в P_5. Отсюда следует, что v ничего не дает им согласно R1e2, а значит, $\mu'(v) = \mu(v) = 6 - 6 = 0$.

Случай 3: $d(v) = 7$. Заметим, что v имеет не более двух последовательных 5-соседей ввиду отсутствия $(5,5,5,7)$-цепей в окрестности вершины v, а следовательно, не более четырех 5-соседей.

Если v имеет не более одного 5-соседа, то $\mu'(v) \geq 1 - \frac{1}{4} - 6 \times \frac{1}{8} = 0$ по R1, R2.

Если v имеет в точности двух 5-соседей, то v имеет не более четырех 6-соседей ввиду отсутствия $(5,6,6,6)$-цепей вокруг v, а значит, $\mu'(v) \geq 1 - 2 \times \frac{1}{4} - 4 \times \frac{1}{8} = 0$.

Допустим, что v смежна в точности с тремя 5-вершинами. Теперь небольшим перебором убеждаемся, что v имеет не более двух 6-соседей, откуда $\mu'(v) \geq 1 - 3 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{8} = 0$.

Если v имеет в точности четырех 5-соседей, то либо $d(v_1) = d(v_2) = d(v_4) = d(v_6) = 5$, либо $d(v_1) = d(v_2) = d(v_5) = d(v_6) = 5$. Теперь единственный возможный 6-сосед (v_5 или соответственно одна из вершин v_3, v_4) ничего не получает от v согласно R2b или R2a, следовательно, $\mu'(v) \geq 1 - 4 \times \frac{1}{4} = 0$.

Случай 4: $d(v) \geq 8$. Если R1e1 применимо к vv_1, то по симметрии $d(v_2) \geq 8$, и v_2 ничего не получает от v. Чтобы оценить общий заряд, передаваемый от v, усредним заряд, получаемый 5-вершиной v_1 в R1e1 до $\frac{1}{4}$ следующим образом: v дает $\frac{1}{4}$ вершине v_1 и $\frac{1}{8}$ вершине v_2. Заметим, что при таком усреднении v_2 получает не более $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, а значит, каждый сосед вершины v получает от нее не более $\frac{1}{4}$. Отсюда следует, что $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - d(v) \times \frac{1}{4} = \frac{3(d(v)-8)}{4} \geq 0$, что и требовалось.

Противоречие $0 \leq -12$ с (1) завершает доказательство теоремы 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wernicke P.* Über den kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. Bd 58. S. 413–426.
2. *Franklin P.* The four color problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44. P. 225–236.
3. *Aksenov V. A., Borodin O. V., Ivanova A. O.* Weight of 3-paths in sparse plane graphs // Electron. J. Comb. 2015. V. 22, N 3. P. #P3.28.
4. *Ando K., Iwasaki S., Kaneko A.* Every 3-connected planar graph has a connected subgraph with small degree sum (Japanese) // Annual Meeting of Mathematical Society of Japan. 1993.
5. *Бородин О. В.* Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. V. 46, N 5. P. 9–12.
6. *Borodin O. V.* Structural properties of plane maps with minimum degree 5 // Math. Nachr. 1992. V. 18. P. 109–117.
7. *Borodin O. V.* Structural theorem on plane graphs with application to the entire coloring // J. Graph Theory. 1996. V. 23, N 3. P. 233–239.
8. *Borodin O. V.* Minimal vertex degree sum of a 3-path in plane maps // Discuss. Math. Graph Theory. 1997. V. 17, N 2. P. 279–284.
9. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing $(d-2)$-stars at d-vertices, $d \leq 5$, in normal plane maps // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1700–1709.
10. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1710–1714.
11. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2841–2847.
12. *Бородин О. В., Иванова А. О.* Каждый 3-многогранник с минимальной степенью 5 содержит 7-цикл с максимальной степенью вершин не более 15 // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 4. С. 775–789.
13. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing tight descriptions of 3-paths in triangle-free normal plane maps // Discrete Math. 2015. V. 338, N 11. P. 1947–1952.
14. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R.* 5-Stars of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2014. V. 34, N 3. P. 539–546.
15. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R., Kostochka A. V., Yancey M. P.* Describing 3-paths in normal plane maps // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2702–2711.
16. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V.* Every 3-polytope with minimum degree 5 has a 6-cycle with maximum degree at most 11 // Discrete Math. 2014. V. 315–316. P. 128–134.
17. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V.* Describing faces in plane triangulations // Discrete Math. 2014. V. 319. P. 47–61.
18. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V.* Tight descriptions of 3-paths in normal plane maps // J. Graph Theory (accepted).

19. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 1998. V. 18, N 2. P. 159–164.
20. *Ferencová B., Madaras T.* Light graphs in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310, N 12. P. 1661–1675.
21. *Hudak P., Madaras T.* On doubly light triangles in plane graphs // Discrete Math. 2013. V. 313, N 19. P. 1978–1988.
22. *Jendrol' S.* Paths with restricted degrees of their vertices in planar graphs // Czechoslovak Math. J. 1999. V. 49. P. 481–490.
23. *Jendrol' S.* A structural property of convex 3-polytopes // Geom. Dedicata. 1997. V. 68. P. 91–99.
24. *Jendrol' S., Madaras T.* On light subgraphs in plane graphs with minimum degree five // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16, N 2. P. 207–217.
25. *Jendrol' S., Madaras T., Soták R., Tuza Z.* On light cycles in plane triangulations // Discrete Math. 1999. V. 197–198. P. 453–467.
26. *Jendrol' S., Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane – a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.
27. *Jendrol' S., Maceková M.* Describing short paths in plane graphs of girth at least 5 // Discrete Math. 2015. V. 338, N 2. P. 149–158.
28. *Jendrol' S., Maceková M., Soták R.* Note on 3-paths in plane graphs of girth 4 // Discrete Math. 2015. V. 338, N 9. P. 1643–1648.
29. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
30. *Madaras T., Soták R.* The 10-cycle C_{10} is light in the family of all plane triangulations with minimum degree five // Tatra Mt. Math. Publ. 1999. V. 18. P. 35–56.
31. *Madaras T.* Note on the weight of paths in plane triangulations of minimum degree 4 and 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2000. V. 20, N 2. P. 173–180.
32. *Madaras T.* On the structure of plane graphs of minimum face size 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2004. V. 24, N 3. P. 403–411.
33. *Madaras T.* Two variations of Franklin's theorem // Tatra Mt. Math. Publ. 2007. V. 36. P. 61–70.
34. *Madaras T., Škrekovski R., Voss H.-J.* The 7-cycle C_7 is light in the family of planar graphs with minimum degree 5 // Discrete Math. 2007. V. 307, N 11–12. P. 1430–1435.
35. *Mohar B., Škrekovski R., Voss H.-J.* Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9 // J. Graph Theory. 2003. V. 44, N 4. P. 261–295.
36. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* An analogue of Franklin's Theorem // Discrete Math. 2016. V. 339, N 10. P. 2553–2556.
37. *Бородин О. В., Иванова А. О.* Описание 4-цепей в 3-многогранниках минимальной степени 5 // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 981–987.

Статья поступила 17 апреля 2016 г.

Иванова Анна Олеговна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
shmgnanna@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

UDC 519.172.2

TIGHT DESCRIPTION OF 4–PATHS IN 3–POLYTOPES WITH MINIMUM DEGREE 5

A. O. Ivanova

Abstract: Back in 1922, Franklin proved that every 3-polytope P_5 with minimum degree 5 has a 5-vertex adjacent to two vertices of degree at most 6, which is tight. This result has been extended and refined in several directions. In particular, Jendrol' and Madaras (1996) ensured a 4-path with the vertex degree-sum at most 23.

The purpose of this note is to prove that every P_5 has a $(5, 6, 6, 6)$-path or $(5, 5, 5, 7)$-path, where all parameters are tight.

Keywords: planar graph, plane map, structural properties, 3-polytope, 4-path.

REFERENCES

1. *Wernicke P.* "Über den Kartographischen Vierfarbensatz," Math. Ann. **58**, 413–426 (1904).
2. *Franklin P.*, "The four color problem," Amer. J. Math., **44**, 225–236 (1922).
3. *Aksenov V. A., Borodin O. V., and Ivanova A. O.* "Weight of 3-paths in sparse plane graphs," Electron. J. Comb., **22**, No. 3, Paper #P3.28 (2015).
4. *Ando K., Iwasaki S., and Kaneko A.* "Every 3-connected planar graph has a connected subgraph with small degree sum," [in Japanese] Annual Meeting of Mathematical Society of Japan (1993).
5. *Borodin O. V.* "Solution of Kotzig's and Grünbaum's problems on the separability of a cycle in a planar graph," [in Russian] Math. Zam., **46**, No. 5, 9–12 (1989).
6. *Borodin O. V.* "Structural properties of plane maps with minimum degree 5," Math. Nachr., **18**, 109–117 (1992).
7. *Borodin O. V.* "Structural theorem on plane graphs with application to the entire coloring," J. Graph Theory, **23**, No. 3, 233–239 (1996).
8. *Borodin O. V.* "Minimal vertex degree sum of a 3-path in plane maps," Discuss. Math. Graph Theory, **17**, No. 2, 279–284 (1997).
9. *Borodin O. V. and Ivanova A. O.* "Describing $(d-2)$-stars at d-vertices, $d \leq 5$, in normal plane maps," Discrete Math., **313**, 1700–1709 (2013).
10. *Borodin O. V. and Ivanova A. O.* "Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5," Discrete Math., **313**, 1710–1714 (2013).
11. *Borodin O. V. and Ivanova A. O.* "Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4," Discrete Math., **313**, 2841–2847 (2013).
12. *Borodin O. V. and Ivanova A. O.* "Each 3-polytope with minimum degree 5 has a 7-cycle with maximum degree at most 15," Sib. Math. J., **56**, No. 4, 612–623 (2015).
13. *Borodin O. V. and Ivanova A. O.* "Describing tight descriptions of 3-paths in triangle-free normal plane maps," Discrete Math., **338**, 1947–1952 (2015).
14. *Borodin O. V., Ivanova A. O., and Jensen T. R.* "5-Stars of low weight in normal plane maps with minimum degree 5," Discuss. Math. Graph Theory, **34**, No. 3, 539–546 (2014).
15. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R., Kostochka A. V., and Yancey M. P.* "Describing 3-paths in normal plane maps," Discrete Math., **313**, No. 23, 2702–2711 (2013).
16. *Borodin O. V., Ivanova A. O., and Kostochka A. V.* "Every 3-polytope with minimum degree 5 has a 6-cycle with maximum degree at most 11," Discrete Math., **315–316**, 128–134 (2014).

17. *Borodin O. V., Ivanova A. O., and Kostochka A. V.* "Describing faces in plane triangulations," Discrete Math., **319**, 47–61 (2014).
18. *Borodin O. V., Ivanova A. O., and Kostochka A. V.* "Tight descriptions of 3-paths in normal plane maps," J. Graph Theory, accepted.
19. *Borodin O. V. and Woodall D. R.* "Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5," Discuss. Math. Graph Theory, **18**, No. 2, 159–164 (1998).
20. *Ferencová B. and Madaras T.* "Light graphs in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight," Discrete Math., **310**, 1661–1675 (2010).
21. *Hudak P. and Madaras T.* "On doubly light triangles in plane graphs," Discrete Math., **313**, No. 19, 1978–1988 (2013).
22. *Jendrol' S.* "Paths with restricted degrees of their vertices in planar graphs," Czech. Math. J., **49**, 481–490 (1999).
23. *Jendrol' S.* "A structural property of convex 3-polytopes," Geom. Dedicata, **68**, 91–99 (1997).
24. *Jendrol' S. and Madaras T.* "On light subgraphs in plane graphs with minimum degree five," Discuss. Math. Graph Theory, **16**, 207–217 (1996).
25. *Jendrol' S., Madaras T., Soták R., and Tuza Z.* "On light cycles in plane triangulations," Discrete Math., **197/198**, 453–467 (1999).
26. *Jendrol' S. and Voss H.-J.* "Light subgraphs of graphs embedded in the plane – a survey," Discrete Math., **313**, 406–421 (2013).
27. *Jendrol' S. and Maceková M.* "Describing short paths in plane graphs of girth at least 5," Discrete Math., **338**,149–158 (2015).
28. *Jendrol' S., Maceková M., and Soták R.* "Note on 3-paths in plane graphs of girth 4," Discrete Math., **338**, 1643–1648 (2015).
29. *Lebesgue H.* "Quelques conséquences simples de la formule d'Euler," J. Math. Pures Appl., **19**, 27–43 (1940).
30. *Madaras T. and Soták R.* "The 10-cycle is light in the family of all plane triangulations with minimum degree five," Tatra Mt. Math. Publ., **18**, 35–56 (1999).
31. *Madaras T.* "Note on the weight of paths in plane triangulations of minimum degree 4 and 5," Discuss. Math. Graph Theory, **20**, No. 2, 173–180 (2000).
32. *Madaras T.* "On the structure of plane graphs of minimum face size 5," Discuss. Math. Graph Theory, **24**, No. 3, 403–411 (2004).
33. *Madaras T.* "Two variations of Franklin's theorem," Tatra Mt. Math. Publ., **36**, 61–70 (2007).
34. *Madaras T., Škrekovski R., and Voss H.-J.* "The 7-cycle C_7 is light in the family of planar graphs with minimum degree 5," Discrete Math., **307**, 1430–1435 (2007).
35. *Mohar B., Škrekovski R., and Voss H.-J.* "Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9," J. Graph Theory, **44**, 261–295 (2003).
36. *Borodin O. V. and Ivanova A. O.* "An analogue of Franklin's Theorem, Discrete Math.," **339**, No. 10, 2553–2556 (2016).
37. *Borodin and O. V. Ivanova A. O.* "Describing 4-paths in 3-polytopes with minimum degree 5," Sib. Math. J., **57**, No. 5, 981–987 (2016).

Submitted April 17, 2016

Ivanova Anna Olegovna
Nord-East Federal University,
Kulakovskogo st., 48, Yakutsk 677000, Russia
shmgnanna@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

УДК 514.123

СТРОЕНИЕ ОКРЕСТНОСТЕЙ ПЛОСКИХ НОРМАЛЬНЫХ КАРТ С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 5

Д. В. Никифоров

Аннотация. В 1940 г. Лебег дал описание окрестностей вершин степени 5 в нормальных плоских картах с минимальной степенью 5 (M_5), не приводя полного доказательства, а указав только его идею. В работе приводится подробная схема полного доказательства лебеговского описания, в котором улучшены два параметра без ухудшения остальных. Кроме того, описывается доказательство теоремы о высоте 5-звезды (максимальная степень ее вершин) в M_5, в которой улучшается результат О. В. Бородина, А. О. Ивановой и Т. Р. Йенсена 2013 г.

Ключевые слова: плоский граф, плоская нормальная карта, структура, окрестность.

Введение

Интерес к строению плоских графов с минимальной степенью 5 частично объясняется их ролью в решении известной проблемы четырех красок. Важной вехой на этом пути была таблица Лебега, дающая приблизительное описание окружений вершин степени 5 в M_5 (M_5 — нормальная плоская карта с минимальной степенью 5). Для решения проблемы четырех красок Аппелю и Хакену [1] в 1976 г. потребовалось изучить строение окрестностей второго порядка вершин степени 5 (5-вершин), т. е. шаров радиуса 2 с центрами в 5-вершинах, тогда как таблица Лебега дает описание окрестностей первого порядка.

Как доказано Штейницем, конечные 3-связные плоские графы взаимно однозначно отвечают конечным выпуклым трехмерным многогранникам, называемым 3-многогранниками. Поэтому, изучая строение плоских графов, мы изучаем, в частности, комбинаторное строение 3-многогранников.

В 1904 г. Вернике [2] доказал, что в любом плоском графе с минимальной степенью 5 существует 5-вершина, смежная с 6^--вершиной (5-вершиной или 6-вершиной), что в 1922 г. усилил Франклин [3], доказав, что любой плоский граф с минимальной степенью 5 содержит 5-вершину, смежную с двумя 6^--вершинами. В 1940 г. Лебег [4] дал описание окрестностей вершин степени 5 в M_5, не приводя полного доказательства, а указав лишь его идею.

Таблица Лебега в качестве следствий дает различные факты о строении M_5, допускающие улучшения. Несколько таких следствий доведено до неулучшаемых результатов, но на это потребовались десятки лет и новые идеи. В целом же до 2013 г. не были известны улучшения ни одного из параметров этой таблицы, не ухудшающие остальных ее параметров.

Теорема 1 [4]. *В любой плоской нормальной карте с минимальной степенью* 5 *существует* 5*-вершина одного из следующих типов:*

$$(\overline{6,6,7,7,7}),\quad (\overline{6,6,6,7,9}),\quad (\overline{6,6,6,6,11}),\quad (\overline{5,6,7,7,8}),\quad (5,6,\overline{6,7},11),$$
$$(5,6,\overline{6,8},8),\quad (5,6,\overline{6,9},7),\quad (5,7,6,6,12),\quad (5,8,6,6,10),\quad (5,6,6,6,17),$$
$$(5,5,\overline{7,7,8}),\quad (5,13,5,7,7),\quad (5,10,5,7,8),\quad (5,8,5,7,9),$$
$$(5,7,5,7,10),\quad (5,7,5,8,8),\quad (5,5,7,6,12),\quad (5,5,8,6,10),$$
$$(5,6,5,7,12),\quad (5,6,5,8,10),\quad (5,17,5,6,7),\quad (5,11,5,6,8),$$
$$(5,11,5,6,9),\quad (5,7,5,6,13),\quad (5,8,5,6,11),\quad (5,9,5,6,10),\quad (5,6,6,5,\infty),$$
$$(5,5,7,5,41),\quad (5,5,8,5,23),\quad (5,5,9,5,17),\quad (5,5,10,5,14),\quad (5,5,11,5,13).$$

k-Звезда $S_k(v)$ называется *младшей*, если ее центр v имеет степень 5. *Высота* 5-звезды есть максимальная степень ее вершин. Через $h(S_5)$ обозначим минимальную высоту младших 5-звезд в данной M_5.

Существуют известные оценки для высоты S_1, S_2, S_3, S_4 в M_5 (1904–2014 гг.). Кроме того, известны точные описания младших 3-звезд (Йенсен, Мадараш [5]), $(d-2)$-звезд (О. В. Бородин, А. О. Иванова [6]) и 4-звезд (О. В. Бородин, А. О. Иванова [7]) в M_5.

Более общая проблема описания d-звезд при d-вершинах, $d \le 5$, называемых *полными* звездами, на данный момент кажется неприступной для произвольных НПМ и трудной даже для M_5.

5-Вершина v, окруженная вершинами $v_1, \dots, v_5$ в циклическом порядке, называется $(\overrightarrow{d_1, d_2, d_3, d_4})$*-вершиной*, или вершиной *типа* $(\overrightarrow{d_1, d_2, d_3, d_4})$, если существует k, $k \le 5$, такое, что $d(v_k) \le d_k$ (сложение по модулю 5).

Существует известная конструкция (рис. 1), показывающая, что $h(S_5)$ не ограничена для произвольных M_5, и в которой каждая 5-вершина v является $(\overrightarrow{5,6,6,5})$-вершиной и, более того, v смежна с двумя 5-вершинами и двумя 6-вершинами. Лебег [4] доказал, что если M_5 не содержит $(\overrightarrow{5,6,6,5})$-вершин, то $h(S_5) \le 41$. О. В. Бородин, А. О. Иванова и Йенсен [8] понизили эту оценку до 28 и дали конструкцию M_5 без $(\overrightarrow{5,6,6,5})$-вершин с $h(S_5) = 20$.

В данной статье доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *В любой плоской нормальной карте с минимальной степенью* 5 *существует* 5*-вершина одного из следующих типов:*

$$(\overline{6,6,7,7,7}),\quad (\overline{6,6,6,7,9}),\quad (6,6,6,6,11),\quad (5,8,\overline{6,7,7}),\quad (5,7,6,8,7),$$
$$(5,6,\overline{6,7},11),\quad (5,6,\overline{6,8},8),\quad (5,7,6,6,12),\quad (5,8,6,6,10),\quad (5,6,6,6,17),$$
$$(5,5,7,\overline{7,8}),\quad (5,13,5,7,7),\quad (5,10,5,7,8),\quad (5,8,5,7,9),$$
$$(5,7,5,7,10),\quad (5,7,5,8,8),\quad (5,5,7,6,12),\quad (5,5,8,6,10),$$
$$(5,6,5,7,12),\quad (5,6,5,8,10),\quad (5,27,5,6,7),\quad (5,15,5,6,8),$$
$$(5,11,5,6,9),\quad (5,7,5,6,13),\quad (5,8,5,6,11),\quad (5,9,5,6,10),\quad (5,6,6,5,\infty),$$
$$(5,5,7,5,41),\quad (5,5,8,5,23),\quad (5,5,9,5,17),\quad (5,5,10,5,14),\quad (5,5,11,5,13).$$

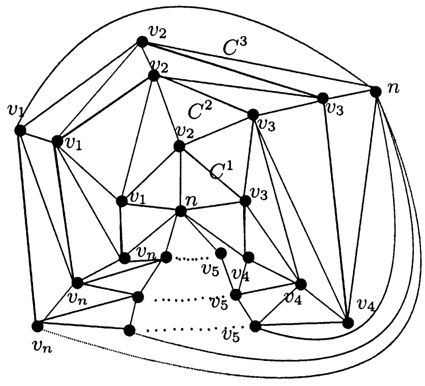

Рис. 1. Конструкция $h(S_5)$

Теорема 3. *В любой плоской нормальной карте с минимальной степенью* 5 *существует* 5*-вершина одного из следующих типов:*

$$(\overline{6,6,7,7,7}),\quad (\overline{6,6,6,7,9}),\quad (6,6,6,6,11),\quad (5,8,\overline{6,7,7}),\quad (5,7,6,8,7),$$

$$(5,6,\overline{6,7},11),\quad (5,6,\overline{6,8},8),\quad (5,7,6,6,12),\quad (5,8,6,6,10),\quad (5,6,6,6,17),$$

$$(5,5,7,\overline{7,8}),\quad (5,13,5,7,7),\quad (5,10,5,7,8),\quad (5,8,5,7,9),$$

$$(5,7,5,7,10),\quad (5,7,5,8,8),\quad (5,5,7,6,12),\quad (5,5,8,6,10),$$

$$(5,6,5,7,12),\quad (5,6,5,8,10),\quad (5,27,5,6,7),\quad (5,15,5,6,8),$$

$$(5,11,5,6,9),\quad (5,7,5,6,13),\quad (5,8,5,6,11),\quad (5,9,5,6,10),\quad (5,6,6,5,\infty),$$

$$(5,5,7,5,31),\quad (5,5,8,5,22),\quad (5,5,9,5,17),\quad (5,5,10,5,14),\quad (5,5,11,5,13).$$

В [13–15] теоремы 2 и 3 доказываются для триангуляций.

Теорема 4 [16]. *Каждая нормальная плоская карта с минимальной степенью* 5*, не содержащая* $(\overrightarrow{5,6,6,5})$*-вершин, содержит младшую* 5*-звезду высоты не более* 23.

Схема доказательства теоремы 2

(1) Достаточно доказать теорему 2 для триангуляций, поскольку добавление диагоналей в нетреугольную грань нормальной плоской карты с минимальной $\delta = 5$ не создает ни новых 5-вершин, ни одного из указанных в теореме 2 типов.

(2) Пусть G — контрпример к теореме 2, т. е. G — плоская триангуляция с минимальной степенью 5, в которых нет ни одного из типов, указанных в теоремах 2–4.

(3) Формулу Эйлера $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$ перепишем в виде

$$(2|E(G)| - 6|V(G)|) + (4|E(G)| - 6|F(G)|) = -12,$$

где $F(G)$ — множество граней графа G. Отсюда

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2r(f) - 6) < 0, \tag{1}$$

где $d(v)$ — степень вершины v, а $r(f)$ — ранг грани f.

(4) *Начальный заряд* $\mu(v)$ каждой вершины $v \in V(G)$ положим равным $d(v) - 6$, а *заряд* каждой грани f графа G равен $2r(f) - 6$. Поскольку заряд каждой грани равен 0, из (1) имеем

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) < 0. \tag{2}$$

Заметим, что заряд 5-вершины равен -1, заряд 6-вершины равен 0, а заряды всех остальных вершин положительны. Мы перераспределим заряды вершин так, чтобы новый заряд $\mu^*(v)$ каждой вершины v стал неотрицательным. Поскольку сумма зарядов вершин при перераспределении сохраняется, получим противоречие с (2), что и завершит доказательство теоремы.

(5) Используются следующие правила перераспределения зарядов (рис. 2).
R1. Каждая вершина v степени ≥ 7 отдает в грань $\varepsilon(v) = \frac{d(v)-6}{d(v)}$.
R2. Пусть грань $M = xyz$, где $d(x) = 5$, тогда x получает от M:
(a) $\varepsilon(y) + \varepsilon(z)$, если $d(y) \geq 6$, $d(z) \geq 6$,
(b) $\frac{\varepsilon(y)}{2}$, если $d(y) \geq 6$, $d(z) = 5$.

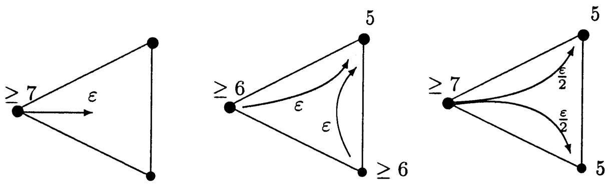

Рис. 2. Правила перераспределения зарядов

(6) Перебор типов теоремы 2.

Имеем пять случаев для рассмотрения: в окрестности v (1) нет 5-вершин; (2) одна 5-вершина; (3) две 5-вершины; (4) три 5-вершины и (5) четыре 5-вершины.

Таким образом теорема 2 доказана.

Схема доказательства теоремы 3

(1) Достаточно доказать теорему 3 для триангуляций, поскольку добавление диагоналей в нетреугольную грань нормальной плоской карты с минимальной $\delta = 5$ не создает новых 5-вершин ни одного из указанных в теореме 3 типов.

(2)–(5). Не отличаются от теоремы 2.

(6) Идея улучшения теоремы Лебега заключается в том, что каждый тип в теореме Лебега — это 5-вершины с разными степенями, которые смежны с центральной вершиной степени 5. Каждый тип, не попавший в теорему Лебега, покрывается одним из типов данных в теореме Лебега. Поэтому суть улучшения состоит в том, чтобы убрать ненужные покрытия. Чтобы это сделать, мы используем заряды из других вершин степени 5. Почему из других вершин степени 5? Потому что у вершин степени 5 есть своя собственная окрестность. Из этой окрестности они получают для себя заряд или даже излишний заряд. И этот излишний заряд мы используем для улучшения других типов в теореме Лебега.

Проверка того, что $\mu^*(v) \geq 0$ для всех $v \in V(G)$

Далее рассмотрим идею улучшения одного типа $(5, 5, 7, 5, 33)$ теоремы 3.

Рассмотрим его центральную вершину степени 5, заряд которой плохой. Выясним, сколько не хватает в типе заряда. Для этого применим правила R1 и R2. Вершины $d(v_1) = d(v_2) = d(v_4) = 5$, $d(v_3) = 7$ и $d(v_5) = 33$ отдают заряд $\mu^*(v) = -1 + \frac{33}{231} < 0$. т. е. типу не хватает $\varepsilon = \frac{9}{231}$, чтобы заряд плохой вершины v стал равен нулю.

После этого рассмотрим соседние вершины степени 5 (рис. 3), где можем получить лишние заряды.

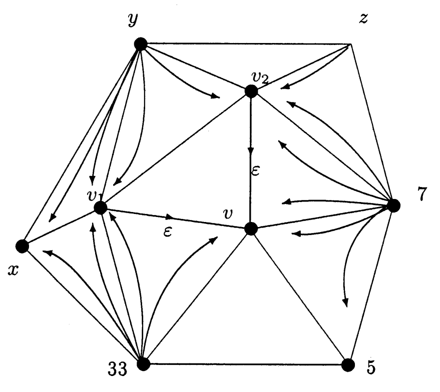

Рис. 3. Перераспределения соседних зарядов

Вершина v_3 не рассматривается, так как из нее получаем слишком много неизвестных соседних вершин. А вершины v_1 и v_2 смежны и число неизвестных соседних вершин заметно меньше.

В ходе улучшения появляется несколько случаев.

(i) Вершина v_1 не имеет достаточного заряда даже для себя, а вершина v_2 имеет достаточно, чтобы отдать лишний заряд обеим смежным 5-вершинам.

(ii) Вершина v_2 не имеет достаточного заряда даже для себя, а вершина v_1 имеет достаточно, чтобы отдать лишний заряд обеим смежным 5-вершинам.

(iii) Вершины v_2 и v_1 не имеют достаточного заряда, чтобы отдать лишний заряд смежной вершине v.

В этом и заключается идея улучшения.

Таким образом после перебора теорема 3 доказана.

Схема доказательства теоремы 4

(1) Достаточно доказать теорему 4 для триангуляций, поскольку добавление диагоналей в нетреугольную грань нормальной плоской карты с $\delta = 5$ не создает ни новых младших звезд, ни $(\overrightarrow{5,6,6,5})$-вершин и не может понизить высоту имеющихся младших 5-звезд.

(2) Допустим, что триангуляция T_5 с минимальной степенью 5 и множествами вершин, ребер и граней V, E и F соответственно является контрпримером к теореме 4. Заметим, что любая 5-вершина в T_5 смежна с 24^{+}-вершиной.

(3)–(4) Не отличается от теоремы 2 или 3.

(5) Используем следующие правила перераспределения зарядов (рис. 4 и 5).

R1: Каждая вершина v с $7 \le d(v) \le 23$ отдает $\frac{1}{4}$ каждой инцидентной ей 5-вершине v_2, если $d(v_3) \ge 6$.

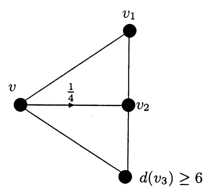

Рис. 4. Правила перераспределения зарядов **R1**

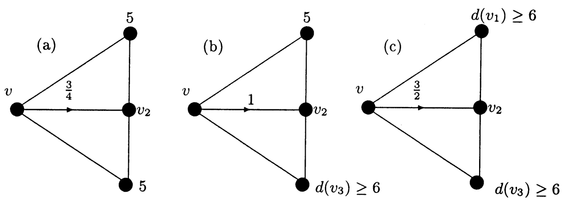

Рис. 5. Правила перераспределения зарядов **R2**

R2. Каждая 24^{+}-вершина v отдает каждой инцидентной ей 5-вершине v_2:
(a) $\frac{3}{4}$, если $d(v_1) = d(v_3) = 5$,
(b) 1, если $d(v_1) = 5$, а $d(v_3) \ge 6$,
(c) $\frac{3}{2}$, если $d(v_1) \ge 6$ и $d(v_3) \ge 6$.

Заряд вершины x после применения правил R1 и R2 обозначим через $\mu_2(x)$. 5-Вершина x называется *богатой*, если $\mu_2(x) > 0$, и *бедной*, если v является $(\overrightarrow{5,5,n,5})$-вершиной, где $7 \le n \le 23$.

(6) Леммы 5–8 ведут к завершению доказательства.

Лемма 5. *Если $d(v) \geq 24$, то $\mu'(v) \geq 0$.*

Лемма 6. *Если $7 \leq d(v) \leq 23$, то $\mu'(v) \geq 0$.*

Лемма 7. *Если 5-вершина v не является бедной, то $\mu_2(v) \geq 0$.*

Лемма 8. *Если 5-вершина v является бедной или богатой, то $\mu'(v) \geq 0$.*

Доказательство леммы 8 имеет схожую идею доказательства улучшения теоремы Лебега. Возможны несколько случаев.

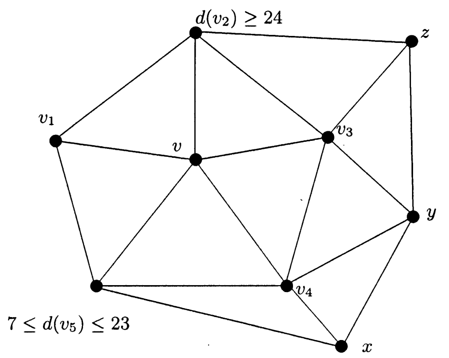

Рис. 6. Окрестность вершины v

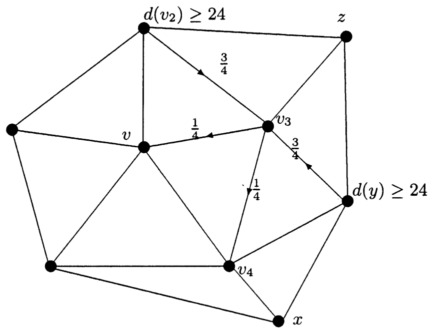

Рис. 7. Если v_4 является бедной

(i) Вершина v_4 не имеет достаточного заряда даже для себя, а вершина v_3 имеет достаточно, чтобы отдать лишний заряд обеим смежным 5-вершинам (рис. 7).

(ii) Вершина v_3 не имеет достаточного заряда даже для себя, а вершина v_4 имеет достаточно, чтобы отдать лишний заряд обеим смежным 5-вершинам (рис. 8).

(iii) Вершина v_4 и v_3 имеют достаточного заряда, чтобы отдать лишний заряд смежной вершине v (рис. 9).

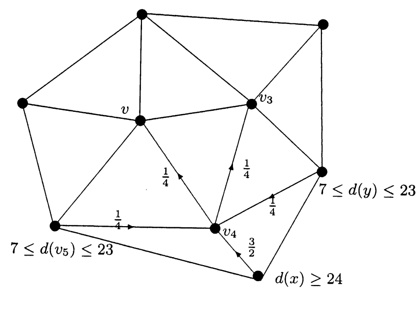

Рис. 8. Если v_3 является бедной

Таким образом, поскольку 6-вершины не участвуют в перераспределении зарядов, а 7^+-вершины не участвуют в дораспределении зарядов, из лемм 5–8 следует, что $\mu'(v) \geq 0$ для всех $v \in V$. Теорема 4 доказана.

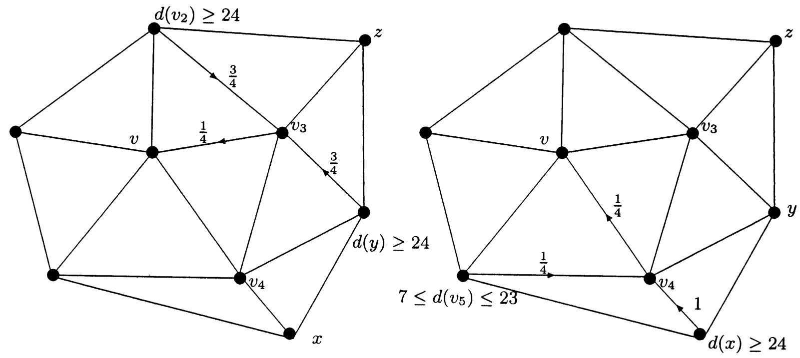

Рис. 9. Если ни одна из вершин v_3 и v_4 не является бедной

ЛИТЕРАТУРА

1. *Appel K., Haken W.* Every planar map is four colorable. I. Discharging // Illinois J. Math. 1977. V. 21. P. 429–490.
2. *Wernicke P.* Über den kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58. P. 413–426.
3. *Franklin Ph.* The four colour problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44. P. 225–236.
4. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
5. *Jendrol' S., Madaras T.* On light subgraphs in plane graphs of minimal degree five // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16. P. 207–217.
6. *Van den Heuvel J., McGuinness S.* Coloring the square of a planar graph // J. Graph Theory. 2003. V. 42. P. 110–124.
7. *Balogh J., Kochol M., Pluhár A., Yu X.* Covering planar graphs with forests // J. Comb. Theory, Ser. B. 2005. V. 94. P. 147–158.
8. *Harant J., Jendrol' S.* On the existence of specific stars in planar graphs // Graphs Comb. 2007. V. 23. P. 529–543.
9. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing $(d-2)$-stars at d-vertices, $d \leq 5$, in normal plane maps // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1700–1709.
10. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1710–1714.
11. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R.* 5-stars of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2014. V. 34, N 3. P. 539–546.
12. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 1998. V. 18, N 2. P. 159–164.
13. *Иванова А. О., Никифоров Д. В. Describing of окрестностей 5-вершин в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5* // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 2. С. 66–78.
14. *Иванова А. О., Никифоров Д. В.* Строение окрестностей 5-вершин в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5 // Теоретические и практические вопросы развития научной мысли в современном мире. Сб. статей II Междунар. науч.-практ. конф. (29–30 апреля 2013 г.). Ч. 1. Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. С. 13–16.
15. *Иванова А. О., Никифоров Д. В.* Комбинаторное строение триангулированных 3-многогранников с минимальной степенью 5 // Сб. статей науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых Республики Саха (Якутия). XVII и XVIII Лаврентьевские чтения г. Якутск. Киров: МНЦНИП, 2015. С. 22–27.
16. *Иванова А. О., Никифоров Д. В.* Высота 5-звезды в плоских нормальных картах с минимальной степенью 5 // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 39–43.
17. *Иванова А. О., Никифоров Д. В.* Комбинаторное строение триангулированных 3-многогранников с минимальной степенью 5 // VII Междунар. конф. по математическому

моделированию (Якутск, 30 июня–4 июля 2014 г.) Якутск, 2014. Р. 102–103.

Статья поступила 28 сентября 2015 г.

Никифоров Дмитрий Владиславович
Северо-Восточный федеральный университет, Якутск
Научно-исследовательский институт математики
Институт математики и информатики
zerorebelion@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

UDC 514.123

THE STRUCTURE OF NEIGHBORHOODS OF 5–VERTICES IN NORMAL PLANE MAPS WITH MINIMUM DEGREE 5

D. V. Nikiforov

Abstract: In 1940, Lebesgue described the neighborhoods of vertices of degree 5 in normal plane maps with minimum degree 5 (M_5), presenting only an idea of the proof but not the details. The paper presents a detailed scheme of a complete proof of Lebesgue's description with improving two of its parameters without worsening the others. Moreover, it is present a scheme of the proof of the height of a 5-star (the maximum degree of its vertices) in an M_5, which improves the result of O.V.Borodin, A.O.Ivanova, T.R.Yensen (2013).
Keywords: plane graph, normal plane maps, structure, neighborhood.

REFERENCES

1. *Appel K. and Haken W.* "Every planar map is four colorable. I. Discharging," Illinois J. Math. **21**, 429–490 (1977).
2. *Wernicke P.* "Über den kartographischen Vierfarbensatz," Math. Ann. **58**, 413–426 (1904).
3. *Franklin P.*, "The four color problem," Amer. J. Math., **44**, 225–236 (1922).
4. *Lebesgue H.* "Quelques conséquences simples de la formule d'Euler," J. Math. Pures Appl., **19**, 27–43 (1940).
5. *Jendrol' S. and Madaras T.* "On light subgraphs in plane graphs with minimum degree five," Discuss. Math. Graph Theory, **16**, 207–217 (1996).
6. *Van den Heuvel J. and McGuinness S.* "Coloring the square of a planar graph" J. Graph Theory, **42**, 110–124 (2003).
7. *Balogh J., Kochol M., Pluhár A., and Yu X.* "Covering planar graphs with forests," J. Comb. Theory, Ser. B, **94**, 147–158 (2005).
8. *Harant J., Jendrol' S.* "On the existence of specific stars in planar graphs," Graphs Comb., **23**, 529–543 (2007).
9. *Borodin O. V. and Ivanova A. O.* "Describing $(d-2)$-stars at d-vertices, $d \leq 5$, in normal plane maps," Discrete Math., **313**, No. 17, 1700–1709 (2013).
10. *Borodin O. V. and Ivanova A. O.* "Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5," Discrete Math., **313**, No. 17, 1710–1714 (2013).
11. *Borodin O. V., Ivanova A. O., and Jensen T. R.* "5-Stars of low weight in normal plane maps with minimum degree 5," Discuss. Math. Graph Theory, **34**, No. 3, 539–546 (2014).
12. *Borodin O. V. and Woodall D. R.* "Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5," Discuss. Math. Graph Theory, **18**, No. 2, 159–164 (1998).
13. *Ivanova A. O. and Nikiforov D. V.* "Describing of neiborhoods of 5-vertices in plane triangulations with minimum degree 5," Mat. Zam. YaGU, **20**, No. 2, 66–78 (2013).
14. *Ivanova A. O. and Nikiforov D. V.* "Describing of neiborhoods of 5-vertices in plane triangulations with minimum degree 5," in: Theoretical and practical issues of the development of scientific thought in the modern world," Sb. statey Mezhdunar. nauchno-pract. konf. Ufa, Apr. 29–30, 2013, P. 1. Baskir. Gos. Univ., Ufa (2013), pp. 13–16.

15. *Ivanova A. O. and Nikiforov D. V.* "The combinatorial structure of triangulated polyhedra with minimum degree 5," Sb. statey nauch. konf. studentov, aspirantov i molodyh uchenyh Resp. Sakha (Yakutsk) "XVII and XVIII Lavrent′evskie chteniya." Kirov (2015), pp. 22–27.

16. *Ivanova A. O. and Nikiforov D. V.* "Height of 5-star in flat normal maps with minimum degree 5," Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 4, 39–43 (2014).

17. *Ivanova A. O. and Nikiforov D. V.* "Combinatorial structure of triangulated 3-polytopes with minimum degree 5," in: VII Int. Conf. Math. Modelling (Yakutsk, June 30–July 4, 2014), Yakutsk (2014), pp. 102–103.

Submitted September 28, 2015

Nikiforov Dmitrii Vladislavovich
Nord-East Federal University,
Research Institute of Mathematic and Informatic,
Kulakovskogo st., 48, Yakutsk 677000, Russia
`zerorebelion@mail.ru`

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

УДК 517.95

О ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

И. М. Петрушко, М. И. Петрушко

Аннотация. Изучаются свойства решений параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Устанавливается эквивалентность условий Рисса и Литлвуда — Пэли для указанных решений. Доказывается однозначная разрешимость первой смешанной задачи с граничными и начальными функциями из пространства типа L_2. Устанавливается также существование пределов в L_2 с весом решений на тех участках границы, которые свободны от начальных условий.

Ключевые слова: вырождающиеся уравнения, изменение направления времени, функциональные пространства, интегральные тождества, первая смешанная задача, разрешимость.

Пусть Q — ограниченная область n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ($x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка из $\mathbb{R}^n$), расположенная в полупространстве $x_n > 0$, граница которой ∂Q — $(n-1)$-мерная поверхность без края класса C^2. Часть границы Γ_0 области Q расположена в гиперплоскости $x_n = 0$. Остальную часть границы обозначим через Γ_1: $\Gamma_1 = \partial Q \cap \{x_n = 0\}$, $\overline{\Gamma}_0 \cup \Gamma_1 = \partial Q$. Обозначим через Q_δ следующее подмножество множества Q:

$$Q_\delta = Q \cap \{\min_{y \in \partial Q} |x - y| > \delta\}.$$

Как известно (см., например, [1]), существует такое малое число $\delta_0 > 0$, что для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ подмножество Q_δ является областью с границей ∂Q_δ класса C^2. При этом при произвольном $\delta \in (0, \delta_0]$ для любой точки $x \in \partial Q$ существует единственная точка x_δ поверхности ∂Q_δ, отстоящая от точки x_0 на расстояние, равное δ, $|x_\delta - x_0| = \delta$,

$$x_\delta = x_\delta(x_0) = x_0 - \delta\nu(x_0),$$

где $\nu(x_0)$ — вектор внешней по отношению к области Q единичной нормали ∂Q в точке x_0. Обратное отображение задается формулой

$$x_0(x_\delta) = x_\delta + \delta\nu_\delta(x_0),$$

где $\nu_\delta(x_\delta)$ — вектор внешней по отношению к области Q_δ единичной нормали ∂Q_δ в точке x_δ. Обозначим через $r(x)$ расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q области Q:

$$r(x) = \min_{y \in \partial Q} |x - y|.$$

Рассмотрим в цилиндрической области Q^T уравнение

$$Lu = k(x)u_t - \sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{i,j} u_{x_i})_{x_j} - x_n^m u_{x_n x_n} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f(x,t), \tag{1}$$

где $a_{i,j} \in C^1(\overline{Q^T})$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, $a_i \in C^1(\overline{Q^T})$, $i = 1,2,\ldots,n$, $a \in C(\overline{Q^T})$, m — постоянная, $0 < m < 1$, и для всех $(x,t) \in \overline{Q^T}$ существует такая постоянная γ_0, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\gamma_0 |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j} \xi_i \xi_j \le \gamma_0^{-1} |\xi|^2. \tag{2}$$

Будем также предполагать, что функция $k(x)$ меняет знак в области Q. Положим $Q^+ = \{x \in Q,\ k(x) > 0\}$, $Q^- = \{x \in Q,\ k(x) < 0\}$. Для простоты изложения будем предполагать, что $x_1 k(x) > 0$, если $x_1 \ne 0$, и $k(x) = 1$, $x \in Q^+$, $k(x) = -1$, $x \in Q^-$. Правую часть $f(x,t)$ уравнения (1) будем предполагать принадлежащей пространству $L_2(Q^T)$.

Введем следующие пространства [2]: $V_2(Q^T)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,0}(Q^T)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{V_2(Q^T)} = \operatorname*{vrai\,max}_{0 \le t \le T} (\|u(x,t)\|_{L_2(Q)} + \|\nabla u(x,t)\|_{L_2(Q^T)}),$$

$V_2^{1,0}(Q^T)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $V_2^1(Q^T)$, непрерывных по t по норме $L_2(Q)$, с нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q^T)} = \max_{0 \le t \le T} (\|u(x,t)\|_{L_2(Q)} + \|\nabla u\|_{L_2(Q^T)}).$$

Непрерывность по t функции $u(x,t)$ в норме $L_2(Q)$ означает, что

$$\|u(x, t+\Delta t) - u(x,t)\|_{L_2(Q)} \to 0 \quad \text{при } \Delta t \to 0.$$

Пусть $V_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q^T)$ — множество функций, принадлежащих $V_2^{1,0}\big(Q'^{T-\varepsilon}_{\varepsilon}\big)$ для любой Q', строго внутренней по отношению к Q, и для любого $\varepsilon \in \big(0, \frac{T}{2}\big)$.

Будем говорить, что функция $u(x,t)$ является *обобщенным решением из* $V_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q^T)$ уравнения (1), если она принадлежит $V_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q^T)$, является решением уравнения (1), и для всех финитных в Q^T функций $\nu(x,t)$ из $H^1(Q^T)$ имеет место равенство

$$\int_0^T \int_Q \Big(-k(x)u\nu_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \nu_{x_j} + u_{x_n} (x_n^m \nu)_{x_n} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} \nu + au\nu \Big) dxdt$$

$$= \int_0^T \int_Q f\nu \, dxdt.$$

Пусть $\rho(x)$ — функция, обладающая следующими свойствами:

$$\rho(x) = r(x), \quad x \in Q/Q_{\delta_0}, \quad \rho(x) \in C^2(\overline{Q}),$$

и существует такая постоянная $\gamma_1 > 0$, что для всех $x \in Q$

$$\gamma_1 r(x) \le \rho(x) \le \gamma_1^{-1} r(x).$$

Лемма 1. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение из $W^{2,1}_{2,\mathrm{loc}}(Q^T)$ уравнения (1), правая часть $f(x,t)$ которого принадлежит $L_2(Q^T)$. Тогда для любых $\delta \in (0,\delta_0)$ и $\beta \in \left(0, \frac{T}{2}\right)$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta^+} u^2(x,T-\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta^-} u^2(x,T-\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta^-} u^2(x,\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta^+} u^2(x,\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx + \int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta}\left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\frac{\rho-\delta}{x_n^m} + u_{x_n}^2(\rho-\delta)\right)dxdt$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{\partial Q_\delta}\left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{x_n^m} + \rho_{x_n}^2\right)u^2\,dsdt - \int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(a_{ij}\frac{\rho_{x_i}}{x_n^m}\right)_{x_j}u^2\,dxdt$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\right)_{x_i}u^2\,dxdt + \int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta} au^2\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dxdt$$
$$= \int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta} fu\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dxdt. \quad (3)$$

Доказательство леммы 1 проводится так же, как и в параболическом случае [9], если в качестве функции $w(x,t)$ в равенстве $(2')$ взять функцию

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t)\frac{\rho-\delta}{x_n^m} \in Q_\delta, & t \in (0,t), \\ 0, & (x,t) \in Q^T \setminus Q_\delta^T. \end{cases}$$

Обозначим

$$J(u) = \int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta}\left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\frac{\rho-\delta}{x_n^m} + u_{x_n}^2(\rho-\delta)\right)dxdt$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta^+} u^2(x,T-\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta^-} u^2(x,\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx,$$

$$M(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{\partial Q_\delta}\left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{x_n^m} + \rho_{x_n}^2\right)u^2\,ds\,dt$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta^-} u^2(x,T-\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta^+} u^2(x,\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx$$

с произвольными $\delta \in (0, \delta_0]$ и $\beta \in \left(0, \frac{T}{2}\right)$. Из равенства (3) вытекает справедливость следующих неравенств:

$$M_\delta(u) \equiv M(u) \le C_1 \left[\int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q_\delta} |u||f| \frac{\rho - \delta}{x_n^m} \, dxdt + J(u) + \int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q_\delta} u^2 \frac{\rho - \delta}{x_n^m} \, dxdt \right],$$

$$J_\delta(u) \equiv J(u) \le C_2 \left[\int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q_\delta} |u||f| \frac{\rho - \delta}{x_n^m} \, dxdt + M(u) + \int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q_\delta} u^2 \frac{\rho - \delta}{x_n^m} \, dxdt \right],$$

и тем самым справедливость леммы 2.

Лемма 2. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение из $V_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q^T)$ уравнения* (1). *Тогда для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ и $\beta \in \left(0, \frac{T}{2}\right)$ справедливы оценки*

$$\max_{\mu \in (0, \delta_0)} M_\mu(u) \le C_3 \left\{ \|f\|^2_{L_2(Q^T)} + J(u) + \int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q_\delta} \frac{u^2}{x^m} \, dxdt \right\}, \tag{4}$$

$$\max_{\mu \in (0, \delta_0)} J_\mu(u) \le C_4 \left\{ \|f\|^2_{L_2(Q^T)} + M(u) + \int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q_\delta} \frac{u^2}{x^m} \, dxdt \right\}. \tag{5}$$

Лемма 3. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение из $V_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q^T)$ уравнения* (1), *и пусть $\sup\limits_{\substack{\delta \in (0,\delta_0), \\ \beta \in (0, T/2)}} J(u) < \infty$. Тогда $u(x,t)$ принадлежит $L_2(Q^T)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, зависящее от ε и коэффициентов уравнения, что*

$$\int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q \setminus Q_{\delta_2}} \frac{u^2}{x^m} \, dxdt \le \varepsilon \left[\|f\|^2_{L_2(Q^T)} + J(u) + \int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q_{\delta_2}} u^2 \, dxdt \right]. \tag{6}$$

Доказательство. Для любых δ_4 и δ_5, $0 < \delta_4 < \delta_5 < \delta_0$,

$$\int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q_{\delta_4} \setminus Q_{\delta_5}} \frac{u^2}{x^m} \, dxdt \le \int\limits_{\delta_4}^{\delta_5} \frac{d\rho}{\rho^m} \int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{\partial Q_\delta} u^2 \, ds \, dt$$
$$\le C_5 \left(\delta_5^m - \delta_4^m\right) \left[\|f\|^2_{L_2(Q^T)} + J_{\delta_4}(u) + \int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q_{\delta_4}} \frac{u^2}{\rho^m} \, dxdt \right].$$

Следовательно,

$$\int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q_{\delta_4} \setminus Q_{\delta_5}} \frac{u^2}{x^m} \, dxdt \le \int\limits_{\delta_4}^{\delta_5} \frac{d\rho}{\rho^m} \int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{\partial Q_\delta} u^2 \, ds \, dt$$
$$\le C_5 \delta_5^m \left[\|f\|^2_{L_2(Q^T)} + J_{\delta_4}(u) + \int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q_{\delta_4} \setminus Q_{\delta_5}} \frac{u^2}{x^m} \, dxdt + \int\limits_\beta^{T-\beta} \int\limits_{Q_{\delta_5}} \frac{u^2}{x^m} \, dxdt \right].$$

Из последнего неравенства получаем

$$\int\limits_{\beta}^{T-\beta}\int\limits_{Q_{\delta_4}\setminus Q_{\delta_5}}\frac{u^2}{x^m}\,dxdt$$
$$\le C_6\delta_5^m\left[\|f\|^2_{L_2(Q^T)}+J_{\delta_4}(u)\int\limits_{\beta}^{T-\beta}\int\limits_{Q_{\delta_4}\setminus Q_{\delta_5}}\frac{u^2}{x^m}\,dxdt+\int\limits_{\beta}^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta}u^2\,dxdt\right]. \quad (7)$$

Выберем $\delta_3=\frac{1}{(2C_6)^{\frac{1}{m}}}$, уменьшая его, если нужно, так, чтобы $\delta_3<\delta_0$, положим в последнем неравенстве $\delta_5=\delta_3$. Тогда для любых $\delta_4\in(0,\delta_3)$ имеем

$$\int\limits_{\beta}^{T-\beta}\int\limits_{Q_{\delta_4}\setminus Q_{\delta_3}}\frac{u^2}{x^m}\,dxdt\le\left[\|f\|^2_{L_2(Q^T)}+J_{\delta_4}(u)+\int\limits_{\beta}^{T-\beta}\int\limits_{Q_{\delta_3}}u^2\,dxdt\right]. \quad (8)$$

Из (8) следует, что

$$\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{Q}u^2\,dxdt<\infty.$$

Выберем теперь

$$\delta_2=\min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)C_6}\right)^{\frac{1}{m}},\left(\frac{1}{2C_6}\right)^{\frac{1}{m}}\right\}$$

(уменьшая, если нужно, так, чтобы $\delta_2<\delta_0$) и положим $\delta_5=\delta_2$ в неравенстве (7). Переходя к пределу при $\delta_4\to 0$, с учетом неравенства (8) получим (6).

Будем говорить, что функция $u(x,t)$ из $V^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(Q^T)$ *принадлежит классу Харди* H_2, если

$$\sup_{\substack{\delta\in(0,\delta_0),\\ \beta\in(0,T/2)}} M(u)<\infty. \quad (9)$$

Теорема 1. *Для того чтобы обобщенное решение из* $V^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(Q^T)$ *уравнения* (1) *с* $f(x,t)\in L_2(Q^T)$ *принадлежало классу Харди* H_2, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sup_{\substack{\delta\in(0,\delta_0),\\ \beta\in(0,T/2)}} J(u)<\infty. \quad (10)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $u(x,t)$ принадлежит классу Харди H_2. Тогда из (9) следует, что

$$\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{Q\setminus Q_{\delta_0}}u^2(x,t)\,dxdt<\infty,\qquad\int\limits_{\beta_0}^{T-\beta_0}\int\limits_{Q_{\delta_0}}u^2(x,t)\,dxdt<\infty,$$

$$\int\limits_0^{\beta_0}\int\limits_{Q_{\delta_0}^+} u^2(x,t)\rho(x)\,dxdt<\infty,\qquad \int\limits_{T-\beta_0}^{T}\int\limits_{Q_{\delta_0}^-} u^2(x,t)\rho(x)\,dxdt<\infty.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\beta_0}^{T-\beta_0}\int\limits_{Q} u^2(x,t)\,dxdt<\infty. \tag{11}$$

Из (11) вытекает существование такого числа β_1, $\beta_0<\beta_1<T/2$, что

$$\int\limits_{Q} u^2(x,\beta_1)\,dx<\infty.$$

Покажем, например, что

$$\int\limits_0^{\beta_0}\int\limits_{Q_{\delta_0}^-} u^2(x,t)\,dxdt<\infty. \tag{12}$$

Рассмотрим функцию $\nu(x,t)=u(x,t)e^{-\lambda t}$. Легко видеть, что функция $\nu(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$k(x)u_t-\sum_{i,j=1}^{n-1}(a_{i,j}u_{x_i})_{x_j}-x_n^m u_{x_nx_n}+\sum_{i,j=1}^{n}a_iu_{x_i}+(a+k\lambda)u=f(x,t),$$

следовательно, для нее справедливо равенство

$$\begin{aligned}\frac12\int\limits_{Q_{\delta_0}^-}\nu^2(x,\beta)\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dx+\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q_{\delta_0}}\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}\nu_{x_i}\nu_{x_j}\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dxdt&\\ +\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q_{\delta_0}^-}\left[-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\rho_{x_i}}{x_n^m}\right)_{x_j}+(a-\lambda)\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\right]\nu^2\,dxdt&\\ =\frac12\int\limits_{Q_{\delta_0}^-}\nu^2(x,\beta_1)\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dx+\frac12\int\limits_{Q_{\delta_0}^+}\nu^2(x,\beta_1)\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dx&\\ -\frac12\int\limits_{Q_{\delta_0}^+}\nu^2(x,\beta)\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dx+\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q_{\delta_0}^+}\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(a_{ij}\frac{\rho_{x_i}}{x_n^m}\right)_{x_j}-(a+\lambda)\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\right]\nu^2\,dxdt&\\ +\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q_{\delta_0}^-}f\nu\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dxdt+\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q_{\delta_0}^+}f\nu\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dxdt.&\end{aligned} \tag{13}$$

Так как

$$\left|\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^-_{\delta_0}} f\nu\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dxdt\right| \le \varepsilon\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^-_{\delta_0}} \nu^2\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dxdt + C(\varepsilon)\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^-_{\delta_0}} f^2\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dxdt$$

и

$$\left|\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}} f\nu\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dxdt\right| \le \frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}} \nu^2\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}} f^2\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\,dxdt,$$

выбрав $-\lambda < 0$ настолько большим, что

$$\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}}\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(a_{ij}\frac{\rho_{x_i}}{x_n^m}\right)_{x_j} - (a+\lambda)\frac{\rho-\delta_0}{x^m}\right]\nu^2\,dxdt \ge \int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^-_{\delta_0}}\nu^2\,dxdt,$$

из (13) получим неравенство (12).

Аналогично показывается, что

$$\int\limits_{T-\beta_0}^{T}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}} u^2(x,t)\,dxdt < \infty.$$

Таким образом, из принадлежности обобщенного из $V^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(Q_T)$ решения $u(x,t)$ уравнения (1) классу H_2 следует, что

$$\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{Q} u^2(x,t)\,dxdt < \infty.$$

Необходимость вытекает из неравенства (5) леммы 2.

Достаточность следует из леммы 3 и неравенства (4) леммы 2.

Теорема 1 доказана.

Будем говорить, что функция $u(x,t)$ *принимает граничное значение*

$$u|_{(x,t)\in Q\times(0,T)} = \varphi \tag{14}$$

в смысле L_2, если $\varphi(x,t)\in L_2(\partial Q\times(0,T))$ и

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\int\limits_{\beta}^{T-\beta}\int\limits_{\partial Q}|u(x_\delta(x),t)-\varphi(x,t)|^2\,ds\,dt = 0. \tag{15}$$

Будем также говорить, что функция $u(x,t)\in V^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(Q^T)$ *принимает начальные значения*

$$u|_{t=0,\,x\in Q^+} = u_1(x), \qquad \int\limits_{Q^+} u_1^2(x)\frac{r(x)}{x_n^m}\,dx < \infty, \tag{16}$$

$$u|_{t=T,\, x\in Q^-} = u_2(x), \qquad \int\limits_{Q^-} u_2^2(x)\frac{r(x)}{x_n^m}\,dx < \infty \tag{17}$$

в среднем с весом $r(x)$, если

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\int\limits_{Q_\delta^+}(u(x,\beta)-u_1(x,t))^2\frac{r(x)}{x_n^m}\,dx = 0, \tag{18}$$

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\int\limits_{Q_\delta^-}(u(x,T-\beta)-u_2(x,t))^2\frac{r(x)}{x_n^m}\,dx = 0. \tag{19}$$

Теорема 2. *Существует такая постоянная* $a_0 > 0$, *что для всех* $\varphi(x,t) \in L_2(\partial Q\times(0,T))$, $u_1(x) \in L_2(Q^+, \frac{r(x)}{x_n^m})$, $u_2(x) \in L_2(Q^-, \frac{r(x)}{x_n^m})$ *и для всех* $f(x,t) \in L_2(Q^T)$ *существует решение из* $V_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q^T)$ *задачи* (1)–(4) *при* $a(x,t) > a_0$. *Это решение единственно, и для него справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\int\limits_0^T\int\limits_Q\Bigg(\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\frac{r(x)}{x_n^m}+u_{x_n}^2r(x)\Bigg)dxdt\\ +\sup_{\beta,\delta}\Bigg(\int\limits_{Q_\delta^+}u^2(x,T-\beta)\frac{r-\delta}{x_n^m}\,dx+\int\limits_{Q_\delta^-}u^2(x,\beta)\frac{r-\delta}{x_n^m}\,dx\Bigg)\\ \le C\big(\|f\|^2_{L_2(Q^T)}+\|\varphi\|^2_{L_2(\partial Q\times(0,T))}+\|u_1\|^2_{L_2(Q_\delta^+,\frac{r(x)}{x_n^m})}+\|u_2\|^2_{L_2(Q_\delta^-,\frac{r(x)}{x_n^m})}\big).\end{aligned} \tag{20}$$

Доказательство. Докажем вначале, что существует такое число $a_0 > 0$, что при $a > a_0$ для обобщенного решения задач из $V_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q^T)$ и (1), (14), (16), (17) справедливо неравенство (20). Пусть $u(x,t)$ — обобщенное из $V_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q^T)$ решение задачи (1), (14), (16), (17). В силу (15), (18), (19) функция $u(x,t)$ принадлежит классу H_2. Поэтому на основании теоремы 1 справедливы неравенства

$$\int\limits_0^T\int\limits_Q\Bigg(\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\frac{r(x)}{x_n^m}+u_{x_n}^2r(x)\Bigg)dxdt<\infty, \qquad \int\limits_0^T\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt<\infty.$$

Рассмотрим неравенство (3). Так как

$$\Bigg|\int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta}fu\frac{\rho-\delta}{x^m}\,dxdt\Bigg| \le \int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_Q u^2(x,t)\frac{\rho-\delta}{x^m}\,dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt,$$

из (3) следует, что

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta^+} u^2(x,T-\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta^-} u^2(x,\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx$$
$$+\int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta}\left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\frac{\rho-\delta}{x_n^m} + u_{x_n}^2(\rho-\delta)\right)dxdt + \int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta}(a-1)u^2\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dxdt$$
$$\le C_3\left[\int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta} f^2(x,t)\,dxdt + M(u) + \int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta} u^2(x,t)\,dxdt\right]. \quad (21)$$

В силу леммы 3

$$\int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta} u^2(x,t)\,dxdt \le \varepsilon\big[\|f\|^2_{L_2(Q^T)} + J(u)\big] + C_1(\varepsilon)\int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta} u^2\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dxdt. \quad (22)$$

Поэтому из (21) имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta^+} u^2(x,T-\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta^-} u^2(x,\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx$$
$$+(1-\varepsilon C_3)\int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta}\left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\frac{\rho-\delta}{x_n^m} + u_{x_n}^2(\rho-\delta)\right)dxdt$$
$$+\int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta}(a-1-C_1(\varepsilon))u^2\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dxdt \le C_3\left[\int\limits_\beta^{T-\beta}\int\limits_{Q_\delta} f^2(x,t)\,dxdt + M(u)\right]. \quad (23)$$

Выберем в неравенстве (23) $\varepsilon = 1/2C_3$, $a_0 = 3/2 + C_1(\varepsilon)C_3$ и, переходя к пределу при $\delta\to 0$ и $\beta\to 0$, получим неравенство (20).

Докажем существование решения первой смешанной задачи (1), (14), (16), (17) с $a(x,t) > a_0$. Возьмем произвольные функции $\varphi(x,t)\in L_2(\partial Q\times(0,T))$, $u_1(x)\in L_2(Q^+,\frac{\rho}{x_n^m})$, $u_2(x)\in L_2(Q^-,\frac{\rho}{x_n^m})$ и произвольную $f(x,t)\in L_2(Q^T)$.

Пусть $\{\varphi_m\}$ — некоторая последовательность функций из $L_2(\partial Q\times(0,T))$, сходящаяся в $L_2(\partial Q\times(0,T))$ к функции φ:

$$\|\varphi_m-\varphi\|_{L_2(\partial Q\times(0,T))}\to 0 \quad \text{при } m\to\infty,$$

$\{u_{1m}\}$ — некоторая последовательность функций из $C^2(\overline{Q^+})$, сходящаяся к функции $u_1(x)$:

$$\|u_{1m}-u_1\|_{L_2(Q^+,\frac{\rho}{x_n^m})}\to 0 \quad \text{при } m\to\infty,$$

$\{u_{2m}\}$ — некоторая последовательность функций из $C^2(\overline{Q^-})$, сходящаяся к функции $u_2(x)$:

$$\|u_{2m}-u_2\|_{L_2(Q^-,\frac{\rho}{x_n^m})}\to 0 \quad \text{при } m\to\infty,$$

$\{f_m(x,t)\}$ — некоторая последовательность функций из $C^2(\overline{Q^T})$, сходящаяся к функции $f(x,t)$:

$$\|f_m - f\|_{L_2(Q^T)} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Обозначим через $u_m(x,t)$ «сильное» решение из $W_2^{2,1}(Q^T)$ задачи (1), (14), (16), (17). Такое решение существует (см. [3–5]) и, как легко видеть, для него справедливы неравенства (20). Таким образом, последовательность $\{u_m(x,t)\}$ сходится к некоторой функции $u(x,t)$ в гильбертовом пространстве B с нормой

$$\|u\|_B^2 = \int\limits_0^T \int\limits_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \frac{r(x)}{x_n^m} + u_{x_n}^2 r(x) \right) dxdt$$

$$+ \sup_{\beta,\delta} \left(\int\limits_{Q_\delta^+} u^2(x, T-\beta) \frac{r-\delta}{x_n^m}\, dx + \int\limits_{Q_\delta^-} u^2(x,\beta) \frac{r-\delta}{x_n^m}\, dx \right) + \int\limits_0^T \int\limits_Q u^2(x,t)\, dxdt,$$

т. е.

$$\|u_m - u\|_B \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Следовательно, функция $u(x,t)$ является обобщенным решением из $V_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q_T)$ уравнения (1), принадлежащим классу Харди H_2. Удовлетворение соотношениям (15), (18), (19) очевидно.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 аналогично тому, как это делалось в работе [8], доказывается

Теорема 3. *Если функция $u(x,t)$ является обобщенным из $V_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q_T)$ решением задачи* (1), (14), (16), (17) *с $a(x,t) > a_0$, то существуют такие функции $u_3(x) \in L_2(Q^+, \frac{r}{x_n^m})$, $u_4(x) \in L_2(Q^-, \frac{r}{x_n^m})$, что*

$$\lim_{\delta,\beta\to 0} \int\limits_{Q_\delta^+} (u(x, T-\beta) - u_3(x,t))^2 \frac{\rho(x) - \delta}{x_n^m}\, dx = 0,$$

$$\lim_{\delta,\beta\to 0} \int\limits_{Q_\delta^-} (u(x, \beta) - u_4(x,t))^2 \frac{\rho(x) - \delta}{x_n^m}\, dx = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлов В. П.* О граничных значениях решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с гладкой границей // Мат. сб. 1976. Т. 101, № 2. С. 163–188.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
3. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
4. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
5. *Пятков С. Г.* О разрешимости одной задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 6. С. 1322–1327.

6. *Пятков С. Г.* Разрешимость начально-краевых задач для одного нелинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: НГУ, 1987.
7. *Кислов Н. В.* Неоднородные краевые задачи для дифференциально-операторного уравнения смешанного типа и их приложения // Мат. сб. 1984. Т. 125, № 1. С. 19–37.
8. *Петрушко И. М., Черных Е. В.* О начально-краевой задаче для уравнений с меняющимся направлением времени // Вестн. МЭИ. 2000. № 6. С. 60–70.
9. *Петрушко И. М.* О граничных и начальных значениях решений параболических уравнений // Мат. сб. 1984. Т. 125, № 4. С. 489–521.

Статья поступила 30 января 2016 г.

Петрушко Игорь Мелетиевич, Петрушко Максим Игоревич
Научно-исследовательский университет МЭИ,
ул. Краснознаменная, 14, Москва 111250
petrushkoim@mpei.ru, petrushkomi@mpei.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

UDC 517.95

ON THE FIRST PROBLEM FOR THE DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS WITH CHANGING TIME DIRECTION

I. M. Petrushko and M. I. Petrushko

Abstract: We study the properties of solutions of parabolic equations with changing time direction. We prove that the Riesz and Littlewood–Paley conditions for these solutions are equivalent. We demonstrate the unique solvability of the first mixed problem with boundary and initial functions of the space type and also establish the existence of limits in with the weight of the decisions on the sections of the border, which are free from the initial conditions.
Keywords: degenerate equations, changing time direction, functional spaces, integral identities, first mixed problem, solvability.

REFERENCES

1. *Mikhailov V. P.* "On the boundary values of solutions of elliptic equations in domains with a smooth boundary," Mat. Sb. **101**, 163–188 (1976).
2. *Ladyzhenskaia O. A., Solonnikov V. A., and Ural'tseva N. N.* Linear and Quasilinear Parabolic Equations, Nauka, Moscow (1967).
3. *Tersenov S. A.* Parabolic Equations with Changing Time Direction, Nauka, Novosibirsk (1985).
4. *Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V.* Nonclassical Differential-operator Equations. Nauka, Novosibirsk (1965).
5. *Pyatkov S .G.* "On the solvability of a boundary value problem for a parabolic equation with changing time direction," Soviet Math. Dokl., **285**, No. 6, 1322–1327 (1985).
6. *Pyatkov S. G.* Solvability of the Initial-boundary Value Problems for a Nonlinear Parabolic Equation with Changing Time Direction, Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (1987).
7. *Kislov N. V.* "Nonhomogeneous boundary value problems for operator- differential equations of mixed type and their applications," Mat. Sb. **125**, No. 1, 19–37 (1984).
8. *Petrushko I. M. and Tchernikh E. V.* "On initial-boundary value problem for equations with changing time direction," Vestn. MPEI. No. 6, 60–70 (2000).
9. *Petrushko I. M.* "On the boundary and initial values of solutions of parabolic equations," Mat. Sb. **125**, No. 4, 489–521 (1984).

Submitted January 30, 2016

Petrushko Igor′ Meletievich, Petrushko Maksim Igorevich
Research University MEI,
Krasnoznamennaya st., 14, Moscow 111250, Russia
petrushkoim@mpei.ru, petrushkomi@mpei.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА

Н. С. Попов

Аннотация. Исследуется разрешимость начально-краевой задачи для линейных параболических уравнений четвертого порядка с заданием на боковой границе условия, связывающего значения решения или же конормальной производной решения со значениями некоторого интегрального оператора от решения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.
Ключевые слова: параболическое уравнение четвертого порядка, пространство Соболева, начально-краевая задача, метод продолжения по параметру, априорные оценки, регулярное решение.

Введение

Нелокальные краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе активно изучаются в последнее время, но при этом в основном рассматривается лишь случай уравнений второго порядка по пространственным переменным (см. [1–3]) и гиперболическим уравнениям [4]. Отметим также исследования для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе [5, 6].

Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$ $(0 < T < +\infty)$, $S = \Gamma \times (0,T)$ — его боковая граница, $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные в цилиндре $\overline{Q}$ функции, $u_0(x)$ — заданная на множестве $\overline{\Omega}$ функция, $K_{11}(x,y,t)$, $K_{12}(x,y,t)$, $K_{21}(x,y,t)$, $K_{22}(x,y,t)$ — функции, заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Краевая задача I. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$Lu \equiv u_t + \Delta^2 u + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_{(x,t)\in S} = \int\limits_{\Omega} K_{11}(x,y,t)u(y,t)\,dy\Big|_{(x,t)\in S}, \tag{3}$$

$$\Delta u(x,t)|_{(x,t)\in S} = \int\limits_{\Omega} K_{12}(x,y,t)u(y,t)\,dy\Big|_{(x,t)\in S}. \tag{4}$$

Краевая задача II. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (3) *и условие*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu(x)}\Big|_{(x,t)\in S} = \int\limits_{\Omega} K_{21}(x,y,t)u(y,t)\,dy\Big|_{(x,t)\in S}. \tag{5}$$

Краевая задача III. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (5) *и условие*

$$\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu(x)}\Big|_{(x,t)\in S} = \int\limits_{\Omega} K_{22}(x,y,t)u(y,t)\,dy\Big|_{(x,t)\in S}, \tag{6}$$

где $\nu(x) = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке.

Разрешимость краевой задачи I

Пусть $N_1(x,y,t)$ — функция, определенная на множестве $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ и такая, что при $(x,y,t) \in \Sigma \equiv (\Gamma\times\Gamma\times(0,T))$ выполняются равенства

$$N_1(x,y,t)|_{x\in\Gamma} = K_{11}(x,y,t), \quad \Delta_x N_1(x,y,t)|_{x\in\Gamma} = K_{12}(x,y,t), \tag{7}$$

где переменные y, t являются параметрами. Существование функции $N_1(x,y,t)$ очевидно, если добавить к краевым условиям (7) уравнение $\Delta_x^2 N_1(x,y,t) = 0$.

С помощью функции $N_1(x,y,t)$ определим оператор M_1 по формуле

$$(M_1u)(x,t) = u(x,t) - \int\limits_{\Omega} N_1(x,y,t)u(y,t)\,dy.$$

Будем считать выполненным следующее условие: оператор M_1 однозначно и непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при всех $t\in[0,T]$ и существуют положительные постоянные m_1, m_2 такие, что выполняются неравенства

$$m_1\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\,dx \le \int\limits_{\Omega}[M_1u(x,t)]^2\,dx \le m_2\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\,dx \tag{8}$$

при любом $t\in[0,T]$ и любой функции $u(x,t)$ из $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$.

Пусть

$$V = \big\{v(x,t) : v \in W_2^{4,1}(Q)\cap L_\infty\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big),\ v_t\in L_2(Q)\big\},$$

норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|v\|_V = \|v\|_{W_2^{4,1}(Q)} + \|v_t\|_{L_2(Q} + \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))}.$$

Положим

$$LM_1u(x,t) - M_1Lu(x,t) = \Phi(x,t,u), \quad w = M_1u.$$

Имеем

$$\Phi(x,t,u) = -\int\limits_\Omega N_{1t}(x,y,t)u(y,t)\,dy \\ - \int\limits_\Omega \Delta_x^2 N_1(x,y,t)u(y,t)\,dy + \int\limits_\Omega N_1(x,y,t)\,\Delta_y^2 u(y,t)\,dy. \tag{9}$$

Введем обозначение

$$P_1 = \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega\int\limits_\Omega N_1^2(x,y,\tau)\,dxdy. \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (8), *а также условия*

$$\begin{gathered} c(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x,t) \geq c_0 > 0 \quad \text{при } (x,t) \in \overline{Q}, \\ K_{11}(x,y,t), K_{12}(x,y,t) \in C^3(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[0,T]), \\ \exists\delta_0 \in (0;1/2) : 1 - \frac{P_1}{\delta_0^2 m_1} > 0, \end{gathered} \tag{11}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q). \tag{12}$$

Тогда краевая задача I *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* V, *и это решение единственно.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию* $w(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$Lw = g(x,t) + \Phi_1(x,t,w) \tag{13}$$

и удовлетворяющую условиям

$$w(x,t)|_S = 0, \quad \Delta w(x,t)|_S = 0, \quad w(x,0) = w_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{14}$$

где

$$u(x,0) - \int\limits_\Omega N_1(x,y,0)u(y,0)\,dy = u_0(x) - \int\limits_\Omega N_1(x,y,0)u_0(y)\,dy \equiv w_0(x),$$

$$\Phi_1(x,t,w) = \Phi\bigl(x,t,M_1^{-1}w\bigr).$$

Докажем, что при выполнении условий теоремы краевая задача (13), (14) разрешима в классе

$$W = \{v(x,t) : v(x,t) \in V,\ w(x,t) = M_1v(x,t) \in V\}$$

для любой функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$. Воспользуемся методом продолжения по параметру. Именно, для чисел λ из отрезка $[0,1]$ определим семейство операторов $\{L_\lambda\}$: $L_\lambda w = Lw - \lambda\Phi_1(x,t,w)$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$L_\lambda w = g(x,t), \tag{15}$$

при выполнении условий (14). Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача (15), (14) разрешима в классе W для произвольной функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$. Покажем, что множество Λ будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$. Совпадение множества Λ с отрезком $[0,1]$, в свою очередь, означает разрешимость краевой задачи (13), (14) в требуемом классе.

Убедимся прежде всего, что множество Λ непусто. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения $Lw = g(x,t)$, при выполнении условий* (14).

Как следует из результатов [7], при выполнении условий теоремы эта задача имеет решение, принадлежащее пространству V.

Пусть $w(x,t)$ есть решение краевой задачи (15), (14) из пространства V. Если имеет место априорная оценка в том же пространстве V, то задача будет разрешима при $\lambda \in [0,1]$ (см. [8]).

Для получения априорной оценки умножим уравнение (15), записанное в переменных x и τ, на функцию $w_\tau + \Delta^2 w$ и результат проинтегрируем по области Ω и по переменной τ в пределах от 0 до t. Таким образом, преобразуем равенство

$$\int_0^t \int_\Omega Lw(w_\tau + \Delta^2 w)\,dxd\tau = \int_0^t \int_\Omega (g + \lambda\Phi_1)(w_\tau + \Delta^2 w)\,dxd\tau.$$

С помощью интегрирования по частям с учетом краевых условий (14) придем к равенству

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega [(w_\tau)^2 + (\Delta^2 w)^2]\,dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega c(x,\tau)(\Delta w)^2\,dxd\tau + \int_\Omega (\Delta w)^2(x,t)\,dx \\ + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x,t)w^2(x,t)\,dx = -\int_0^t \int_\Omega \Delta c(x,t)w(x,t)\Delta w(x,t)\,dx \\ - 2\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega c_{x_i} w_{x_i} \Delta w\,dxd\tau + \int_\Omega \Delta w_0^2\,dx \\ + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x,0)w_0^2\,dx + \int_0^t \int_\Omega (g + \lambda\Phi_1)(w_\tau + \Delta^2 w)\,dxd\tau.\end{aligned} \tag{16}$$

Для получения априорной оценки из равенства (16) рассмотрим оценку интеграла

$$\int_0^t \int_\Omega \Phi_1 \cdot (w_\tau + \Delta^2 w)\, dxd\tau = I_1 + I_2 + I_3, \tag{17}$$

где Φ_1 задается равенством (9).

Рассмотрим оценку интеграла I_2 от $\Phi(x,t,u)$ вида

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left| \int_0^t \int_\Omega \Big(\int_\Omega \Delta_x^2 N_1(x,y,\tau) u(y,\tau)\, dy \Big) (w_\tau + \Delta^2 w)\, dxd\tau \right| \\
&\le \int_0^t \int_\Omega \Big(\int_\Omega (\Delta_x^2 N_1)^2(x,y,\tau)\, dy \Big)^{\frac12} \Big(\int_\Omega u^2(y,\tau)\, dy \Big)^{\frac12} |w_\tau + \Delta^2 w|\, dxd\tau \\
&\le \frac{\delta_0^2}{2} \int_0^t \int_\Omega (w_\tau + \Delta^2 w)^2\, dxd\tau \\
&+ \frac{1}{2\delta_0^2} \int_0^t \int_\Omega \Big(\int_\Omega (\Delta_x^2 N_1)^2(x,y,\tau)\, dy \Big) \Big(\int_\Omega u^2(y,\tau)\, dy \Big) dxd\tau \\
&\le \frac{\delta_0^2}{2} \int_0^t \int_\Omega (w_\tau + \Delta^2 w)^2\, dxd\tau + \frac{P_0}{2\delta_0^2} \int_0^t \int_\Omega u^2(y,\tau)\, dyd\tau,
\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$P_0 = \max_{t \in [0,T]} \int_\Omega \int_\Omega (\Delta_x^2 N_1)^2(x,y,\tau)\, dxdy.$$

Продолжая (18), с учетом неравенства (8) получим

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_\Omega \Big(\int_\Omega \Delta_x^2 N_1(x,y,\tau) u(y,\tau)\, dy \Big) (w_\tau + \Delta^2 w)\, dxd\tau \right| \\
&\le \delta_0^2 \int_0^t \int_\Omega [(w_\tau)^2 + (\Delta^2 w)^2]\, dxd\tau + \frac{P_0}{2m_1\delta_0^2} \int_0^t \int_\Omega w^2(y,\tau)\, dyd\tau.
\end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим оценку интеграла I_3 в (17)

$$\begin{aligned}
|I_3| &= \left| \int_0^t \int_\Omega \Big(\int_\Omega N_1(x,y,\tau) \Delta_y^2 u(y,\tau)\, dy \Big) (w_\tau + \Delta^2 w)\, dxd\tau \right| \\
&\le \delta_0^2 \int_0^t \int_\Omega [(w_\tau)^2 + (\Delta^2 w)^2]\, dxd\tau + \frac{P_1}{2m_1\delta_0^2} \int_0^t \int_\Omega \big(\Delta_y^2 w\big)^2(y,\tau)\, dyd\tau.
\end{aligned} \tag{20}$$

Зафиксируем $\delta_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и потребуем выполнения неравенства (11)

$$p_2 \equiv 1 - \frac{P_1}{\delta_0^2 m_1} > 0, \tag{21}$$

которое, очевидно, выполняется при малых $|N_1(x,y,t)|$. Применяя неравенство Юнга и используя лемму Гроноулла в равенстве (16), получим априорную оценку

$$\int_0^t \int_\Omega [(w_\tau)^2 + (\Delta^2 w)^2]\,dx\,d\tau + \int_\Omega [(\Delta w)^2(x,t)\,dx + w^2(x,t)]\,dx \le K_0 \int_0^T \int_\Omega g^2(x,t)\,dxdt \tag{22}$$

с положительной постоянной K_0, определяемой лишь функцией $c(x,t)$, числами T, c_0, а также областью Ω.

Очевидно, аналогичная оценка имеет место и для функции $u(x,t)$, а именно

$$\|u\|_V \le K_0\|w\|_V \le K_1\|g\|_{L_2(Q)} \tag{23}$$

с положительными постоянными K_0, K_1, определяемой теми же величинами, которыми определяются постоянные K_0.

Из оценок (22), (23) следует открытость и замкнутость множества Λ (см. [4, 8]). Следовательно, краевая задача (13), (14) разрешима в классе W.

Положим $g = M_1 f$. Повторяя рассуждения из [7], получим, что функция $u = M^{-1}w$ будет решением краевой задачи I из требуемого пространства.

Единственность решений очевидна — она вытекает, например, из неравенства (23). Теорема доказана.

Разрешимость краевых задач II, III

Пусть $N_i(x,y,t)$, $i = 2,3$, — функция, определенная на множестве $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ и такая, что при $(x,y,t) \in \Sigma \equiv (\Gamma \times \Gamma \times (0,T))$ выполняются равенства

$$N_i(x,y,t)|_{x\in\Gamma} = K_{i-1,1}(x,y,t), \quad \left.\frac{\partial N_i(x,y,t)}{\partial \nu(x)}\right|_{x\in\Gamma} = K_{2,i-1}(x,y,t), \tag{24}$$

где переменные y, t являются параметрами. Существование функции $N_i(x,y,t)$ очевидно, если добавить к краевым условиям (24) уравнение $\Delta_x^2 N_i(x,y,t) = 0$.

Как и выше, с помощью функции $N_i(x,y,t)$ определим оператор M_i по формуле

$$(M_i u)(x,t) = u(x,t) - \int_\Omega N_i(x,y,t)u(y,t)\,dy.$$

Условие на операторы M_i: операторы M_i однозначно и непрерывно обратимы как операторы из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0,T]$ и существуют положительные постоянные m_1, m_2 такие, что выполняются неравенства

$$m_3 \int_\Omega u^2(x,t)\,dx \le \int_\Omega [M_i u(x,t)]^2\,dx \le m_4 \int_\Omega u^2(x,t)\,dx, \quad i = 2,3, \tag{25}$$

при любом $t \in [0,T]$ и $u(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$.

Как и выше, ведем обозначения

$$P_i = \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega N_i^2(x,y,\tau)\,dxdy, \quad i = 2,3. \tag{26}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (25), *а также условия*

$$\begin{gathered} c(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x,t) \geq c_0 > 0 \quad \textit{при } (x,t) \in \overline{Q}, \\ K_{i-1,1}(x,y,t), \quad K_{2,i-1}(x,y,t) \in C^3(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[0,T]), \quad i=2,3, \\ 1 - \frac{P_i}{\delta_0^2 m_3} > 0 \quad \textit{при} \quad \delta_0 \in (0,1/2), \\ f(x,t) \in L_2(Q). \end{gathered} \tag{27}$$

Тогда краевая задача II (*или* III) *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* V, *и это решение единственно.*

Замечание 1. В теоремах 1, 2 условия малости на функции $N_i(x,y,t)$ можно заменить на условия обращения в нуль на границе:

$$N_i(x,y,t) = N_{y_i}(x,y,t) = 0 \quad (i=1,\dots,n) \quad \text{при } y \in \Gamma.$$

Замечание 2. В теоремах 1 и 2 от условия $c(x,t) \geq c_0 > 0$ можно отказаться, тогда при получении априорных оценок возникнут условия малости на функцию $c(x,t)$ и его производные.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fridman A.* Monotone decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions // Quart. Appl. Math. 1986. V. 44, N 3. P. 401–407.
2. *Кожанов А. И.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. 2004. № 30. С. 63–69.
3. *Абдрахманов А. М., Кожанов А. И.* Задача со смещением для уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика. 2007. Т. 540, № 5. С. 3–26.
4. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1116–1172.
5. *Попов Н. С.* О разрешимости краевых задач для многомерных псевдопараболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, № 1. С. 82–95.
6. *Попов Н. С.* О разрешимости краевых задач для многомерных псевдогиперболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 69–80.
7. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных уравнений общего вида // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 16 января 2016 г.

Попов Николай Сергеевич
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
popovnserg@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

UDC 517.946

ON THE SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR MULTIDIMENSIONAL PARABOLIC EQUATIONS OF FOURTH ORDER WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITION OF INTEGRAL FORM

N. S. Popov

Abstract: We investigate solvability of the initial-boundary value problem for linear parabolic equations of fourth order with the boundary conditions connecting the values of solution or conormal the derivative of the solution with values of a certain integral operator from the solution. We prove the theorem of existence and uniqueness of regular solutions.
Keywords: parabolic equation of fourth order, Sobolev space, initial-boundary value problem, continuation method the parameter, a priori estimates, regular solutions.

REFERENCES

1. *Fridman A.* "Monotone decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions," Quart. Appl. Math. **44**, No. 3, 401–407 (1986).
2. *Kozhanov A. I.* "On resolvability of a regional problem with nonlocal boundary condition for the linear parabolic equations," Vestn. Samar. Gos. Techn. Univ., **30**, 63–69 (2004).
3. *Abdrahmanov A. M. and Kozhanov A. I.* "Problem with displacement for the equations in partial derivatives," Russian Math. (Iz. VUZ) No. 5, 3–26 (2007).
4. *Kozhanov A. I. and Pulkina L. S.* "On resolvability of regional problems with nonlocal boundary condition of an integrated kind for the multidimensional hyperbolic equations," [in Russian] Differ. Equ., **42**, No. 9, 1116–1172 (2006).
5. *Popov N. S.* "On the solvability of boundary value problems for multidimensional pseudoparabolic equations with nonlocal boundary condition integral type," Mat. Zamet. YaGU. **19**, No. 1, 82–95 (2012).
6. *Popov N. S.* "On the solvability of boundary value problems for multidimensional pseudohyperbolic equations with nonlocal boundary condition integral of the form," Mat. Zamet. SVFU. **21**, No. 2, 69–80 (2014).
7. *Solonnikov V. A.* "Boundary value problems for linear equations of general type," Proc. Steklov Inst. Math., **83**, 3–163 (1965).
8. *Trenogin V. A.*, Functional Analysis, [in Russian] Nauka, Moscow, 1980.

Submitted January 16, 2016

Popov Nikolayi Sergeevich
Nord-East Federal University,
Research Institute of Mathematic and Informatic,
Kulakovskogo st., 48, Yakutsk 677000, Russia
popovnserg@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

УДК 539.3+517.958

ОБ ИЕРАРХИИ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

А. М. Хлуднев, Т. С. Попова

Аннотация. Обсуждаются модели тонких включений в упругих телах при наличии отслоений. Наличие отслоения означает существование трещины между включением и матрицей. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия вида неравенств, исключающие взаимное проникание берегов, что приводит к формулировке проблем в виде задач с неизвестной областью контакта. Исследуется взаимосвязь между существующими математическими моделями и возможность предельных переходов по параметрам, характеризующим жесткость тонких включений.

Ключевые слова: тонкое включение, упругое тело, трещина, нелинейные краевые условия, параметр жесткости, предельные модели.

Введение

Последние годы являются периодом интенсивного исследования задач равновесия упругих тел с тонкими включениями и трещинами. Качество математических моделей при этом существенно зависит от характера моделирования тонкого включения и вида краевых условий на берегах трещин. Краевые задачи становятся существенно более сложными в случае нелинейных краевых условий вида неравенств, обеспечивающих взаимное непроникание берегов [1–11]. Тонкие включения могут отслаиваться от матрицы, и таким образом трещины могут располагаться между включением и матрицей. В этом случае также имеет смысл рассматривать нелинейные краевые условия на берегах трещин. Существуют различные способы моделирования тонких включений, расположенных в упругих телах. В данной работе при моделировании упругих тонких включений используются модели типа Кирхгофа — Лява и Тимошенко. Укажем большое число работ, относящихся к указанному направлению исследований [12–25]. Другие подходы к моделированию тонких включений без отслоения имеются в [26–30]. Что касается классических подходов с линейными краевыми условиями для описания задач теории трещин, то читатель может обратиться к монографиям [26, 27]. Результаты для объемных жестких включений, расположенных в упругих пластинах, можно найти в [31–35].

Цель данной работы — провести систематизацию математических моделей в задачах равновесия упругих тел с тонкими включениями при наличии

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки России в рамках базовой части государственного задания (проект № 3047).

отслоений. Рассматриваемые модели характеризуются набором параметров, в зависимости от которых можно получить различные модели тонких включений. Полученные в работе результаты в определенном смысле устанавливают иерархию математических моделей тонких включений в упругих телах.

1. Тонкое включение Бернулли — Эйлера

Изотропное включение Бернулли — Эйлера. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ, $\gamma = (0,1) \times \{0\}$, $\bar{\gamma} \subset \Omega$, $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$ (рис. 1). Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ единичный вектор нормали к γ, $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$; $A = \{a_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2,$ — заданный положительно определенный тензор коэффициентов упругости

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

$$a_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2, \quad \xi_{ij}, c_0 = \text{const} > 0.$$

Все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам. По повторяющимся индексам проводится суммирование. В рассматриваемой модели область Ω_γ соответствует упругому телу, а γ — тонкой упругой балке с заданными свойствами. В частности, считаем, что поведение балки γ описывается моделью Бернулли — Эйлера. Предположим, что отслоение тонкого включения имеет место на положительном берегу γ^+, и таким образом, между упругим телом и включением имеется трещина. Перемещения включения совпадают с перемещениями упругого тела на γ^-. Пусть $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ — заданный вектор внешних сил, действующих на упругое тело.

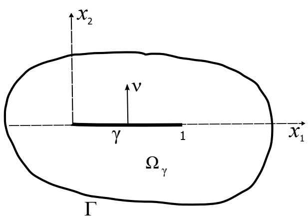

Рис. 1. Тонкое прямолинейное включение в упругом теле

Формулировка задачи равновесия упругого тела Ω_γ с тонким упругим включением γ состоит в следующем. Требуется найти поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные на Ω_γ, и перемещения точек тонкого включения v, w, определенные в γ, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.1}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.2}$$

$$\delta v_{,1111} = [\sigma_\nu], \quad -\delta w_{,11} = [\sigma_\tau] \quad \text{на } \gamma, \tag{1.3}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad v = u_\nu^-, \ w = u_\tau^- \quad \text{на } \gamma, \tag{1.4}$$

$$v_{,11} = v_{,111} = w_{,1} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, 1, \tag{1.5}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma. \tag{1.6}$$

Здесь $[h] = h^+ - h^-$ — скачок функции h на γ, где $h^\pm$ соответствуют следам h на $\gamma^\pm$. Знаки $\pm$ определяются по отношению к нормали ν, $w_{,1} = \frac{dw}{dx_1}$, $(x_1, x_2) \in \Omega$, $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}$ — тензор деформаций, $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, $i, j = 1, 2$, $\sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$, $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, $\sigma_\tau = \sigma\nu \cdot \tau$, $u_\nu = u\nu$. Функции, определенные на γ, отождествляем с функциями переменного x_1.

Соотношения (1.1), (1.2) суть уравнения равновесия и закон Гука; соотношения (1.3) соответствуют уравнениям Бернулли — Эйлера для упругой балки γ. При этом правые части $[\sigma_\tau], [\sigma_\nu]$ в (1.3) описывают влияние окружающей упругой среды на балку γ. Первое неравенство в (1.6) обеспечивает взаимное непроникание берегов трещины. Остальные краевые условия (1.6) являются типичными для краевых задач с неизвестной областью контакта. В частности, если в заданной точке x_0 контакт отсутствует, т. е. $[u_\nu(x_0)] > 0$, получаем нулевое значение поверхностной силы: $(\sigma\nu)^+(x_0) = 0$. С другой стороны, если поверхностная сила ненулевая, т. е. $\sigma_\nu^+(x_0) < 0$, то имеем условие контакта $[u_\nu(x_0)] = 0$. Второе и третье соотношения в (1.4) обеспечивают совпадение вертикальных (вдоль оси x_2) и горизонтальных (вдоль оси x_1) перемещений упругого тела с перемещениями включения на γ^-. Краевые условия (1.5) соответствуют свободным концам балки, т. е. изгибающий момент и перерезающая сила равны нулю. Кроме того, продольная сила также равна нулю. Положительный параметр δ характеризует жесткость включения.

Приведем вариационную формулировку задачи (1.1)–(1.6). С этой целью введем множество допустимых перемещений

$$K_b = \big\{(u, v, w) \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2 \times H^2(\gamma) \times H^1(\gamma) \mid [u_\nu] \geq 0,\ v = u_\nu^-,\ w = u_\tau^- \text{ на } \gamma\big\}$$

и рассмотрим функционал энергии

$$\Pi_\delta(u, v, w) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} fu + \frac{\delta}{2}\int\limits_\gamma v_{,11}^2 + \frac{\delta}{2}\int\limits_\gamma w_{,1}^2,$$

где пространство Соболева $H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)$ определяется так:

$$H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) = \{\phi \in H^1(\Omega_\gamma) \mid \phi = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Можно доказать существование решения задачи минимизации [17]:

$$\text{найти } (u^\delta, v^\delta, w^\delta) \in K_b \text{ так, что } \Pi_\delta(u^\delta, v^\delta, w^\delta) = \inf_{K_b} \Pi_\delta.$$

Решение этой задачи удовлетворяет вариационному неравенству

$$(u^\delta, v^\delta, w^\delta) \in K_b, \tag{1.7}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(\bar{u} - u^\delta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\delta) + \delta\int\limits_\gamma v_{,11}^\delta(\bar{v}_{,11} - v_{,11}^\delta) + \delta\int\limits_\gamma w_{,1}^\delta(\bar{w}_{,1} - w_{,1}^\delta) \geq 0, \quad (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_b. \tag{1.8}$$

Сходимость решений при $\delta \to \infty$ в задаче (1.7), (1.8). Интересно исследовать сходимость решений задачи (1.7), (1.8) при $\delta \to \infty$. Введем в рассмотрение пространство $R_s(\gamma)$ для жестких перемещений включения и множество K_r допустимых перемещений для предельной задачи:

$$R_s(\gamma) = \{l \mid l(x_1) = c_0 + c_1 x_1,\ x_1 \in (0,1),\ c_0, c_1 \in \mathbb{R}\},$$

$$K_r = \big\{u \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2 \mid [u_\nu] \geq 0,\ u^-_\nu|_\gamma \in R_s(\gamma),\ u^-_\tau|_\gamma \in \mathbb{R}\big\}.$$

Как оказывается, в модели (1.7), (1.8) можно осуществить переход к пределу при $\delta \to \infty$ и получить вариационное неравенство для предельной функции u:

$$u \in K_r, \tag{1.9}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) \geq 0, \quad \bar{u} \in K_r. \tag{1.10}$$

Обоснование предельного перехода в задаче (1.7), (1.8) обеспечивает доказательство разрешимости в задаче (1.9), (1.10). С другой стороны, доказательство разрешимости задачи (1.9), (1.10) можно осуществить, минимизируя функционал энергии

$$\pi(\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\varphi)\varepsilon(\varphi) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\varphi$$

на множестве K_r.

Заметим также, что решение задачи (1.9), (1.10) единственно.

Приведем дифференциальные формулировки задачи (1.9), (1.10).

(i) Первая дифференциальная формулировка задачи (1.9), (1.10). Требуется найти поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные Ω_γ, и перемещения тонкого включения $l_0 \in R_s(\gamma)$, $q_0 \in \mathbb{R}$, определенные на γ, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.11}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.12}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{1.13}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad l_0 = u^-_\nu, \quad q_0 = u^-_\tau \quad \text{на } \gamma, \tag{1.14}$$

$$\int\limits_\gamma [\sigma\nu \cdot u] = 0, \tag{1.15}$$

$$-\int\limits_\gamma [\sigma\nu \cdot \bar{u}] \geq 0, \quad \bar{u} \in K_r. \tag{1.16}$$

Можно доказать эквивалентность формулировок (1.9), (1.10) и (1.11)–(1.16) на классе гладких решений.

(ii) Вторая дифференциальная формулировка задачи (1.9), (1.10). В дополнение к (1.11)–(1.16) приведем еще одну дифференциальную формулировку задачи (1.9), (1.10). Она имеет следующий вид. Требуется найти поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные на Ω_γ, и перемещения тонкого включения $l_0 \in R_s(\gamma)$, $q_0 \in \mathbb{R}$, определенные на γ, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.17}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.18}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{1.19}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad l_0 = u_\nu^-, \quad q_0 = u_\tau^- \quad \text{на } \gamma, \tag{1.20}$$

$$\sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{1.21}$$

$$\int\limits_\gamma \sigma_\tau^- = 0, \quad \int\limits_\gamma [\sigma_\nu] l = 0, \quad l \in R_s(\gamma). \tag{1.22}$$

Условия (1.22) гарантируют, что главный вектор сил и главный момент сил, действующие на γ, равны нулю. Приведенная формулировка (1.17)–(1.22) также эквивалентна (1.9), (1.10) на классе гладких решений и, следовательно, эквивалентна (1.11)–(1.16).

Сходимость решений при $\delta \to 0$ в задаче (1.7), (1.8). Рассмотрим теперь ситуацию, при которой $\delta \to 0$ в задаче (1.7), (1.8). Оказывается, возможен переход к пределу и в этом случае. Определим множество допустимых перемещений для предельной задачи

$$K_0 = \big\{u \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2 \mid [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma\big\}.$$

Можно доказать, что решения u^δ задачи (1.7), (1.8) сходятся к функции u, которая является решением следующего вариационного неравенства [17]:

$$u \in K_0, \tag{1.23}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) \geq 0, \quad \bar{u} \in K_0. \tag{1.24}$$

Таким образом, предельная задача для семейства (1.7), (1.8) при $\delta \to 0$ в точности совпадает с хорошо известной задачей о равновесии упругого тела с трещиной γ (включением нулевой жесткости) (см. [2]). В полученной модели (1.23), (1.24) о равновесии упругого тела с трещиной также выполнено условие взаимного непроникания противоположных берегов. Приведем дифференциальную формулировку задачи (1.23), (1.24). Требуется найти поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные Ω_γ, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.25}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.26}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{1.27}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^\pm \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^\pm = 0, \quad \sigma_\nu [u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma. \tag{1.28}$$

Формулировки (1.25)–(1.28) и (1.23), (1.24) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.

Анизотропное включение Бернулли — Эйлера. Рассмотренная выше модель (1.1)–(1.6) соответствует случаю, когда жесткость тонкого включения в направлении осей x_1, x_2 одинакова (и пропорциональна параметру δ). Рассмотрим случай, когда жесткость включения в направлении осей x_1, x_2 различна. Будем фиксировать параметр жесткости включения вдоль одной оси и одновременно менять параметр жесткости вдоль другой оси. Формулировка соответствующей задачи равновесия при заданном параметре жесткости $\delta > 0$ состоит в следующем. Требуется найти функции $(u^\delta, v^\delta, w^\delta)$ такие, что

$$(u^\delta, v^\delta, w^\delta) \in K_b, \tag{1.29}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(\bar{u} - u^\delta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\delta)$$
$$+ \int\limits_\gamma v^\delta_{,11}\big(\bar{v}_{,11} - v^\delta_{,11}\big) + \delta \int\limits_\gamma w^\delta_{,1}\big(\bar{w}_{,1} - w^\delta_{,1}\big) \geq 0, \quad (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_b. \tag{1.30}$$

В данном случае жесткость включения вдоль оси x_1 пропорциональна δ, а вдоль оси x_2 фиксирована (и для простоты считается равной единице). Цель дальнейших рассуждений — анализ перехода к пределу в (1.29), (1.30) при $\delta \to +\infty$, $\delta \to 0$. Сформулируем полученные при этом результаты.

Переход к пределу при $\delta \to +\infty$ в задаче (1.29), (1.30). Как оказывается, можно осуществить предельный переход в подходящем смысле в задаче (1.29), (1.30) при $\delta \to +\infty$. Формулировка предельной задачи состоит в следующем. Найти перемещения $u = (u_1, u_2)$, тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ, и перемещения тонкого включения $q_0 \in \mathbb{R}$, v, определенные на γ, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.31}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.32}$$

$$v_{,1111} = [\sigma_\nu] \quad \text{на } \gamma, \tag{1.33}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad v_{,11} = v_{,111} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, 1, \tag{1.34}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \; v = u_\nu^-, \; q_0 = v_\tau^- \quad \text{на } \gamma, \tag{1.35}$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{1.36}$$

$$\int\limits_\gamma \sigma_\tau^- = 0. \tag{1.37}$$

Полученная модель (1.31)–(1.37) соответствует так называемому полужесткому включению γ. Это означает, что в направлении одной из координатных осей (в данном случае оси x_2) для включения необходимо решать уравнение равновесия (1.33), а в направлении другой оси поле перемещений имеет заданную структуру.

Переход к пределу при $\delta \to 0$ в задаче (1.29), (1.30). Как выясняется, в задаче (1.29), (1.30) можно осуществить предельный переход в подходящем смысле и при $\delta \to 0$. В этом случае формулировка предельной задачи будет следующая. Найти перемещения $u = (u_1, u_2)$, тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ, и перемещение тонкого включения v, определенное на γ, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.38}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.39}$$

$$v_{,1111} = [\sigma_\nu] \quad \text{на } \gamma, \tag{1.40}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma; \; v_{,11} = v_{,111} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, 1, \tag{1.41}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad v = u_\nu^- \quad \text{на } \gamma, \tag{1.42}$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \, \sigma_\tau^\pm = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma. \tag{1.43}$$

Заметим, что в данной модели (1.38)–(1.43) для тонкого включения решается лишь уравнение равновесия (1.40), позволяющее определять вертикальные перемещения.

Случай другой анизотропии включения Бернулли — Эйлера. Предположим, что в модели вида (1.1)–(1.6) меняется параметр жесткости упругого включения на изгиб, а параметр жесткости тонкого включения на растяжение постоянен (и равен для простоты единице). В этом случае при заданном параметре δ вариационное неравенство будет иметь вид

$$(u^\delta, v^\delta, w^\delta) \in K_b, \tag{1.44}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(\bar{u} - u^\delta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\delta) + \delta \int\limits_\gamma v^\delta_{,11}(\bar{v}_{,11} - v^\delta_{,11}) + \int\limits_\gamma w^\delta_{,1}(\bar{w}_{,1} - w^\delta_{,1}) \geq 0, \quad (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_b. \tag{1.45}$$

Предельный переход в задаче (1.44), (1.45) при $\delta \to \infty$. Сформулируем предельную задачу, соответствующую $\delta \to \infty$ в модели (1.44), (1.45). Формулировка предельной задачи состоит в следующем. Требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ, и функции $l_0 \in R_s(\gamma)$, w, определенные на γ, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.46}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.47}$$

$$-w_{,11} = g + [\sigma_\tau] \quad \text{на } \gamma, \tag{1.48}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad w_{,1} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, 1, \tag{1.49}$$

$$u_\nu^- = l_0, \quad u_\tau^- = w \quad \text{на } \gamma, \tag{1.50}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{1.51}$$

$$\int\limits_\gamma [\sigma_\nu] l = 0, \quad l \in R_s(\gamma). \tag{1.52}$$

Как видно, в модели (1.46)–(1.52) включение γ является полужестким. При этом задана структура поля перемещений вдоль оси x_2, и в то же время требуется решать уравнение равновесия (1.48) вдоль оси x_1.

Предельный переход в задаче (1.44), (1.45) при $\delta \to 0$. Формулировка предельной задачи, соответствующей $\delta \to 0$, состоит в следующем. Требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ, и функцию w, определенную в γ, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.53}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.54}$$

$$-w_{,11} = g + [\sigma_\tau] \quad \text{на } \gamma, \tag{1.55}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma; \ w_{,1} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, 1, \tag{1.56}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \ w = u_\tau^-, \ \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{1.57}$$

$$[\sigma_\nu] = 0, \ \sigma_\nu^+ \leq 0, \ \sigma_\tau^+ = 0 \quad \text{на } \gamma. \tag{1.58}$$

2. Тонкое включение Тимошенко

Изотропное включение Тимошенко. В этом разделе тонкое упругое включение γ будет описываться в рамках модели балки Тимошенко. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ такая, что $\bar{\gamma} \subset \Omega$, $\gamma = (0, 1) \times \{0\}$. Обозначим через $\nu = (0, 1)$ единичную нормаль к γ и положим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$, $\tau = (1, 0)$ (см. рис. 1). Для заданных внешних нагрузок $f \in L^2(\Omega)^2$, действующих на упругое тело, требуется найти поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ, а также перемещения тонкого включения v, w и угол поворота φ, определенные на γ, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{2.1}$$

$$-\alpha w_{,11} = [\sigma_\tau] \quad \text{на } \gamma, \tag{2.2}$$

$$-\alpha \varphi_{,11} + \alpha v_{,1} + \alpha \varphi = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{2.3}$$

$$-\alpha v_{,11} - \alpha \varphi_{,1} = [\sigma_\nu] \quad \text{на } \gamma, \tag{2.4}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{2.5}$$

$$\varphi + v_{,1} = w_{,1} = \varphi_{,1} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, 1, \tag{2.6}$$

$$[u_\nu] \geq 0,\ v = u_2^-, \quad w = u_1^- \quad \text{на } \gamma, \tag{2.7}$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma. \tag{2.8}$$

Соотношения (2.1) суть уравнения равновесия и закон Гука; соотношения (2.2)–(2.4) соответствуют уравнениям Тимошенко для упругой балки γ. Как и ранее, правые части $[\sigma_\tau]$, $[\sigma_\nu]$ в (2.2), (2.4) описывают влияние окружающей упругой среды на балку γ. Неравенство в (2.7) обеспечивает взаимное непроникание берегов трещины. Второе и третье соотношения в (2.7) обеспечивают совпадение вертикальных (вдоль оси x_2) и горизонтальных (вдоль оси x_1) перемещений упругого тела с перемещениями включения на γ^-. Краевые условия (2.6) соответствуют нулевому моменту, нулевой перерезающей силе и нулевой силе вдоль оси x_1 в концевых точках включения. Как и в модели (1.1)–(1.6), краевые условия (2.8) являются обычными для проблем с неизвестной областью контакта. Параметр α характеризует жесткость включения γ.

Сначала приведем вариационную формулировку задачи (2.1)–(2.8). Введем множество допустимых перемещений

$$K_t = \big\{(u, v, w, \varphi) \mid u \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2,\ (v, w, \varphi) \in H^1(\gamma)^3,\\ [u_\nu] \geq 0,\ v = u_\nu^-,\ w = u_\tau^- \text{ на } \gamma\big\}$$

и функционал энергии

$$G_\alpha(u, v, w, \varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} fu + \frac{\alpha}{2}\int\limits_\gamma \big\{w_{,1}^2 + \varphi_{,1}^2 + (v_{,1} + \varphi)^2\big\}.$$

Здесь $\sigma(u) = \sigma$ определяются из (2.1), т. е. $\sigma(u) = A\varepsilon(u)$. Решение задачи минимизации функционала G_α на множестве K_t существует и удовлетворяет вариационному неравенству [19]

$$(u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha, \varphi^\alpha) \in K_t, \tag{2.9}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha)\varepsilon(\bar{u} - u^\alpha) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\alpha) + \alpha\int\limits_\gamma \big\{w_{,1}^\alpha(\bar{w}_{,1} - w_{,1}^\alpha) + \varphi_{,1}^\alpha(\bar{\varphi}_{,1} - \varphi_{,1}^\alpha)\\ + (v_{,1}^\alpha + \varphi^\alpha)(\bar{v}_{,1} + \bar{\varphi} - v_{,1}^\alpha - \varphi^\alpha)\big\} \geq 0, \quad (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\varphi}) \in K_t. \tag{2.10}$$

Можно доказать, что задачи (2.1)–(2.8) и (2.9), (2.10) эквивалентны на классе гладких решений.

Сходимость параметра α к бесконечности в задаче (2.9), (2.10). В этом подразделе исследуем предельный переход при стремлении параметра α к бесконечности в задаче (2.9), (2.10).

Определим пространство допустимых перемещений на γ для предельной задачи

$$R(\gamma) = \{(v, w) \mid w = c_1,\ v(x_1) = -c_2 x_1 + c_3 \text{ на } \gamma,\ c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3\}$$

и множество допустимых перемещений для упругого тела

$$K_r = \big\{\bar{u} \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2 \mid [\bar{u}_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma,\ \bar{u}|_{\gamma^-} \in R(\gamma)\big\}.$$

В задаче (2.9), (2.10) возможен предельный переход при $\alpha \to \infty$. Предельные соотношения для предельной функции u имеют вид вариационного неравенства

$$u \in K_r, \tag{2.11}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u) \geq 0, \quad \bar{u} \in K_r. \tag{2.12}$$

Таким образом, предельная задача для (2.9), (2.10) при $\alpha \to \infty$ совпадает с задачей (2.11), (2.12), описывающей равновесие упругого тела с тонким жестким включением при наличии отслоения. Заметим, что задача (2.11), (2.12) в точности совпадает с задачей (1.9), (1.10), полученной предельным переходом к бесконечности по параметру жесткости в модели (1.7), (1.8) с включением Бернулли — Эйлера.

Наряду с вариационной формулировкой задачи (2.11), (2.12) приведем ее дифференциальную формулировку: найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, и постоянные c_1, c_2, c_3 такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{2.13}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{2.14}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{2.15}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad u_1^- = c_1, u_2^- = -c_2 x + c_3 \quad \text{на } \gamma, \tag{2.16}$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{2.17}$$

$$\int\limits_\gamma \{[\sigma_\nu]\bar{v} + [\sigma_\tau]\bar{w}\} = 0, \quad (\bar{v}, \bar{w}) \in R(\gamma). \tag{2.18}$$

Можно проверить, что формулировки (2.11), (2.12) и (2.13)–(2.18) эквивалентны на классе гладких решений.

Сходимость параметра α к нулю в задаче (2.9), (2.10). Предположим, что параметр жесткости α стремится к нулю в задаче (2.9), (2.10). Оказывается, в этом случае также можно обосновать возможность перехода к пределу.

Введем множество допустимых перемещений для предельной задачи

$$K_0 = \{\phi \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2 \mid [\phi_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma\}.$$

Тогда предельная функция u удовлетворяет вариационному неравенству

$$u \in K_0, \tag{2.19}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u) \geq 0, \quad \bar{u} \in K_0. \tag{2.20}$$

Таким образом, предельная для (2.9), (2.10) при $\alpha \to 0$ задача в точности соответствует задаче равновесия упругого тела, содержащего трещину γ при краевых условиях взаимного непроникания берегов. Эквивалентная дифференциальная формулировка задачи (2.19), (2.20) имеет вид (1.25)–(1.28). Здесь также следует подчеркнуть, что задача (2.19), (2.20) в точности совпадает с задачей, полученной предельным переходом к нулю по параметру жесткости в модели (1.7), (1.8) с включением Бернулли — Эйлера.

Анизотропное включение Тимошенко. Рассмотрим случай анизотропного включения Тимошенко в упругом теле. В этом случае модель (2.1)–(2.8) будет содержать два положительных параметра α, δ.

Формулировка задачи равновесия для упругого тела, содержащего анизотропное включение Тимошенко, следующая. Найти вектор перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ, а также перемещения тонкого включения v, w и угол поворота φ, определенные на γ, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{2.21}$$

$$-\alpha w_{,11} = [\sigma_\tau] \quad \text{на } \gamma, \tag{2.22}$$

$$-\alpha\varphi_{,11} + \delta v_{,1} + \delta\varphi = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{2.23}$$

$$-\delta v_{,11} - \delta\varphi_{,1} = [\sigma_\nu] \quad \text{на } \gamma, \tag{2.24}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{2.25}$$

$$\varphi + v_{,1} = w_{,1} = \varphi_{,1} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, 1, \tag{2.26}$$

$$[u_\nu] \ge 0, \quad v = u_2^-, \quad w = u_1^- \quad \text{на } \gamma, \tag{2.27}$$

$$\sigma_\nu^+ \le 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma. \tag{2.28}$$

Для фиксированных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ решение задачи (2.21)–(2.28) существует. Интересно обосновать предельные переходы при $\alpha \to \infty$ для фиксированного δ и $\delta \to \infty$ для фиксированного α.

Сходимость решений в задаче (2.21)–(2.28) при $\alpha \to \infty$. Пусть δ фиксировано. Для простоты полагаем $\delta = 1$. Тогда соответствующие решения задачи (2.21)–(2.28) удовлетворяют для выбранного α следующему вариационному неравенству:

$$(u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha, \varphi^\alpha) \in K_t, \tag{2.29}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha)\varepsilon(\bar u - u^\alpha) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar u - u^\alpha) + \int\limits_\gamma \big\{\alpha w_{,1}^\alpha\big(\bar w_{,1} - w_{,1}^\alpha\big) + \alpha\varphi_{,1}^\alpha\big(\bar\varphi_{,1} - \varphi_{,1}^\alpha\big)$$
$$+ \big(v_{,1}^\alpha + \varphi^\alpha\big)\big(\bar v_{,1} + \bar\varphi - v_{,1}^\alpha - \varphi^\alpha\big)\big\} \ge 0, \quad (\bar u, \bar v, \bar w, \bar\varphi) \in K_t. \tag{2.30}$$

Введем в рассмотрение множество допустимых перемещений для предельной задачи

$$K_1 = \big\{(\bar u, \bar v, \bar\varphi) \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(\gamma) \times \mathbb{R}$$
$$\mid [\bar u_\nu] \ge 0,\ \bar u_2^- = \bar v,\ \bar u_1^- = c_1,\ \bar\varphi = c_2 \text{ на } \gamma,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\big\}.$$

В задаче (2.29), (2.30) можно обосновать предельный переход при $\alpha \to \infty$ (см. [19]). Предельное вариационное неравенство имеет вид

$$(u, v, \varphi) \in K_1,$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar u - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar u - u) + \int\limits_\gamma (v_{,1} + \varphi)(\bar v_{,1} + \bar\varphi - v_{,1} - \varphi) \geq 0, \quad (\bar u, \bar v, \bar\varphi) \in K_1. \tag{2.31}$$

Таким образом, при $\alpha \to \infty$ решения задачи (2.29), (2.30) сходятся в подходящем смысле к решению вариационного неравенства (2.31).

Приведем эквивалентную дифференциальную формулировку задачи (2.31): найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ, а также функции v, φ, определенные на γ, и постоянные c_1, c_2 такие, что $\varphi = c_2$ и

$$-\operatorname{div}\sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{2.32}$$

$$-v_{,11} = [\sigma_\nu] \quad \text{на } \gamma, \tag{2.33}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad v_{,1} + c_2 = 0 \text{ при } x_1 = 0, 1, \tag{2.34}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad u_2^- = v, \quad u_1^- = c_1 \quad \text{на } \gamma, \tag{2.35}$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{2.36}$$

$$\int\limits_\gamma \sigma_\tau^- = 0, \quad \int\limits_\gamma (v_{,1} + c_2) = 0. \tag{2.37}$$

Полученная задача (2.32)–(2.37) соответствует полужесткому тонкому включению в упругом теле. Это означает, что включение является жестким лишь в направлении оси x_1 и в смысле углов поворота. Следует отметить также, что постоянную c_2 можно исключить из модели (2.32)–(2.37).

Сходимость решений в задаче (2.21)–(2.28) при $\delta \to \infty$. Рассмотрим случай, когда α фиксировано в задаче (2.21)–(2.28). Полагаем для простоты $\alpha = 1$. В этом случае решение задачи (2.21)–(2.28) для заданного δ удовлетворяет вариационному неравенству

$$(u^\delta, v^\delta, w^\delta, \varphi^\delta) \in K,$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(\bar u - u^\delta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar u - u^\delta) + \int\limits_\gamma \big\{ w^\delta_{,1}(\bar w_{,1} - w^\delta_{,1}) + \varphi^\delta_{,1}(\bar\varphi_{,1} - \varphi^\delta_{,1}) + \delta\big(v^\delta_{,1} + \varphi^\delta\big)\big(\bar v_{,1} + \bar\varphi - v^\delta_{,1} - \varphi^\delta\big)\big\} \geq 0, \quad (\bar u, \bar v, \bar w, \bar\varphi) \in K_t. \tag{2.38}$$

Оказывается, что решения задачи (2.38) сходятся при $\delta \to \infty$ в подходящем смысле, и при этом предельные функции u, σ, v, w являются решением следующей краевой задачи:

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma,$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma,$$

$$v_{,1111} = [\sigma_\nu], \quad -w_{,11} = [\sigma_\tau] \quad \text{на } \gamma,$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

$$v_{,11} = v_{,111} = w_{,1} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, 1,$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad v = u_\nu^-, \quad w = u_\tau^-, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma,$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Таким образом, предельная задача для (2.38) при $\delta \to \infty$ описывает равновесие упругого тела с тонким упругим включением Бернулли — Эйлера при наличии отслоения, см. задачу (1.1)–(1.6). Говоря другими словами, задача (2.38) о равновесии упругого тела с включением Тимошенко переходит в задачу о равновесии упругого тела с включением Бернулли — Эйлера при стремлении параметра δ к бесконечности.

3. Слабо искривленное тонкое включение

Формулировка задачи равновесия. В этом разделе будут рассмотрены задачи равновесия упругого тела с тонкими упругими слабо искривленными включениями при наличии отслоений. Сформулируем соответствующую краевую задачу. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ, $\bar{\gamma} \subset \Omega$, $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$, где

$$\gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = \xi(x_1),\ x_1 \in (0, 1)\},$$

а ξ — заданная гладкая функция. Считаем, что срединная линия тонкого упругого включения совпадает с γ. Упругое тело при этом занимает область Ω_γ (рис. 2). Для описания слабо искривленного включения используется модель Кирхгофа — Лява (см., например, [36, с. 27]). Термин «слабо искривленное включение» означает, что функционал энергии для этого включения, с одной стороны, будет содержать кривизну, а с другой, метрика на кривой γ при этом выбирается такая же, как на отрезке $(0, 1) \times \{0\}$. Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор нормали к γ, а $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$, $A = \{a_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, — заданный положительно определенный тензор коэффициентов упругости; $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ — заданный вектор внешних сил, действующих на упругое тело, а $k \in L^\infty(0, 1)$ — заданная кривизна срединной линии тонкого включения, равная $\xi''(1 + (\xi')^2)^{-3/2}$.

Предположим, что положительный (по отношению к нормали ν) берег включения γ отслаивается, образуя тем самым трещину между матрицей и включением. На берегах трещины будем задавать краевые условия вида неравенств, обеспечивающие взаимное непроникание берегов. Постановка задачи равновесия упругого тела с включением γ состоит в следующем. Найти вектор перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в

Ω_γ, и перемещения точек тонкого включения v, w, определенные для $x_1 \in (0,1)$, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{3.1}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{3.2}$$

$$\delta v_{,1111} + \delta k(w_{,1} + kv) = [\sigma_\nu]p \quad \text{при } x_1 \in (0,1), \tag{3.3}$$

$$-\delta w_{,11} - \delta(kv)_{,1} = [\sigma_\tau]p \quad \text{при } x_1 \in (0,1), \tag{3.4}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{3.5}$$

$$v_{,11} = v_{,111} = w_{,1} + kv = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, 1, \tag{3.6}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad v = u_\nu^-, \quad w = u_\tau^- \quad \text{на } \gamma, \tag{3.7}$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma. \tag{3.8}$$

Здесь δ — положительный параметр, характеризующий свойства материала включения; $[h] = h^+ - h^-$ — скачок функции h на γ, где $h^\pm$ — значения функции h на положительном и отрицательном берегах разреза в соответствии с выбранным направлением нормали ν, $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, $\sigma_\tau = (\sigma\nu)\tau$, $u_\nu = u\nu$, $u_\tau = u\tau$, $p = \sqrt{1 + \xi_{,1}^2}$. Второе и третье равенства (3.7) следует понимать так: $v(x_1) = u_\nu^-(x_1, \xi(x_1))$, $x_1 \in (0,1)$. При этом (3.1), (3.2) — уравнения равновесия упругого тела и уравнение состояния (закон Гука), а (3.3), (3.4) представляют уравнения равновесия тонкого слабо искривленного включения. Правые части уравнений равновесия тонкого включения (3.3), (3.4) описывают силы, действующие на включение со стороны упругого тела. Первое краевое условие из (3.7) обеспечивает взаимное непроникание берегов трещины, а второе и третье условия гарантируют равенство перемещений точек упругого тела и тонкого включения на γ^-. Краевые условия (3.6) соответствуют нулевому моменту, нулевой перерезающей силе и нулевой деформации растяжения (сжатия). Что касается краевых условий (3.8), то, как уже отмечено, они типичны при формулировке краевых задач с неизвестной областью контакта (см. [2]). Следует заметить, что при $\xi \equiv 0$ на $(0,1)$ будем иметь $k \equiv 0$ и, следовательно, задача (3.1)–(3.8) будет в точности совпадать с задачей (1.1)–(1.6), которая описывает равновесие упругого тела с включением Бернулли — Эйлера.

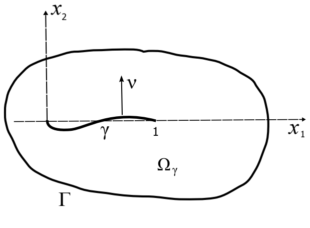

Рис. 2. Слабо искривленное включение в упругом теле

Соотношения (3.1)–(3.8) в точности эквивалентны вариационной формулировке задачи минимизации функционала энергии на подходящем пространстве функций. При этом функционал энергии содержит слагаемые, соответствующие энергии деформирования упругого тела, работе внешних сил, энергии изгиба и растяжения тонкого включения. Приведем вариационную формулировку задачи (3.1)–(3.8). Введем для этого множество допустимых перемещений

$$K_c = \big\{(u, v, w) \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2 \times H^2(0,1) \times H^1(0,1) \mid [u_\nu] \geq 0,\ v = u_\nu^-,\ w = u_\tau^- \text{ на } \gamma\big\}$$

и рассмотрим функционал энергии

$$\pi_\delta(u, v, w) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} fu + \frac{\delta}{2}\int\limits_0^1 v_{,11}^2 + \frac{\delta}{2}\int\limits_0^1 (w_{,1} + kv)^2.$$

Тогда задача минимизации имеет следующий вид: найти $(u, v, w) \in K_c$ так, что $\pi_\delta(u, v, w) = \inf\limits_{K_c} \pi_\delta$ имеет решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$(u^\delta, v^\delta, w^\delta) \in K_c, \tag{3.9}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(\bar{u} - u^\delta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\delta) + \delta\int\limits_0^1 \big(w^\delta_{,1} + kv^\delta\big)\big(\bar{w}_{,1} - w^\delta_{,1}\big)$$
$$+ \delta\int\limits_0^1 \big\{v^\delta_{,11}\big(\bar{v}_{,11} - v^\delta_{,11}\big) + k\big(w^\delta_{,1} + kv^\delta\big)(\bar{v} - v^\delta)\big\} \geq 0, \quad (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_c. \tag{3.10}$$

Разрешимость задачи (3.9), (3.10) при фиксированном значении параметра δ известна [37].

Можно также доказать, что на классе гладких решений задачи (3.1)–(3.8) и (3.9), (3.10) эквивалентны. Это означает, что все соотношения (3.1)–(3.8) вытекают из (3.9), (3.10) и, наоборот, неравенство (3.9), (3.10) можно вывести из (3.1)–(3.8).

Переход к пределу при $\delta \to 0$ в задаче (3.9), (3.10). Рассмотрим поведение решения задачи (3.9), (3.10) при стремлении параметра жесткости δ к нулю.

Введем обозначение для множества допустимых перемещений, соответствующих предельной задаче

$$K_0 = \{u \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2 \mid [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma\}.$$

Возьмем далее такую функцию $\bar{u} \in K_0$, которая является гладкой на γ^-. Тогда $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_c$, где $\bar{v} = \bar{u}_\nu^-, \bar{w} = \bar{u}_\tau^-$. Подставляя $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ в качестве тестовой функции в (3.10), получаем, что можно перейти к пределу при $\delta \to 0$. В пределе получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) \geq 0. \tag{3.11}$$

Неравенство (3.11) выполняется для всех функций $\bar{u} \in K_0$, гладких на γ^-. В силу леммы о плотности, доказанной в [13], можно показать, что оно будет выполнено для всех функций из K_0. Таким образом, предельная функция u будет решением следующего вариационного неравенства:

$$u \in K_0, \tag{3.12}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u) \geq 0, \quad \bar{u} \in K_0. \tag{3.13}$$

Задача (3.12), (3.13) описывает равновесие упругого тела с трещиной γ и краевыми условиями взаимного непроникания берегов $\gamma^\pm$. Эквивалентная дифференциальная формулировка задачи (3.12), (3.13) будет такая. Найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{3.14}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{3.15}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{3.16}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^\pm \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^\pm = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \text{ на } \gamma. \tag{3.17}$$

Таким образом, при стремлении параметра жесткости к нулю в задаче (3.9), (3.10) предельная модель (3.14)–(3.17) описывает равновесие упругого тела с включением нулевой жесткости (трещиной). Ранее в разд. 1, 2 отмечалось, что предельные модели для случая включений Бернулли — Эйлера и Тимошенко обладают таким же свойством.

Переход к пределу при $\delta \to \infty$ в задаче (3.9), (3.10). Здесь исследуется переход к пределу по параметру жесткости при $\delta \to \infty$ в задаче (3.9), (3.10). Стремление параметра δ к бесконечности означает, что тонкое включение становится жестким. Введем в рассмотрение множество допустимых перемещений

$$K_r = \big\{u \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2 \mid [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma,\ (u_\nu^-, u_\tau^-)|_\gamma \in L(0,1)\big\},$$

где

$$L(0,1) = \{(v,w) \mid v(x_1) = a_0 + a_1 x_1,\ w_{,1}(x_1) + k(x_1)v(x_1) = 0 \\ \text{при } x_1 \in (0,1),\ a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Введенное множество $L(0,1)$ определяет пространство жестких перемещений включения γ в предельной задаче, соответствующей $\delta \to \infty$. Следует отметить, что в определении множества K_r величину $(u_\nu^-, u_\tau^-)|_\gamma$ рассматриваем как функцию одного переменного x_1 в силу условия $x_2 = \varphi(x_1)$ на γ.

Возьмем $\bar{u} \in K_r$, тогда $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_c$, $\bar{v} = u_\nu^-$, $\bar{w} = u_\tau^-$, и эту функцию можно подставить в (3.10) в качестве тестовой функции. После перехода к пределу в (3.9), (3.10) при $\delta \to \infty$ для предельной функции u получим

$$u \in K_r, \tag{3.18}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u) \geq 0, \quad \bar{u} \in K_r. \tag{3.19}$$

Предельную задачу (3.18), (3.19) можно записать в следующем эквивалентном виде: найти вектор перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{3.20}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{3.21}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{3.22}$$

$$[u_\nu] \geq 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (u_\nu^-, u_\tau^-)|_\gamma \in L(0,1), \tag{3.23}$$

$$\int\limits_\gamma [\sigma\nu \cdot u] = 0, \tag{3.24}$$

$$-\int\limits_\gamma [\sigma\nu \cdot \bar{u}] \geq 0, \quad \bar{u} \in K_r. \tag{3.25}$$

Наряду с (3.20)–(3.25) можно предложить еще одну эквивалентную формулировку задачи (3.18), (3.19). Именно, требуется найти вектор перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ, и функции $(v, w) \in L(0,1)$ такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{3.26}$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{3.27}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{3.28}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad v = u_\nu^-, \quad w = u_\tau^- \quad \text{на } \gamma, \tag{3.29}$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{3.30}$$

$$\int\limits_\gamma [\sigma_\nu]\bar{v} + \int\limits_\gamma [\sigma_\tau]\bar{w} = 0, \quad (\bar{v}, \bar{w}) \in L(0,1). \tag{3.31}$$

На классе гладких решений формулировки (3.18), (3.19), (3.20)–(3.25) и (3.26)–(3.31) эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
2. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
3. *Ковтуненко В. А.* Инвариантные интегралы энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, № 1. С. 109–123.
4. *Kovtunenko V. A.* Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration // IMA J. Appl. Math. 2006. V. 71, N 5. P. 635–657.
5. *Knees D., Mielke A.* Energy release rate for cracks in finite-strain elasticity // Math. Methods Appl. Sci. 2008. V. 31, N 5. P. 501–518.

6. *Knees D., Schroder A.* Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints // Math. Methods Appl. Sci. 2012. V. 35, N 15. P. 1859–1884.

7. *Рудой Е. М.* Формула Гриффитса и интеграл Черепанова — Райса для пластины с жестким включением и трещиной // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 2. С. 98–117.

8. *Рудой Е. М.* Асимптотика функционала энергии для трехмерного тела с жестким включением и трещиной // Прикл. механика и техн. физика. 2011. Т. 52, № 2. С. 114–127.

9. *Лазарев Н. П.* Задача о равновесии пологой оболочки Тимошенко, содержащей сквозную трещину // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 3. С. 58–69.

10. *Lazarev N. P., Rudoy E. M.* Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition // Z. Angew. Math. Mech. 2014. V. 94. P. 730–739.

11. *Соколовский Я., Хлуднев А. М.* О производной функционала энергии по длине трещины в задачах теории упругости // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, № 3. С. 464–475.

12. *Хлуднев А. М.* Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 5. С. 98–110.

13. *Khludnev A. M., Negri M.* Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body // Z. Angew. Math. Mech. 2012. V. 92, N 5. P. 341–354.

14. *Khludnev A. M.* Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates // Eur. J. Mech., A, Solids. 2012. V. 32. P. 69–75.

15. *Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., Tani A.* Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity // Z. Angew. Math. Mech. 2012. V. 92, N 9. P. 716–730.

16. *Khludnev A. M., Leugering G.* On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // Math. Methods Appl. Sci. 2010. V. 33, N 16. P. 1955–1967.

17. *Khludnev A. M., Leugering G. R.* Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies // Math. Mech. Complex Systems. 2014. V. 2, N 1. P. 1–21.

18. *Khludnev A. M., Leugering G. R.* On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2015. V. 20, N 5. P. 495–511.

19. *Itou H., Khludnev A. M.* On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // Math. Methods Appl. Sci. doi 10.1002/mma.3279.

20. *Щербаков В. В.* Существование оптимальной формы тонких жестких включений в пластине Кирхгофа — Лява // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 4. С. 142–151.

21. *Khludnev A. M.* Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates // Eur. J. Mech., A, Solids. 2012. V. 32. P. 69–75.

22. *Khludnev A. M., Leugering G.* Optimal control of cracks in elastic bodies with thin rigid inclusions // Z. Angew. Math. Mech. 2011. V. 91, N 2. P. 125–137.

23. *Khludnev A. M.* Singular invariant integrals for elastic body with delaminated thin elastic inclusion // Quart. Appl. Math. 2014. V. 72, N 4. P. 719–730.

24. *Lazarev N. P.* Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion // Z. Angew. Math. Phys. 2015. V. 66 N 4. P. 2025–2040.

25. *Khludnev A. M.* Thin inclusions in elastic bodies crossing an external boundary // Z. Angew. Math. Mech. 2015. V. 95, N 11. P. 1256–1267.

26. *Grisvard P.* Singularities in boundary value problems. Masson: Springer-Verl., 1992.

27. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.

28. *Bessoud A.-L., Krasucki F., Serpilli M.* Plate-like and shell-like inclusions with high rigidity // C. R. Math., Acad. Sci. Paris. 2008. V. 346, Special Issue. P. 697–702.

29. *Bessoud A.-L., Krasucki F., Michaille G.* Multi-materials with strong interface: Variational modelings // Asymptotic Anal. 2009. V. 61, N 1. P. 1–19.

30. *Pasternak I. M.* Plane problem of elasticity theory for anisotropic bodies with thin elastic inclusions // J. Math. Sci. 2012. V. 186, N 1. P. 31–47.

31. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B.* Asymptotic analysis of fields in a multi-structure. New York: Oxford Univ. Press, 1999. (Oxford Math. Monogr.).

32. *Vynnytska L., Savula Y.* Mathematical modeling and numerical analysis of elastic body with thin inclusion // Comput. Mech. 2004. V. 50, N 5. P. 533–542.

33. *Неустроева Н. В.* Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 4. С. 92–105.

34. *Неустроева Н. В.* Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 51–64.

35. *Ротанова Т. А.* О постановках и разрешимости задач о контакте двух пластин, содержащих жесткие включения // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 107–118.

36. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек.. М.: Наука, 1972.

37. *Хлуднев А. М.* Слабо искривленное включение в упругом теле при наличии отслоения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2015. № 5. С. 131–144.

Статья поступила 19 февраля 2016 г.

Хлуднев Александр Михайлович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
khlud@hydro.nsc.ru

Попова Татьяна Семеновна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Белинского, 58, Якутск 677000
ptsokt@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

UDC 539.3+517.958

ON THE HIERARCHY OF THIN DELAMINATED INCLUSIONS IN ELASTIC BODIES

A. M. Khludnev and T. S. Popova

Abstract: We consider models of thin delaminated inclusions in elastic bodies. The delamination means a presence of a crack between the inclusion and the matrix. Inequality type boundary conditions are imposed at the crack faces to prevent a mutual penetration. This approach leads to free boundary problem formulations. Connections between different mathematical models are discussed. Passages to limits with respect to inclusion rigidity parameters are analyzed.
Keywords: thin inclusion, elastic body, crack, non-linear boundary conditions, rigidity parameter, limiting models.

REFERENCES

1. *Khludnev A. M. and Kovtunenko V. A.*, Analysis of Cracks in Solids, WIT Press, Southampton; Boston (2000).
2. *Khludnev A. M.*, Problems of Elasticity Theory in Nonsmooth Domains, [in Russian] Fizmatlit, Moscow (2010).
3. *Kovtunenko V. A.* "Invariant energy integrals for the nonlinear crack problem with possible contact of coasts," Appl. Math. Mech., **67**, No. 1, 109–123 (2003).
4. *Kovtunenko V. A.* "Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration," IMA J. Appl. Math. **71**, No. 5, 635–657 (2006).
5. *Knees D. and Mielke A.* "Energy release rate for cracks in finite-strain elasticity," Math. Methods Appl. Sci., **31**, No. 5, 501–518 (2008).
6. *Knees D., Schroder A.* "Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints ," Math. Methods Appl. Sci. **35**, No. 15, 1859–1884 (2012).
7. *Rudoyi E. M.* "The Griffits formula and Cherepanov–Rise integral for pPlate with a rigid inclision and crack," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh., and Inform. **10**, No. 2, 98–117 (2010).
8. *Rudoyi E. M.* "Asymptotics of Energy Functional for Three-dimentional Body with a Rigid Inclusion and Crack," Appl. Mech. and Techn. Phys. **52**, No. 2, 114–127 (2011).
9. *Lazarev N. P.* "The Problem of Equilibrium of a Shallow Timopshenko Shell Cjntaining a Solid Crack," Sib. J. Industr. Math. **15**, No. 3, 58–69 (2012).
10. *Lazarev N. P., Rudoy E. M.* "Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition," Z. Angew. Math. Mech. **94**, 730–739 (2014).
11. *Sokolowski Y. and Khludnev A. M.* "On Derivative of Energy Functional on the Crack Length in Problems of Theory of Elasticity," Appl. Math. and Mech., **64**, No. 3, 464–475 (2000).
12. *Khludnev A. M.* A Problem on a Crack on the Boundary of a Rigid Inclusion in the Elastic Plate Izv. Akad. Nauk, Solid Mechanics, No. 5, 98–110 (2010).
13. *Khludnev A. M., Negri M.* "Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body," Z. Angew. Math. Mech. **92**, No. 5, 341–354 (2012)
14. *Khludnev A. M.* "Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates," Eur. J. Mech., A, Solids, **32**, 69–75 (2012).
15. *Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., Tani A.* "Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity," Z. Angew. Math. Mech., **92**, No. 9, 716–730 (2012).

16. *Khludnev A. M., Leugering G.* “On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks,” Math. Methods Appl. Sci., **33**, No. 16, 1955–1967 (2010).
17. *Khludnev A. M., Leugering G. R.* “Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies,” Math. Mech. Complex Systems, **2**, No. 1 (2014).
18. *Khludnev A. M., Leugering G. R.* “On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies,” Math. Mech. Solids, **20**, No. 5, 495–511 (2015).
19. *Itou H., Khludnev A. M.* On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // Math. Methods Appl. Sci. doi 10.1002/mma.3279.
20. *Shcherbakov V. V.* “Ecistence of the Optimal Form of Thin Rigid Inclusions in a Kiekhgoff–Lyav Plate,” Щербаков В. В. Sib. J. Industr. Math., **16**, No. 4, 142–151 (2013).
21. *Khludnev A. M.* “Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates,” Eur. J. Mech., A, Solids, **32**, 69–75 (2012).
22. *Khludnev A. M., Leugering G.* “Optimal control of cracks in elastic bodies with thin rigid inclusions,” Z. Angew. Math. Mech., **91**, No. 2, 125–137 (2011).
23. *Khludnev A. M.* “Singular invariant integrals for elastic body with delaminated thin elastic inclusion,” Quart. Appl. Math., **72**, No. 4, 719–730 (2014).
24. *Lazarev N. P.* “Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion,” Z. Angew. Math. Phys. **66**, No. 4, 2025–2040 (2015).
25. *Khludnev A. M.* “Thin inclusions in elastic bodies crossing an external boundary,” Z. Angew. Math. Mech., **95**, No. 11, 1256–1267 (2015).
26. *Grisvard P.*, Singularities in boundary value problems, Springer-Verl., Masson (1992).
27. *Morozov N. F.*, Mathamatical Theory of Cracks, Tauka, Moskow (1984).
28. *Bessoud A.-L., Krasucki F., and Serpilli M.* “Plate-like and shell-like inclusions with high rigidity,” C. R. Math., Acad. Sci. Paris, **346**, 697–702 (2008).
29. *Bessoud A.-L., Krasucki F., Michaille G.* “Multi-materials with strong interface: Variational modelings,” Asymptotic Anal., **61**, No. 1, 1–19 (2009).
30. *Pasternak I. M.* “Plane problem of elasticity theory for anisotropic bodies with thin elastic inclusions,” J. Math. Sci., **186**, No. 1, 31–47 (2012).
31. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., and Movchan A. B.*, Asymptotic analysis of fields in a multi-structure, Oxford Univ. Press, New York (1999) (Oxford Math. Monogr.).
32. *Vynnytska L., Savula Y.* “Mathematical modeling and numerical analysis of elastic body with thin inclusion,” Comput. Mech., **50**, No. 5, 533–542 (2004).
33. *Neustroeva N. V.* “A Rigid Inclusion in the Contact Problems for Elastic Plates,” Sib. J. Industr. Math., **12**, No. 4, 92–105 (2009).
34. *Neustroeva N. V.* Unilateral Contact of Elastic plates with a Rigid Indlusion Vestn. Novosib. State Univ., Ser. Math., Mech., and Inform., **9** No. 4, 51–64 (2009).
35. *Rotanova T. A.* “On Statements and the Solvability of Problems on the Contact of Two Plates Containing Rigid Inclusions,” Sib. J. Industr. Math., 15, No. 2, 107–118 (2012).
36. *Vol′mir A. S.*, Nonlinear Dynamics of Plates and Shells, Nauka, Moskow (1972).
37. *Khlufnev A. M.* “Weakly Curved Inclusion in an Elastic Body in the Presence of Delamination,” Izv. Akad. Nauk, Solid Mechanics, No. 5, 131–144 (2015).

Submitted February 19, 2016

Khludnev Aleksandr Mikhayilovich
Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SBRAS,
Acad. Lavrentiev ave, 15, Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
Pirogova st., 2, Novosibirsk 630090, Russia
khlud@hydro.nsc.ru

Popova Tatiana Sergeevna
Nord-East Federal University,
Belinskogo st., 58, Yakutsk 677000, Russia
ptsokt@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

УДК 513.83

О СХОДИМОСТИ D–ПРЕДЕЛОВ

П. В. Черников

Аннотация. Доказаны некоторые утверждения о сходимости D-пределов.
Ключевые слова: финально компактное пространство, счетно полный ультрафильтр, D-предел.

Обозначим через X финально компактное хаусдорфово пространство. Пусть I — произвольное непустое множество, D — счетно полный ультрафильтр над I. В [1] доказана

Лемма 1. *Пусть $f \in X^I$. Тогда существует единственная точка $X_0 \in X$ такая, что для всякой окрестности V точки X_0*

$$\{i \in I : f(i) \in V\} \in D.$$

Эту точку обозначим, следуя [2], через $D\text{-}\lim f$ и назовем *D-пределом функции f*. В случае, когда D — ультрафильтр, X — компактное хаусдорфово пространство, теорема о существовании D-предела, аналогичная лемме 1, содержится в [2]. Докажем некоторые утверждения о сходимости D-пределов.

Потребуется

Лемма 2. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^I$, $f \in X^I$ и*

$$\{i \in I : \lim_{n\to\infty} f_n(i) = f(i)\} \in D.$$

Тогда для всякой окрестности V точки $D\text{-}\lim f$ существует такой номер N, что

$$\{i \in I : f_n(i) \in V\} \in D$$

при всех $n \geq N$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству теоремы 6 из [1].

Теорема 1. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^I$, $f \in X^I$ и существует база B окрестностей точки $D\text{-}\lim f$, состоящая из (открытых) множеств типа F_σ. Пусть*

$$\{i \in I : \lim_{n\to\infty} f_n(i) = f(i)\} \in D.$$

Тогда последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке $D\text{-}\lim f$.

Доказательство. Положим $X_0 = D\text{-}\lim f$. Пусть U — окрестность точки X_0 в пространстве X. Найдется окрестность $V \in B$ точки X_0 такая, что $V \subset U$. По лемме 2 существует такой номер N, что

$$\{i \in I : f_n(i) \in V\} \in D$$

при всех $n \geq N$. По условию множество V имеет тип F_σ, т. е. $V = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, где F_k — замкнутое подмножество пространства X, $k \geq 1$. При $n \geq N$ имеем

$$\{i \in I : f_n(i) \in V\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{i \in I : f_n(i) \in F_k\} \in D.$$

Значит, найдется номер k_n такой, что $\{i \in I : f_n(i) \in F_{k_n}\} \in D$. Отсюда следует, что

$$D\text{-}\lim f_n \in F_{k_n} \subset V \subset U$$

при всех $n \geq N$. Теорема доказана.

Определение [3]. Подмножество Z_0 топологического пространства Z называется *относительно секвенциально компактным*, если каждая последовательность его точек содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке пространства Z.

Теорема 2. *Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^I$, $f \in X^I$. *Пусть*

$$\{i \in I : \lim_{n\to\infty} f_n(i) = f(i)\} \in D$$

и подмножество $\{D\text{-}\lim f_n :\ n = 1, 2, \dots\}$ *пространства* X *относительно секвенциально компактно. Тогда последовательность* $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к точке* $D\text{-}\lim f$.

Доказательство. Положим $X_n = D\text{-}\lim f_n$, $n \geq 1$, $X_0 = D\text{-}\lim f$. Допустим, что последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к точке X_0. Тогда найдутся окрестность U точки X_0 и подпоследовательность $\{X_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что X_{n_k} не принадлежит множеству U при всех $k \geq 1$. Найдется подпоследовательность $\{X_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$ последовательности $\{X_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к некоторой точке $Y \in X$. Так как Y не принадлежит U, то $Y \neq X_0$. Последнее противоречит теореме 5 из [1]. Теорема доказана.

Теорема 2 обобщает теорему 5 из [1].

Теорема 3. *Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^I$, $f \in X^I$ *и каждая точка* $D\text{-}\lim f_n$, $n \geq 1$, *имеет тип* G_σ. *Пусть*

$$S = \{i \in I : \lim_{n\to\infty} f_n(i) = f(i)\} \in D.$$

Тогда последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к точке* $D\text{-}\lim f$.

Доказательство. Положим $X_n = D\text{-}\lim f_n$, $n \geq 1$. Так как точка X_n имеет тип G_σ, то

$$M_n = \{i \in I : f_n(i) = X_n\} \in D, \quad n \geq 1.$$

Пусть V — окрестность точки $D\text{-}\lim f$. Имеем

$$M = S \cap \{i \in I : f(i) \in V\} \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} M_n \neq \varnothing.$$

Пусть $i_0 \in M$. Найдется номер N такой, что $f_n(i_0) \in V$ при $n \geq N$, т. е. $X_n \in V$ при $n \geq N$. Теорема доказана.

Сходимость D-пределов рассматривается также в [4, 5].

Дадим одно применение теоремы 6 из [1]. Пусть X_* — финально компактное регулярное хаусдорфово пространство. Обозначим через I^* множество всех счетно полных ультрафильтров над I. Для $f \in X_*^I$ можно определить функцию $F : I^* \to X_*$ следующим образом:

$$F(L) = L\text{-}\lim f, \quad L \in I^*.$$

Теорема 4. *Пусть D^* — счетно полный ультрафильтр над множеством I^*. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_*^I$, $f \in X_*^I$ и*

$$\{i \in I : \lim_{n\to\infty} f_n(i) = f(i)\} = I.$$

Тогда последовательность $\{D^*\text{-}\lim F_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке $D^*\text{-}\lim F$ (здесь $F_n(L) = L\text{-}\lim f_n$, $F(L) = L\text{-}\lim f$, $L \in I^*$).

Доказательство. Для любого $L \in I^*$ выполнено включение $I \in L$, поэтому по теореме 6 из [1] последовательность $\{L\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $L\text{-}\lim f$, т. е.

$$\{L \in I^* : \lim_{n\to\infty} F_n(L) = F(L)\} = I^*, \quad I^* \in D^*.$$

Применяя еще раз теорему 6 из [1], получаем, что последовательность $\{D^*\text{-}\lim F_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке $D^*\text{-}\lim F$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черников П. В.* Некоторые свойства элементарных теорий и пространства моделей // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 1. С. 153–159.
2. *Кейслер Г. Дж., Чэн Чень-чунь.* Теория непрерывных моделей. М.: Мир, 1971.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
4. *Черников П. В.* Об элементарных теориях, пространстве моделей и D-пределах // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 155–158.
5. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.

Статья поступила 15 марта 2016 г.

Черников Павел Васильевич
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2016. Том 23, № 1

UDC 513.83

ON CONVERGENCE OF D–LIMITS

P. V. Chernikov

Abstract: Some statements about the convergence of D-limits are proved.
Keywords: finally compact topological space, countably complete ultrafilter.

REFERENCES

1. *Chernikov P. V.* "Some Properties of Elementary Theories and Spaces of Models," Math. Notes of Yakut. State Univ., **20**, No. 1, 153–159 (2013).
2. *Chang C. C. and Keisler H. J.*, Continuous Model Theory. Prinston Univ. Press, Prinston (1966).
3. *Engelking R.*, General Topology, Warszawa (1977).
4. *Chernikov P. V.* "On Elementary theories, model spaces and D-limits," Math. Notes of Yakut. State Univ., **18**, No. 1, 155–158 (2011).
5. *Edwards R. D.*, Functional Analysis. Theory and Applications, Holt Rinehart and Winston, New York, Chicago, San Francisco, Toronto, and London (1965).

Submitted March 15, 2016

Chernikov Pavel Vasilievich
Novosibirsk State University,
Pirogova st., 2, Novosibirsk 630090, Russia

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья может быть представлена в виде файла в формате pdf или распечатки, подготовленной с использованием какой-либо компьютерной системы подготовки математических текстов.

5. В начале статьи указывается индекс УДК. Статья сопровождается краткой аннотацией, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках. Подготовленная с использованием компьютера графика должна быть высококачественной, не ниже 600 DPI, и не использующей шрифты Adobe, отсутствующие в пакете MikTeX.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы

должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних трех лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в издательстве и в редакции издания в течение пяти лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство образования и науки Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. Если статья принимается к опубликованию после доработки, то автор направляет в редакцию файл ее последней версии. При подготовке файла следует использовать, как правило, макропакет AMS-TEX со стилевым файлом amsppt.

11. Предоставление файлов в форматах TEX или LaTeX возможно только при согласовании с редакцией. Автор не должен использовать необязательные авторские командные последовательности, введенные для облегчения набора. Запрещается переопределять греческие буквы, стандартные команды и т. п.

12. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

13. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

14. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.