СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 23, № 2 (90) **Апрель—июнь, 2016**

СОДЕРЖАНИЕ

Mathematical Notes of North-Eastern Federal University

Contents

Адрес редакции:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/

e-mail: prokopevav85@gmail.com; madu@ysu.ru; ivanegorov51@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ

М. А. Вержбицкий, С. Г. Пятков

Аннотация. Рассматривается обратная задача об определении вместе с решением начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка неизвестных функций, входящих в граничное условие. В качестве условий переопределения берутся интегралы от решения с весом. Получена теорема существования и единственности решений этой обратной задачи.
Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, краевые и начальные условия, пространство Соболева, теорема существования и единственности, разрешимость.

1. Введение

В работе рассматривается параболическое уравнение

$$Lu = u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(t,x)u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u_{x_i} + a_0(t,x)u = f, \tag{1}$$

где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ, $t \in (0,T)$. Положим $Q = (0,T) \times G$, $S = (0,T) \times \Gamma$. Уравнение (1) дополняется краевыми и начальными условиями вида

$$B(t,x)u|_S = \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(t,x)u\big|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_j}(t,x)\nu_i$$

и $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ — внешняя единичная нормаль к S. Обратная задача состоит в нахождении решения u задачи (1), (2) и функции g вида $g = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i(t)\Phi_i(t,x)$, где функции q_i неизвестны, по данным переопределения

$$\int\limits_G u(x,t)\varphi_k(x)\,dx = \psi_k(t), \quad k = 1,2,\dots,m. \tag{3}$$

Положим $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–41–0063).

Обратные задачи о нахождении неизвестных граничных режимов, в частности, задачи конвективного теплообмена, являются классическими (см., например, [1–10]). Они возникают в самых различных задачах математической физики: управление процессами теплообмена и проектирование тепловой защиты, диагностика и идентификация теплопередачи в сверхзвуковых гетерогенных потоках, идентификация и моделирование теплопереноса в теплозащитных материалах и покрытиях, моделирование свойств и тепловых режимов многоразовой тепловой защиты аэрокосмических аппаратов, исследование композиционных материалов и т. п. Математические модели, описывающие эти процессы, и соответствующие обратные задачи как в одномерном, так и в многомерном случаях описываются, например, в монографии [1], где основное внимание уделено численным методам решения подобных задач, а также некоторым результатам в виде теорем единственности и оценок устойчивости. Отметим также монографию [2], посвященную, в основном, численным методам решения, где в одномерной ситуации рассматриваются разнообразные постановки обратных задач для параболических уравнений, в том числе и задачи определения граничных режимов. Здесь данные переопределения — значения решения в точках, лежащих внутри пространственной области. Эти задачи изучались и в других постановках в зависимости от типа условий переопределения. Очень часто они некорректны в смысле Адамара, в частности, в тех случаях когда данные переопределения — значения решения в отдельных точках или на поверхностях, лежащих внутри области определения (см. [1]). В данной работе мы рассматриваем задачи с условиями переопределения в виде некоторых интегралов от решения с весом по пространственной области. Отметим, что условия такого вида очень часто используются в литературе и возникают в приложениях. Обратные задачи об определении коэффициентов уравнения или правой части с интегральными условиями переопределения рассматривались в работах [11–17], монографиях [18, 19] и некоторых других работах. В частности, теорема существования и единственности обобщенного решения задачи (1)–(3) (из класса $u \in W_2^{0,1}(Q)$) в случае $m = 1$ получена в [8], а в [9] аналогичный результат получен для системы тепломассопереноса, состоящей из системы Навье — Стокса и параболического уравнения для концентрации переносимого вещества. В [10] доказана регулярная разрешимость ($u \in W_2^{1,2}(Q)$) также для случая $m = 1$. Однако условия на данные в [10] более серьезны, чем наши, в частности, имеются и условия на нормы данных (см. [10, теорема 1]). Наши условия на данные проще, и решение уравнения (1) ищется в классе $W_p^{1,2}(Q)$.

2. Вспомогательные результаты

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G;E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначаем пространство сильно измеримых функций, определенных на G, со значениями в E и конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [20]. Также используем пространства $C^k(\overline{G})$, состоящие из функций, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ и т. д. стандартны (см. [21, 20]). Если $E=\mathbb{R}$ или $E=\mathbb{R}^n$, то последнее пространство обозначаем просто через $W_p^s(Q)$. Аналогично вместо $W_p^s(G;E)$ или $C^k(\overline{G};E)$ используем обозначение $W_p^s(G)$ или $C^k(\overline{G})$. Таким образом, включение $u\in W_p^s(G)$ (или $u\in C^k(\overline{G})$) для данной вектор-функции $u=(u_1,u_2,\ldots,u_k)$ означает, что каждая из компонент u_i принадлежит пространству $W_p^s(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). В этом случае под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J=(0,T)$ положим $W_p^{s,r}(Q)=W_p^s(J;L_p(G))\cap L_p\big(J;W_p^r(G)\big)$, соответственно $W_p^{s,r}(S)=W_p^s(J;L_p(\Gamma))\cap L_p\big(J;W_p^r(\Gamma)\big)$. Определения пространств Гёльдера $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$, $C^{\alpha,\beta}(\overline{S})$ могут быть найдены, например, в [22]. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) считаем вещественными.

Далее считаем, что G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса C^2 (см. определение, например, в [22, с. 17]). Пусть $(u,v)=\int\limits_G u(x)v(x)\,dx$, $Q^\gamma=(0,\gamma)\times G$ и $S^\gamma=(0,\gamma)\times\Gamma$.

Будем использовать в пространстве $W_p^s(0,\tau;E)$ ($s\in(0,1)$, E — банахово пространство) норму

$$\|q(t)\|_{W_p^s(0,\tau;E)}=\big(\|q\|^p_{L_p(0,\tau;E)}+\langle q\rangle^p_{s,\tau}\big)^{1/p},\quad \langle q\rangle^p_{s,\tau}=\int\limits_0^\tau\int\limits_0^\tau\frac{\|q(t_1)-q(t_2)\|_E^p}{|t_1-t_2|^{1+sp}}\,dt_1dt_2.$$

Если $E=\mathbb{R}$, то получим обычное пространство $W_p^s(0,\tau)$. При $s\in(1/p,1]$ положим $\widetilde{W}_p^s(0,\tau)=\big\{q\in W_p^s(0,\tau):q(0)=0\big\}$. Это банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{W_p^s(0,\tau)}$. В нем также можно определить и эквивалентную норму $\|q(t)\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)}=\|\frac{q}{t^s}\|^p_{L_p(0,\tau)}+\langle q\rangle^p_{s,\tau}$. Эквивалентность вытекает, например, из леммы 1 в [20, п. 3.2.6]. Аналогично определяем пространства $\widetilde{W}_p^s(0,\tau;L_p(G))$ и $\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$, состоящие из функций $v(t,x)$ из $W_p^s(0,\tau;L_p(G))$ и $W_p^{s,2s}(Q^\tau)$ соответственно таких, что $v(0,x)=0$. Новые нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau;L_p(G))}$, $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}$ определяются естественным образом с использованием вышеприведенной нормы в $\widetilde{W}_p^s(0,\tau)$.

Лемма 1. *Пусть $s\in(1/p,1)$ и $p\in(1,\infty)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Пусть $q(t)\in W_p^s(0,\tau)$ ($\tau\in(0,T]$). Тогда $q\in C([0,\tau])$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль. Если $q(0)=0$ и $\tilde q$ — продолжение нулем функции q при $t\le 0$, то справедливы оценки*

$$\|q\|_{W_p^s(-1+\tau,\tau)}\le c_1\|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)},\tag{4}$$

где постоянная c_1 не зависит от $\tau\in(0,T]$ и q.

(2) *Произведение $q\cdot v$ функций класса $W_p^s(0,\tau)$ ($\tau\in(0,T]$) снова принадлежит $W_p^s(0,\tau)$, а если $q\in\widetilde{W}_p^s(0,\tau)$ и $v\in W_p^s(0,\tau)$, то $qv\in\widetilde{W}_p^s(0,\tau)$ и справедлива оценка*

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)}\le c_2\|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)}(\langle v\rangle_{s,\tau}+\|v\|_{L_\infty(0,\tau)}),\tag{5}$$

где постоянная c_2 *не зависит от* q, v *и* $\tau \in (0, T]$.

(3) *Если функция* v *строго отделена от нуля на* $[0, \tau]$, *т. е.* $\delta_0 = \inf\limits_{t \in [0,\tau]} |v(t)| > 0$, *то отношение* q/v *функций класса* $W_p^s(0, \tau)$ $(\tau \in (0, T])$ *снова принадлежит* $W_p^s(0, \tau)$ *и справедлива оценка*

$$\|q/v\|_{W_p^s(0,\tau)} \le c_3 \|q\|_{W_p^s(0,\tau)} \|v\|_{W_p^s(0,\tau)}, \tag{6}$$

где постоянная c_3 *не зависит от функции* q, *но зависит от* δ_0 *и стремится к* ∞ *при* $\delta_0 \to 0$.

(4) *Пусть* $q(t) \in \widetilde{W}_p^s(0, \tau)$ $(\tau \in (0, T])$, $v(t) \in W_p^s(0, T)$ *и* $\Phi(t, x) \in W_p^{s,2s}(S)$. *Тогда* $qv \in \widetilde{W}_p^s(0, \tau)$ *и* $q\Phi \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(S^\tau)$ *и справедливы оценки*

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)} \le c \|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)} \|v\|_{W_p^s(0,T)}, \tag{7}$$

$$\|q\Phi\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(S^\tau)} \le c_4 \|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)} \|\Phi\|_{W_p^{s,2s}(S)}, \tag{8}$$

где постоянная c *не зависит от* $\tau \in (0, T]$.

Доказательство. Покажем (1). В силу теорем вложения $W_p^s(0, \tau) \subset C([0, \tau])$ при $s > 1/p$ (см., например, [20]). Продолжим функцию q нулем на промежуток $[-1 + \tau, 0]$. Сделаем замену $t_1 = t - \tau$ и рассмотрим функцию $q_1(t) = q(t + \tau) \in W_p^s(-1, 0)$. Найдется постоянная c, не зависящая от τ, такая, что

$$\|q_1\|_{L_\infty(-1,0)} \le c \|q_1\|_{W_p^s(-1,0)} = c \|q\|_{W_p^s(-1+\tau,\tau)}. \tag{9}$$

Далее, используя определение стандартной нормы и тот факт, что $q(t) = 0$ при $t \in (-1 + \tau, 0)$, получим неравенство

$$c \|q\|_{W_p^s(-1+\tau,\tau)} \le c_1 \|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)}, \tag{10}$$

где c_1 есть постоянная c, умноженная на некоторую постоянную, зависящую только от s, p. Требуемое неравенство вытекает из (9), (10).

Докажем (2). Оценим

$$\|qv\|^p_{W_p^s(0,\tau)} = \|qv\|^p_{L_p(0,\tau)} + \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{|qv(t_1) - qv(t_2)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} \, dt_1 dt_2. \tag{11}$$

Имеем

$$|qv(t_1) - qv(t_2)| \le |q(t_1) - q(t_2)||v(t_1)| + |q(t_2)||v(t_1) - v(t_2)|.$$

Оценим второй интеграл в правой части (11):

$$c(p) \int_0^\tau \int_0^\tau |v(t_1)|^p \frac{|q(t_1) - q(t_2)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} \, dt_1 dt_2 + c(p) \int_0^\tau \int_0^\tau |q(t_2)|^p \frac{|v(t_1) - v(t_2)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} \, dt_1 dt_2$$

$$\le c_1 \|v\|^p_{L_\infty(0,\tau)} \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{|q(t_1) - q(t_2)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} \, dt_1 dt_2 + c_2 \|q\|^p_{L_\infty(0,\tau)} \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{|v(t_1) - v(t_2)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} \, dt_1 dt_2$$

$$\le c_3 \big(\langle q \rangle^p_{s,\tau} + \|q\|_{L_\infty(0,\tau)} \big) \big(\langle v \rangle^p_{s,\tau} + \|v\|_{L_\infty(0,\tau)} \big).$$

Тогда приходим к оценке

$$\|qv\|^p_{W^s_p(0,\tau)} \le c_4\big(\langle q\rangle^p_{s,\tau} + \|q\|_{L_\infty(0,\tau)}\big)\big(\langle v\rangle^p_{s,\tau} + \|v\|_{L_\infty(0,\tau)}\big),$$

которая и гарантирует включение $qv \in W^s_p(0,\tau)$.

Получим оценку (5). Имеем

$$\|qv\|^p_{\widetilde{W}^s_p(0,\tau)} = \|qv/t^s\|^p_{L_p(0,\tau)} + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^\tau \frac{|qv(t_1)-qv(t_2)|^p}{|t_1-t_2|^{1+sp}}\,dt_1dt_2. \qquad (12)$$

Второй интеграл в правой части оценивается, как и выше, а для первого интеграла имеем оценку

$$\Big\|\frac{qv}{t^s}\Big\|^p_{L_p(0,\tau)} \le \Big\|\frac{q}{t^s}\Big\|^p_{L_p(0,\tau)}\|v\|^p_{L_\infty(0,\tau)}. \qquad (13)$$

Отсюда и из (12) вытекает требуемая оценка (5).

Легко получить, используя определение нормы, что если $v \in W^s_p(0,\tau)$ и v строго отделена от нуля, то $1/v \in W^s_p(0,\tau)$. Используя этот факт и утверждение (2), получим (3).

Покажем (4), например, вторую половину утверждения. Пусть $\Phi \in W^{s,2s}_p(S)$. Тогда $\Phi \in W^s_p(0,T)$ при п. в. $x \in \Gamma$. В силу (2)

$$\|q\Phi\|^p_{\widetilde{W}^s_p(0,\tau)} \le c_5\big(\|\Phi\|^p_{W^s_p(0,\tau)} + \|\Phi\|_{L_\infty(0,\tau)}\big)\|q\|^p_{\widetilde{W}^s_p(0,\tau)} \le c_6\|\Phi\|^p_{W^s_p(0,T)}\|q\|^p_{\widetilde{W}^s_p(0,\tau)}.$$

Правая часть здесь интегрируема по Γ. Следовательно, и левая часть интегрируема и имеем

$$\|q\Phi\|^p_{L_p(\Gamma;\widetilde{W}^s_p(0,\tau))} \le c_7\|\Phi\|^p_{L_p(\Gamma;W^s_p(0,T))}\|q\|^p_{\widetilde{W}^s_p(0,\tau)}.$$

Включение $\Phi(t,x) \in W^{s,2s}_p(S^\tau)$ означает, что $\Phi \in L_p\big(\Gamma;W^s_p(0,\tau)\big)\cap L_p\big(0,\tau;W^{2s}_p(\Gamma)\big)$. Имеем

$$\|q(t)\Phi(t,x)\|_{L_p(0,\tau;W^{2s}_p(\Gamma))} = \int\limits_0^\tau |q(t)|^p\|\Phi(x,t)\|^p_{W^{2s}_p(\Gamma)}\,dt$$
$$\le \|q(t)\|^p_{L_\infty(0,\tau)}\|\Phi(x,t)\|^p_{L_p(0,\tau;W^{2s}_p(\Gamma))}.$$

Из последних двух оценок вытекает (8) и вторая половина утверждения.

Приведем используемые ниже условия на данные задачи. Зафиксируем число $s = 1/2 - 1/2p$.

Условия на коэффициенты:

$$a_{ij} \in C\big([0,T];W^1_\infty(G)\big) \cap C(\overline{G};C^{s+\varepsilon_0}([0,T])), \quad \sigma \in C^{1/2+\varepsilon_0,1}(\overline{S}), \qquad (14)$$

где $i,j = 1,2,\ldots,n$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ — положительное число.

$$a_i \in L_\infty\big(G;W^s_p(0,T)\big), \quad p > 3,\ i = 0,1,\ldots,n, \qquad (15)$$

Считаем, что существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2, \quad (t,x) \in Q,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Условия на данные задачи:

$$f \in L_p(Q), \quad u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \tag{17}$$

$$g \in W_p^{s,2s}(S), \quad g(0,x)|_\Gamma = B(0,x)u_0|_\Gamma, \tag{18}$$

$$\varphi_k \in W_\infty^1(G),\ \Phi_k \in W_p^{s,2s}(S),\ \psi_k \in W_p^{s+1}(0,T),\ (f,\varphi_k) \in W_p^s(0,T),\ k = 1,2,\dots,m. \tag{19}$$

Из теоремы 10.4 в [22, гл. 7] вытекает

Теорема 1. *Пусть G — ограниченная область с границей класса C^2 и выполнены условия* (14)–(18). *Тогда существует единственное решение u задачи* (1), (2) *такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$. Решение удовлетворят оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq C(\|f\|_{L_p(Q)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \|g\|_{W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(S)}).$$

Как следствие теоремы 1 получается

Теорема 2. *Пусть G — ограниченная область с границей класса C^2 и выполнены условия* (14)–(18), *где $f \equiv 0$ и $u_0 \equiv 0$. Пусть $\gamma \in (0,T]$. Тогда на промежутке $(0,\gamma)$ существует единственное решение u задачи* (1), (2) *такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q^\gamma)$. Решение удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} \leq c\|g\|_{\widetilde{W}_p^{1/2-2/p,1-1/p}(S^\gamma)},$$

где постоянная c не зависит от $\gamma \in (0,T]$ и g.

Доказательство. Продолжим g нулем при $t < 0$, и пусть

$$\tilde{g} = \begin{cases} g(t,x), & t \in (-1+\gamma, \gamma), \\ g(2\gamma - t, x), & t \in [\gamma, T+\gamma]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\tilde{g} \in W_p^{s,2s}(S)$, $s = 1/2 - 1/2p$. Используя теорему 1, построим решение задачи (1), (2), где $u_0 \equiv 0$, $f \equiv 0$ и $g = \tilde{g}$ такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$. По теореме 1 имеем

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} \leq c\|\tilde{g}\|_{W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(S)}.$$

Оценим правую часть. Имеем по лемме 1

$$\|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}(S)} \leq \|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}((-1+\gamma,1+\gamma)\times\Gamma)} \\ \leq c(\|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}((-1+\gamma,\gamma)\times\Gamma))} + \|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}((\gamma,1+\gamma)\times\Gamma))}) \leq c_1\|g\|_{W_p^{s,2s}(S^\gamma)}.$$

Здесь использована аддитивность пространств Соболева относительно разбиения области (см. замечание 3 в [20, п. 4.4.1]) и определение соответствующей нормы.

3. Основные результаты

В дополнение к приведенным выше условиям на данные потребуем, чтобы

$$|\det B(t)| \geq \delta_0 > 0, \quad t \in [0,T], \tag{20}$$

где $B(t)$ — матрица с элементами $b_{ij} = \int\limits_{\Gamma} \varphi_i(x)\Phi_j(t,x)\,d\Gamma$,

$$\int\limits_G u_0(x)\varphi_k(x)\,dx = \psi_k(0), \quad k = 1,\ldots,m; \tag{21}$$

(A) функция $B(0,x)u_0(x)|_\Gamma$ принадлежит линейной оболочке функций $\Phi_1(0,x),\ldots,$ $\Phi_m(0,x)$.

Основной результат работы — следующая теорема (как и ранее, $s = 1/2 - 1/2p$).

Теорема 3. *Пусть G — ограниченная область с границей класса C^2 и выполнены условия* (14)–(17), (19)–(21) *и условие* (A). *Тогда существует единственное решение $(u,\vec{q})$ $(\vec{q} = (q_1,\ldots,q_m))$ задачи* (1)–(3) *такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$, $\vec{q} \in W_p^s(0,T)$. Решение удовлетворят оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \|\vec{q}\|_{W_p^s(0,T)} \leq C\left(\|f\|_{L_p(Q)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \sum_{i=1}^m (\|\psi_i\|_{W_p^{1+s}(0,T)} + \|(f,\varphi_k)\|_{W_p^s(0,T)})\right).$$

Доказательство. Пусть $u \in W_p^{1,2}(Q)$ есть решение задачи (1)–(3), где $g = \sum\limits_{i=1}^m q_i\Phi_i$. В силу условий (20) и (A) найдутся постоянные $q_i(0)$, определяемые единственным образом, такие, что

$$B(0,x)u_0|_\Gamma = \sum_{i=1}^m q_i(0)\Phi_i(0,x).$$

Положим

$$\sum_{i=1}^m q_i(0)\Phi_i(t,x) = g_0(t,x)$$

и обозначим через $v \in W_p^{1,2}(Q)$ решение задачи (см. теорему 1)

$$Lv = f, \quad Bv|_S = g_0(t,x), \quad v|_{t=0} = u_0(x). \tag{22}$$

Пусть $\vec{q} \in W_p^s(0,T)$. По условию $\Phi_j \in W_p^{s,2s}(S)$. Тогда по лемме 1 $q_i(t)\Phi_i(t,x) \in W_p^{s,2s}(S)$ и соответственно $g \in W_p^{s,2s}(S)$. Сделаем замену $u = v + \omega$. Тогда функция $\omega \in W_p^{1,2}(Q)$ есть решение задачи

$$L\omega = 0, \quad B\omega|_S = g - g_0 = \tilde{g}, \quad \omega|_{t=0} = 0. \tag{23}$$

Условие (3) преобразуется к виду

$$\int\limits_G \omega\varphi_k(x)\,dx = \psi_k - \int\limits_G v(t,x)\varphi_k(x)\,dx = \tilde{\psi}_k, \quad k = 1,2,\ldots,m. \tag{24}$$

В силу (21) $\tilde{\psi}_k(0)=0$ и по крайней мере $\tilde{\psi}_k(t)\in W_p^1(0,T)$. Ниже покажем, что $\tilde{\psi}_k(t)\in W_p^{1+s}(0,T)$. Умножим уравнение в (23) на $\varphi_k(x)$ и проинтегрируем по области G. Получим $(\omega_t,\varphi_k)=(L_0\omega,\varphi_k)$. Здесь

$$L_0\omega=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}\omega_{x_j}-\sum_{i=1}^{n}a_i\omega_{x_i}-a_0\omega.$$

Используя (23), (24) и интегрирование по частям, получим

$$\tilde{\psi}_k'(t)=a(\omega,\varphi_k)-\int\limits_{\Gamma}\sigma\omega\varphi_k\,d\Gamma+\sum_{i=1}^{m}\tilde{q}_i(t)\int\limits_{\Gamma}\Phi_i\varphi_k\,d\Gamma,\ k=1,\ldots,m,\ \tilde{q}_i(t)=q_i(t)-q_i(0),$$

где

$$a(\omega,\varphi_k)=-\int\limits_{G}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\omega_{x_j}\varphi_{kx_i}+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\omega_{x_i}+a_0\omega\right)\varphi_k\,dx.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{m}\tilde{q}_i(t)\int\limits_{\Gamma}\Phi_i\varphi_k\,d\Gamma=\tilde{\psi}_k'(t)-a(\omega,\varphi_k)+\int\limits_{\Gamma}\sigma\omega\varphi_k\,d\Gamma \tag{25}$$

или

$$B\vec{q_a}=\vec{F},\quad \vec{F}=(F_1,\ldots,F_m)^T,\ F_k=\tilde{\psi}_k'(t)-a(\omega,\varphi_k)+\int\limits_{\Gamma}\sigma\omega\varphi_k\,d\Gamma, \tag{26}$$

где $\vec{q_a}=(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_m)^T$. Функция ω, участвующая в (26), есть решение прямой задачи (23). Элементы матрицы B обладают тем свойством, что $b_{ij}\in W_p^s(0,T)$, более того, справедлива очевидная оценка

$$\|b_{ij}\|_{W_p^s(0,T)}\le\|\Phi_j\|_{L_p(\Gamma;W_p^s(0,T))}\|\varphi_i\|_{L_\infty(\Gamma)}.$$

Как отмечено при доказательстве леммы 1, теоремы вложения гарантируют, что $W_p^s(0,T)\subset C([0,T])$. Следовательно, без ограничения общности можем считать, что $b_{ij}\in C([0,T])$. Используя условие (20), можем записать

$$\vec{q_a}=B^{-1}\vec{F}=R(\vec{q_a})=\vec{g}+R_0(\vec{q_a}), \tag{27}$$

где $\vec{g}=B^{-1}\Psi$ и k-я координата Ψ_k вектора Ψ имеет вид $\Psi_k(t)=\tilde{\psi}_k'(t)$. Это искомое уравнение для нахождения $\vec{q_a}$. Рассмотрим промежуток $[0,\delta]\subset[0,T]$. Оценим $\|R_0(\vec{q_a})\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}$. В силу второго и третьего утверждений леммы 1 элементы обратной матрицы B^{-1} также принадлежат классу $W_p^s(0,T)$. Тогда в силу оценки (7) из леммы 1 получим неравенство

$$\|R_0(\vec{q_a})\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}\le c\sum_{k=1}^{m}\left(\|a(\omega,\varphi_k)\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}+\left\|\int\limits_{\Gamma}\sigma\omega\varphi_k\,d\Gamma\right\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}\right). \tag{28}$$

Оценим каждое из слагаемых, входящих в $a(\omega,\varphi_k)$:

$$a(\omega,\varphi_k)=-\int\limits_{G}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\omega_{x_j}\varphi_{kx_i}+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\omega_{x_i}+a_0\omega\right)\varphi_k\,dx.$$

В силу неравенства Минковского, неравенства Гёльдера и леммы 1 имеем

$$\Big\| \int_G a_{ij}\omega_{x_j}\varphi_{kx_i} \Big\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} \le c \int_G \|\nabla\omega\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}\, dx \le c_1 \Big(\int_G \|\nabla\omega\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}\, dx \Big)^{1/p}. \quad (29)$$

Отметим, что

$$\int_G \|\nabla\omega\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}\, dx = \int_G \int_0^\delta \frac{|\nabla\omega|^p}{t^{sp}}\, dtdx + \int_G \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{|\nabla\omega(t_1,x) - \nabla\omega(t_2,x)|^p}{|t_1-t_2|^{1+sp}}\, dt_1dt_2dx. \quad (30)$$

Воспользовавшись неравенством

$$\|\nabla\omega\|^p_{L_p(G)} \le c_2 \|\omega\|^{1/2}_{W_p^2(G)} \|\omega\|^{1/2}_{L_p(G)},$$

вытекающим из равенства $\big[W_p^2(G), L_p(G)\big]_{1/2} = W_p^1(G)$ [20, теорема 4.3.1], для первого слагаемого в правой части имеем

$$\Big\| \frac{1}{t^s}\nabla\omega \Big\|_{L_p(Q^\delta)} \le c_2 \|\omega\|^{1/2}_{L_p(0,\delta;W_p^2(G))} \Big\| \frac{1}{t^{2s}}\omega \Big\|^{1/2}_{L_p(Q^\delta)}.$$

Из формулы Ньютона — Лейбница следует $\big\| \frac{1}{t^{2s}}\omega \big\|_{L_p(Q^\delta)} \le \delta^{1/p}\|\omega_t\|_{L_p(Q^\delta)}$. Тогда последнее неравенство записывается в виде

$$\Big\| \frac{1}{t^s}\nabla\omega \Big\|_{L_p(Q^\delta)} \le c_2 \delta^{1/2p} \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q^\delta)}. \quad (31)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (30). Имеем

$$\int_G \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{|\nabla\omega(t_1,x) - \nabla\omega(t_2,x)|^p}{|t_1-t_2|^{1+sp}}\, dt_1dt_2dx \le \int_G \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{|\nabla\omega(t_1,x) - \nabla\omega(t_2,x)|^p}{|t_1-t_2|^{1+p/2}}\, dt_1dt_2dx\delta^{1/2}. \quad (32)$$

Далее при п. в. t построим продолжение $P\omega$ функции ω из области G на всё $\mathbb{R}^n$ с сохранением класса такое, что P — линейный оператор, удовлетворяющий оценкам $\|Pu\|_{W_p^2(\mathbb{R}^n)} \le c_3\|u\|_{W_p^2(G)}$ или $\|Pu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_3\|u\|_{L_p(G)}$ для всех $u \in W_p^2(G)$ или $u \in L_p(G)$ соответственно, где постоянная c не зависит от u. Такой оператор существует, например, это метод Хестенса продолжения функций (см. метод, описанный в лемме 2.9.3 в [20] для полупространства и многократно использованный позднее уже для произвольных областей). Имеем $P\omega \in W_p^{1,2}((0,\delta)\times\mathbb{R}^n)$ и $\|P\omega\|_{W_p^{1,2}((0,\delta)\times\mathbb{R}^n)} \le c_3\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q^\delta)}$, где постоянная c не зависит от ω и $\delta > 0$. Отметим, что $P\omega(0,x) = 0$. Имеем

$$\int_G \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{|\nabla\omega(t_1,x) - \nabla\omega(t_2,x)|^p}{|t_1-t_2|^{1+p/2}}\, dt_1dt_2dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{|\nabla P\omega(t_1,x) - \nabla P\omega(t_2,x)|^p}{|t_1-t_2|^{1+p/2}}\, dt_1dt_2dx \quad (33)$$

Сделаем замену переменных $t_i = \delta\tau_i$, $i = 1, 2$, $x = \sqrt{\delta}y$. Тогда последний интеграл примет вид ($\widetilde{P}\omega(\tau, y) = P\omega(\delta\tau, \sqrt{\delta}y)$)

$$I = \delta^{1-p+n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{|\nabla_y \widetilde{P}\omega(\tau_1, y) - \nabla_y \widetilde{P}\omega(\tau_2, y)|^p}{|\tau_1 - \tau_2|^{1+p/2}} \, d\tau_1 d\tau_2 dy. \tag{34}$$

Если $u \in W_p^{1,2}((0,1) \times \mathbb{R}^n)$, то (см., например, лемму 3.8 в [21] или вложения перед леммой 7.2 и лемму 7.2 в [23], или теорему 18.4 в [24]) $\nabla u \in W_p^{\frac{1}{2},1}((0,1) \times \mathbb{R}^n)$ и справедлива оценка

$$\|\nabla u\|_{W_p^{\frac{1}{2},1}((0,1)\times\mathbb{R}^n)} \le c_4 \|u\|_{W_p^{1,2}((0,1)\times\mathbb{R}^n)},$$

где постоянная c_4 не зависит от u. Тогда интеграл в (34) оценивается так:

$$I \le c_4^p \delta^{1-p+n/2} \|\widetilde{P}\omega\|^p_{W_p^{1,2}((0,1)\times\mathbb{R}^n)} = c_4^p \delta^{1-p+n/2} \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{P}\omega_\tau|^p + \sum_{i,j=1}^n |(\widetilde{P}\omega)_{y_i y_j}|^p \, d\tau dy, \tag{35}$$

где в $W_p^{1,2}((0,1) \times \mathbb{R}^n)$ используем одну из эквивалентных норм. Возвращаясь к старым переменным (t, x) и используя вышеприведенную оценку для оператора P, получим

$$I \le c_5 \|\omega\|^p_{W_p^{1,2}(Q^\delta)}, \tag{36}$$

где постоянная c_5 не зависит от δ. Из (29)–(36) вытекает оценка

$$\Big\| \int\limits_G a_{ij} \omega_{x_j} \varphi_{kx_i} \Big\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} \le c_6 \delta^{1/2p} \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q^\delta)}, \tag{37}$$

где постоянная c_6 не зависит от δ. Слагаемые вида $\int\limits_G a_i \omega_{x_i} \varphi_k \, dx$ в выражении $a(\omega, \varphi_k)$ оцениваются точно так же. Слагаемое $J = \int\limits_G a_0 \omega \varphi_k \, dx$ оценивается проще. В силу леммы 1 имеем

$$\|J\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} \le c \int\limits_G \|\omega\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} \, dx \le c_1 \|\omega\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta;L_p(G))}, \tag{38}$$

$$\|\omega\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta;L_p(G))} = \int\limits_G \int\limits_0^\delta \frac{1}{t^{sp}} |\omega|^p \, dt dx + \int\limits_G \int\limits_0^\delta \int\limits_0^\delta \frac{|\omega(t_1, x) - \omega(t_2, x)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} \, dt_1 dt_2 dx. \tag{39}$$

Используя представление

$$\omega(t_1, x) - \omega(t_2, x) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \omega_t(t, x) \, dt$$

во втором интеграле и равенство

$$\omega(t, x) = \int\limits_0^t \omega_\tau(\tau, x) \, d\tau$$

в первом, с помощью неравенства Гёльдера получим оценку

$$\|\omega\|^p_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta;L_p(G))} = \|\omega\|^p_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta;L_p(G))} \le c_2\|\omega_t\|_{L_p(Q^\delta)}\delta^{1/2+1/2p}, \tag{40}$$

Тогда

$$\Big\|\int\limits_G a_0\omega\varphi_k\,dx\Big\|_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta)} \le c\|\omega\|_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta;L_p(G))} \le c_3\|\omega_t\|_{L_p(Q^\delta)}\delta^{1/2+1/2p}, \tag{41}$$

где c_3 — постоянная, не зависящая от δ. Легко увидеть, что в процессе доказательства оценок (31), (36) также получено неравенство

$$\|\omega\|_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta;W^1_p(G))} \le c\delta^{1/2p}\|\omega\|_{W^{1,2}_p(Q^\delta)}, \tag{42}$$

где постоянная c не зависит от δ. Действительно, используя определение нормы, получим

$$\|\omega\|^p_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta;W^1_p(G))} = \int\limits_0^\delta \Big\|\frac{1}{t^s}\omega\Big\|^p_{W^1_p(G)}dt + \int\limits_0^\delta\int\limits_0^\delta \frac{\|\omega(t_1,x)-\omega(t_2,x)\|^p_{W^1_p(G)}}{|t_1-t_2|^{1+sp}}\,dt_1dt_2. \tag{43}$$

Необходимая оценка первого слагаемого вытекает из оценок (33), (41). Оценка второго интеграла вытекает из оценок (32)–(36), (40).

Оценим последнее слагаемое $J_1 = \|\int\limits_\Gamma \sigma\omega\varphi_k\,d\Gamma\|_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta)}$. Имеем

$$J_1 \le c\int\limits_\Gamma \|\omega\|_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta)}\,d\Gamma \le c_1\|\omega\|_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta;L_p(\Gamma))}$$
$$\le c_2\|\omega\|_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta;W^1_p(G))} \le c_3\delta^{1/2p}\|\omega\|_{W^{1,2}_p(Q^\delta)}. \tag{44}$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гёльдера, вложением $W^1_p(G)\subset L_p(\Gamma)$ и оценкой (42). Из оценок (28), (37), (41), (44) вытекает, что

$$\|R_0(\vec{q_a})\|_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta)} \le c_4\delta^{1/2p}\|\omega\|_{\widetilde{W}^{1,2}_p(Q^\delta)}, \tag{45}$$

где постоянная c_4 не зависит от δ. По теореме 2

$$\|\omega\|_{W^{1,2}_p(Q^\delta)} \le c\|\tilde{g}\|_{\widetilde{W}^{s,2s}_p(S^\delta)}. \tag{46}$$

В силу леммы 1 имеет место оценка

$$\|\tilde{g}\|_{\widetilde{W}^{s,2s}_p(S^\delta)} \le c_1\sum_{i=1}^m\|\tilde{q}_i\|_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta)},$$

где постоянная c_1 зависит от величин $\|\Phi_i\|_{W^{s,2s}_p(S)}$. Тогда из (45), (46) получим оценку

$$\|R_0(\vec{q_a})\|_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta)} \le c_5\delta^{1/2p}\sum_{i=1}^m\|\tilde{q}_i\|_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta)} = c_5\delta^{1/2p}\|\vec{q_a}\|_{\widetilde{W}^s_p(0,\delta)}, \tag{47}$$

где постоянная c_5 не зависит от δ и $\vec{q_a}$. Оценка (47) означает, что при $\delta^{1/2p}c_5 < 1$ оператор R_0 сжимающий и, следовательно, уравнение (27) имеет единственное решение из пространства $W_p^s(0,\delta)$ при $\tilde{\psi}_k' \in W_p^s(0,T)$. По условию $\psi_k' \in W_p^s(0,T)$. Покажем, что

$$\psi_{0k} = \int_G v(t,x)\varphi_k(x)\,dx \in W_p^{1+s}(0,T),$$

т. е. $\int_G v_t(t,x)\varphi_k(x)\,dx \in W_p^s(0,T)$. Умножим уравнение в (22) на φ_k и проинтегрируем по области G. Получим равенство

$$\psi_{0k}'(t) = a(v,\varphi_k) - \int_\Gamma \sigma v\varphi_k\,d\Gamma + \sum_{i=1}^m \tilde{q}_i(0)\int_\Gamma \Phi_i\varphi_k\,d\Gamma + (f,\varphi_k), \quad k=1,\dots,m. \tag{48}$$

Повторяя рассуждения, используемые при оценке нормы $\|R_0\vec{q_a}\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}$, но только уже на всем промежутке $[0,T]$, и вместо этой нормы взяв стандартную норму в пространстве $W_p^s(0,\delta)$, можем легко показать, что правая часть в этом равенстве принадлежит пространству $W_p^s(0,T)$ и, таким образом, $\psi_{0k} \in W_p^{1+s}(0,T)$. Тем самым уравнение (27) имеет единственное решение на промежутке $[0,\delta]$. Найдем решение $\omega \in W_p^{1,2}(Q^\delta)$ задачи (23). Покажем, что выполнены условия (24). Умножим уравнение в (23) на φ_k и проинтегрируем по области G. Используя (22), (23) и интегрирование по частям, получим

$$\int_G \omega_t\varphi_k\,dx = a(\omega,\varphi_k) - \int_\Gamma \sigma\omega\varphi_k\,d\Gamma + \sum_{i=1}^m \tilde{q}_i(t)\int_\Gamma \Phi_i\varphi_k\,d\Gamma, \quad k=1,\dots,m.$$

Вектор-функция $\vec{q_a}$ удовлетворяет системе (25), складывая k-е уравнение которой с полученным равенством и сокращая, придем к равенству

$$\int_G \omega_t\varphi_k\,dx = \tilde{\psi}_k', \quad k=1,\dots,m,$$

интегрируя которое по t и пользуясь начальным условием, получим (24) на $[0,\delta]$.

Покажем далее, что решение продолжимо на весь промежуток $[0,T]$. Мы определили вектор-функцию $\vec{q_a}$ только на $[0,\delta]$. Продолжим найденную вектор-функцию $\vec{q_a}$ нулем при $t<0$ и положим $\vec{q_b} = \begin{cases} \vec{q_a}(t), & t\in(0,\delta) \\ \vec{q_a}(2\delta-t), & t\in[\delta,T] \end{cases}$. Координаты вектора $\vec{q_b}$ обозначим через $q_1^b,\dots,q_m^b$. Построенная вектор-функция принадлежит $W_p^{s,2s}(S)$. Сделаем замену $\vec{q}^{\,1} = \vec{q_a} - \vec{q_b}$. Построенная вектор-функция с координатами q_i^1 удовлетворяет системе

$$\sum_{i=1}^m q_i^1(t)b_{ki} = \tilde{\psi}_k'(t) - a(\omega,\varphi_k) + \int_\Gamma \sigma\omega\varphi_k\,d\Gamma - \sum_{i=1}^m q_i^b(t)b_{ki}. \tag{49}$$

В силу определения $\vec{q_b}$ правая часть в этом равенстве и соответственно вектор $\vec{q}^{\,1}$ обращаются в нуль на $[0,\delta]$. Пусть ω_0 — решение задачи

$$L\omega_0 = 0, \quad B\omega_0|_S = \sum_{i=1}^m q_i^b\Phi_i, \quad \omega_0|_{t=0} = 0. \tag{50}$$

Тогда функция $\omega_1 = \omega - \omega_0$ есть решение задачи

$$L\omega_1 = 0, \quad B\omega_1|_S = \sum_{i=1}^{m} q_i^1 \Phi_i, \quad \omega_1|_{t=0} = 0. \tag{51}$$

В силу теоремы 1 $\omega_1 = 0$ при $t \in [0, \delta]$. Таким образом, задача о продолжении вектор-функции $\vec{q_a}$ сводится к построению решения системы

$$\sum_{i=1}^{m} q_i^1(t) b_{ki} = \psi'_{1k}(t) - a(\omega_1, \varphi_k) + \int\limits_{\Gamma} \sigma \omega_1 \varphi_k \, d\Gamma, \tag{52}$$

где

$$\psi'_{1k} = \tilde{\psi}'_k(t) - a(\omega_0, \varphi_k) + \int\limits_{\Gamma} \sigma \omega_0 \varphi_k \, d\Gamma - \sum_{i=1}^{m} q_i^b(t) b_{ki},$$

и функция ω_1 — решение задачи (51). Решение системы при $t \le \delta$ обращается в нуль. Пришли к той же системе, но нулевые данные Коши у нас уже задаются в точке $t = \delta$ и изменилась правая часть системы, точнее, вектор $\vec{g}$. Далее повторяем рассуждения и оценки уже на промежутке $[\delta, 2\delta]$. Рассуждения те же самые. Более того, без ограничения общности можем считать, что и все постоянные, возникающие при оценке нормы оператора R_0, те же самые. Таким образом, система (52) разрешима на промежутке $[\delta, 2\delta]$. Повторяя рассуждения на $[2\delta, 3\delta]$ и т. д., построим решение на всем $[0, T]$. Оценка из утверждения теоремы фактически получена в процессе доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алифанов О. М., Артюхов Е. А., Ненарокомов А. В.* Обратные задачи сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009.

2. *Ozisik M. N., Orlando H. A. B.* Inverse heat transfer. New York: Taylor & Francis, 2000.

3. *Костин А. Б., Прилепко А. И.* О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения. I // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 1. С. 1319–1328.

4. *Борухов В. Т., Корзюк В. И.* Применение неклассических краевых задач для восстановления граничных режимов процессов переноса // Вестн. Белорус. ун-та. 1998. Сер. 1. № 3. С. 54–57.

5. *Трянин А. П.* Определение коэффициентов теплообмена на входе в пористое тело и внутри него из решения обратной задачи // Инж.-физ. журн. 1987. Т. 52, № 3. С. 469–475.

6. *Борухов В. Т., Вабищевич П. Н., Корзюк В. И.* Сведение одного класса обратных задач теплопроводности к прямым начально-краевым задачам // Инж.-физ. журн. 2000. Т. 73, № 4. С. 742–747.

7. *Короткий А. И., Ковтунов Д. А.* Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции несжимаемой жидкости // Тр. ИММ ДВО АН. 2006. Т. 12. С. 88–97.

8. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача интегрального наблюдения для общего параболического уравнения // Мат. журн. Алматы. 2003. Т. 3, № 4. С. 5–12.

9. *Абылкаиров У. У., Абиев А. А, Айтжанов С. Е.* Обратная задача для системы тепловой конвекции // Молодеж. междунар. науч. шк.-конф. «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». Тез. докл. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2009. С. 10–11.

10. *Кожанов А. И.* Линейные обратные задачи для некоторых классов нелинейных нестационарных уравнений // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 264–275.

11. *Искендеров А. Д., Ахундов А. Я.* Обратная задача для линейной системы параболических уравнений // Докл. АН. 2009. Т. 424, № 4. С. 442–444.

12. *Ismailov M. I., Kanca F.* The inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data // Inverse Probl. Sci. Eng. 2012. V. 20, N 24. P. 463–476.

13. *Li J., Xu Y.* An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation // J. Appl. Math. Comput. 2010. V. 34. P. 195–206.

14. *Kerimov N. B., Ismailov M. I.* An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 396, N 2. P. 546–554.

15. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 12. С. 2168–2184.

16. *Пятков С. Г., Сафонов А. Е.* Об определении функции источника в математических моделях конвекции-диффузии // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 117–130.

17. *Криксин Ю. А., Плющев С. Н., Самарская Е. А., Тишкин В. Ф.* Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции-диффузии // Мат. моделирование. 1995. Т. 7, № 11. С. 95–108.

18. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.

19. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: VNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).

20. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

22. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

21. *Denk R., Hieber M., Prüss J.* Optimal $L_p - L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Math. Z. 2007. V. 257, N 1. P. 193–224.

23. *Grisvard P.* Equations differentielles abstraites // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV Sér. 1969. V. 2. P. 311–395.

24. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

Статья поступила 18 марта 2016 г.

Вержбицкий Марк Андреевич, Пятков Сергей Григорьевич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
grandapachi@gmail.com, s_pyatkov@ugrasu.ru, pyatkov@math.nsc.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

UDC 517.95

ON SOME INVERSE PROBLEMS OF DETERMINING BOUNDARY REGIMES

M. A. Verzhbitskii and S. G. Pyatkov

Abstract: We consider the inverse problem of determining unknown functions occurring in boundary conditions together with the solution to the initial-boundary value problem for a second-order parabolic equation. The overdetermination conditions are integrals of the solution with weight. The existence and uniqueness theorem for solutions to this inverse problem is established.
Keywords: inverse problem, parabolic equation, boundary and initial conditions, Sobolev space, existence and uniqueness theorem, solvability.

REFERENCES

1. *Alifanov O. M., Artyukhov E. A., and Nenarokomov A. V.*, Inverse problems of complicated heat exchange [in Russian], Moscow: Yanus-K (2009).
2. *Ozisik M. N. and Orlando H. A. B.*, Inverse heat transfer, Taylor & Francis, New York (2000).
3. *Kostin A. B. and Prilepko A. I.*, "On some problems of recovering a boundary condition for a parabolic equation, I," Differ. Uravn., **32**, No. 1, 1319–1328 (1996).
4. *Borukhov V. T. and Korsyuk V. I.*, "Application of nonclassical boundary value problems for the reconstruction of boundary regimes of transfer processes," Vestn. Beloruss. Gos. Univ., Ser. 1, Fiz. Mat. Inform., No. 3, 54–57 (2000).
5. *Tryanin A. P.*, "Determination of heat-transfer coefficients at the inlet into a porous body and inside it by solving the inverse problem," Inzh.-Fiz. Zh., **52**, No. 3, 469–475 (1987).
6. *Borukhov V. T., Vabishevich P. N., Korsyuk V. I.*, "Reduction of a class of inverse heat-conduction problems to direct initial-boundary value problems," J. Eng. Phys. Thermophys., **73**, No. 4, 730–734 (2000).
7. *Korotkiĭ A. I. and Kovtunov D. A.*, "Reconstruction of boundary regimes in the inverse problem of thermal convection of an incompressible fluid," Tr. Inst. Mat. Mekh. DVO AN, **12**, 88–97 (2006).
8. *Abylkairov U. U.*, "An inverse integral observation problem for a general parabolic equation," Mat. Zh. Almaty, **3**, No. 4, 5–12 (2003).
9. *Abylkairov U. U., Abiev A. A., and Aĭtzhanov S. E.*, "An inverse problem for the heat conduction system," in: Youth Inter. School-Conf. "Theory and numerical methods of solving inverse and ill-posed problems". Abstracts. IM SO RAN, Novosibirsk, pp. 10–11 (2009).
10. *Kozhanov A. I.*, "Linear inverse problems for some classes of nonlinear nonstationary equations," Sib. Elektron. Mat. Izv., **12**, 264–275 (2015).
11. *Iskenderov A. D. and Akhundov A. Ya.*, "Inverse problem for a linear system of parabolic equations," Dokl. Math., **79**, No. 1, 73–75 (2009).
12. *Ismailov M. I. and Kanca F.*, "Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of the heat equation from integral overdetermination condition data," Inverse Probl. Sci. Eng., **20**, No. 24, 463–476 (2012).
13. *Jing Li and Youjun Xu*, "An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation," J. Appl. Math. Comput., **34**, 195–206 (2010).
14. *Kerimov N. B. and Ismailov M. I.*, "An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions," J. Math. Anal. Appl., **396**, No. 2, 546–554 (2012).

15. *Kozhanov A. I.*, “Parabolic equations with a time-dependent unknown coeffcient,” Comput. Math. Math. Phys., **45**, No. 12, 2085–2101 (2005).

16. *Pyatkov S. G. and Safonov A. E.*, “On determining the source function in mathematical convection-diffusion models,” Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 2, 117–130 (2014).

17. *Kriksin Yu. A., Plyushchev S. N., Samarskaya E. A., and Tishkin V. F.*, “An inverse problem of recovering the source density for the convection-diffusion equation,” Mat. Model., **7**, No. 11, 95–108 (1995).

18. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A.*, Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, Inc., New York (1999).

19. *Ivanchov M.*, Inverse problems for equations of parabolic type, VNTL Publ., L’viv (2003) (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).

20. *Triebel H.*, Interpolation theory, function spaces, differential operators, Veb Deutscher Verlag Der Wissenschaften, Berlin (1978).

21 *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural’tseva N. N.*, Linear and quasi-linear equations of parabolic type, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1968) (Transl. Math. Monogr.; V. 23).

22. *Denk R., Hieber M., and Prüss J.*, “Optimal $L_p - L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data,” Math. Z., **257**, No. 1, 193–224 (2007).

23. *Grisvard P.*, “Equations differentielles abstraites,” Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV Sér., **2**, 311–395 (1969).

24. *Besov O. V., Il’in V. P., and Nikol’skiĭ S. M.*, Integral representations of functions and embedding theorems, Nauka, Moscow (1975).

Submitted March 18, 2016

Mark Andreevich Verzhbitskii and Sergei Grigor′evich Pyatkov
Ugra State University,
Chekhova st., 16, Khanty-Mansiisk 628012, Russia
`grandapachi@gmail.com, s_pyatkov@ugrasu.ru, pyatkov@math.nsc.ru`

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

УДК 517.956.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

О. С. Зикиров, Д. К. Холиков

Аннотация. Исследуется разрешимость нелокальной задачи с интегральным условием для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка. С помощью метода Римана доказаны существование и единственность классического решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, метод Римана, нелокальное условие, псевдопараболическое уравнение.

1. Постановка задачи и основные результаты

Нагруженным принято называть уравнение [1, 2], содержащее некоторую операцию от следа искомой функции. В настоящее время в связи с развитием теории нелокальных задач для уравнений в частных производных нагруженными стали называть и уравнения, содержащие функционал от самого искомого решения [3].

В плоскости независимых переменных (x, t) рассмотрим нагруженное уравнение в частных производных третьего порядка

$$Mu \equiv Lu + \int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)\,dx = -f(x,t), \tag{1}$$

где $Lu \equiv u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_x + d(x,t)u_t + e(x,t)u$ — псевдопараболический оператор, а $k(x,t)$ — заданная функция.

Такого вида уравнения возникают в теории фильтрации жидкостей в пористых средах [4], неустановившегося движения грунтовых вод со свободной поверхностью [5], в теории влагопереноса в почве [6] и многих других дисциплинах, связанных с математическим моделированием.

Изучению краевых задач для псевдопараболических уравнений посвящено большое количество работ (см., например, [7–12]).

Для уравнения (1) поставим следующую задачу.

Найти в области $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ *решение* $u(x,t)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и следующим граничным условиям:

$$u(0,t) = \beta(t)\int\limits_0^l u(x,t)\,dx + \int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)\,d\tau + \psi_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

Здесь функции $\varphi_0(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\beta(t)$, $\rho(t,\tau)$ заданы и непрерывны на $[0,l]$, $[0,T]$, $0 \le \tau \le t$ соответственно, и, кроме того, удовлетворяют условиям согласования

$$\varphi_0(0) = \beta(0)\int\limits_0^l \varphi_0(x)dx + \psi_1(0), \quad \varphi_0'(0) = \psi_2(0).$$

Заметим, что нелокальное условие (3)можно заменить условием

$$u(0,t) = \beta(t)\int\limits_0^h u(x,t)\,dx + \int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)\,d\tau - \psi_1(t),$$

где h — глубина корнеобитаемого слоя [7] или активный слой почвы, который участвует в водоснабжении корневой системы, в процессах испарения и транспирации. Исследованное в данной работе уравнение характерно также тем, что содержит нагруженное слагаемое и в краевых условиях нелокальность по времени.

Введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения и определения.

Пусть $C^{k,l}(D)$ — класс функций $u(x,t)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u/\partial x^m \partial t^n$ для всех $m = 0,1,2,\ldots,k$, $n = 0,1,2,\ldots,l$, где $C^{k,0}(D) = C^{0,k}(D) = C^k(D)$ и $C^{0,0}(D) = C(D)$.

Определение 1. Под *классическим решением задачи* (1)–(4) будем понимать функцию $u(x,t)$ из класса $C^{2,1}(D) \cap C^{1,0}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2)–(4) в обычном смысле.

Задачу (1)–(4) исследуем в пространстве $C^{2,1}(D) \cap C^{1,0}(\overline{D})$, и в этом случае будем требовать выполнения следующих условий.

Условие 1. *Коэффициенты уравнения* (1) *для всех* $(x,t) \in D$ *удовлетворяют условиям*

$$a(x,t) \in C^{1,0}(\overline{D}) \cap C^{2,0}(D), \quad b(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^{1,1}(D),$$

$$c(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{1,0}(D), \quad d(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{0,1}(D), \quad e(x,t) \in C(D).$$

Кроме того, $d(x,t) < 0$ *для любой* $(x,t) \in D$.

Условие 2. *Заданные функции* $\varphi_0(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\beta(t)$, $f(x,t)$, $k(x,t)$ *и* $\rho(t,\tau)$ *удовлетворяют условиям* $\varphi_0(x) \in C^2[0,l]$, $\psi_1(t), \psi_2(t) \in C^1[0,T]$, $\beta(t), \rho(t,\tau) \in C[0,T]$, $f(x,t), k(x,t) \in C(\overline{D})$ *и* $\beta(t) < 0$ *для всех* $t \in [0,T]$.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда задача* (1)–(4) *имеет единственное классическое в области* $\overline{D}$ *решение.*

Справедливость сформулированной выше теоремы докажем методом Римана, разработанным в [8].

2. Функция Римана

Введем оператор L^*, сопряженный с оператором L:

$$L^*v \equiv -v_{xtx} + (av)_{xx} + (bv)_{xt} - (cv)_x - (dv)_t + ev = 0, \tag{5}$$

Очевидно, что оператор L^* определен на функциях $v(x,t)$, имеющих следующую гладкость: $v(x,t) \in C^{1,0}(\overline{D})$, $v(x,t) \in C^{0,0}(\overline{D})$ и $v(x,t) \in C^{2,1}(D)$.

Определение 2. Назовем *функцией Римана уравнения* (1) функцию, являющуюся решением следующей задачи Гурса:

$$L^*v = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{6}$$

$$v(\xi,t;\xi,\tau) = 0, \quad v_x(\xi,t;\xi,\tau) = \exp\left\{ \int\limits_{\tau}^{t} a(\xi,\tau_1)\,d\tau_1 \right\}, \tag{7}$$

$$v(x,\tau;\xi,\tau) = \omega(x,\tau), \tag{8}$$

где $\omega(x,\tau)$ — решение задачи Коши:

$$v_{xx}(x,\tau;\xi,\tau) + (bv)_x(x,\tau;\xi,\tau) + (dv)(x,\tau;\xi,\tau) = 0,$$

$$v(\xi,\tau;\xi,\tau) = 0, \quad v_x(\xi,\tau;\xi,\tau) = 1, \tag{9}$$

а (ξ,τ) — произвольная фиксированная точка из области $\overline{D}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда функция Римана* $v(x,t) = v(\xi,\tau;\,x,t)$ *уравнения* (1) *существует и единственна.*

Доказательство. Пусть решение задачи (6)–(9) — функция $v(x,t)$ — существует. Проинтегрировав уравнение (6) по x от ξ до x и воспользовавшись условиями (7), (8), получим уравнение

$$l(v) \equiv v_{xt} - av_x + bv_t + (c - a_x - b_t)v = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\xi}^{x} d(x_1,t)v(x_1,t)\,dx_1 + \int\limits_{\xi}^{x} e(x_1,t)v(x_1,t)\,dx_1. \tag{10}$$

Легко проверить, что

$$ul(v) - vl^*(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(uv_t - vu_t) - auv\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(uv_x - vu_x) - buv\right], \tag{11}$$

здесь $l^*(u) \equiv u_{xt} - (av)_x - (bv)_t + (c - a_x - b_t)u$.

Пусть $R(x,t;\alpha,\beta)$ — функция Римана для уравнения $l(v)=0$, т. е. представляет собой функцию, удовлетворяющую уравнению $l^*(R)=0$ и условиям

$$R(\alpha,t;\alpha,\beta)=\exp\left\{-\int\limits_{\beta}^{t} a(\alpha,t_1)\,dt_1\right\},\quad R(x,\beta;\alpha,\beta)=\exp\left\{-\int\limits_{\alpha}^{x} b(x_1,t)\,dx_1\right\}. \tag{12}$$

Очевидно, что $R(\alpha,\beta;\alpha,\beta)=1$, где (α,β) — фиксированная точка области D.

В результате почленного интегрирования (11) по характеристическому прямоугольнику $D'=\{(x,t):\alpha<x<\xi,\ \beta<t<\tau\}$, применяя формулы Грина и учитывая (7), (8), (10) и (12), получим

$$\begin{aligned} v(\alpha,\beta)&=\frac{1}{2}R(\alpha,\tau;\alpha,\beta)\omega(\alpha,\tau)\\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\xi}[R(x,\tau;\alpha,\beta)\omega_x(x,\tau)-(R_x(x,\tau;\alpha,\beta)+2b(x,\tau)R(x,\tau;\alpha,\beta))\omega(x,\tau)]\,dx\\ &+\int\limits_{\beta}^{\tau}\int\limits_{\alpha}^{\xi}R(x,t;\alpha,\beta)\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\xi}^{x} d(x_1,t)v(x_1,t)\,dx_1+\int\limits_{\xi}^{x} e(x_1,t)v(x_1,t)\,dx_1\right\}dxdt. \end{aligned} \tag{13}$$

Интегрируя в (13) по частям и меняя порядок интегрирования по формуле Дирихле, имеем

$$v(\alpha,\beta)-\int\limits_{\xi}^{\alpha}K_1(x,\beta;\alpha,\beta)v(x,\beta)\,dx+\int\limits_{\xi}^{\alpha}dx\int\limits_{\tau}^{\beta}K_2(x,t;\alpha,\beta)v(x,t)\,dt=F, \tag{14}$$

здесь

$$K_1(x,\beta;\alpha,\beta)=d(x,\beta)\int\limits_{\alpha}^{x}R_t(x_1,\beta;\alpha,\beta)\,dx_1,$$

$$K_2(x,t;\alpha,\beta)=d(x,t)\int\limits_{\alpha}^{x}R_t(x_1,t;\alpha,\beta)\,dx_1+e(x,t)\int\limits_{\alpha}^{x}R(x_1,t;\alpha,\beta)\,dx_1,$$

$$\begin{aligned} F&=\frac{1}{2}R(\alpha,\tau;\alpha,\beta)\omega(\alpha,\tau)-\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\alpha}[R(x,\tau;\alpha,\beta)\omega_x(x,\tau)-(R_x(x,\tau;\alpha,\beta)\\ &\quad+2b(x,\tau)R(x,\tau;\alpha,\beta))\omega(x,\tau)]\,dx+\int\limits_{\xi}^{\alpha}\int\limits_{x_1}^{\alpha}d(x_1,\tau)R(x_1,\tau;\alpha,\beta)\omega(x,\tau)\,dx. \end{aligned}$$

Известно [8], что обратимая замена

$$v(\alpha,\beta)=v_0(\alpha,\beta)-\int\limits_{\xi}^{\alpha}v_0(x_1,\beta)K_1(x,\beta;\alpha,\beta)\exp\left\{\int\limits_{x_1}^{\alpha}K_2(x_2,\beta)dx_2\right\}dx_1$$

сводит уравнение (14) к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно функции $v_0(\alpha,\beta)$:

$$v_0(\alpha,\beta)+\int\limits_{\xi}^{\alpha}\int\limits_{\tau}^{\beta}K_3(x,t;\alpha,\beta)v_0(x,t)\,dt=F,$$

где

$$K_3(x,t;\alpha,\beta)=K_1(x,t;\alpha,\beta)\int\limits_{x}^{\alpha}K_2(x_1,t;\alpha,\beta)\exp\left\{\int\limits_{x_1}^{\alpha}K_2(x_2,\beta)dx_2\right\}dx_1 + K_2(x,t;\alpha,\beta),$$

которое безусловно и однозначно разрешимо.

3. Задача Гурса

Исследуем характеристическую задачу для уравнения (1).

Требуется найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в области D решением уравнения (1) *и удовлетворяющую начальному условию* (2) *и граничным условиям*

$$u(0,t)=\psi(t),\quad u_x(0,t)=\psi_2(t),\quad 0\le t\le T, \tag{15}$$

где $\psi(t)$ — пока неизвестная функция такая, что

$$\psi(0)=\varphi(0),\quad \psi_2(0)=\varphi'(0).$$

Очевидно, что прямые $x=\mathrm{const}$, $y=\mathrm{const}$ являются характеристиками уравнения (1), поэтому задачу (1), (2), (15) будем называть *задачей Гурса.*

Рассмотрим следующее тождество для функций $u(x,t)$, $v(x,t)\in C^{2,1}(D)\cap C^{1,0}(\overline{D})$:

$$vLu-uL^*v=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial t}+v\int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)\,dx, \tag{16}$$

здесь

$$P=vu_{xt}+uv_{xt}+avu_x-(av)_xu-(bv)_tu+cvu,\quad Q=-v_xu_x+duv+bvu_x.$$

Предположим, что P, Q непрерывны в области $\overline{D}$, а P_x, Q_t непрерывны и ограничены в D. Проинтегрируем тождество (16) по области $D_0=\{(x_1,t_1):x_0<x_1<x,\ t_0<t_1<t\}$:

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}(vLu-uL^*v)\,dx_1dt_1=\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left\{\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial t}+v\int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)\,dx\right\}dx_1dt_1, \tag{17}$$

С учетом определения функции Римана $v = v(x,t;\xi,\tau)$ из (17) легко получить интегральное представление

$$u(x,t) = v_x(x_0,t;x,t)u(x_0,t) - (bv)(x_0,t;x,t)u(x_0,t) + (bv)(x_0,t_0;x,t)u(x_0,t_0)$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x} [v_x(x_1,t_0;x,t)u(x_1,t_0)+(bv)_x(x_1,t_0;x,t)u(x_1,t_0)-(dv)(x_1,t_0;x,t)u(x_1,t_0)]\,dx_1$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t} [v(x_0,t_1;x,t)u_{xt}(x_0,t_1) + (av)(x_0,t_1;x,t)u_x(x_0,t_1)]\,dt_1$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t} [v_{xt}(x_0,t_1;x,t)-(av)_x(x_0,t_1;x,t)-(bv)_t(x_0,t_1;x,t)+(cv)(x_0,t_1;x,t)]u(x_0,t_1)\,dt_1$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x} dx_1 \int\limits_{t_0}^{t} v(x_1,t_1;x,t)\left\{\int\limits_0^l k(x,t_1)u(x,t_1)\,dx - f(x_1,t_1)\right\} dt_1, \quad (18)$$

где (x_0,t_0) — произвольная фиксированная точка из $\overline{D}_0$.

Используя интегральное представление (18) при $x_0 = t_0 = 0$ и учитывая условия (2) и (15), получим

$$u(x,t) = v_x(0,t;x,t)\psi(t) - (bv)(x_0,t;x,t)\psi(t) + (bv)(x_0,t_0;x,t)\varphi(0)$$
$$+\int\limits_0^{x} [v_x(x_1,0;x,t)\varphi'(x_1) + (bv)_x(x_1,0;x,t)\varphi(x_1) - (dv)(x_1,0;x,t)\varphi(x_1)]\,dx_1$$
$$-\int\limits_0^{t} [v(0,t_1;x,t)\psi_2'(t_1) + (av)(0,t_1;x,t)\psi_2(t_1)]\,dt_1$$
$$-\int\limits_0^{t} [v_{xt}(0,t_1;x,t) - (av)_x(0,t_1;x,t) - (bv)_t(0,t_1;x,t) + (cv)(0,t_1;x,t)]\psi(t_1)\,dt_1$$
$$+\int\limits_0^{x} dx_1 \int\limits_0^{t} v(x_1,t_1;x,t)\left\{\int\limits_0^l k(x,t_1)u(x,t_1)\,dx - f(x_1,t_1)\right\} dt_1. \quad (19)$$

4. Сведение задачи (1)–(4) к системе интегральных уравнений

В этом разделе будет изучен вопрос о сведéнии задачи (1)–(4) к системе интегральных уравнений. Представление (19) после некоторых преобразований перепишем в виде

$$u(x,t)=[v_x(0,t;x,t)-(bv)(0,t;x,t)]\psi(t)$$
$$-\int\limits_0^t[v_{xt}(0,\tau;x,t)-(av)_x(0,\tau;x,t)-(bv)_t(0,\tau;x,t)+(cv)(0,\tau;x,t)]\psi(\tau)\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^t v(\xi,\tau;x,t)\mu(\tau)\,dx_1 d\xi d\tau+g(x,t), \quad (20)$$

здесь

$$\mu(t)=\int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)\,dx, \quad \mu(0)=\int\limits_0^l k(x,0)\varphi(x)\,dx, \quad (21)$$

$$g(x,t)=(bv)(0,0;x,t)\varphi(0)$$
$$+\int\limits_0^x[v_x(\xi,0;x,t)\varphi'(\xi)+(bv)_x(\xi,0;x,t)\varphi(\xi)-(dv)(\xi,0;x,t)\varphi(\xi)]\,d\xi$$
$$-\int\limits_0^t[v(0,\tau;x,t)\psi_2'(\tau)+(av)(0,\tau;x,t)\psi_2(\tau)]\,d\tau-\int\limits_0^x\int\limits_0^t v(\xi,\tau;x,t)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

Сначала проинтегрируем (20) по x от 0 до l и после несложных преобразований получим

$$\int\limits_0^l u(x,t)\,dx=\left(v_x(0,t;l,t)-b(0,t)\int\limits_0^l v(0,t;x,t)\,dx\right)\psi(t)$$
$$-\int\limits_0^t K_0(\tau,t)\psi(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^l dx\int\limits_0^x\int\limits_0^t v(\xi,\tau;x,t)\mu(\tau)\,d\xi d\tau+\int\limits_0^l g(x,t)\,dx, \quad (22)$$

где

$$K_0(\tau,t)=v_t(0,\tau;l,t)-a(0,\tau)v(0,\tau;l,t)$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l(bv)(0,\tau;x,t)\,dx+\int\limits_0^l c(0,\tau)v(0,\tau;x,t)\,dx.$$

В (20) положим $x=l$ и умножим на $\rho(\tau,t)$, полученное при этом выражение проинтегрируем по τ в пределах от 0 до t и после ряда преобразований получим

$$\int\limits_0^t\rho(\tau,t)u(l,\tau)\,d\tau=\int\limits_0^t\rho(\tau,t)[v_x(0,\tau;l,t)-(bv)(0,\tau;l,t)]\psi(\tau)\,d\tau$$
$$-\int\limits_0^t\psi(\tau)\,d\tau\int\limits_\tau^t\rho(t,s)[v_{xt}(0,s;l,\tau)-(av)_x(0,s;l,\tau)-(bv)_t(0,s;l,\tau)+(cv)(0,s;l,\tau)]\,ds$$

$$+\int_0^t \mu(\tau)\,d\tau \int_\tau^t \rho(t,s)\left(\int_0^l v(\xi,s;l,\tau)\,d\xi\right)ds + \int_0^t \rho(\tau,t)g(l,\tau)\,d\tau, \quad (23)$$

Соберем все слагаемые, отвечающие условию (3) в точке $x=0$, и получим следующее соотношение между $\psi(t)$ и $\mu(t)$:

$$A_1(t)\psi(t) + \int_0^t K^*(t,\tau)\psi(\tau)\,d\tau + \int_0^t K_\mu(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau = g_0(t), \quad (24)$$

где

$$A_1(t) = \beta(t)\left[v(0,t;l,t) - b(0,t)\int_0^l v(0,t;x,t)\,dx\right],$$

$$K^*(t,\tau) = v_{xt}(0,\tau;l,t) - (av)_x(0,\tau;l,t) - (bv)_t(0,\tau;l,t) + (cv)(0,\tau;l,t)$$
$$-\beta(t)\left[v_t(0,\tau;l,t) - a(0,\tau)v(0,\tau;l,t) + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l (bv)(0,\tau;x,t)\,dx + \int_0^l (bv)(0,\tau;x,t)\,dx\right]$$
$$+\rho(\tau,t)[v_x(0,\tau;l,t) - (bv)(0,\tau;l,t)]$$
$$-\int_\tau^t \rho(t,s)[v_{xt}(0,s;l,t) - (av)_x(0,s;l,t) - (bv)_t(0,s;l,t) + (cv)(0,s;l,t)]\,ds,$$

$$K_\mu(t,\tau) = \beta(\tau)\int_0^l dx\int_0^x v(\xi,\tau;x,t)\,d\xi + \int_\tau^t \rho(t,s)\,ds\int_0^l v(\xi,s;l,\tau)\,d\xi,$$

$$g_0(t) = g(0,t) - \beta(t)\int_0^l g(x,t)\,dx - \int_0^t \rho(t,\tau)g(l,\tau)\,d\tau - \psi_1(t).$$

Умножим обе части (20) на функцию $k(x,t)$ и проинтегрируем по x от 0 до l. После преобразований получим второе соотношение между функциями $\psi(t)$ и $\mu(t)$:

$$A_2(t)\psi(t) - \mu(t) - \int_0^t K^{**}(t,\tau)\psi(\tau)\,d\tau - \int_0^t K^*_\mu(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau = g_1(t), \quad (25)$$

здесь

$$A_2(t) = \int_0^l k(x,t)[v(0,t;x,t) - (bv)(0,t;x,t)]\,dx,$$

$$K^{**}(t,\tau) = \int_0^l k(x,t)[v_{xt}(0,\tau;x,t) - (av)_x(0,\tau;x,t) - (bv)_t(0,\tau;x,t) + (cv)(0,\tau;x,t)]\,dx,$$

$$K^*_\mu(t,\tau) = \int\limits_0^l k(x,t)\,dx \int\limits_0^x v(\xi,\tau;x,t)\,d\xi, \quad g_1(t) = \int\limits_0^l k(x,t)g(x,t)\,dx.$$

Таким образом, разрешимость задачи (1)–(4) сведена к разрешимости системы интегральных уравнений типа Вольтерра (24), (25).

Введя обозначения

$$\mathscr{A}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ A_2(t) & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}(t,\tau) = \begin{pmatrix} K^*(t,\eta) & K_\mu(t,\tau) \\ -K^{**}(t,\tau) & K^*_\mu(t,\tau) \end{pmatrix}, \quad w(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix},$$

систему интегральных уравнений (24)–(25) перепишем в операторном виде:

$$\mathscr{A}(t)w(t) + \int\limits_0^t \mathscr{B}(t,\tau)w(\tau)\,d\tau = g(t), \tag{26}$$

здесь

$$\det|\mathscr{A}(t)| = -\beta(t)v(0,t;l,t) + \beta(t)b(0,t)\int\limits_0^l v(0,t;x,t)\,dx.$$

Покажем, что $\det|\mathscr{A}(t)| \neq 0$. Следуя рассуждениям [8], можно выделить класс задач, для которых $\det|\mathscr{A}(t)|$ нигде в $[0,T]$ не обращается в нуль. Действительно, функция $v(0,t;l,t)$ на $[0,T]$ нигде не обращается в нуль, если нуль не является собственным значением задачи

$$\begin{gathered} v_{xx}(x,t;l,t) + (bv)_x(x,t;l,t) + (dv)(x,t;l,t) = 0, \\ v(0,t;l,t) = 0, \quad v(l,t;l,t) = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Так будет, например при $d(x,t) \le 0$. В самом деле, если $v(0,t;l,t) = 0$ при каком-либо $t \in [0,T]$, то задача (27) имеет только тривиальное решение $v(x,t;l,t) \equiv 0$, а значит, $v_x(x,t;l,t) = 0$, что противоречит условию $v_x(l,t;l,t) = 1$.

На основании леммы, доказанной в [7, 8], легко убедиться, что если $\beta(t) < 0$ для всех $t \in [0,T]$, то $\det|\mathscr{A}(t)| \neq 0$. Поэтому система уравнений (24), (25) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая безусловно разрешима.

Таким образом, находя $\psi(t)$ и $\mu(t)$ из интегральных уравнений Вольтерра, задачу (1)–(4) редуцируем к задаче Гурса для уравнения (1), однозначная разрешимость которой установлена, например, в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
2. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теорет. и прикл. математики, 1995.
3. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальными и граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.

4. *Баренблатт Г. Н., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864.

5. *Дзецкер Е. С.* Уравнение движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 3. С. 540–543.

6. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.

7. *Бештоков М. Х.* Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 4. С. 15–24.

8. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.

9. *Солдатов А. П., Шхануков М. Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.

10. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казан. мат. о-во, 2001.

11. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.

12. *Джохадзе О. М.* Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 4. С. 517–528.

Статья поступила 10 марта 2016 г.

Зикиров Обиджан Салижанович, Холиков Дилшод Камолович
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
механико-математический факультет,
ул. Университетская, 4, Ташкент 100174, Республика Узбекистан
zikirov@yandex.ru, xoliqov23@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

UDC 517.956.3

ON SOME PROBLEM FOR A LOADED PSEUDOPARABOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER

O. S. Zikirov and D. K. Kholikov

Abstract: We study solvability of a non-local problem with integral condition for the loaded pseudoparabolic equation of the third order. The existence and uniqueness of the classical solution of the considered problem is proved by Riemann's method.

Keywords: loaded equation, Riemann function, non-local condition, pseudoparabolic equation.

REFERENCES

1. *Nakhushev A. M.*, Offset problems for partial differential equations [in Russian], Nauka, Moscow (2006).

2. *Dzhenaliev M. T.*, To the theory of linear boundary value problems for loaded differential equations [in Russian], Inst. Theor. Appl. Math., Almaty (1995).

3. *Kozhanov A. I. and Pul′kina L. S.*, "On solvability of boundary value problems with nonlocal and boundary conditions of integral type for multidimensional hyperbolic equations," Differ. Uravn., **42**, No. 9, 1166–1179 (2006).

4. *Barenblatt G. N., Zheltov Yu. P., and Kochina I. N.*, "About the main ideas of the theory of filtration of homogeneous liquids in fissured rocks," Prikl. Mat. Mekh., **24**, No. 3, 540–543 (1960).

5. *Dzetsker E. S.*, "The equation of motion of groundwater with a free surface in the multilayered media," Dokl. Akad. Nauk, **220**, No. 3, 540–543 (1975).

6. *Chudnovskiy A. F.*, Thermophysics of Soils [in Russian], Nauka, Moscow (1976).

7. *Beshtokov M. Kh.*, "Riemann method for the solution of nonlocal boundary value problems for pseudoparabolic equations of the third order," Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauk, No. 4, 15–24 (2013).

8. *Shkhanukov M. Kh.*, "On some boundary value problems for third order equations arising in the modeling of fluid filtration in porous media," Differ. Uravn., **18**, No. 4, 689–699 (1982).

9. *Soldatov A. P. and Shkhanukov M. Kh.*, "The boundary value problem with the general nonlocal A. A. Samarskii condition for the pseudoparabolic equations of higher order," Dokl. Acad. Nauk, **297**, No. 3, 547–552 (1987).

10. *Zhegalov V. I. and Mironov A. N.*, Differential equations with higher derivatives [in Russian], Kazan. Mat. Obshchestvo, Kazan' (2001).

11. *Kozhanov A. I.*, "On one nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat and Aller equations," Differ. Uravn., **40**, No. 6, 517–774 (2004).

12. *Dzhohadze O. M.* "The influence of younger members on the correctness of the statement of characteristic problems for hyperbolic equations of the third order," Mat. Zametki, **74**, No. 4, 517–528 (2003).

Submitted March 10, 2016

Obidzhan Salizhanovich Zikirov and Dilshod Komolovich Kholikov
Mirzo Ulugbek Uzbekistan National University,
Department of Mathematics and Mechanics,
Universitetskaya st., 4, Tashkent 100174, Uzbekiston
zikirov@yandex.ru, xoliqov23@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

УДК 517.918+516.918

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННО–ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. А. Исхоков, М. Г. Гадоев, М. Н. Петрова

Аннотация. Исследуются некоторые спектральные свойства одного класса вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов A с сингулярными матричными коэффициентами, порожденных некоэрцитивными полуторалинейными формами. Оператор A рассматривается в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)^l$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — предельно-цилиндрическая область, $l > 0$ — целое число.
Ключевые слова: спектральные свойства, вырожденно-эллиптический оператор, некоэрцитивные полуторалинейные формы, предельно-цилиндрическая область, резольвента обобщенной задачи Дирихле.

§ 1. Введение

Работа посвящена исследованию резольвенты обобщенной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для некоэрцитивных форм. Полученные результаты применяются для исследования спектральных свойств несамосопряженных дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными формами.

Ранее обобщенная задача Дирихле и соответствующие ей несамосопряженные операторы в случае некоэрцитивных форм изучались во многих работах (см. [1–11] и имеющуюся там библиографию). Некоторые спектральные свойства несамосопряженных вырождающихся эллиптических операторов с сингулярными матричными коэффициентами исследованы в [12–15]. Из последних работ в этом направлении отметим [16–21].

При исследовании обобщенной задачи Дирихле принципиально новый подход предложен в [16]. В [17, 18] исследования проведены с помощью весового аналога неравенства Гординга, доказанного в [16] для вырождающихся эллиптических операторов в произвольной (ограниченной или неограниченной) области n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, в результате которого условия эллиптичности в этих работах существенно ослаблены.

В [1, 9, 10] введен класс вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов A с сингулярными коэффициентами, порожденных некоэрцитивными билинейными формами. Оператор A рассматривается в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)^l$, l — целое положительное число, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса. В этих работах получена оценка резольвенты исследуемого оператора

$$\|(A-\lambda E)^{-1}\| \leq M|\lambda|^{-1/2}, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — достаточно большой по модулю комплекснозначный параметр, который изменяется в некотором угле с началом в нуле.

В [11] установлена оценка резольвенты оператора A с показателем 1 вместо $1/2$, что позволило автору исследовать вопросы суммируемости в смысле Абеля — Лидского системы корневых вектор-функций оператора A.

В настоящей статье с целью получения уточненной оценки резольвенты по аналогии с [11] рассматривается тройка плотно вложенных пространств $H^l_\nu \to L_2(\Omega)^l \to H^l_{-\nu}$, зависящих от параметра $\nu > 0$. В данной работе устанавливаются также оценки резольвенты расширения $\mathscr{A} : H^l_\nu \to H^l_{-\nu}$ оператора A, равномерные по $\nu > 0$. Из этих оценок при достаточно большом ν удается извлечь оценку вида (1) с показателем 1.

§ 2. Обозначения и основные результаты

1. В этом параграфе введены необходимые обозначения, сформулированы основные теоремы и дано краткое описание содержания последующих разделов статьи.

Пусть m, n — натуральные числа, $n \geq 2$ и $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область, граница которой ∂G удовлетворяет условию конуса (определение см., например, в [22]) и не является линией уровня многочлена степени $\leq m-1$ по переменным $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, т. е. ни один такой многочлен не может тождественно обращаться в нуль на ∂G.

Пусть $F(t)$, $-\infty < t < \infty$, — ограниченная сверху положительная функция такая, что $F(t) \to 0$, $t \to \infty$. Область

$$\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x'/F(x_n) \in G\},$$

где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, называется *предельно-цилиндрической областью с нулевым радиусом на бесконечности.*

Далее всюду в работе предполагается, что Ω — предельно-цилиндрическая область с нулевым радиусом на бесконечности и

$$\operatorname{dist}(x, \Gamma_{x_n}) \leq M \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \tag{2}$$

для всех $x = (x', x_n) \in \Omega$, где $\Gamma_{x_n} = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x'/F(x_n) \in \partial G\}$. Отметим, что условие (2) выполняется, в частности, в том случае, если $G-(n-1)$-мерный шар с центром в нуле и $F(t) \in C^3(R)$ — четная функция, удовлетворяющая при $t > 0$ неравенствам $F'(t) \leq 0$, $F''(t) \geq 0$.

Пусть $m, l > 0$ — целые числа, $\theta \in (-\infty, m)$. Введем пространство $W^m_{2,\theta}(\Omega)$ функций $u(x)$, $x \in \Omega$, с конечной нормой

$$|u|_+ = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int\limits_\Omega \rho^{2\theta}(x) \left| D^\alpha_x u(x) \right|^2 dx + \int\limits_\Omega |u(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ — мультииндекс, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ — порядок производной, $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел,

$$D_x^\alpha = (-i)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

— оператор дифференцирования, $\rho(x) \in C^\infty(\Omega)$ — положительная функция такая, что

$$\rho(x) \le \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \le M\rho(x), \quad \left|D_x^\alpha \rho(x)\right| \le M_\alpha \rho^{1-|\alpha|}(x), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n;$$

M, M_α — положительные постоянные. Здесь и далее положительные постоянные, значения которых не важны, обозначаются одной буквой M.

О существовании для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функции $\rho(x)$ с указанными свойствами см., например, [23, гл. 3, § 1.3].

2. Рассмотрим функцию

$$A(x,\xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} \langle a_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha, \xi_\beta\rangle_{\mathbb{C}^l} \quad (x \in \Omega,\ \xi = \{\xi_\alpha\}_{|\alpha|\le m}, \xi_\alpha \in \mathbb{C}^l)$$

с коэффициентами $a_{\alpha\beta}(x) \in L_\infty(\Omega; \operatorname{End}\mathbb{C}^l)$. Символ $\langle , \rangle_{\mathbb{C}^l}$ обозначает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^l$, а символом $\operatorname{End}\mathbb{C}^l$ обозначено пространство $(l \times l)$-матриц $\left(a_{\alpha\beta}^{ij}\right)_{i,j=1}^{l}$ с нормой $\left|a_{\alpha\beta}^{ij}\right| = \max\limits_{i,j=\overline{1,l}} \left|a_{\alpha\beta}^{ij}\right|$.

В случае $\theta + \frac{1}{2} \in \{1, \ldots, m\}$ дополнительно предполагается, что

$$|a_{\alpha\beta}(x)| \le M\rho^\delta(x), \quad |\alpha| + |\beta| < 2m,\ \delta > 0. \tag{3}$$

Здесь и далее нормы в пространствах $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^l$, $\operatorname{End}\mathbb{C}^l$, $L_2(\Omega)$, $L_2(\Omega)^l$ обозначаются одним и тем же знаком $|\cdot|$, а через B^l, где B — линейное пространство, обозначается пространство элементов $(v_1, \ldots, v_l)$ с координатами $v_i \in B$, $i = \overline{1,l}$.

Далее предполагается, что для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\xi = \{\xi_\alpha\}_{|\alpha|\le m}$ выполняются неравенства

$$|\arg A(x,\xi)| < \varphi, \tag{4}$$

$$\sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 \le M \operatorname{Re}\{\gamma(x)A(x,\xi)\}, \tag{5}$$

где $\varphi \in (0, \pi)$ и функция $\gamma(x) \in C(\overline{\Omega})$ такая, что $\gamma(x) \ne 0$, $x \in \overline{\Omega}$. Здесь и далее функция $\arg z$, $z \in \mathbb{C}$, принимает значения на отрезке $(-\pi, \pi]$.

Обозначим через H_+ замыкание линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W_{2,\theta}^m(\Omega)$. На основании неравенства Харди (см. § 3), учитывая (3) и (5), на вектор-функциях $u, v \in H_+^l$ можно задавать полуторалинейную форму

$$B[u,v] = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \big(p_\alpha(x)a_{\alpha\beta}(x)D_x^\alpha u(x), p_\beta(x)D_x^\beta v(x)\big),$$

где $p_\alpha(x) = \rho(x)^{\theta+|\alpha|-m}$. Матричная функция $a_{\alpha\beta}(x) \in L_\infty(\Omega; \operatorname{End}\mathbb{C}^l)$ действует по формуле

$$v_i(x) = \sum_{j=1}^{l} a_{\alpha\beta}^{ij}(x) u_j(x), \quad i = \overline{1, l},$$

где $v_1(x), \ldots, v_l(x)$ — компоненты вектор-функции $v(x) = a_{\alpha\beta}(x)u(x)$. Здесь и далее символ $(\ ,\ )$ обозначает скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ или $L_2(\Omega)^l$.

Обозначим через H_- пополнение пространства $H = L_2(\Omega)$ по норме

$$|u|_- = \sup_{\omega \in H_+,\, |\omega|_+ = 1} |(\omega, u)|.$$

Положим $H_-^l = H_- \oplus \cdots \oplus H_-$ (l раз). Элемент $F = (F_1, \ldots, F_l) \in H_-^l$ порождает антилинейный непрерывный функционал над H_+^l по формуле

$$\langle F, v\rangle = \lim_{i \to +\infty} (u_i, v), \quad v \in H_+^l,$$

где последовательность вектор-функций $u_1, u_2, \cdots \in H^l \equiv L_2(\Omega)^l$ выбирается так, что $u_i \to F$, $i \to +\infty$, в H_-^l.

Заметим, что если $v = (v_1, \ldots, v_l) \in H_+^l$, то

$$\langle F, v\rangle = \sum_{i=1}^{l} \langle F_i, v_i\rangle, \quad |F|_- = \left(\sum_{i=1}^{l} |F_i|_-^2\right)^{1/2}.$$

Обратно, для любого антилинейного непрерывного функционала $g(v)$, $v \in H_+^l$, существует единственный элемент $F \in H_-^l$ такой, что $g(v) = \langle F, v\rangle$, $v \in H_+^l$, при этом норма функционала g равна $|F|_-$.

В дальнейшем антилинейные непрерывные функционалы над H_+^l отождествляются с элементами пространства H_-^l. Нормы в пространствах H_+^l и H_-^l будем обозначать соответственно теми же знаками $|\cdot|_+$ и $|\cdot|_-$. Таким образом, получили тройку плотно вложенных пространств $H_+^l \subset H^l \subset H_-^l$, в которой H_+^l — позитивное пространство, H_-^l — негативное пространство (см. [25, § 2.0]).

Выше действие функционала $F \in H_-^l$ на элемент $v \in H_+^l$ обозначили символом $\langle F, v\rangle$. Очевидно, что в случае $F \in H^l$ имеем $\langle F, v\rangle = (F, v)$.

3. Введем оператор $\mathscr{A} : H_+^l \to H_-^l$, действующий на элемент $u \in H_+^l$ по формуле $\langle \mathscr{A}u, v\rangle = B[u, v]$, $v \in H_+^l$. Рассмотрим множество

$$\mathscr{L}_\lambda = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C},\ \dim \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda E) > 0\}.$$

Легко можно установить, что $\mathscr{L}_\lambda$ является чисто точечным множеством с единственной предельной точкой на бесконечности. При этом если $\lambda \notin \mathscr{L}_\lambda$, то существует непрерывный обратный оператор $(\mathscr{A} - \lambda E)^{-1} : H_-^l \to H_+^l$.

Рассмотрим в пространстве H^l оператор

$$Au = \mathscr{A}u, \quad D(A) = \{u \in H_+^l;\ \mathscr{A}u \in H^l\}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Оператор A является единственным замкнутым оператором в H^l, обладающим следующими свойствами:*

(i) $(Au, v) = B[u, v]$, $v \in H^l_+$, $u \in D(A)$;

(ii) *существует число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ такое, что оператор $A - \lambda_0 E$ имеет непрерывный обратный $(A - \lambda_0 E)^{-1} : H^l \to H^l$.*

4. Пусть P — самосопряженный оператор в H^l, ассоциированный с симметрической полуторалинейной формой

$$\mathscr{P}[u, v] = \sum_{|\alpha|=m} (p_\alpha D^\alpha u, p_\alpha D^\alpha v), \quad D(\mathscr{P}) = H^l_+.$$

Поступая так же, как в доказательстве леммы 3.5 из [24, с. 73], продолжим оператор $(P + tE)^{1/2}$, $t > 0$, до непрерывного оператора $\mathscr{P}(t) : H^l \to H^l_-$. Сужение в H^l оператора $\mathscr{P}^{-1}(t) : H^l_- \to H^l$ совпадает с оператором $(P + tE)^{-1/2}$.

Теорема 2. *Для любого замкнутого сектора $S \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| > \varphi\} \cup \{0\}$ с вершиной в нуле найдется число $\sigma > 0$ такое, что справедливы представления:*

$$(\mathscr{A} - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda| E)^{-1/2} X(\lambda) \mathscr{P}^{-1}(|\lambda|), \tag{7}$$

$$(A - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda| E)^{-1/2} X(\lambda) (P + |\lambda| E)^{-1/2}, \tag{8}$$

где $X(\lambda) : H^l \to H^l$ — линейный непрерывный оператор, $\lambda \in S$, $|\lambda| > \sigma$,

$$\sup_{\lambda \in S,\, |\lambda| > \sigma} \|X(\lambda)\|_{H^l \to H^l} < +\infty.$$

Очевидно, что (8) является следствием (7). Отметим, что из представления (8) вытекает оценка

$$\|(A - \lambda E)^{-1}\|_{H^l \to H^l} \le M_S |\lambda|^{-1}, \quad \lambda \in S, \ |\lambda| > \sigma. \tag{9}$$

Таким образом, оператор $A + \beta E$ для достаточно больших $\beta > 0$ является позитивным оператором (определения см., например, в [26, гл. 4, § 14]).

5. Приведем краткое описание содержания следующих параграфов статьи. В § 3 приведены некоторые вспомогательные утверждения и леммы, необходимые для дальнейшего. В § 4 построен правый регуляризатор для оператора $\mathscr{A} - \lambda E$. В § 5 доказана теорема о компактном вложении соответствующих пространств, которая применяется в заключительном параграфе при доказательств основных теорем.

§ 3. Вспомогательные результаты

1. При доказательстве теоремы 2, не нарушая общности, можно считать, что в условиях (4), (5) число $\varphi > \pi/2$, а $\gamma(x) \in C^m(\overline{\Omega})$. Более того, функцию $\gamma(x)$ в (5) можно подобрать так, что

$$c|\lambda| \le \operatorname{Re}\{-\lambda \gamma(x)\}, \quad x \in \overline{\Omega}, \ \lambda \in S, \ c = c_S > 0. \tag{10}$$

Например, функцию $\gamma(x)$ можно заменить на $e^{i\theta(x)}$, где

$$\theta(x) = \min\{\varphi - \pi/2, |\arg\gamma(x)|\}(\operatorname{sgn}\arg\gamma(x)).$$

Таким образом, для простоты рассуждений будем считать, что сектор S расположен в левой полуплоскости, симметричен по отношению к $\mathbb{R}_-$ и имеет угол раствора меньше чем $\pi/2$.

2. Основным инструментом исследования разрешимости краевой вариационной задачи является обобщенная теорема Лакса — Мильграма о представлении билинейного функционала. Приведем в удобной для нас форме утверждение этой теоремы (см. [25, теорема 2.0.1]) применительно к тройке плотно вложенных пространств $H^l_+ \subset H^l \subset H^l_-$ и полуторалинейным формам, заданным на H^l_+. Рассмотрим в пространстве H^l замкнутую полуторалинейную форму $B[u,v]$ с областью определения $D(B) = H^l_+$.

Относительно полуторалинейной формы $B[u,v]$ предполагаем, что она ограничена и H^l_+ коэрцитивна относительно H^l. Таким образом, пусть выполнены неравенства

$$|B[u,v]| \le M|u|_+|v|_+, \quad u,v \in H^l_+, \tag{11}$$

$$\operatorname{Re} B[u,u] \ge \delta|u|^2_+, \quad u \in H^l_+, \tag{12}$$

с некоторыми $M, \delta > 0$.

Утверждение 1 (см. [25, теорема 2.0.1]). *Существует линейный оператор Λ, осуществляющий гомоморфизм пространств H^l_+ и H^l_- и такой, что*

$$\langle \Lambda u, v\rangle = B[u,v], \quad u,v \in H^l_+.$$

При этом любой элемент $F \in H^l_-$ допускает представление

$$\langle F, v\rangle = B[u,v] = \langle \Lambda u, v\rangle,$$

в котором элемент $u \in H^l_+$ определяется единственным образом.

Следующая лемма дополняет утверждение 1.

Лемма 1 (см. [24, гл. 2, лемма 3.3]). *Пусть выполнены условия утверждения 1. Тогда справедливо неравенство*

$$|\Lambda^{-1}|_{H^l_- \to H^l_+} \le \frac{1}{\delta},$$

где положительное число δ такое же, как в (12).

Таким образом, если ввести в рассмотрение оператор $B : H^l_+ \to H^l_-$, сопоставляющий элементу $u \in H^l_+$ функционал $F \in H^l_-$ по формуле

$$\langle F, v\rangle = B[u,v], \quad v \in H^l_+,$$

то B имеет непрерывный обратный $B^{-1} : H^l_- \to H^l_+$, причем $B^{-1} = \Lambda^{-1}$.

3. Пусть $0 \neq \lambda \in S$, где S как и выше некоторый замкнутый сектор в комплексной плоскости с началом в нуле. На вектор-функциях $u, v \in H_{+}^{l}$ задаем полуторалинейную форму

$$B'_{\lambda}[u,v] = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \int_{\Omega} \gamma(x) \big\langle p_\alpha a_{\alpha\beta}(x) D_x^\alpha u(x), p_\beta D_x^\beta v(x) \big\rangle_{\mathbb{C}^l}\, dx - \lambda \int_{\Omega} \gamma(x) \langle u(x), v(x)\rangle_{\mathbb{C}^l}\, dx. \quad (13)$$

Докажем, что полуторалинейная форма (13) удовлетворяет условиям (11), (12). В условии (5) вместо $\xi_\alpha = \xi_\alpha(x)$ положим $D_x^\alpha u(x)$ и затем, интегрируя полученные равенства, в силу (10) имеем

$$\operatorname{Re} B'_{\lambda}[u,u] \ge \frac{1}{M} \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \langle p_\alpha D^\alpha u, p_\alpha D^\alpha u\rangle_{\mathbb{C}^l}\, dx + C|\lambda| \int_{\Omega} |u(x)|\, dx, \quad u \in H_{+}^{l}. \quad (14)$$

Из (14) следует (12). Для доказательства ограниченности полуторалинейной формы, т. е. выполнения условия (11), нам понадобится следующее неравенство Харди (см., например, [27]):

$$\sum_{|\alpha|\le m} \int_{\Omega} \rho(x)^{\delta'+2\theta-2m+2|\alpha|} \big|D_x^\alpha y(x)\big|^2\, dx \le M \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \rho(x)^{2\theta} \big|D_x^\alpha y(x)\big|^2\, dx + M \int_{K} |y(x)|^2\, dx, \quad y \in H_{+}, \quad (15)$$

где $K \subset \Omega$ — некоторое открытое множество, $\theta \in (-\infty; m)$, $\theta + \frac{1}{2} \notin \{1, \ldots, m\}$, $\delta' \ge 0$, $M = M(\delta') > 0$.

Оценим интегралы в (13) с помощью неравенства Коши — Буняковского и далее применим неравенство (15). В результате получим

$$\begin{aligned}
|B'_{\lambda}[u,v]| &\le M \Big\{ \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\Omega} \big(p_\alpha(x) \big|D_x^\alpha u(x)\big|\big)^2 dx \Big\}^{1/2} \\
&\times \Big\{ \sum_{|\beta|\le m} \int_{\Omega} \big(p_\beta(x) \big|D_x^\beta v(x)\big|\big)^2 dx \Big\}^{1/2} + M|\lambda| \Big(\int_{\Omega} |u(x)|^2\, dx \Big)^{1/2} \\
&\times \Big(\int_{\Omega} |v(x)|^2\, dx \Big)^{1/2} \le M \Big\{ \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\Omega} \rho^{2\theta}(x) \big|D_x^\alpha u(x)\big|^2 dx + \int_{K} |u(x)|^2\, dx \Big\}^{1/2} \\
&\times \Big\{ \sum_{|\beta|\le m} \int_{\Omega} \rho^{2\theta}(x) \big|D_x^\beta v(x)\big|^2 dx + \int_{K} |u(x)|^2\, dx \Big\}^{1/2} + M|\lambda||u||v| \\
&\le M|u|_{+}|v|_{+} + M|\lambda||u||v|.
\end{aligned}$$

Таким образом, для любых $u, v \in H_{+}^{l}$ справедливо неравенство

$$|B'_{\lambda}[u,v]| \le M|u|_{+}|v|_{+} + M|\lambda||u||v|, \quad (16)$$

т. е. полуторалинейная форма $B'_\lambda[u,v]$ удовлетворяет условиям (11), (12).

Поэтому согласно утверждению 1 полуторалинейная форма $B'_\lambda[u,v]$, $0\neq\lambda\in S$, порождает линейный непрерывный оператор $\mathscr{B}_\lambda : H^l_+ \to H^l_-$ по формуле

$$\langle \mathscr{B}_\lambda u, v\rangle = B'_\lambda[u,v], \quad u,v\in H^l_+,$$

при этом оператор $\mathscr{B}_\lambda$ (см. лемму 1) имеет непрерывный обратный

$$\mathscr{B}_\lambda^{-1} : H^l_- \to H^l_+.$$

4. Пусть P такой оператор, как в п. 4 § 2. Для $u\in H^l_+$, $t\geq 1$ справедливо равенство

$$|(P+tE)^{1/2}u|_{H^l} = \Big(\sum_{|\alpha|=m} |p_\alpha D^\alpha u|^2_{H^l} + t|u|^2_{H^l}\Big)^{1/2}. \tag{17}$$

На вектор-функциях $u,v\in H^l_+$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$P'_0[u,v] = \frac{1}{2}(B'_0[u,v] + \overline{B'_0[v,u]}) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} (\gamma p_\alpha (a_{\alpha\beta}(x) + a^*_{\beta\alpha}(x)) D^\alpha u, p_\beta D^\beta v)\Big). \tag{18}$$

Пусть P_0 — положительный самосопряженный оператор, ассоциированный с полуторалинейной формой (18). Имеет место равенство

$$|(P_0+tE)^{1/2}u|_{H^l} = (\operatorname{Re} B'_0[u,u] + t(u,u))^{1/2}, \quad u\in H^l_+,\ t\geq 1. \tag{19}$$

Докажем эквивалентность равномерно по $t\geq 1$ норм (17) и (19). Применяя неравенство (14), имеем

$$\begin{aligned} |(P_0+tE)^{1/2}u|_{H^l} &= (\operatorname{Re} B'_0[u,u] + t|u|^2_{H^l})^{1/2} \\ &\geq \left(\frac{1}{M}\sum_{|\alpha|=m} |p_\alpha D^\alpha u|^2_{H^l} + t|u|^2_{H^l}\right)^{1/2} \geq M|(P+tE)^{1/2}u|_{H^l}. \end{aligned}$$

Обратно, применяя неравенство (16), имеем

$$\begin{aligned} |(P+tE)^{1/2}u|_{H^l} &= \Big(\sum_{|\alpha|=m} |p_\alpha D^\alpha u|^2_{H^l} + t|u|^2_{H^l}\Big)^{1/2} \\ &\geq M(\operatorname{Re} B'_0[u,u] + t|u|^2_{H^l})^{1/2} \geq M|(P_0+tE)^{1/2}u|_{H^l}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|(P+tE)^{1/2}u|_{H^l} \sim |(P_0+tE)^{1/2}u|_{H^l}, \quad u\in H^l.$$

Этот факт используется в § 4.

5. Введем пространство H_ν, $\nu>0$, функций $u\in H_+$ с нормой

$$|u|_\nu = (|u|^2_+ + (\nu-1)|u|^2)^{1/2}.$$

Пусть $H_{-\nu}$, $\nu > 0$, — пополнение пространства H по норме

$$|u|_{-\nu} = \sup_{\omega\in H_+,\, |\omega|_\nu=1} |(u,\omega)|.$$

Отметим, что множества $H^l_{\pm\nu_1}$, $H^l_{\pm\nu_2}$ при $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$ совпадают, а как нормированные пространства отличаются друг от друга только эквивалентными нормами. Для $\nu = 1$ имеем $H^l_\nu = H^l_+, H^l_{-\nu} = H^l_-$. Пространство $H^l_{-\nu}$, $\nu > 0$, является негативным пространством в тройке $H^l_\nu \subset H^l \subset H^l_{-\nu}$ по отношению к позитивному пространству H^l_ν; H^l — основное пространство.

Утверждение 2. *Для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ справедливо представление*

$$(\mathscr{A} - \lambda E)^{-1} = \gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1}(E + \mathscr{J}_{\nu,\lambda}), \tag{20}$$

где $\mathscr{A}, \mathscr{B}_\lambda, S, \gamma$ — такие объекты, как и выше, $\mathscr{J}_{\nu,\lambda} : H^l_{-\nu} \to H^l_{-\nu}$ — непрерывный оператор,

$$\|\mathscr{J}_{\nu,\lambda}\|_{H^l_{-\nu}\to H^l_{-\nu}} \le \frac{1}{2}, \quad 1 \le \nu < 4|\lambda|,\ \lambda \in S,\ |\lambda| > C_S. \tag{21}$$

Доказательство утверждения 2 приводится в § 4.

Пусть Ω — предельно-цилиндрическая область с нулевым радиусом на бесконечности.

Лемма 2. *Для $t \ge 1$, $|\sigma| < |\alpha| \le m$ выполняется неравенство*

$$|p_\alpha D^\sigma u|_{H^l} \le q(t)|(P + tE)^{1/2}u|_{H^l}, \quad u \in H^l_+, \tag{22}$$

где $q(t) \to 0$ $(t \to \infty)$. Имеет место также неравенство

$$\|(P + tE)^{1/2}\gamma(P + tE)^{-1/2}\|_{H^l\to H^l} \le M, \quad t \ge 1. \tag{23}$$

Доказательство леммы 2 проводится вполне аналогично доказательству леммы 1 в [11] — с помощью соответствующего неравенства Харди.

§ 4. Построение регуляризатора оператора $\mathscr{A} - \lambda E$

1. В этом параграфе построим правый регуляризатор для оператора $\mathscr{A} - \lambda E$, который понадобится ниже для доказательства основных теорем.

2. Полуторалинейная форма $B'_\lambda[u,v]$ (13) секториальна с вершиной в нуле, т. е. (см. (14), (16))

$$|\arg B'_\lambda[u,u]| \le \psi < \pi/2, \quad u \in H^l_+.$$

При этом ψ не зависит от $0 \ne \lambda \in S$.

Рассмотрим m — секториальный оператор $B_\lambda, 0 \ne \lambda \in S$, в пространстве H^l, ассоциированный (см., например, [28, гл. VI]) с полуторалинейной формой $B'_\lambda[u,v]$. Применяя теорему 3.2 из [28, гл. VI], получим представление

$$B_\lambda^{-1} = (P_0 + |\lambda|E)^{-1/2}X_0(\lambda)(P_0 + |\lambda|E)^{-1/2},$$

где $\|X_0(\lambda)\|_{H^l\to H^l} \le M$, $\lambda \in S$, $|\lambda| \ge 1$. Далее, учитывая эквивалентность равномерно по $t \ge 1$ норм (17), (19), получим

$$B_\lambda^{-1} = (P + |\lambda|E)^{-1/2} X(\lambda)(P + |\lambda|E)^{-1/2},$$

где $\|X(\lambda)\|_{H^l\to H^l} \le M'$, $\lambda \in S$, $|\lambda| \ge 1$. Очевидно, что оператор B_λ совпадает с сужением в H^l оператора $\mathscr{B}_\lambda$. Отсюда по непрерывности получаем равенство

$$\mathscr{B}_\lambda^{-1} = (P + |\lambda|E)^{-1/2} X(\lambda)\mathscr{P}^{-1}(|\lambda|), \quad \lambda \in S,\ |\lambda| \ge 1. \tag{24}$$

Используя определение оператора $\mathscr{B}_\lambda$, имеем

$$\big\langle \mathscr{B}_\lambda \mathscr{B}_\lambda^{-1} u, v\big\rangle = B'_\lambda\big[\mathscr{B}_\lambda^{-1} u, v\big] = \langle u, v\rangle, \quad u \in H^l_-,\ v \in H^l_+,\ 0 \ne \lambda \in S.$$

Отсюда согласно (13) для $u \in H^l_-, v \in H^l_+, 0 \ne \lambda \in S$

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\lambda|,|\beta|\le m} \big(\gamma p_\alpha a_{\alpha\beta} D^\alpha \mathscr{B}_\lambda^{-1} u, p_\beta D^\beta v\big) - \lambda\big(\gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1} u, v\big). \tag{25}$$

Для $u \in H^l_-$ имеем $F = \gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1} u \in H^l_+$. По определению оператора $\mathscr{A}$

$$\langle (\mathscr{A} - \lambda E)F, v\rangle = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \big(p_\alpha a_{\alpha\beta} D^\alpha \gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1} u, p_\beta D^\beta v\big) - \lambda(F, v). \tag{26}$$

Вычитая из (26) равенство (25), получим

$$\big\langle (\mathscr{A} - \lambda E)\gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1} u, v\big\rangle - \langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \Big(p_\alpha a_{\alpha\beta} \sum C_{\alpha,\sigma}(D^{\sigma'}\gamma) D^\sigma \mathscr{B}_\lambda^{-1} u, p_\beta D^\beta v\Big) \tag{27}$$

для всех $u \in H^l_-$, $v \in H^l_+$, $\lambda \in S$, $|\lambda| \ge 1$. Здесь C_α, σ — некоторые константы, получающиеся из формулы многократного дифференцирования произведения функций; во внутренней сумме суммирование проводится по мультииндексам $\sigma, \sigma' \in \mathbb{Z}^n_+$ таким, что $|\sigma| < |\alpha|$, $\sigma + \sigma' = \alpha$.

Теперь из представления (24), привлекая лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} \big|p_\alpha D^\sigma \mathscr{B}_\lambda^{-1} u\big|_{H^l} &\le q(|\lambda|)\big|(P + |\lambda|E)^{1/2} \mathscr{B}_\lambda^{-1} u\big|_{H^l} \\ &\le c_1 q(|\lambda|)\mathscr{P}^{-1}(|\lambda|)|u|_{H^l} \le c_2 q(|\lambda|)|u|_{H^l_{-|\lambda|}}, \quad u \in H^l_{-1}, \end{aligned}$$

для всех $\lambda \in S$, $|\lambda| \ge 1$, $|\sigma| < |\alpha| \le m$, $q(t) \to 0$, $t \to \infty$. Следовательно, правая часть (27) по модулю не превосходит $c_3 q(|\lambda|)|u|_{-\nu}|v|_\nu$ для всех $1 \le \nu < 4|\lambda|$, $\lambda \in S$ и всех $u \in H^l_-$, $v \in H^l_+$.

Таким образом, оператор $\mathscr{J}'_{\nu,\lambda}$, $1 \le \nu < 4|\lambda|$, $\lambda \in S$, определенный равенством

$$\mathscr{J}'_{\nu,\lambda} = (E - (\mathscr{A} - \lambda E)\gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1}) : H^l_{-\nu} \to H^l_{-\nu},$$

удовлетворяет оценке $\|\mathscr{J}'_{\nu,\lambda}\|_{H^l_{-\nu}\to H^l_{-\nu}} \le Mq(\lambda)$.

Рассмотрим оператор $\mathscr{A}^+ : H^l_+ \to H^l_-$, действующий по формулам

$$\langle \mathscr{A}^+ u, v\rangle = \overline{B[u, v]} = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (p_\alpha a^*_{\beta\alpha} D^\alpha u, D^\beta v), \quad u, v \in H^l_+. \tag{28}$$

Проводя аналогичные рассуждения для оператора $\mathscr{A}^{+} - \overline{\lambda}E$, получим

$$\operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda E) = 0, \quad \lambda \in S, \quad |\lambda| > c_S.$$

Таким образом, для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$, $1 \le \nu \le 4|\lambda|$, оператор $\mathscr{A} - \lambda E$ непрерывно обратим и оператор $\mathscr{J}_{\nu,\lambda}$ в формуле (20) можно задавать по формулам

$$E + \mathscr{J}_{\nu,\lambda} = (E - \mathscr{J}'_{\nu,\lambda})^{-1} = E + \mathscr{J}'_{\nu,\lambda} + (\mathscr{J}'_{\nu,\lambda})^2 + \dots.$$

Утверждение 2 доказано.

Далее, используя (20), (23), (24), получим

$$\begin{aligned}(\mathscr{A} - \lambda E)^{-1} &= \gamma(P + |\lambda|E)^{-1/2} X(\lambda)\mathscr{P}^{-1}(|\lambda|)(E + \mathscr{J}_{\nu,\lambda}) \\ &= (P + |\lambda|E)^{-1/2} X_1(\lambda)\mathscr{P}^{-1}(|\lambda|)(E + \mathscr{J}_{\nu,\lambda})\mathscr{P}(|\lambda|)\mathscr{P}^{-1}(|\lambda|),\end{aligned}$$

$$\|X_1(\lambda)\|_{H^l \to H^l} \le M, \quad \lambda \in S,\ |\lambda| > c_S.$$

Представление (7) следует из следующего неравенства, справедливого равномерно по $\lambda \in S$, $|\lambda| > c_S$, $\nu = |\lambda|$:

$$|\mathscr{P}^{-1}(|\lambda|)\mathscr{J}_{\nu,\lambda}\mathscr{P}(|\lambda|)u|_{H^l} \le |\mathscr{J}_{\nu,\lambda}\mathscr{P}(|\lambda|)u|_{-|\lambda|} \le M_1|\mathscr{P}(|\lambda|)u|_{-|\lambda|} \le M_2|u|_{H^l}.$$

§ 5. Об одной теореме вложения весовых функциональных пространств соболевского типа

Компактные вложения, как известно, имеют важные применения в анализе, особенно при обосновании дискретности спектра линейного эллиптического дифференциального оператора.

В данном параграфе докажем одну теорему о компактном вложении весовых функциональных пространств, которая применяется для доказательства основных теорем в § 6.

Пусть P такой оператор, как в п. 4 § 2.

Теорема 3. *Вложение $H_+ \subset H$ при $\theta < m$, где $\theta + 1/2 \notin \{1, 2, \dots, m\}$, компактно.*

Следствие. *Оператор P имеет дискретный спектр.*

Замечание. Отметим, что подобные теоремы вложения применяются при исследовании спектральных свойств широкого класса несамосопряженных матричных эллиптических операторов (см., например, [11, 23]).

Доказательство. Введем вспомогательное пространство $V^m_{2,\theta}(\Omega)$ с конечной нормой

$$\left\| u, V^m_{2,\theta}(\Omega) \right\| = \left\{ \sum_{|k| \le m} \int_\Omega (\rho^{\theta - m + |k|}(x) |u^{(k)}(x)|^2)\, dx \right\}^{1/2}. \tag{29}$$

Это пространство является частным случаем пространства $V_p^r(\Omega;\delta;r)$, $p \geq 1$, изученного в [7, 29]. Из результатов этих работ, в частности, следует, что множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $V_{2,\theta}^m(\Omega)$ и норма (29) эквивалентна величине

$$\left\{ \sum_{|k|=m} \int_\Omega (\rho^\theta(x)|u^{(k)}(x)|)^2\,dx + \int_\Omega (\rho^{\theta-m}(x)|u^{(k)}(x)|)^2\,dx \right\}^{1/2}. \tag{30}$$

Из определения предельно-цилиндрической области Ω следует существование конечного числа $M_\Omega > 0$ такого, что

$$\rho(x) < M_\Omega, \quad x \in \Omega. \tag{31}$$

Введем также весовое пространство $L_{p;\alpha}(\Omega)$, $p \geq 0$, с нормой

$$\|u; L_{p;\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \int_\Omega \rho^{2\alpha}(x)|u(x)|^p\,dx \right\}^{1/p}.$$

Из (31) при $\theta - m \leq 0$ следует, что выполняется неравенство

$$\|u; L_2(\Omega)\| \leq \|u; L_{2;\theta-m}(\Omega)\|.$$

Отсюда следует вложение

$$V_{2,\theta}^m(\Omega) \subset L_2(\Omega). \tag{32}$$

Докажем, что при $\theta - m < 0$ это вложение компактно. Пусть $\{u_j(x)\}_{j=1}^\infty$ — произвольная ограниченная в $V_{2,\theta}^m(\Omega)$ последовательность, т. е.

$$\left\|u_j; V_{2,\theta}^m(\Omega)\right\| \leq M < +\infty, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{33}$$

Для доказательства компактности вложения (32) покажем, что последовательность $\{u_j(x)\}_{j=1}^\infty$ имеет сходящуюся в $L_2(\Omega)$ подпоследовательность. Подбираем последовательность вложенных друг в друга ограниченных областей $\{\Omega_r\}_{r=2}^\infty$ таких, что

(1) $\left\{x \in \Omega : d(x) > \frac{1}{r-1},\ |x_n| < r-1\right\} \subset \Omega_r \subset \left\{x \in \Omega : d(x) > \frac{1}{r},\ |x_n| < r\right\}$;

(2) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots$, $\Omega = \bigcup\limits_{r=1}^\infty \Omega_r$;

(3) вложение $W_2^m(\Omega_r) \subset L_2(\Omega_r)$ компактно при всех $r = 1, 2, \ldots$.

Из свойства (1) областей Ω_r следует, что для любого фиксированного $r = 1, 2, \ldots$ существует $M_r > 0$ такое, что

$$\left\|u_j : W_2^m(\Omega_r)\right\| \leq M_r < +\infty \tag{34}$$

для всех $j = 1, 2, \ldots$. Используя эти неравенства, имеем

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_r} |u_i(x) - u_j(x)|^2\,dx \leq \int_{\Omega\setminus\Omega_r} (\rho^{m-\theta}(x))^2(\rho^{m-\theta}(x)|u_i(x) - u_j(x)|)^2\,dx$$

$$\leq \sup_{x\in\Omega\setminus\Omega_r} (\rho^{m-\theta}(x))^2 \int_{\Omega\setminus\Omega_r} (\rho^{\theta-m}(x)|u_i(x) - u_j(x)|)^2\,dx$$

$$\leq C_0^2 r^{-2(m-\theta)}\left|u_i(x) - u_j(x) : V_{2,\theta}^m(\Omega\setminus\Omega_r)\right|^2 \leq C_1^2 r^{-2(m-\theta)}\left\|u_i(x) - u_j(x) : V_{2,\theta}^m(\Omega)\right\|^2$$

$$\leq C_2^2 r^{-2(m-\theta)}\left\{\left\|u_i(x) : V_{2,\theta}^m(\Omega)\right\| + \left\|u_j(x) : V_{2,\theta}^m(\Omega)\right\|\right\}^2 \leq C_3^2 r^{-2(m-\theta)}. \tag{35}$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$\sup_{x\in\Omega\setminus\Omega_r} (\rho^{m-\theta}(x))^2 \le \mathrm{const}\cdot r^{-2(m-\theta)},$$

которое следует из свойства (1) областей Ω_r, а также применили (33). Из неравенства (35) следует, что

$$\int\limits_{\Omega} |u_i(x)-u_j(x)|^2\,dx \le \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_r} |u_i(x)-u_j(x)|^2\,dx + \int\limits_{\Omega_r} |u_i(x)-u_j(x)|^2\,dx$$

$$\le C_3^2 r^{-2(m-\theta)} + \int\limits_{\Omega_r} |u_i(x)-u_j(x)|^2\,dx. \quad (36)$$

Неравенство (36) запишем в виде

$$\Bigg(\int\limits_{\Omega} |u_i(x)-u_j(x)|^2\,dx\Bigg)^{1/2} \le C_r^1 r^{-(m-2\theta)} + \Bigg(\int\limits_{\Omega_r} |u_i(x)-u_j(x)|^2\,dx\Bigg)^{1/2}. \quad (37)$$

Так как $m-\theta>0$, существует индекс r_1 такой, что

$$\Bigg(\int\limits_{\Omega} |u_i(x)-u_j(x)|^2\,dx\Bigg)^{1/2} \le \frac{1}{4} + \widetilde{C}_{m_1}\Bigg(\int\limits_{\Omega_{r_1}} |u_i(x)-u_j(x)|^2\,dx\Bigg)^{1/2}. \quad (38)$$

В силу компактности вложения $W_2^m(\Omega_{r_1}) \subset L_2(\Omega_{r_1})$ из неравенства (34) следует, что последовательность $\{u_i\}$ имеет сходящуюся в $L_2(\Omega_{r_1})$ подпоследовательность $u_i^{(1)}$. Следовательно, существует натуральное число N_1 такое, что

$$\Bigg(\int\limits_{\Omega_{r_1}} |u_i(x)-u_j(x)|^2\,dx\Bigg)^{1/2} \le \frac{1}{4}\widetilde{C}_{r_1}^1 \quad (39)$$

для всех $i,j>N_1$. Так как $\{u_i^{(1)}\}\subset\{u_i\}$, из (38), (39) следует, что

$$\Bigg(\int\limits_{\Omega} \big|u_i^{(1)}(x)-u_j^{(1)}(x)\big|^2\,dx\Bigg)^{1/2} \le \frac{1}{2}, \quad i,j>N. \quad (40)$$

Подбираем индекс $r_2<r_1$ такой, что $\widetilde{C}_{r_2}^1 r_2^{-(m-2\theta)} < 1/8$. Тогда из (37) имеем

$$\Bigg(\int\limits_{\Omega} \big|u_i^{(1)}(x)-u_j^{(1)}(x)\big|^2\,dx\Bigg)^{1/2} \le \frac{1}{8} + \widetilde{C}_{r_2}^1\Bigg\{\int\limits_{\Omega} \big|u_i^{(2)}(x)-u_j^{(2)}(x)\big|^2\,dx\Bigg\}^{1/2}. \quad (41)$$

Вложение $W_2^m(\Omega_{r_2})\subset L_2(\Omega_{r_2})$ компактно, и согласно (34) последовательность $\{u_i^{(1)}\}$ ограничена в $W_2^m(\Omega_{r_2})$. Поэтому она имеет сходящуюся в $L_2(\Omega_{r_2})$ подпоследовательность $\{u_i^{(2)}\}$. Следовательно, существует натуральное число N_2 такое, что

$$\Bigg(\int\limits_{\Omega_{r_2}} \big|u_i^{(2)}(x)-u_j^{(2)}(x)\big|^2\,dx\Bigg)^{1/2} \le \frac{1}{8\widetilde{C}_{m_2}^1} \quad (42)$$

для всех $i,j > N_2$. Так как $\{u_i^{(2)}\} \subset \{u_i^{(1)}\}$, из (41), (42) следует, что

$$\left(\int\limits_\Omega \left|u_i^{(2)}(x) - u_j^{(2)}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \le \frac{1}{2^2}, \quad i,j > N_2.$$

Продолжая этот процесс, получаем цепочку последовательностей

$$\{u_j^{(1)}\}_{j=1}^\infty \supseteq \{u_j^{(2)}\}_{j=1}^\infty \supseteq \cdots \supseteq \{u_j^{(\nu)}\}_{j=1}^\infty \supseteq \ldots$$

таких, что

$$\left\|u_i^{(\nu)} - u_j^{(\nu)}; L_2(\Omega)\right\| < \frac{1}{2^\nu}, \quad i,j > N_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots. \tag{43}$$

Теперь рассмотрим последовательность диагональных элементов $\{v_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, где $v_\nu = u_{N_\nu+1}^{(0)}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $N_1 < N_2 < \ldots$. Поэтому из (43) следует, что для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\|v_\nu - v_\mu : L_2(\Omega)\| < \varepsilon, \quad \nu,\mu > N(\varepsilon). \tag{44}$$

Действительно, если задано число $\varepsilon > 0$, то существует число ν такое, что $2^{-\nu} < \varepsilon$. Тогда в силу обозначения $v_\nu = u_{N_\nu+1}^{(\nu)}$ неравенство (44) следует из (43) при $N(\varepsilon) = N_\nu + 1$. Ввиду полноты пространства $L_2(\Omega)$ из (44) следует сходимость последовательности $\{v_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ в этом пространстве.

Таким образом, доказали, что в условиях теоремы любая ограниченная в $V_2^m(\Omega)$ последовательность имеет сходящуюся в $L_2(\Omega)$ подпоследовательность. Это означает компактность вложения

$$V_2^m(\Omega) \subset L_2(\Omega). \tag{45}$$

Для завершения доказательства теоремы ниже покажем (см. лемму 3), что при условии $\theta - m < 0$, $\theta + \frac{1}{2} \notin \{1,2,\ldots,m\}$ с точностью до эквивалентности норм имеет место равенство

$$V_2^m(\Omega) = H_+. \tag{46}$$

Поэтому из компактности вложения (45) следует компактность вложения $H_+ \subset H$.

Лемма 3. *Пусть $m \in N$. Тогда при*

$$m - \theta \ge 0, \quad \theta + \frac{1}{2} \notin \{1,2,\ldots,m\} \tag{47}$$

имеет место равенство (46), *которое понимается с точностью до эквивалентности норм.*

Доказательство. Сначала покажем, что для целого неотрицательного числа $r \in [0,m]$ выполняется неравенство

$$\left\|u; L^r_{2;\theta-m+r}(\Omega)\right\| \le M\left\|u; L^m_{2,\theta}(\Omega)\right\|, \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{48}$$

Число $M > 0$ в неравенстве (48) не зависит от $u(x)$. Применяя неравенство (48), имеем

$$\|u; V^m_{2,\theta}(\Omega)\| \le \|u; L^0_{2,\theta-m}(\Omega)\| + \|u; L^m_{2,0}\| \le M_1\|u; L^m_{2,\theta}\| \le M_1\|u; W^m_{2;\theta}(\Omega)\|,$$

т. е.

$$\|u; V^m_{2,\theta}(\Omega)\| \le M_1\|u; W^m_{2;\theta}\| \tag{49}$$

для всех $u \in C^\infty_0(\Omega)$.

Так как $\rho(x) < \mathrm{const} < +\infty$, $x \in \Omega$, $m - \theta > 0$, существует число $C_0 < \rho^{\theta-m}(x)$, $x \in \Omega$. Поэтому

$$\|u; L_2(\Omega)\| \le M_2\|u; L_{2;2\theta-m}(\Omega)\| \le M_2\|u; V^m_{2,\theta}(\Omega)\|, \quad u \in C^\infty_0(\Omega).$$

Следовательно,

$$\|u; W^m_{2;\theta}(\Omega)\| \le M_3\|u; V^m_{2,\theta}(\Omega)\|, \quad u \in C^\infty_0(\Omega). \tag{50}$$

Равенство (46) следует из (49), (50). Неравенство (48) получается повторным применением неравенства

$$\|u; L^0_{2;\nu-1}(\Omega)\| \le M\|u; L^1_{2,\nu}(\Omega)\|, \quad \nu + 1/2 \ne 1,\ u \in C^\infty_0(\Omega), \tag{51}$$

достаточное число раз.

Докажем неравенство (51). Из результатов работы [30] следует неравенство

$$\int\limits_G (\gamma^{\nu-1}(y)|u(y)|)^2\,dy \le C_1 \int\limits_G (\gamma^\nu(y)|\nabla u(y)|)^2\,dy, \quad u \in C^\infty_0(\Omega). \tag{52}$$

Здесь $\gamma(y)$ обозначает расстояние от точки $y \in G$ до ∂G. Пусть μ — положительное число. Положим

$$G(\mu) = \mu G, \quad \gamma(\mu;\xi) = \mathrm{dist}(\xi, \partial G(\mu)), \quad \xi \in G(\mu).$$

Используя равенство

$$\gamma(\mu, \mu y) = \mu\gamma(1, y) = \mu\gamma(y), \quad u \in G,$$

получаем

$$\int\limits_{G(\mu)} (\gamma^{\nu-1}(\mu;\xi))^2\,d\xi = \mu^{2(\nu-1)+n-1} \int\limits_G (\gamma^{\nu-1}(y)|u(\mu y)|)^2\,dy$$

для любой функции $u \in C^\infty_0(G(\mu))$. Отсюда и из (52) следует, что

$$\int\limits_{G(\mu)} (\gamma^{\nu-1}(\mu;\xi)|u(\xi)|)^2\,d\xi \le \int\limits_{G(\mu)} (\gamma^\nu(\mu;\xi)|\nabla u(\xi)|)^2\,d\xi. \tag{53}$$

Согласно определению предельно-цилиндрической области Ω, если $x = (\xi, t) \in \Omega$, то $\xi \in G(\omega(t))$ и $\rho(x) \le C\gamma(\omega(t);\xi)$. С другой стороны из условия (2) следует, что $\gamma(\omega(t);\xi) \le \rho(x)$, $x = (\xi, t) \in \Omega$. Следовательно, $\gamma(\omega(t);\xi) \sim \rho(x)$ для всех $x = (\xi, t) \in \Omega$. Учитывая это соотношение и применяя неравенство (53), получим

$$\int\limits_{G(\omega(t))} (\rho^{\nu-1}(\xi,t)|u(\xi,t)|)^2\,d\xi \le M \int\limits_{G(\omega(t))} (\rho^\nu(\xi,t)|\nabla u(\xi,t)|)^2\,d\xi$$

для всех $u(\xi, t) \in C^\infty_0(\Omega)$. Интегрируя полученное неравенство по t, получаем неравенство (51). Лемма 3 доказана, что и завершает доказательство теоремы 3.

§ 6. Доказательства основных теорем

В этом параграфе докажем теоремы 1 и 2.

Пусть A — сужение оператора $\mathscr{A}$ в H^l (см.(6)). Тогда свойство (i) для оператора A сразу следует из определения оператора $\mathscr{A}$. Согласно (20) при $\lambda \in S$, $|\lambda| > c_S$,

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda E) = 0.$$

Отсюда с учетом (6), (7) следует, что существует непрерывный обратный

$$(A - \lambda E)^{-1} u = (\mathscr{A} - \lambda E)^{-1} u, \quad u \in H^l,\ \lambda \in S,\ |\lambda| > c_S. \tag{54}$$

Докажем единственность оператора A.

Пусть A' — некоторый замкнутый оператор в H^l такой, что

$$D(A') \subset H^l_+, \quad (A'u, v) = B[u, v], \quad v \in H^l_+,\ u \in D(A'),$$

и существует непрерывный обратный $(A' - \lambda_0 E)^{-1}$ для некоторого $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Очевидно, что $D(A') \subset \{u \in H^l_+ : \mathscr{A}u \in H^l\} = D(A)$ и оператор A является расширением оператора A'. Следовательно,

$$(A - \lambda_0 E)(A' - \lambda_0 E)^{-1} u = u, \quad u \in H^l. \tag{55}$$

Так как $D(A') \subset H^l_+$, из теоремы 3 (см. §5) следует, что оператор A' имеет дискретный спектр. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что в (55) $\lambda_0 \in S$, $|\lambda_0| > c_S$, и, следовательно,

$$(A - \lambda_0 E)^{-1} = (A' - \lambda_0 E)^{-1}.$$

Таким образом, $A = A'$, что и доказывает теорему 1. Из (7) и (54) следует (8), что завершает доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бойматов К. Х.* Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными билинейными формами // Докл. АН. 1994. Т. 339, № 1. С. 5–10.
2. *Бойматов К. Х.* Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Докл. АН. 1992. Т. 327, № 1. С. 9–15.
3. *Бойматов К. Х.* Обобщенная задача Дирихле, связанная с некоэрцитивной билинейной формой // Докл. АН. 1993. Т. 330, № 3. С. 285–290.
4. *Бойматов К. Х., Седдики К.* Граничные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ассоциированных с некоэрцитивными формами // Докл. АН. 1997. Т. 352, № 3. С. 295–297.
5. *Бойматов К. Х., Седдики К.* Некоторые спектральные свойства дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными формами // Докл. АН. 1997. Т. 352, № 4. С. 439–442.
6. *Исхоков С. А.* О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // Докл. АН. 1995. Т. 342, № 1. С. 20–22.
7. *Исхоков С. А.* О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 4. С. 641–653.
8. *Исхоков С. А.* Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве // Докл. АН. 1995. Т. 345, № 2. С. 164–167.

9. *Бойматов К. Х., Исхоков С. А.* О разрешимости и спектральных свойствах вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1997. Т. 241. С. 107–134.

10. *Бойматов К. Х.* Некоторые спектральные свойства матричных дифференциальных операторов, далеких от самосопряженных // Функцион. анализ и его прил. 1995. Т. 29, № 3. С. 55–58.

11. *Бойматов К. Х.* О базисности по Абелю систем корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 46–57.

12. *Гадоев М. Г.* Спектральная асимптотика несамосопряженных вырождающихся эллиптических операторов с сингулярными матричными коэффициентами на отрезке // Уфим. мат. журн. 2011. Т. 3, № 3. С. 26–54.

13. *Гадоев М. Г., Исхоков С. А.* Спектральные свойства вырожденно-эллиптических операторов с матричными коэффициентами // Уфим. мат. журн. 2013. Т. 5, № 4. С. 38–50.

14. *Гадоев М. Г., Конобулов С.И.* Коэрцитивная разрешимость эллиптических операторов в банаховых пространствах // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. Т. VI, № 2. С. 26–30.

15. *Гадоев М. Г.* Асимптотика спектра несамосопряженных вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов второго порядка на отрезке // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 2. С. 31–43.

16. *Исхоков С. А.* Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 201–216.

17. *Гадоев М. Г., Якушев И. А.* Вариационная задача Дирихле для одного класса эллиптических уравнений с вырождением // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 25–35.

18. *Исхоков С. А., Гадоев М. Г., Якушев И. А.* Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением // Докл. АН. 2012. Т. 443, № 3. С. 286–289.

19. *Исхоков С. А., Нематуллоев О. А.* О разрешимости однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области // Докл. АН Республики Таджикистан. 2012. Т. 55, № 8. С. 617–621.

20. *Гадоев М. Г., Константинова Т. П.* О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 8–21.

21. *Исхоков С. А., Гадоев М. Г., Константинова Т. П.* Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными формами // Докл. АН. 2015. Т. 462, № 1. С. 7–10.

22. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

23. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

24. *Егоров И. Е., Гадоев М. Г.* C_0-полугруппы и спектральные свойства эллиптических операторов. Новосибирск: Наука, 2013.

25. *Никольский С. М., Лизоркин П. И., Мирошин Н. В.* Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Изв. вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4–30.

26. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустылник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

27. *Бойматов К. Х.* Распределение собственных значений вырождающихся эллиптических операторов в предельно-цилиндрических областях // Докл. АН СССР. 1989. Т. 308, № 1. С. 11–14.

28. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

29. *Бойматов К. Х.* О плотности финитных функций в весовых классах // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 6. С. 1296–1299.

30. *Лизоркин П. И.* К теории вырождающихся эллиптических уравнений // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 172. С. 235–251.

Статья поступила 14 января 2016 г.

Исхоков Сулаймон Абунасрович
Институт математики им. А. Джураева
Академии наук Республики Таджикистан,
ул. Айни, 299/4, Душанбе 734063, Республика Таджикистан;
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
политехнический институт (филиал) в г. Мирном,
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678170, Республика Саха (Якутия)
sulaimon@mail.ru

Гадоев Махмадрахим Гафурович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
политехнический институт (филиал) в г. Мирном
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678170, Республика Саха (Якутия)
gadoev@rambler.ru

Петрова Мария Николаевна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
политехнический институт (филиал) в г. Мирном,
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678170, Республика Саха (Якутия)
sun1u@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

UDC 517.918+516.918

ON SOME SPECTRAL PROPERTIES OF A CLASS OF DEGENERATE ELLIPTIC DIFFERENTIAL OPERATORS

S. A. Iskhokov, M. G. Gadoev, M. N. Petrova

Abstract. Some spectral properties are investigated for a class of degenerate-elliptic operators A with singular matrix coefficients generated by noncoercive sesquilinear forms. Operator A is considered in the Hilbert space $L_2(\Omega)^l$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a limit-tube domain and $l > 0$ is an integer.
Keywords: spectral properties, degenerate-elliptic operator, noncoercitive sesquilinear form, limit-cylindrical (x) domain, resolvent of generalized Dirichlet problem.

REFERENCES

1. *Boimatov K. Kh.*, "Matrix differential operators generated by noncoercive bilinear forms," Dokl. Math., **50**, No. 3, 351–359 (1995).
2. *Boimatov K. Kh.*, "The generalized Dirichlet problem for systems of second-order differential equations," Dokl. Math., **46**, No. 3, 403–409 (1993).
3. *Boimatov K. Kh.*, "The generalized Dirichlet problem associated with a noncoercive bilinear form," Dokl. Math., **47**, No. 3, 455–463 (1993).
4. *Boimatov K. Kh. and Seddiki K.*, "Boundary value problems for systems of ordinary differential equations associated with noncoercive forms," Dokl. Akad. Nauk, **352**, No. 3, 295–297 (1997).
5. *Boimatov K. Kh. and Seddiki K.*, "Some spectral properties of ordinary differential operators generated by noncoercive forms," Dokl. Akad. Nauk, **352**, No. 4, 439–442 (1997).
6. *Iskhokov S. A.*, "On the smoothness of solutions of the generalized Dirichlet problem and the eigenvalue problem for differential operators generated by noncoercive bilinear forms," Dokl. Math., **51**, No. 3, 323–325 (1995).
7. *Iskhokov S. A.*, "On the smoothness of the solution of degenerate differential equations," Differ. Uravn., **31**, No. 4, 594–606 (1995).
8. *Iskhokov S. A.*, "The variational Dirichlet problem for degenerate elliptic equations in a half-space," Dokl. Math., **52**, No. 3, 356–359 (1995).
9. *Boimatov K. Kh. and Iskhokov S. A.*, "On solvability and smoothness of a solution of the variational Dirichlet problem associated with a noncoercive bilinear form," Tr. Mat. Inst. Steklova, **214**, No. 3, 101–127 (1996).
10. *Boimatov K. Kh.*, "Some spectral properties of matrix differential operators that are far from selfadjoint," Funct. Anal. Appl., **29**, No. 3, 191–193 (1995).
11. *Boimatov K. Kh.*, "On the Abel basis property of the system of root vector-functions of degenerate elliptic differential operators with singular matrix coefficients," Sib. Math. J., **47**, No. 1, 35–44 (2006).
12. *Gadoev M. G.*, "Spectral asymptotics of nonselfadjoint degenerate elliptic operators with singular matrix coefficients on an interval, Ufim. Mat. Zh., **3**, No. 3, 26–54 (2011).
13. *Gadoev M. G. and Iskhokov S. A.*, "Spectral properties of degenerate elliptic operators with matrix coefficients," Ufim. Mat. Zh., **5**, No. 3, 38–50 (2013).
14. *Gadoev M. G. and Konobulov S. I.*, "Coercive solvability of elliptic operators in Banach spaces," Sib. Zh. Ind. Mat., **6**, No. 2, 26–30 (2003).

15. *Gadoev M. G.*, “Asymptotics of the spectrum of second-order nonselfadjoint degenerate elliptic differential operators on an interval,” Sib. Zh. Ind. Mat., **9**, No. 2, 31–43 (2006).
16. *Iskhokov S. A.*, “Garding's inequality for elliptic operators with degeneracy,” Mat. Notes, **87**, No. 1, 189–203 (2010).
17. *Gadoev M. G. and Yakushev I. A.*, “Variational Dirichlet problem for a class of elliptic equations with degeneracy,” Mat. Zamet. YaGU, **18**, No. 1, 25–35 (2011).
18. *Iskhokov S. A., Gadoev M. G., and Yakushev I. A.*, “Garding's inequality for higher order elliptic operators with nonpower degeneration,” Dokl. Math., **85**, No. 2, 215–218 (2012).
19. *Iskhokov S. A. and Nematulloev O. A.*, “On solvability of the homogeneous variational Dirichlet problem for degenerate elliptic operators in a bounded domain,” Dokl. Akad. Nauk Resp. Tadzh., **55**, No. 8, 617–621 (2012).
20. *Gadoev M. G. and Konstantinova T. P.*, “On solvability of variational Dirichlet problem for a class of degenerate elliptic operators,” Mat. Zamet. YaGU, **21**, No. 2, 8–21 (2014).
21. *Iskhokov S. A. Gadoev M. G., and Konstantinova T. P.*, “Variational Dirichlet problem for degenerate elliptic operators generated by noncoercive forms,” Dokl. Math., **91**, No. 3, 255–258 (2015).
22. *Triebel H.*, Interpolation theory, function spaces, differential operators, Veb Deutscher Verlag Der Wissenschaften, Berlin (1978).
23. *Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V.*, Nonclassical operator-differential equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2000).
24. *Egorov I. E. and Gadoev M. G.*, C_0-semigrops and spectral properties of elliptic operators [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2013).
25. *Nikol'skii S. M., Lizorkin P. I., and Miroshin N. V.*, “Weighted function spaces and their applications to the investigation of boundary value problems for degenerate elliptic equations,” Soviet Math. (Iz. VUZ), **32**, No. 8, 1–40 (1988).
26. *Krasnosel'skii M. A., Zabreyko P. P., Pustylnik E. M., and Sobolevski P. E.*, Integral operators in spaces of summable functions, Springer-Verlag, Berlin (1976).
27. *Boimatov K. Kh.*, “Eigenvalues of elliptic differential operators in limit-cylindrical domains,” Soviet Math. Dokl., **40**, No. 2, 269–272 (1990).
28. *Kato T.*, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verl., Berlin; Heidelberg (1995). 2-nd ed.
29. *Boimatov K. Kh.*, “On the denseness of the compactly supported functions in weighted spaces,” Soviet Math. Dokl., **40**, No. 1, 225–228 (1990).
30. *Lizorkin P. I.*, “On the theory of degenerate elliptic equations,” Proc. Steklov Inst. Math., **172**, 257–274 (1987).

Submitted January 14, 2016

Sulaimon Abunasrovich Iskhokov
Tadzhikistan Academia of Sciences,
A. Dzhuraev Mathematical Institute
Aini st., 299/4, Dushanbe 734063, Tajikistan;
M. K. Ammosov North-East Federal University,
Polytechnic Institute (filial) in Mirnyi,
Tikhonova st., 5/1, Mirnyi 678170, Yakutia, Russia
sulaimon@mail.ru

Makhmadrakhim Gafurivich Gadoev
M. K. Ammosov North-East Federal University,
Polytechnic Institute (filial) in Mirnyi,
Tikhonova st., 5/1, Mirnyi 678170, Yakutia, Russia
gadoev@rambler.ru

Maria Nikolaevna Petrova
M. K. Ammosov North-East Federal University,
Polytechnic Institute (filial) in Mirnyi,
Tikhonova st., 5/1, Mirnyi 678170, Yakutia, Russia
sun1u@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

УДК 539.371; 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАЗМЕРОМ ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ НЕОДНОРОДНОГО ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ

Н. П. Лазарев

Аннотация. Рассматриваются задачи о равновесии для неоднородных трехмерных тел с трещиной, расположенной на границе жесткого включения. Матрица пластины предполагается упругой. Граничное условие на кривой трещины имеет вид неравенства и описывает взаимное непроникание берегов трещины. Анализируется зависимость решений от размера жесткого включения. Показано, что при стремлении размера жесткого включения к нулю решения соответствующих задач о равновесии сходятся к решению задачи о равновесии тела, содержащего тонкое жесткое включение. Доказана разрешимость задачи оптимального управления. Для этой задачи параметр размер жесткого включения выбирается в качестве функции управления, а функционал качества задается произвольным непрерывным функционалом.

Ключевые слова: трещина, жесткое включение, вариационное неравенство, функционал энергии, нелинейные краевые условия.

Введение

Интерес к изучению математических моделей тел, содержащих жесткие включения, обусловлен широким применением композитных материалов. В [1–5] рассматривались некоторые задачи теории упругости для тел с трещинами и жесткими включениями. С помощью методов вариационного исчисления [6–21] успешно исследован широкий круг задач, описывающих деформирование упругих тел с жесткими включениями. В частности, теория двумерных задач теории упругости с тонкими жесткими включениями и возможным отслоением предложена в [6]. Трехмерный случай рассмотрен в [9]. Для двумерной задачи с трещиной вдоль тонкого жесткого включения найдена производная функционала энергии [11]. Для двумерного случая в [21] доказано существование оптимального жесткого включения. В этой работе функционал качества определен формулой Гриффитса.

В данной работе устанавливается качественная связь между задачами о равновесии трехмерных тел с трещиной вдоль разных видов жестких включений: тонкого, которое задается поверхностью, и объемного, соответствующего трехмерной области. При этом на поверхности, описывающей трещину, ставятся условия непроникания в виде неравенств. Доказана разрешимость задачи оптимального управления, в которой параметр управления задается размером жесткого включения, а функционал качества — произвольным непрерывным функционалом, определенным в пространстве Соболева.

Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область с гладкой границей Γ. Пусть поверхность γ, содержащаяся в области Ω, задается соотношениями

$$\gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = g(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in \mathscr{D}\},$$

где $g \in C^{0,1}(\mathscr{D})$, $\mathscr{D}$ — односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^3$. Будем считать, что область Ω можно разбить продолжением поверхности γ на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ соответственно так, чтобы $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, $\gamma \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, $\mathrm{mes}(\partial\Omega_i \cap \Gamma) > 0$, $i = 1, 2$.

Предположим, что при $t \in (0, t_0]$ области

$$\omega_t = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x_1, x_2) - t < x_3 < g(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in \mathscr{D}\}$$

имеют липшицевы границы и содержатся строго внутри области Ω. Кроме того, предположим, что существует область $\mathscr{E}$ с границей $\partial\mathscr{E}$ такая, что $\gamma \subset \partial\mathscr{E}$, $\omega_t \subset \mathscr{E}$, $\overline{\mathscr{E}} \subset \Omega$ границы областей $\mathscr{E}\backslash\overline{\omega}_t$ липшицевы для всех $t \in (0, t_0]$.

Далее с помощью поверхности γ будем описывать трещину в трехмерном теле. Через $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ обозначим нормаль к γ. Введем область с разрезом $\Omega_\gamma = \Omega\backslash\bar{\gamma}$. В качестве области, соответствующей жесткому включению, выступает криволинейный прямоугольник ω_t ширины t. Обозначим через $W = (w_1, w_2, w_3)$ вектор перемещений. Тензоры, описывающие напряженно-деформирование состояние тела, введем формулами

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$
$$\sigma_{ij}(W) = c_{ijkl}\varepsilon_{ij}(W), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где $c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j, k, l = 1, 2, 3,$ — тензор коэффициентов упругости, удовлетворяющий свойствам положительной определенности

$$c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2 \quad \forall\xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji},\ i, j = 1, 2, 3, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

и симметричности $c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Перемещения в области ω_t жесткого включения имеют определенную структуру [19]

$$R(\omega_t) = \{\rho = \rho(x) \mid \rho = (b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1, -b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + c_2, -b_{13}x_1 - b_{23}x_2 + c_3)$$
$$b_{12}, b_{13}, b_{23}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\ x \in \omega_t\}.$$

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_\gamma)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_\gamma)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на γ. Введем обозначение

$$H(\Omega_\gamma) = H^{1,0}(\Omega_\gamma)^3.$$

Далее пригодится следующее неравенство Корна:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W)\, dx \geq c\|W\|^2_{H(\Omega_\gamma)}, \tag{1}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $W \in H(\Omega_\gamma)$ [19].

Замечание. В силу неравенства (1) стандартная норма в пространстве $H(\Omega_\gamma)$ эквивалентна норме, определяемой с помощью выражения

$$\left(\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W)\,dx \right)^{1/2}.$$

Условие на поверхности γ, описывающее непроникание противоположных берегов трещины, имеет вид [19]

$$[W]\nu \geq 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Функционал энергии тела с трещиной имеет вид

$$\Pi(\Omega_\gamma; W) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\gamma \setminus \omega_t} \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W)\,dx - \int\limits_{\Omega_\gamma} FW\,dx, \tag{2}$$

где $F = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega_\gamma)^3$ — функция заданных внешних нагрузок [19]. Задача о равновесии трехмерного тела формулируется в виде минимизации функционала энергии: требуется найти функцию $U_t \in K_t$ такую, что

$$\Pi(\Omega_\gamma; U_t) = \inf_{W \in K_t} \Pi(\Omega_\gamma; W), \tag{3}$$

где $K_t = \{W \in H(\Omega_\gamma) \mid [W]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma,\ W|_{\omega_t} = \rho,\ \rho \in R(\omega_t)\}$. Известно, что задача (2) имеет единственное решение $U_t \in K_t$ и эквивалентна вариационному неравенству [17]

$$U_t \in K_t, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_t)\varepsilon_{ij}(W - U_t)\,dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(W - U_t)\,dx, \quad W \in K_t. \tag{4}$$

Заметим, что в силу соотношений, выполненных в области ω_t, имеют место равенства $\varepsilon_{ij}(W) = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, для всех $W \in K_t$. Значит, (4) можно представить в виде

$$U_t \in K_t, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma \setminus \omega_t} \sigma_{ij}(U_t)\varepsilon_{ij}(W - U_t)\,dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(W - U_t)\,dx, \quad W \in K_t. \tag{5}$$

Наряду с задачей о равновесии тела с объемным жестким включением рассмотрим также задачу о равновесии тела с тонким отслоившимся включением. При этом предполагаем, что тонкое жесткое включение описывается с помощью поверхности γ, а трещина расположена вдоль γ^+. Введем обозначения

$$R(\gamma) = \{\rho = \rho(x) \mid \rho = (b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1, -b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + c_2, -b_{13}x_1 - b_{23}x_2 + c_3),$$
$$b_{12}, b_{13}, b_{23}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\ x \in \gamma\}.$$

$$K_0 = \{W \in H(\Omega_\gamma) \mid [W]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma,\ W|_{\gamma^-} = \rho,\ \rho \in R(\gamma)\}.$$

Рассмотрим вариационную формулировку этой задачи: требуется найти функцию $U_0 \in K_0$ такую, что

$$\Pi(\Omega_\gamma; U_0) = \inf_{W \in K_0} \Pi(\Omega_\gamma; W). \tag{6}$$

Однозначная разрешимость этой задачи известна [6], кроме того, она эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$U_0 \in K_0, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_0)\varepsilon_{ij}(W - U_0)\,dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(W - U_0)\,dx \quad \forall W \in K_0. \tag{7}$$

С целью формулировки задачи об оптимальном управлении рассмотрим произвольный непрерывный функционал $G(W) : H(\Omega_\gamma) \to \mathbb{R}$. Например, в качестве такого функционала могут быть взяты следующие функционалы:

$$G_1 = \|W - \widehat{W}\|_{H(\Omega_\gamma)}, \quad G_2 = \int\limits_\gamma |[W\nu]|\,ds,$$

где G_1 характеризует отклонение от заданных перемещений $\widehat{W}$, G_2 — величину раскрытия трещины.

Задачу оптимального управления сформулируем в следующем виде. Требуется найти $t^* \in [0, t_0]$ такое, что

$$G(U_{t^*}) = \sup_{t \in [0, t_0]} G(U_t), \tag{8}$$

а U_t — решение задачи (3) при $t > 0$ и U_0 — решение задачи (6).

Теорема. *Задача оптимального управления* (8) *имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Пусть $\{t_n\}$ — максимизирующая последовательность. Ввиду ограниченности сегмента $[0, t_0]$ можно извлечь сходящуюся последовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ такую, что

$$t_{n_k} \to t^* \quad \text{при } k \to \infty, \quad t^* \in [0, t_0].$$

Не нарушая общности, предположим, что $t_{n_k} \neq t^*$ для достаточно больших k, поскольку в противном случае должна найтись подпоследовательность $\{t_{n_l}\}$ такая, что $t_{n_l} \equiv t^*$ и, следовательно, $G(U_{t^*})$ — решение задачи (8). Итак, рассмотрим случай подпоследовательности $\{t_{n_k}\}$, удовлетворяющей $t_{n_k} \neq t^*$ для достаточно больших k. Принимая во внимание доказанную ниже лемму 2, выводим, что решения U_k задач (3), соответствующие параметрам t_{n_k}, сходятся сильно к U_{t^*} в пространстве $H(\Omega_\gamma)$ при $k \to \infty$. Это позволяет установить сходимость

$$G(U_k) \to G(U_{t^*}),$$

поэтому

$$G(U_{t^*}) = \sup_{t \in [0, t_0]} G(U_t).$$

Теорема доказана.

Далее докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть $t^* \in [0, t_0)$ — фиксированный параметр, последовательность чисел $\{t_n\} \subset [t^*, t_0]$ сходится к t^* при $n \to \infty$. Тогда для произвольной функции $W \in K_{t^*}$ существуют подпоследовательность $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность функций $\{W_k\}$ такие, что $W_k \in K_{t_k}$, $k \in \mathbb{N}$, и $W_k \to W$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Очевидно, что если существует подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$ такая, что $t_{n_k} = t^*$, то утверждение леммы выполнено для $W_k \equiv W$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому далее предполагаем, что $t_n > t^*$ для достаточно больших n. Обозначим через ρ^* функцию, описывающую структуру W в ω_{t^*} для случая $t^* > 0$, т. е.

$$\rho^* = W = (b^*_{12}x_2 + b^*_{13}x_3 + c^*_1, -b^*_{12}x_1 + b^*_{23}x_3 + c^*_2, -b^*_{13}x_1 - b^*_{23}x_2 + c^*_3) \text{ в } \omega_{t^*}.$$

В другом случае, когда $t^* = 0$ и функция W имеет заданную структуру на γ^-, применим такое же обозначение, т. е. $\rho^* = W$ на γ^-. Доопределим функцию ρ^* на всей области Ω с помощью равенства

$$\rho^* = (b^*_{12}x_2 + b^*_{13}x_3 + c^*_1, -b^*_{12}x_1 + b^*_{23}x_3 + c^*_2, -b^*_{13}x_1 - b^*_{23}x_2 + c^*_3), \quad x \in \Omega.$$

Зафиксируем произвольное значение $t \in (0, t_0]$ и рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Требуется найти $W_t \in K'_t$ такую, что

$$p(W_t) = \inf_{\chi \in K'_t} p(\chi), \tag{9}$$

где

$$p(\chi) = \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\chi - W)\varepsilon_{ij}(\chi - W)\, dx,$$

$$K'_t = \{\chi \in H(\Omega_\gamma) \mid \chi = W \text{ на } (\partial\mathscr{E}\backslash\bar{\gamma})^-,\ \chi|_{\omega_t} = \rho^*,\ \chi|_{\Omega\backslash\overline{\mathscr{E}}} = W\}.$$

Легко видеть, что функционал $p(\chi)$ коэрцитивен и слабо полунепрерывен снизу в пространстве $H(\Omega_\gamma)$. Кроме того, легко проверить, что множество K'_t выпукло и замкнуто в $H(\Omega_\gamma)$. Эти свойства гарантируют существование единственного решения W_t задачи (9) [16]. Поскольку функционал $p(\chi)$ выпуклый и дифференцируемый в пространстве $H(\Omega_\gamma)$, задача (9) эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$W_t \in K'_t, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W_t - W)\varepsilon_{ij}(\chi - W_t)\, dx \geq 0, \quad \chi \in K'_t. \tag{10}$$

Заметим, что решение W_{t_0} задачи (10), соответствующее параметру $t = t_0$, принадлежит множествам K'_t с любым параметром $t' \in (0, t_0]$. Подставляя W_{t_0} в качестве пробной функции в неравенство (10), получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W_t - W)\varepsilon_{ij}(W_{t_0})\, dx + \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W_t)\, dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W_t)\varepsilon_{ij}(W_t)\, dx, \quad t \in (0, t_0].$$

Используя неравенство Корна, из последнего соотношения выводим следующую равномерную оценку:

$$\|W_t\| \leq c, \quad t \in (0, t_0].$$

Это означает, что можно извлечь из $\{W_{t_n}\}$ подпоследовательность $\{W_{t_{n_k}}\}$ (ее далее будем обозначать через $\{W_k\}$) такую, что $\{W_k\}$ слабо сходится к некоторой функции $\widetilde{W}$ в $H(\Omega_\gamma)$. Пусть для удобства обозначение $\{t_k\}$ означает следующую последовательность: $t_k = t_{n_k}$.

Покажем, что $\widetilde{W} = W$. Далее мы должны различать два случая относительно значения t^*, а именно случаи $t^* > 0$ и $t^* = 0$. Пусть сначала $t^* > 0$. Тогда по построению $(W_k - W) \in H_0^1(\mathscr{E}\backslash\overline{\omega}_{t^*})^3$. Следовательно, ввиду слабой замкнутости $H_0^1(\mathscr{E}\backslash\overline{\omega}_{t^*})^3$ заключаем, что $(\widetilde{W} - W) \in H_0^1(\mathscr{E}\backslash\overline{\omega}_{t^*})^3$. Рассмотрим пробные функции вида $\chi_k^{\pm} = W_k \pm \alpha$, где α — произвольная функция из пространства $C_0^\infty(\mathscr{E}\backslash\overline{\omega}_{t^*})^3$, продолженная нулем на область Ω_γ.

Заметим, что $\chi_k^{\pm} \in K'_{t_k}$ для достаточно больших k. Подставим далее функции χ_k^+ и χ_k^-, $k = 1, 2, \ldots$, в качестве тестовых в вариационные неравенства (10), соответствующие значениям t_k. В результате имеем

$$W_k \in K'_{t_k}, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W_k - W)\varepsilon_{ij}(\alpha)\,dx = 0. \tag{11}$$

Переходя к пределу в (11) при $k \to \infty$ с фиксированной функцией α, получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\widetilde{W} - W)\varepsilon_{ij}(\alpha)\,dx = \int\limits_{\mathscr{E}\backslash\overline{\omega}_{t^*}} \sigma_{ij}(\widetilde{W} - W)\varepsilon_{ij}(\alpha)\,dx = 0, \quad \alpha \in C_0^\infty(\mathscr{E}\backslash\overline{\omega}_{t^*})^3.$$

Плотность $C_0^\infty(\mathscr{E}\backslash\overline{\omega}_{t^*})$ в $H_0^1(\mathscr{E}\backslash\overline{\omega}_{t^*})$ влечет равенство $\widetilde{W} - W = 0$ в $H_0^1(\mathscr{E}\backslash\overline{\omega}_{t^*})^3$. Наконец, по построению равенство $\widetilde{W} = W$ выполнено в областях ω_{t^*} и $\Omega\backslash\overline{\mathscr{E}}$. Значит, $\widetilde{W} = W$ в $H(\Omega_\gamma)$. Таким образом, существует последовательность $\{W_k\}$ такая, что $W_k \in K_{t_k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $W_k \to W$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим теперь второй случай. Пусть $t^* = 0$. По построению имеем $(W_k - W) \in H_0^1(\mathscr{E})^3$ и, следовательно, соотношение $(\widetilde{W} - W) \in H_0^1(\mathscr{E})^3$ выполнено. Выберем пробные функции вида $\chi_k^{\pm} = W_k \pm \alpha$, где α — произвольная функция из пространства $C_0^\infty(\mathscr{E})^3$, продолженная нулем на область Ω_γ. Для достаточно больших k справедливо включение $\chi_k^{\pm} \in K'_{t_k}$. Подставляя эти функции в неравенства (10), соответствующие значениям t_k, извлекаем

$$W_k \in K'_{t_k}, \quad \int\limits_{\mathscr{E}} \sigma_{ij}(W_k - W)\varepsilon_{ij}(\alpha)\,dx = 0. \tag{12}$$

Зафиксируем функцию α в (12) и перейдем к пределу при $k \to \infty$. В итоге находим

$$\int\limits_{\mathscr{E}} \sigma_{ij}(\widetilde{W} - W)\varepsilon_{ij}(\alpha)\,dx = 0 \quad \forall \alpha \in C_0^\infty(\mathscr{E})^3. \tag{13}$$

Плотность $C_0^\infty(\mathscr{E})$ в $H_0^1(\mathscr{E})$ позволяет получить из (13) равенство $\widetilde{W} - W = 0$ в $H^1(\mathscr{E})^3$. Кроме того, по построению $\widetilde{W} - W = 0$ в области $\Omega\backslash\overline{\mathscr{E}}$ и на границе $\partial\mathscr{E}\backslash\bar{\gamma}$. Это означает, что $\widetilde{W} = W$ в $H(\Omega_\gamma)$. Итак, и во втором случае имеем последовательность $\{W_k\}$, удовлетворяющую соотношениям $W_k \in K_{t_k}$, $W_k \to W$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $t^* \in [0, t_0]$ — фиксированное число. Тогда имеет место сильная сходимость $U_t \to U_{t^*}$ в пространстве $H(\Omega_\gamma)$ при $t \to t^*$, где U_t — решение задачи* (3), *соответствующее параметру $t \in (0, t_0]$, а U_{t^*} является решением задачи* (3) *при $t^* > 0$ и задачи* (6) *— при $t^* = 0$.*

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что существуют число $\epsilon_0 > 0$ и последовательность $\{t_n\} \subset (0, t_0]$ такие, что $t_n \to t^*$, $\|U_n - U_{t^*}\| \geq \epsilon_0$, где $U_n = U_{t_n}$, $n \in \mathbb{N}$, являются решениями задач (3), соответствующих параметрам t_n.

Поскольку $W^0 \equiv 0 \in K_t$ для всех $t \in [0, t_0]$, мы можем подставить $W = W^0$ в (4) для любого фиксированного $t \in (0, t_0]$ и в неравенство (7) при $t = 0$. Это влечет соотношение

$$U_t \in K_t, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_t)\varepsilon_{ij}(U_t)\, dx \leq \int\limits_{\Omega_\gamma} FU_t\, dx \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Отсюда, используя соотношение (1), выводим равномерную по $t \in [0, t_0]$ оценку

$$\|U_t\| \leq c$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от t. Следовательно, заменяя U_n ее подпоследовательностью в случае необходимости, можно считать, что U_n сходится к некоторой функции $\widetilde{U}$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$.

Покажем, что $\widetilde{U} \in K_{t^*}$. В самом деле, имеем $U_n|_{\omega_{t_n}} = \rho_n \in R(\omega_{t_n})$. В соответствии с теоремами вложения Соболева [22] находим

$$U_n|_{\omega_{t^*}} \to \widetilde{U}|_{\omega_{t^*}} \quad \text{сильно в } L_2(\omega_{t^*})^3 \text{ при } n \to \infty, \tag{14}$$

$$U_n|_\gamma \to \widetilde{U}|_\gamma \quad \text{сильно в } L_2(\gamma)^3 \text{ при } n \to \infty. \tag{15}$$

Выбирая при необходимости подпоследовательности, можно считать, что $U_n \to \widetilde{U}$ п. в. в ω_{t^*} при $n \to \infty$. Это позволяет заключить, что каждая из числовых последовательностей $\{b_{12}^n\}$, $\{b_{13}^n\}$, $\{b_{23}^n\}$, $\{c_1^n\}$, $\{c_2^n\}$, $\{c_3^n\}$, определяющих структуру ρ_n в областях ω_{t_n}, ограничена по абсолютной величине. Поэтому можем извлечь сходящиеся числовые подпоследовательности (с сохранением обозначений):

$$b_{12}^n \to b_{12}, \quad b_{13}^n \to b_{13}, \quad b_{23}^n \to b_{23}, \quad c_i^n \to c_i,\ i = 1, 2, 3, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Снова рассмотрим два случая: $t^* = 0$ и $t^* > 0$. В первом случае для последовательности $\{U_n\}$, соответствующей выбранным числовым последовательностям $\{b_{12}^n\}$, $\{b_{13}^n\}$, $\{b_{23}^n\}$, $\{c_1^n\}$, $\{c_2^n\}$, $\{c_3^n\}$, выполняется

$$U_n|_{\gamma^-} \to (b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1, -b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + c_2, -b_{13}x_1 - b_{23}x_2 + c_3)$$

сильно в $L_2(\gamma)^3$ при $n \to \infty$. Последнее вместе с (14) приводит к равенству

$$\widetilde{U} = (b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1, -b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + c_2, -b_{13}x_1 - b_{23}x_2 + c_3) \quad \text{п. в. на } \gamma^-.$$

Это означает, что $\widetilde{U}|_{\gamma^-} \in R(\gamma)$.

Исследуем второй случай. Для последовательности $\{t_n\}$ найдется либо подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$, сходящаяся слева к t^*, либо подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$ такая, что $t_k \geq t^*$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Если существует подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$ такая, что $t_k \geq t^*$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то можно легко установить сильную сходимость

$$U_k|_{\omega_{t^*}} \to (b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1, -b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + c_2, -b_{13}x_1 - b_{23}x_2 + c_3) \qquad (17)$$

в пространстве $L_2(\omega_{t^*})^3$ при $k \to \infty$. Таким образом, из (14) и (17) вытекает, что имеет место включение $\widetilde{U}|_{\omega_{t^*}} \in R(\omega_{t^*})$.

Предположим теперь, что существует сходящаяся слева подпоследовательность $\{t_k\} \subset \{t_n\}$, т. е. $t_k < t^*$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $t_k \to t^*$ при $k \to \infty$. В рамках этого предположения для фиксированного $k' \in \mathbb{N}$ и соответствующего значения $t' = t_{k'}$ имеем сильную сходимость

$$U_k|_{\omega_{t'}} \to (b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1, -b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + c_2, -b_{13}x_1 - b_{23}x_2 + c_3) \qquad (18)$$

в пространстве $L_2(\omega_{t'})^3$ при $k \to \infty$. Определим функцию $\mathscr{L}$ в ω_{t^*} равенством $\mathscr{L} = b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1$. В силу (18) $u_{1k} \to \mathscr{L}$ сильно в $L^2(\omega_{t'})$ при $k \to \infty$. Ввиду абсолютной непрерывности интеграла Лебега для любого положительного $\epsilon > 0$ можно выбрать номер $k' \in \mathbb{N}$ и соответствующее число $t' = t_{k'}$ такие, что

$$\|\mathscr{L}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} < \sqrt{\epsilon}, \quad \|\tilde{u}_1\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} < \sqrt{\epsilon}.$$

Используя дважды неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned}\|u_{1k} - \mathscr{L}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} &\leq \|u_{1k}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} + \|\mathscr{L}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} \\ &\leq \|\tilde{u}_1\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} + \|u_{1k} - \tilde{u}_1\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} + \|\mathscr{L}\|_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} \\ &\leq 2\sqrt{\epsilon} + \|u_{1k} - \tilde{u}_1\|_{L^2(\omega_{t^*})}.\end{aligned}$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\|u_{1k} - \mathscr{L}\|^2_{L^2(\omega_{t^*})} &= \|u_{1k} - \mathscr{L}\|^2_{L^2(\omega_{t^*}\setminus\omega_{t'})} + \|u_{1k} - \mathscr{L}\|^2_{L^2(\omega_{t'})} \\ &< (2\sqrt{\epsilon} + \|u_{1k} - \tilde{u}_1\|_{L^2(\omega_{t^*})})^2 + \|u_{1k} - \mathscr{L}\|^2_{L^2(\omega_{t'})}. \qquad (19)\end{aligned}$$

Отсюда, поскольку для достаточно больших k имеют место неравенства

$$\|u_{1k} - \tilde{u}_1\|_{L^2(\omega_{t^*})} < \sqrt{\epsilon}, \quad \|u_{1k} - \mathscr{L}\|_{L^2(\omega_{t'})} < \sqrt{\epsilon},$$

вытекает, что (19) меньше чем 10ϵ. Таким образом, $u_{1k} \to \mathscr{L}$ сильно в $L^2(\omega_{t^*})$. Принимая во внимание (14), выводим $\tilde{u}_1|_{\omega_{t^*}} = \mathscr{L}$ в ω_{t^*}.

Аналогично

$$\tilde{u}_2|_{\omega_{t^*}} = -b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + c_2 \quad \text{п. в. в } \omega_{t^*},$$

$$\tilde{u}_3|_{\omega_{t^*}} = -b_{13}x_1 - b_{23}x_2 + c_3 \quad \text{п. в. в } \omega_{t^*}.$$

Значит, справедливо включение $\widetilde{U}|_{\omega_{t^*}} \in R(\omega_{t^*})$. В итоге для всех возможных случаев имеем $\widetilde{U}|_{\omega_{t^*}} \in R(\omega_{t^*})$.

Остается показать, что $\widetilde{U}$ удовлетворяет неравенству $[\widetilde{U}]\nu \geq 0$ на γ. Ввиду сходимости (15) мы можем извлечь еще раз подпоследовательности и считать, что $U_n|_\gamma \to \widetilde{U}|_\gamma$ п. в. на $\gamma^\pm$. Этот факт позволяет перейти к пределу при $n \to \infty$ в следующих неравенствах:

$$[U_n]\nu \geq 0 \quad \text{на } \gamma.$$

В результате имеем $[\widetilde{U}]\nu \geq 0$ на γ. Последнее обеспечивает включение $\widetilde{U} \in K_{t^*}$.

Целью последующих рассуждений является доказательство справедливости равенства $\widetilde{U} = U_{t^*}$ и существования сильно сходящейся к U_{t^*} в пространстве $H(\Omega_\gamma)$ последовательности решений $U_n = U_{t_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Заметим, что для сходящейся к t^* последовательности $\{t_n\}$ существует либо подпоследовательность $\{t_{n_l}\}$ такая, что $t_{n_l} \leq t^*$ для всех $l \in \mathbb{N}$, либо подпоследовательность $\{t_{n_m}\}$, удовлетворяющая $t_{n_m} > t^*$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Для первого случая имеем подпоследовательность $\{t_{n_l}\} \subset (0, t_0]$ со свойством $t_{n_l} \leq t^*$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Это означает, что $t^* > 0$. Для удобства будем обозначать эту последовательность через $\{t_n\}$. Поскольку $t_n \leq t^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$, произвольная тестовая функция W из множества K_{t^*} принадлежит также множеству K_{t_n}. Это свойство позволяет перейти к пределу при $n \to \infty$ в следующих неравенствах с тестовой функцией $W \in K_{t^*}$:

$$U_n \in K_{t_n}, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_n)\varepsilon(W - U_n)\, dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(W - U_n)\, dx, \quad t_n \in (0, t^*].$$

С учетом слабой сходимости $U_n \to \widetilde{U}$ в $H(\Omega_\gamma)$ предельное неравенство примет вид

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\widetilde{U})\varepsilon(W - \widetilde{U})\, dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(W - \widetilde{U})\, dx, \quad W \in K_{t^*}.$$

Ввиду произвольности $W \in K_{t^*}$ последнее неравенство является вариационным. Поэтому из него вытекает, что $\widetilde{U} = U_{t^*}$. Чтобы завершить доказательство для первого случая, нужно установить сильную сходимость $U_n \to U_{t^*}$. Подставив $W = 2U_t$ и $W = 0$ в вариационные неравенства (4) для $t \in (0, t_0]$, получим

$$U_t \in K_t, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_t)\varepsilon_{ij}(U_t)\, dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} FU_t\, dx, \quad t \in (0, t_0]. \tag{20}$$

Последнее равенство вместе с (4) гарантируют, что неравенство

$$U_t \in K_t, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_t)\varepsilon(W)\, dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} FW\, dx, \quad W \in K_t, \tag{21}$$

выполнено для всех $t \in (0, t_0]$. В силу слабой сходимости $U_n \to U_{t^*}$ в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \to \infty$ и соотношения (20) находим

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_n)\varepsilon_{ij}(U_n)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_\gamma} FU_n\, dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} FU_{t^*}\, dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_{t^*})\varepsilon_{ij}(U_{t^*})\, dx.$$

Ввиду эквивалентности норм (см. замечание) последняя цепочка означает, что $U_n \to U_{t^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \to \infty$. Таким образом, в первом случае получено противоречие с исходным предположением: $\|U_n - U_{t^*}\| \geq \epsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим второй случай, т. е. предположим, что элементы подпоследовательности $\{t_{n_m}\}$ удовлетворяют $t_{n_m} > t^*$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Для удобства будем обозначать ее через $\{t_n\}$. Итак, $t_n \to t^*$ и $t_n > t^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Принимая во внимание результаты из начала доказательства, получим, что $U_n \to \widetilde{U}$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \to \infty$. Сначала докажем, что $U_n \to \widetilde{U}$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \to \infty$. Ввиду слабой сходимости $U_n \to \widetilde{U}$ в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \to \infty$ из (20) извлекаем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_n)\varepsilon_{ij}(U_n)\,dx = \int\limits_{\Omega_\gamma} F\widetilde{U}\,dx. \tag{22}$$

Затем для фиксированного $t \in (0, t_0]$, подставляя пробные функции вида $W = U_{t'} \in K_{t'} \subset K_t$ с произвольными числами $t' \in (0, t_0]$, $t' \geq t$, в вариационное неравенство (21), соответствующее параметру t, получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_t)\varepsilon_{ij}(U_{t'})\,dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} FU_{t'}\,dx.$$

Отсюда можно сделать заключение, что для всех t_n и t_m, удовлетворяющих $t_n \leq t_m$, выполнено неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_n)\varepsilon_{ij}(U_m)dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} FU_m dx. \tag{23}$$

Зафиксируем произвольное значение $m \in \mathbb{N}$ в (23) и перейдем к пределу при $n \to \infty$ в последнем неравенстве. В итоге получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\widetilde{U})\varepsilon_{ij}(U_m)\,dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} FU_m\,dx. \tag{24}$$

Затем, переходя к пределу в (24) при $m \to \infty$, находим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\widetilde{U})\varepsilon_{ij}(\widetilde{U})\,dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F\widetilde{U}\,dx.$$

Отсюда с помощью формулы (22) и слабой полунепрерывности функционала, определяемого билинейной формой $\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\widetilde{W})\varepsilon_{ij}(\widetilde{W})\,dx$, выводим соотношения

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\widetilde{U})\varepsilon_{ij}(\widetilde{U})\,dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F\widetilde{U}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_n)\varepsilon_{ij}(U_n)\,dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\widetilde{U})\varepsilon_{ij}(\widetilde{U})\,dx.$$

Значит,

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\widetilde{U})\varepsilon_{ij}(\widetilde{U})\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_n)\varepsilon_{ij}(U_n)\,dx.$$

Снова используя эквивалентность норм (см. замечание), извлекаем, что $U_n \to \widetilde{U}$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \to \infty$.

В соответствии с леммой 1 для всех $W \in K_{t^*}$ найдутся подпоследовательность $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность функций $\{W_k\}$ такие, что $W_k \in K_{t_k}$ и $W_k \to W$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \to \infty$.

Свойства, установленные для сходящихся последовательностей $\{W_k\}$ и $\{U_n\}$, позволяют перейти к пределу при $k \to \infty$ в следующих неравенствах, полученных из (4) для t_k и тестовых функций W_k:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_k)\varepsilon_{ij}(W_k - U_k)\,dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(W_k - U_k)\,dx.$$

В результате находим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\widetilde{U})\varepsilon_{ij}(W - \widetilde{U})\,dx \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(W - \widetilde{U})\,dx, \quad W \in K_{t^*}.$$

Однозначная разрешимость данного вариационного неравенства влечет, что $\widetilde{U} = U_{t^*}$. Таким образом, во всех случаях существует подпоследовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ такая, что $t_k \to t^*$, $U_k \to U_{t^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$; противоречие. Лемма доказана.

Леммы 1 и 2 устанавливают качественную связь между задачами о равновесии трехмерных с жесткими включениями разного размера.

В частности, доказано, что задача о равновесии пластины с тонким жестким включением является предельной для семейства задач о равновесии трехмерных тел с объемным жестким включением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Maiti M.* On the extension of a crack due to rigid inclusions // Int. J. Fracture. 1979. V. 15. P. 389–393.

2. *Моссаковский В. И., Рыбка М. Т.* Обобщение критерия Гриффитса — Снеддона на случай неоднородного тела // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 6. С. 1061–1069.

3. *Xiao Z. M., Chen B. J.* Stress intensity factor for a Griffith crack interacting with a coated inclusion // Int. J. Fracture. 2001. V. 108. P. 193–205.

4. *Erdogan F., Gupta G. D., Ratwani M.* Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack // ASME J. Appl. Mech. 1974. V. 41. P. 1007–1013.

5. *Sendeckyj G. P.* Interaction of cracks with rigid inclusions in longitudinal shear deformation // Int. J. Fracture Mech. 1974. V. 101. P. 45–52.

6. *Лойгеринг Г., Хлуднев А. М.* О равновесии упругих тел, содержащих тонкие жесткие включения // Докл. АН. 2010. Т. 43, № 1. С. 1–4.

7. *Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S.* Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2015. DOI: 10.1177/1081286515594655

8. *Попова Т. С.* Задача о равновесии вязкоупругого тела с трещиной и тонким жестким включением // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 94–105.

9. *Khludnev A. M., Novotny A. A., Sokolowski J., Zochowski A.* Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions // J. Mech. Phys. Solids. 2009. V. 57, N 10. P. 1718–1732.

10. *Рудой Е. М.* Анализ чувствительности решения задачи равновесия упругого тела с тонким жестким включением к изменению формы области // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14, № 2. С. 69–87.

11. *Rudoy E. M.* Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body // Z. Angew. Math. Phys. 2015. V. 66, N 4. P. 1923–1937.

12. *Неустроева Н. В.* Задача о равновесии упругой пластины, содержащей наклонную трещину на границе жесткого включения // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 2. С. 74–84.

13. *Щербаков В. В.* Об одной задаче управления формой тонких включений в упругих телах // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 138–147.

14. *Ротанова Т. А.* Контакт пластин, жесткие включения в которых выходят на границу // Вестн. ТГУ. Математика и механика. 2011. № 3. С. 99–107.

15. *Хлуднев А. М.* Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 5. С. 98–110.

16. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.

17. *Khludnev A. M.* Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions // Eur. J. Mech., A, Solids. 2010. V. 29, N 3. P. 392–399.

18. *Khludnev A. M.* Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies // Arch. Appl. Mech. 2013. V. 83, N 10. P. 1493–1509.

19. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

20. *Хлуднев А. М.* Об изгибе упругой пластины с отслоившимся тонким жестким включением // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 114–126.

21. *Lazarev N. P.* Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack // Z. Angew. Math. Mech. 2015. V. 96, N 4. P. 509–518.

22. *Adams R. A., Fournier J. J. F.* Sobolev spaces. New York: Acad. Press, 2003. (Pure Appl. Math.; V. 140).

Статья поступила 20 декабря 2015 г.

Лазарев Нюргун Петрович
Научно-исследовательский институт математики СВФУ,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000;
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
ул. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
nyurgun@ngs.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

UDC 539.371; 517.977

OPTIMAL SIZE CONTROL OF A RIGID INCLUSION IN EQUILIBRIUM PROBLEMS FOR INHOMOGENEOUS THREE–DIMENSIONAL BODIES WITH A CRACK

N. P. Lazarev

Abstract: We consider equilibrium problems for an inhomogeneous three-dimensional body with a crack at the inclusion-matrix interface. The matrix of the plate is assumed to be elastic. The boundary condition on the crack curve is given in the form of inequality and describes mutual nonpenetration of the crack faces. We analyze the dependence of solutions on the size of the rigid inclusion. It is shown that as the size of the rigid inclusion's volume tends to zero the solutions of the corresponding equilibrium problems converge to the solution of the equilibrium problem for a body containing a thin rigid delaminated inclusion. The existence of the solution to the optimal control problem is proved. For that problem, the size parameter of the rigid inclusion is chosen as the control function, while the cost functional is an arbitrary continuous functional.
Keywords: crack, rigid inclusion, variational inequality, energy functional, nonlinear boundary conditions.

REFERENCES

1. *Maiti M.*, "On the extension of a crack due to rigid inclusions," Int. J. Fracture, **15**, 389–393 (1979).
2. *Mossakowsky V. I. and Rybka M. T.*, "A generalization of Griffiths–Sneddon criterion in case of nonhomogeneous body," Prikl. Mat. Mekh., **28**, No. 6, 1061–1069 (1964).
3. *Xiao Z. M. and Chen B. J.*, "Stress intensity factor for a Griffith crack interacting with a coated inclusion," Int. J. Fracture, **108**, 193–205 (2001).
4. *Erdogan F., Gupta G. D., and Ratwani M.*, "Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack," ASME J. Appl. Mech., **41**, 1007–1013 (1974).
5. *Sendeckyj G. P.*, "Interaction of cracks with rigid inclusions in longitudinal shear deformation," Int. J. Fracture Mech., **101**, 45–52 (1974).
6. *Loygering G. and Khludnev A. M.*, "On the equilibrium of elastic bodies containing thin rigid inclusions," Dokl. Math., **43**, No. 1, 1–4 (2010).
7. *Khludnev A. M., Faella L., and Popova T. S.*, "Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies," Math. Mech. Solids (2015). DOI: 10.1177/1081286515594655
8. *Popova T. S.*, "On the equilibrium of visco-elastic body with a crack and thin rigid inclusion," Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 2, 94–105 (2014).
9. *Khludnev A. M., Novotny A. A., Sokolowski J., and Zochowski A.*, "Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions," J. Mech. Phys. Solids, **57**, No. 10, 1718–1732 (2009).
10. *Rudoy E. M.*, "Sensitivity analysis for the solution of the problem of equilibrium of elastic bodies with a thin rigid inclusion to change of the region shape," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., **14**, No. 2, 69–87 (2014).

11. *Rudoy E. M.*, "Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body," Z. Angew. Math. Phys., **66**, No. 4, 1923–1937 (2015).
12. *Neustroeva N. V.*, "The problem on equilibrium of an elastic plate containing an inclined crack on the boundary of rigid inclutson," Sib. Zh. Ind. Mat., **18**, No. 2, 74–84 (2015).
13. *Shcherbakov V. V.*, "On the problem of shape control of thin inclusions in elastic bodies," Sib. Zh. Ind. Mat., **16**, No. 1, 138–147 (2013).
14. *Rotanova T. A.*, "The contact plates whose rigid inclusions overlook the border," Vestn. Tomsk. Gos. Univ., Mat. Mekh., No. 3, 99–107 (2011).
15. *Khludnev A. M.*, "The problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate," Izv. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela, No. 5, 98–110 (2010).
16. *Khludnev A. M. and Kovtunenko V. A.*, Analysis of cracks in solids, WIT-Press, Southampton; Boston (2000).
17. *Khludnev A. M.*, "Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions," Eur. J. Mech., A, Solids, **29**, No. 3, 392–399 (2010).
18. *Khludnev A. M.*, "Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies," Arch. Appl. Mech., **83**, No. 10, 1493–1509 (2013).
19. *Khludnev A. M.*, Problems of elasticity theory in nonsmooth domains [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).
20. *Khludnev A. M.*, "On bending an elastic plate with a delaminated thin rigid inclusion," J. Appl. Ind. Math., **14**, No. 1, 114–126 (2011).
21. *Lazarev N. P.* , "Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack," Z. Angew. Math. Mech., **96**, No. 4, 509–518 (2015).
22. *Adams R. A. and Fournier J. J. F.*, Sobolev spaces, Acad. Press, New York (2003) (Pure Appl. Math.; V. 140).

Submitted December 20, 2015

Nyurgun Petrovich Lazarev
Research Institute of Mathematics of North-Eastern Federal University,
Kulakovskogo st., Yakutsk 677000, Russia;
Lavrent′ev Institute of Hydrodynamics,
Lavrentiev ave., 15, Novosibirsk 630090, Russia
nyurgun@ngs.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Ш. Любанова

Аннотация. Исследуется задача идентификации неизвестного постоянного коэффициента в старшем члене уравнения с частными производными $-kM\psi_1(u) + g(x)\psi_2(u) = f(x)$ при граничном условии Дирихле. Здесь $\psi_i(u)$, $i = 1, 2$, — нелинейная возрастающая функция от u, M — линейный эллиптический оператор второго порядка. Коэффициент k восстанавливается по дополнительным интегральным данным на границе. Доказывается существование и единственность решения обратной задачи, включающего функцию u и положительное действительное число k.
Ключевые слова: обратная задача, краевая задача, эллиптическое уравнение, теорема существования и единственности, фильтрация.

Введение

Данная работа посвящена исследованию обратных задач восстановления неизвестных старших коэффициентов уравнения

$$-\operatorname{div}(\mathbf{k}(x,u)\nabla\eta(u)) + \gamma(x,u) = f, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

с граничным условием Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = \beta(x), \tag{2}$$

где $\mathbf{k}(x,u)$ — матрица функций, $\eta(u)$ и $\gamma(x,u)$ — скалярные функции, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$.

Практический интерес к таким задачам обусловлен тем, что в многочисленных приложениях коэффициенты уравнения (1) характеризуют физические свойства среды (теплопроводность, проницаемость и т. п.). Различные вопросы, связанные с обратными задачами для (1), обсуждались в работах [1–7] (см. также ссылки в них).

Особый интерес представляет задача нахождения старших коэффициентов (1) по дополнительным граничным данным на $\partial\Omega$ или на некоторой части $\partial\Omega$. В [1, 2, 6, 7] эта задача рассматривалась в случае, когда $\eta(u) = u$, $\gamma(x,u) \equiv 0$, $\mathbf{k}(x,u) = k(x)\mathbf{E}$, $\mathbf{E}$ — единичная матрица, а функция $k(x)$ неизвестна.

В данной статье исследуется обратная задача идентификации постоянного коэффициента k в уравнении

$$-k\{\operatorname{div}(\mathscr{M}(x)\nabla\psi_1(u)) + m(x)\psi_1(u)\} + g(x)\psi_2(u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

при граничном условии (2). Здесь $m(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $\beta(x)$, $\psi_i(u)$, $i = 1, 2$, — заданные функции, $\mathscr{M}(x)$ — матрица функций $m_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. С физической точки зрения постоянный коэффициент k можно интерпретировать как среднюю проводимость среды.

Дополнительная информация для восстановления коэффициента k задается в виде интегрального условия переопределения

$$k \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi_1(u)}{\partial \overline{N}}\, \omega\, ds = \varphi, \tag{4}$$

где $\partial u/\partial\overline{N} \equiv (\mathscr{M}(x)\nabla u, \mathbf{n})_R$ — производная по конормали, $\mathbf{n}$ — вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$, $\omega = \omega(x)$ — заданная функция и φ — заданное действительное число. Условие (4) описывает, например, общий расход жидкости через поверхность пласта породы.

Обратные задачи для эллиптических уравнений с аналогичными нелокальными граничными условиями переопределения рассматривались в [4, 5]. Задача для линейного уравнения (3) с $\psi_1(\rho) = \psi_2(\rho) = \rho$ обсуждалась в [4]. Работа [5] посвящена вопросам существования и единственности решения задачи (2)–(4), где $\psi_2(\rho) = \rho$.

Если функция $\psi_1(\rho)$ обратима в своей области определения, то задачу (2)–(4) можно свести к обратной задаче для уравнения

$$-k\{\operatorname{div}(\mathscr{M}(x)\nabla u) + m(x)u\} + g(x)\psi(u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

с условиями (2) и

$$k \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \omega\, ds = \varphi. \tag{6}$$

Основной целью настоящей работы является исследование корректности обратной задачи (2), (5), (6).

План работы состоит в следующем. В § 1 обсуждаются условия корректности и некоторые свойства решения прямой задачи (2), (5). В § 2 на основе этих результатов доказывается теорема существования и единственности решения задачи (2), (5), (6), а также приводится пример модельного уравнения, отвечающего условиям этой теоремы.

§ 1. Предварительные замечания

Начнем исследование с обсуждения вопросов корректности прямой задачи (2), (5) и некоторых свойств ее решения.

Всюду ниже будем использовать следующие обозначения: $\|\cdot\|_R$, $(\cdot,\cdot)_R$ — норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$; $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ — норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$; $\|\cdot\|_j$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ — норма в $W_2^j(\Omega)$, $j = 1, 2$, и отношение двойственности между $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $W_2^{-1}(\Omega)$ соответственно; $a(x)$ — решение задачи

$$-\operatorname{div}(\mathscr{M}(x)\nabla a) + m(x)a = 0,\ x \in \Omega, \quad a|_{\partial\Omega} = \beta(x); \tag{7}$$

$b(x)$ — решение задачи

$$-\operatorname{div}(\mathscr{M}(x)\nabla b) + m(x)b = 0,\ x \in \Omega, \quad b|_{\partial\Omega} = \omega(x). \tag{8}$$

Введем линейный оператор $M : W_2^1(\Omega) \to \big(W_2^1(\Omega)\big)^*$ вида

$$M = -\operatorname{div}(\mathscr{M}(x)\nabla) + m(x)I,$$

где I — тождественный оператор, и следующее обозначение: для $v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega)$

$$\langle Mv_1, v_2\rangle_M \equiv \int\limits_\Omega \big[\big(\mathscr{M}\nabla v_1, \nabla v_2\big)_R + mv_1v_2\big]\,dx.$$

Будем предполагать, что для оператора M выполняются следующие условия.

I. $m_{ij}(x)$, $\partial m_{ij}/\partial x_l$, $i, j, l = 1, 2, \ldots, n$, и $m(x)$ ограничены в Ω, M — эллиптический оператор, т. е. существуют положительные константы m_1 и m_2 такие, что для любого $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$

$$m_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^n m_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le m_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \tag{9}$$

II. Оператор M самосопряжен, т. е. $m_{ij}(x) = m_{ji}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $m(x) \ge 0$.

III. Функция $\psi(\rho)$ — непрерывное взаимно однозначное отображение $(-\infty, +\infty)$ на себя. Для любых $\rho_1, \rho_2 \in (-\infty, +\infty)$

$$(\psi(\rho_1) - \psi(\rho_2))(\rho_1 - \rho_2) \ge 0, \quad i = 1, 2, \tag{10}$$

т. е. $\psi(\rho)$ — монотонно возрастающая функция.

Из предположения III следует, что существует обратная к $\psi(\rho)$ функция $\psi^{-1}(\rho)$, которая также непрерывна и монотонно возрастает на $(-\infty, +\infty)$.

В предположениях I–III задачи (7) и (8) однозначно разрешимы в $W_2^2(\Omega)$, когда $\beta \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$ и $\partial\Omega \subset C^2$.

Существование и единственность решения прямой задачи (2), (5) гарантируется следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть выполняются предположения* I–III *и* $\partial\Omega \in C^2$. *Пусть также* k *— заданное положительное число,* $f \in L^2(\Omega)$, $\beta \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $g \in C(\overline{\Omega})$, $g \ge 0$ *в* $\overline{\Omega}$ *и*

$$|\psi(\rho)| \le c|\rho|^p \tag{11}$$

для любого $\rho \in (-\infty, +\infty)$, *где* $p, c > 0$ *— константы,* $p > 0$ *при* $n \le 2$ *и* $0 < p \le n/(n-2)$ *при* $n > 2$. *Тогда существует единственное решение* u *задачи* (2), (5) *в* $W_2^2(\Omega)$.

Доказательство. Если при $0 < p \le 1$ функция $\psi(\rho)$ удовлетворяет условию (11), то задача (2), (5) сводится к случаю, рассмотренному в [5], и утверждение леммы немедленно следует из леммы 2.1 в [5].

Пусть теперь $p > 1$. Умножим (5) на $\tilde{u} = u - a$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом члене. Получим

$$k\int\limits_\Omega \{(\mathscr{M}\nabla\tilde{u}, \nabla\tilde{u})_R + m(x)\tilde{u}^2\}\,dx + \int\limits_\Omega g(\psi(u) - \psi(a))\tilde{u}dx = (-g\psi(a) + f, \tilde{u}). \quad (12)$$

Оценивая правую часть (12) с помощью неравенства Фридрихса [8, гл. 2]:

$$\|v\| \le c_0 \operatorname{mes}^{1/n}\Omega\biggl(\int\limits_\Omega \|\nabla v\|_R^2\,dx\biggr)^{1/2} \quad (13)$$

для $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, приходим к соотношению

$$k\int\limits_\Omega \{(\mathscr{M}\nabla\tilde{u}, \nabla\tilde{u})_R + m(x)\tilde{u}^2\}\,dx + \int\limits_\Omega g(\psi(u) - \psi(a))\tilde{u}\,dx$$
$$\le \frac{km_1}{2}\int\limits_\Omega \|\nabla\tilde{u}\|_R^2\,dx + \frac{c_0^2\operatorname{mes}^{2/n}\Omega}{2km_1}\|g\psi(a) - f\|^2,$$

откуда в силу (9), (10)

$$\int\limits_\Omega \|\nabla\tilde{u}\|_R^2\,dx \le \frac{1}{m_1}\int\limits_\Omega \{(\mathscr{M}\nabla\tilde{u}, \nabla\tilde{u})_R + m\tilde{u}^2\}\,dx \le \frac{c_0^2\operatorname{mes}^{2/n}\Omega}{k^2m_1^2}\|g\psi(a) - f\|^2 \equiv C. \quad (14)$$

Здесь положительная константа c_0 зависит только от n. Из (13) и (14) вытекает, что

$$\|\tilde{u}\| \le C^{1/2}c_0\operatorname{mes}^{1/n}\Omega, \quad (15)$$

$$\|u\|_1 \le \|a\|_1 + C^{1/2}\max\{1, c_0\operatorname{mes}^{1/n}\Omega\} \equiv C_1. \quad (16)$$

Для доказательства существования и единственности решения задачи (2), (5) перепишем уравнение (5) в следующем виде:

$$\widetilde{M}\tilde{u} \equiv M\tilde{u} + g(\psi(\tilde{u} + a) - \psi(a)) = f - g\psi(a). \quad (17)$$

В условиях леммы оператор $\widetilde{M} : \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \to W_2^{-1}(\Omega)$ деминепрерывен, коэрцитивен и монотонен. Поэтому согласно теореме 2.1 из [9, гл. III] операторное уравнение (17) имеет решение $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и это решение единственно. Действительно, пусть $u_1, u_2 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — два решения уравнения (17). Тогда в силу (9) и строгой монотонности оператора $\widetilde{M}$ справедливо неравенство

$$0 = \langle\widetilde{M}u_1 - \widetilde{M}u_2, u_1 - u_2\rangle_1 \ge m_1\|\nabla(u_1 - u_2)\|^2,$$

из которого вытекает, что $u_1 = u_2$.

Докажем, что $u \in W_2^2(\Omega)$. Умножим (5) на Mu скалярно в $L^2(\Omega)$:

$$k\|Mu\|^2 = -(g\psi(u), Mu) + (f, Mu).$$

Оценим правую часть этого равенства с помощью (11), (16) и неравенства Коши, учитывая тот факт, что в условиях леммы согласно теореме вложения $L^{2p}(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$. В результате получим

$$k\|Mu\|^2 \le \frac{1}{k}\big[c\|g\|_{C(\overline{\Omega})}\|u\|^p_{L^{2p}(\Omega)} + \|f\|\big]^2 + \frac{k}{2}\|M\psi(u)\|^2$$
$$\le \frac{1}{2k}\big[cc'C_1^p\|g\|_{C(\overline{\Omega})} + \|f\|\big]^2 + \frac{k}{2}\|Mu\|^2,$$

откуда

$$\|Mu\| \le \frac{1}{k}\big[cc'C_1^p\|g\|^2_{C(\overline{\Omega})} + \|f\|\big] \equiv C_2, \tag{18}$$

где c' — константа из неравенства вложения. Ввиду (14), (16) и теоремы 5.1 из [10, гл. 2] последнее неравенство влечет оценку

$$\|u\|_2 \le \kappa\big(\|Mu\| + \|u-a\|_1\big) + \|a\|_2 \le \kappa(C_2 + C_1) + \|a\|_2(\kappa+1), \tag{19}$$

где константа κ зависит от n, m_1, m_2, $\operatorname{vrai\,max}_\Omega |\partial m_{ij}/\partial x_l|$, $i,j,l = 1,2,\dots,n$, и $\operatorname{mes}\Omega$. Таким образом, решение u принадлежит $W_2^2(\Omega)$. $\square$

Лемма 2. *Пусть выполняются предположения леммы* 1. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $g\psi(a) - f \ge 0$, *то решение* u *задачи* (2), (5) *удовлетворяет неравенству* $u \le a$ *почти всюду в* Ω.

2. *Если* $\psi(0) = 0$, $f \ge 0$ *почти всюду в* Ω *и* $\beta \ge 0$ *почти всюду на* $\partial\Omega$, *то* $u \ge 0$ *почти всюду в* Ω.

Доказательство. 1. В случае, когда условие (11) выполняется при $0 < p \le 1$, утверждение леммы следует из леммы 2.1 в [5].

Пусть $p > 1$. Рассмотрим функцию $w = -\tilde{u} = a - u$ и перепишем уравнение (17) в виде

$$kMw + g(x)(\psi(a) - \psi(u)) = g\psi(a) - f.$$

Умножим его скалярно в $L^2(\Omega)$ на $\bar{a} - u$, где

$$\bar{a} = \begin{cases} u, & \text{если } u \le a, \\ a, & \text{если } u > a, \end{cases}$$

и проинтегрируем по частям в первом слагаемом левой части результирующего соотношения. Это даст

$$k\int\limits_\Omega [(\mathscr{M}\nabla(\bar{a}-u), \nabla(\bar{a}-u))_R + m(\bar{a}-u)^2]\,dx$$
$$+ \int\limits_\Omega (g(\psi(\bar{a}) - \psi(u)) - g\psi(a) + f)(\bar{a}-u)\,dx = 0. \tag{20}$$

В силу (9), (10) и неотрицательности $g\psi(a) - f$ из (20) следует, что

$$km_1\int\limits_\Omega (\nabla\bar{a} - \nabla u)^2\,dx \le 0,$$

т. е. $\nabla(\psi(\bar{a}) - \psi(u)) = 0$. Ввиду (2) и (7) $\bar{a}|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$. Поэтому $\bar{a} - u = 0$ и $u \le a$ почти всюду в Ω.

2. Определим функцию u^-, равную u при $u < 0$ и 0 при $u \ge 0$. Умножим (17) на u^- в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом слагаемом. Получим тождество

$$k\langle Mu^-, u^-\rangle_1 + (g\psi(u^-), u^-) - (f, u^-) = 0,$$

из которого вытекает, что $u^- \equiv 0$, т. е. $u \ge 0$ почти всюду в Ω. $\square$

§ 2. Обратная задача

Перейдем к доказательству теорем существования и единственности решения обратной задачи (2), (5), (6). Для этого введем дополнительное предположение относительно функции ψ.

IV. Функция $\psi(\rho)$ удовлетворяет условию (11) с некоторым $p > 0$. Кроме того, для любых числа $r > 0$ и функций $v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega)$ таких, что $\|v_i\|_{L^p(\Omega)} \le r$, $i = 1, 2$, справедливо неравенство

$$\|\psi(v_1) - \psi(v_2)\| \le \alpha(r)\langle M(v_1 - v_2), v_1 - v_2\rangle_M^{1/2},$$

где постоянная $\alpha(r) > 0$ зависит от r.

Под *решением обратной задачи* будем понимать пару u, k, включающую функцию $u \in W_2^2(\Omega)$ и положительное действительное число k, которая удовлетворяет уравнению (5) почти всюду в Ω и условиям (2), (6).

Теорема 1. *Пусть выполняются предположения* I–IV *и условие* (11)*. Пусть также*

(i) $f \in L^2(\Omega)$, $\psi(\beta) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\omega(x) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $g(x) \in C(\overline{\Omega})$;

(ii) $\omega(x) \ge 0$ *и* $\beta(x) \ge 0$ *почти всюду на* $\partial\Omega$, $f(x) \ge 0$ *почти всюду в* Ω,

$$0 \le g(x) \le g_1 = \text{const} < +\infty, \quad x \in \Omega, \tag{21}$$

$$\Psi \equiv \langle M\nabla a, \nabla b\rangle_M > 0, \tag{22}$$

$$F(x) \equiv g\psi(a) - f \ge 0, \tag{23}$$

$$\Phi \equiv \varphi - (g\psi(a) - f, b) > 0. \tag{24}$$

Тогда задача (2), (5), (6) *имеет решение* $(u(x), k)$*. При этом* $u(x) \in W_2^2(\Omega)$ *и для* u *справедлива оценка*

$$0 \le u(x) \le a(x) \tag{25}$$

почти для всех $x \in \Omega$*. Кроме того, если* $g \equiv 0$ *или выполняется неравенство*

$$\Phi > \left(g_1\alpha(r)\|b\|\Psi c_0 m_1^{-1/2} \operatorname{mes}^{1/n}\Omega\|F\|\right)^{1/2}, \tag{26}$$

где $r = \|a\|_{L^p(\Omega)}$*, то решение задачи* (2), (5), (6) *единственно.*

Доказательство. Если $\psi(\rho)$ удовлетворяет условию (11) при $0 < p \le 1$, то задача (2), (5), (6) сводится к случаю, рассмотренному в [5], с помощью замены $v = \psi(u)$, $\beta_1 = \psi(\beta)$, $a_1 = \psi(a)$.

Докажем существование решения при произвольном $p > 0$. Следуя идее [11], сведем обратную задачу к операторному уравнению для неизвестного коэффициента k. Для этого умножим (5) на b в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем по частям в первом члене результирующего равенства. Ввиду (5) получим

$$-\varphi + k\Psi + \int\limits_{\Omega} g(x)\psi(u)b\,dx = \int\limits_{\Omega} fb\,dx. \tag{27}$$

В силу (22) и определения Φ (см. (24)) тождество (27) можно переписать в виде

$$k = (\Phi + (g(\psi(a) - \psi(u)), b))\Psi^{-1}. \tag{28}$$

Если $g \equiv 0$, то $k = \Phi/\Psi > 0$ — известная постоянная. По лемме 2.1 задача (2), (5) с таким k имеет единственное решение $u \in W_2^2(\Omega)$ и соответственно утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $g \neq 0$ и выполняются условия (21)–(24). Введем оператор A, отображающий множество $\mathbf{R}^+$ положительных действительных чисел в $\mathbf{R}$ по следующему правилу: для каждого $y \in \mathbf{R}^+$

$$A(y) = (\Phi + (g(\psi(a) - \psi(u_y)), b))\Psi^{-1},$$

где u_y — решение прямой задачи (2), (5) с $k = y$. Согласно лемме 1 задача (2), (5) при любом $y > 0$ имеет единственное решение $u_y \in W$ и, следовательно, значение $A(y)$ определено для каждого $y \in \mathbf{R}^+$. Поэтому (28) может быть записано как операторное уравнение

$$k = A(k). \tag{29}$$

Следуя идее из [11, гл. 1], можно показать, что задача (2), (5), (6) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда разрешимо операторное уравнение (29).

Согласно лемме 2 $u_y \leq a$, т. е. справедливо (25). В силу (22) и (25)

$$0 < k_0 \equiv \frac{\Phi}{\Psi} \leq A(y) \leq \frac{|\varphi| + |(f,b)| + g_1\|\psi(u_y)\|\|b\|}{\Psi} \tag{30}$$

для любого $y \in \mathbf{R}^+$. Левое неравенство в (30) позволяет получить оценку на $\|\psi(u_y)\|$. Как показано в лемме 1, для u_y справедлива оценка (16). Поэтому для каждого $y \geq k_0$

$$\|\psi(u_y)\| \leq c\|u_y\|^p_{L^{2p}(\Omega)} \leq cc'\|u\|_1^p \leq cc'C_1^p \equiv C_3. \tag{31}$$

Из (30) и (31) получаем, что для $y \geq k_0$ имеет место неравенство

$$k_0 \leq A(y) \leq \frac{|\varphi| + |(f,b)| + g_1C_3\|b\|}{\Psi} \equiv K_0, \tag{32}$$

которое показывает, что оператор A отображает $[k_0, K_0]$ в себя.

Покажем, что A непрерывен на $[k_0, K_0]$. Пусть $y_1, y_2 \in [k_0, K_0]$ и u_{y1}, u_{y2} — решения задачи (2), (5) с $k = y_1$ и $k = y_2$ соответственно. Согласно определению оператора A имеем

$$A(y_1) - A(y_2) = -\Psi^{-1}(g(\psi(u_{y1}) - \psi(u_{y2})), b). \tag{33}$$

Разность $\overline{w} = u_{y1} - u_{y2}$ удовлетворяет уравнению

$$y_1 M\overline{w} + g(\psi(u_{y1}) - \psi(u_{y2})) = -(y_1 - y_2)Mu_{y2} \tag{34}$$

и краевому условию $\overline{w}|_{\partial\Omega} = 0$. Умножим (34) на $\overline{w}$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом члене результирующего уравнения:

$$y_1\langle M\overline{w}, \overline{w}\rangle_1 + (g(\psi(u_{y1}) - \psi(u_{y2})\overline{w})) = -(y_1 - y_2)\langle Mu_{y2}, \overline{w}\rangle_1. \tag{35}$$

В силу предположения (10) левая часть этого равенства неотрицательна. Для оценки правой части (35) умножим (5) для u_{y2} на $\bar{u} = u_{y2} - a$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом слагаемом:

$$y_2\langle Mu_{y2}, u_{y2}\rangle_M + (g(\psi(u_{y2}) - \psi(a)), \bar{u}) = y_2\langle Mu_{y2}, a\rangle_M + (f - g\psi(a), \bar{u}).$$

Отсюда ввиду (10), (15) следует, что

$$\langle Mu_{y2}, u_{y2}\rangle_M \le \langle Ma, a\rangle_M + \frac{c_0^2 \operatorname{mes}^{2/n}\Omega}{y_2^2 m_1}\|g\psi(a) - f\|^2. \tag{36}$$

Возвращаясь к равенству (35), в силу (25) и (36) получаем

$$y_1\langle M\overline{w}, \overline{w}\rangle_1 \le \frac{y_1}{2}\langle M\overline{w}, \overline{w}\rangle_1 + \frac{1}{2y_1}|y_1 - y_2|^2\langle Mu_{y2}, u_{y2}\rangle_1 \le \frac{y_1}{2}\langle M\overline{w}, \overline{w}\rangle_1$$
$$\left[\langle Ma, a\rangle_M + \frac{c_0^2 \operatorname{mes}^{2/n}\Omega}{k_0^2 m_1}\|g\psi(a) - f\|^2\right]\frac{|y_1 - y_2|^2}{y_1},$$

или

$$\langle M\overline{w}, \overline{w}\rangle_1 \le \left[\langle Ma, a\rangle_M + \frac{c_0^2 \operatorname{mes}^{2/n}\Omega}{k_0^2 m_1}\|g\psi(a) - f\|^2\right]\frac{|y_1 - y_2|^2}{k_0^2} \equiv C_4|y_2 - y_1|^2. \tag{37}$$

Далее, ввиду (36), (37) и предположения IV имеем

$$|(g(\psi(u_{y1}) - \psi(u_{y2})), b)| \le g_1\|\psi(u_{y1}) - \psi(u_{y2})\|\|b\|$$
$$\le g_1\alpha(r)\|b\|\langle M\overline{w}, \overline{w}\rangle_M^{1/2} \le C_5|k_1 - k_2|, \tag{38}$$

где $r = \|a\|_{L^p(\Omega)}$, $C_5 = g_1\alpha(r)\|b\|C_4^{1/2}$. Наконец, из (33) в силу (38) получаем неравенство

$$|A(y_1) - A(y_2)| \le \frac{C_5}{\Psi}|y_1 - y_2|,$$

которое доказывает непрерывность оператора A на $[k_0, K_0]$. Так как A отображает $[k_0, K_0]$ на себя, согласно теореме Брауэра уравнение (29) имеет решение

$k \in [k_0, K_0]$. Это, в свою очередь, влечет существование решения $\{u(x), k\}$ задачи (2), (5), (6). Найденное решение удовлетворяет соотношениям (25), (31), (32) и (36). Кроме того, по лемме 1 для u справедливы оценки (14)–(19) с k_0 вместо k в константах C_1 и C_2.

Докажем, что если исходные данные обратной задачи удовлетворяют условию (26), то построенное решение единственно. Пусть (u_1, k_1) и (u_2, k_2) — два решения задачи (2), (5), (6). В силу (2) $(u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} = 0$. Вычитая (5) для (u_2, k_2) из (5) для (u_1, k_1), умножая эту разность на $U = u_1 - u_2$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и интегрируя по частям в результирующем тождестве, приходим к равенству

$$k_1\langle M(U), U\rangle_1 + (g(\psi(u_1) - \psi(u_2)), U) = (k_1 - k_2)\langle M(a - u_2), U\rangle_1. \tag{39}$$

Для оценки правой части (39) умножим (5) для u_2 на $u_2 - a$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом слагаемом. Имеем

$$k_2\langle M(u_2 - a), u_2 - a\rangle_M + (g(\psi(u_2) - \psi(a)), u_2 - a) = (f - g\psi(a), u_2 - a).$$

Отсюда ввиду (10), (15) заключаем, что

$$\langle M(u_2 - a), u_2 - a\rangle_M \le \frac{c_0^2 \operatorname{mes}^{2/n}\Omega}{k_0^2 m_1}\|g\psi(a) - f\|^2.$$

Из этого соотношения и уравнения (39) следует неравенство

$$\langle M(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle_1 \le \frac{c_0^2 \operatorname{mes}^{2/n}\Omega}{k_0^4 m_1}\|F\|^2|k_1 - k_2|^2. \tag{40}$$

С другой стороны, вычитая (28) для (u_2, k_2) из (28) для (u_1, k_1), получим уравнение

$$k_1 - k_2 = Ak_1 - Ak_2 = -\frac{(g(\psi(u_1) - \psi(u_2)), b)}{\Psi}. \tag{41}$$

Оценим правую часть (41) по модулю с помощью (14), (32), (40). С учетом предположения IV и того, что в условиях теоремы $\|u\|_{L^p(\Omega)} \le \|a\|_{L^p(\Omega)}$, имеем

$$\begin{aligned} &|(g(\psi(u_1) - \psi(u_2)), b)| \le g_1\|\psi(u_1) - \psi(u_2)\|\|b\| \\ &\quad \le g_1\alpha(r)\|b\|\langle M(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle_M^{1/2} \le g_1\alpha(r)\|b\|\frac{\Psi^2 c_0 \operatorname{mes}^{1/n}\Omega}{\Phi^2 m_1^{1/2}}\|F\||k_1 - k_2|, \end{aligned} \tag{42}$$

где $r = \|a\|_{L^p(\Omega)}$. Соотношения (41), (42) приводят к неравенству

$$|k_1 - k_2| = |Ak_1 - Ak_2| \le g_1\alpha(r)\|b\|\frac{\Psi c_0 \operatorname{mes}^{1/n}\Omega}{\Phi^2 m_1^{1/2}}\|F\||k_1 - k_2|,$$

которое доказывает сжимаемость оператора A в силу (26). Из него следует, что $k_1 - k_2 = 0$ и ввиду (40) $u_1 - u_2 = 0$ почти всюду в Ω. $\square$

Как видно из доказательства теоремы 1, при $g = 0$ утверждение теоремы остается справедливым и без условий неотрицательности f, β, ω и ограничения (23). Однако в этом случае u не удовлетворяет неравенству (25).

Обратную задачу для уравнения (5) с граничными данными (2) и условием переопределения, заданным только на части Γ границы $\partial\Omega$, т. е.

$$k \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \overline{N}}\, \omega\, ds = \varphi, \tag{43}$$

можно свести к задаче (2), (5), (4). Если функция $\omega \in W_2^{3/2}(\Gamma)$ финитна на Γ и $\operatorname{supp}\omega \subset \Gamma$, то ее можно продолжить на всю границу $\partial\Omega$, положив $\omega = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma$, и рассматривать интеграл в (43) по всей границе $\partial\Omega$. В этом случае теорема 1 формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения* I–IV *и* (11), $f \in L^2(\Omega)$, $\psi(\beta) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\omega(x) \in W_2^{3/2}(\Gamma)$, $g(x) \in C(\overline{\Omega})$. *Пусть также* $\beta(x) \geq 0$ *почти всюду на* $\partial\Omega$, $f \geq 0$ *почти всюду в* Ω, $\omega(x)$ *неотрицательна и финитна на* Γ, $\operatorname{supp}\omega \subset \Gamma$, $\omega(x) = 0$ *на* $\partial\Omega \setminus \Gamma$ *и выполняются условия* (21)–(24). *Тогда задача* (2), (5), (43) *имеет по крайней мере одно решение* $(u(x), k)$, *при этом* $u(x)$ *удовлетворяет неравенству* (25) *почти всюду в* Ω. *Кроме того, если* $g \equiv 0$ *или выполняется неравенство* (26), *то решение задачи* (2), (5), (43) *единственно.*

Как отмечалось выше, интерес к задачам идентификации коэффициентов в эллиптических уравнениях, в том числе уравнениях типа (3) или (5), объясняется их широкими приложениями. Некоторые примеры таких задач в случае изотропных сред можно найти в [5]. Примером модельного уравнения анизотропной среды является стационарное нелинейное уравнение анизотропной диссипации в кристаллическом полупроводнике. При некоторых допущениях оно принимает вид [12]

$$-k\left(\alpha_1 \Delta_2 u + \alpha_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + \lambda |u|^q u = 0,$$

где Δ_2 — оператор Лапласа по переменным x_1 и x_2, параметры k и λ зависят от электрической восприимчивости, а постоянные $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, определяются тензором электрической поляризуемости полупроводника, $q \geq 0$. В данном случае оператор $M = -\big(\alpha_1 \Delta_2 + \alpha_2 \partial^2/\partial x_3^2\big)$ и функция $\psi(\rho) = |u|^q u$ при $q \leq 2$ удовлетворяют всем предположениям теорем 1 и 2, если область Ω достаточно мала.

В заключение следует отметить устойчивость решения задач (2), (5), (6) по φ. В условиях теоремы 1, гарантирующих единственность решения обратной задачи, справедливы оценки

$$\|u_1 - u_2\|_2 \leq C_6 |\varphi_1 - \varphi_2|, \quad |k_1 - k_2| \leq C_7 |\varphi_1 - \varphi_2|,$$

где $\{u_i, k_i\}$ — решение обратной задачи (2), (5), (6) при $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, 2$. Эти оценки следуют из сжимаемости оператора A в уравнении (29) в теореме 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alessandrini G., Caburro R.* The local Calderon problem and the determination at the boundary of the conductivity // Commun. Partial Differ. Equ. 2009. V. 34. P. 918–936.

2. *Calderon A. P.* On an inverse boundary value problem // Seminar on numerical analysis and its applications to continuum physics (Rio de Janeiro, Brazil, 1980). Rio de Janeiro: Soc. Brazil. Mat., 1980. P. 65–73.
3. *Klibanov M. V., Timonov A.* Carleman estimates for coefficient inverse problems and numerical applications. Utrecht: VSP, 2004.
4. *Lyubanova A. Sh.* Identification of a constant coefficient in an elliptic equation // Appl. Anal. 2008. V. 87. P. 1121–1128.
5. *Lyubanova A. Sh.* On an inverse problem for quasi-Linear elliptic equation // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. 2015. Т. 8, №1. С. 38–48.
6. *Nachman A., Street B.* Reconstruction in the Calderon problem with partial data // Commun. Partial Differ. Equ. 2010. V. 35. P. 375–390.
7. *Nakamura G., Tanuma K.* A nonuniqueness theorem for inverse boundary value problem in elasticity // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 56. P. 602–610.
8. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
9. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
10. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1968.
11. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 2000.
12. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физмалит, 2007.

Статья поступила 3 марта 2016 г.

Любанова Анна Шоломовна
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041
lubanova@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

UDC 517.95

INVERSE PROBLEMS FOR NONLINEAR STATIONARY EQUATIONS

A. Sh. Lyubanova

Abstract: Identification of the unknown constant coefficient in the main term of the partial differential equation $-kM\psi_1(u) + g(x)\psi_2(u) = f(x)$ with the Dirichlet boundary condition is investigated. Here $\psi_i(u)$, $i = 1, 2$, is a nonlinear increasing function of u and M is a second-order linear elliptic operator. The coefficient k is recovered on the base of additional integral boundary data. The existence and uniqueness of the solution to the inverse problem with a function u and a positive real number k is proved.

Keywords: inverse problem, boundary value problem, second-order elliptic equation, existence and uniqueness theorem, filtration.

REFERENCES

1. *Alessandrini G. and Caburro R.*, "The local Calderon problem and the determination at the boundary of the conductivity," Commun. Partial Differ. Equ., **34**, 918–936 (2009).

2. *Calderon A. P.*, "On an inverse boundary value problem," in: Seminar on numerical analysis and its applications to continuum physics (Rio de Janeiro, Brazil, 1980), Soc. Brazil. Mat., Rio de Janeiro, 65–73 (1980).

3. *Klibanov M. V. and Timonov A.*, Carleman estimates for coefficient inverse problems and numerical applications, VSP, Utrecht (2004).

4. *Lyubanova A. Sh.*, "Identification of a constant coefficient in an elliptic equation," Appl. Anal., **87**, 1121–1128 (2008).

5. *Lyubanova A. Sh.*, "On an inverse problem for quasi-linear elliptic equation," Zh. Sib. Fed. Univ., Mat. Fiz., **8**, No. 1, 38–48 (2015).

6. *Nachman A. and Street B.*, "Reconstruction in the Calderon problem with partial data," Commun. Partial Differ. Equ., **35**, 375–390 (2015).

7. *Nakamura G. and Tanuma K.*, "A nonuniqueness theorem for inverse boundary value problem in elasticity," SIAM J. Appl. Math., **56**, 602–610 (1996).

8. *Ladyzhenskaya O. A. and Uraltseva N. N.*, Linear and quasilinear elliptic equations, Acad. Press, New York; London (1968) (Math. Sci. Eng.; V. 46).

9. *Gaevski Kh., Greger K., and Zakharias K.*, Nonlinear operator equations and operator differential equations [Russian transl.], Mir, Moscow (1978).

10. *Lions J.-L. and Majenes E.*, Nonhomogeneous boundary value problams and its application [Russian transl.], Mir, Moscow (1968).

11. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A.*, Methods for solving inverse problems in mathematical physics, Marcel Dekker, Inc., New York (2000).

12. *Sveshnikov A. G., Al′shin A. B., Korpusov M. O., and Pletner Yu. D.*, Linear and nonlinear equations of Sobolev type, Fizmatlit, Moscow (2007).

Submitted March 3, 2016

Anna Sholomovna Lyubanova
Siberian Federal University,
Svobodnyi ave., 79, Krasnoyarsk 660041
lubanova@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

УДК 517.927.6

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СПЕКТРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЯТОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С. И. Митрохин

Аннотация. Рассматривается краевая задача для дифференциального оператора пятого порядка с разделенными граничными условиями. Потенциал оператора является суммируемой функцией на отрезке. При больших значениях спектрального параметра получена асимптотика решений соответствующего дифференциального уравнения. Изучены уравнение на собственные значения исследуемого оператора и индикаторная диаграмма этого уравнения. Предложен новый метод для нахождения асимптотики собственных значений изучаемого оператора.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальный оператор, разделенные граничные условия, суммируемый потенциал, асимптотика собственных значений, собственная функция.

1. Введение

Изучение асимптотики спектра дифференциальных операторов начиналось со случая гладких коэффициентов. Для того чтобы изучать спектральные свойства дифференциальных операторов, необходимо уметь выписывать асимптотические формулы для решений соответствующих дифференциальных уравнений (при больших значениях спектрального параметра) в зависимости от гладкости коэффициентов. В [1] для дифференциальных уравнений высокого порядка были выписаны асимптотические формулы для решений в случае бесконечной гладкости коэффициентов и вычислены регуляризованные следы для соответствующих дифференциальных операторов. В [2] для операторов второго порядка была установлена зависимость между гладкостью потенциала и количеством членов разложения в асимптотических формулах для решений дифференциального уравнения. В [3] для дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами был предложен метод нахождения асимптотических формул для собственных значений этих операторов. Случай кусочно гладких коэффициентов для дифференциальных операторов второго порядка изучен в [4–8]. Случай суммируемого потенциала для оператора второго порядка был впервые рассмотрен в [9]. В работах [10–13] автором предложен метод исследования операторов порядка выше второго с суммируемыми коэффициентами. При больших значениях спектрального параметра была найдена асимптотика решений соответствующих дифференциальных уравнений. С помощью этой асимптотики и соответствующих асимптотических оценок можно вычислять асимптотику собственных значений и асимптотику собственных функций операторов с суммируемыми коэффициентами.

2. Постановка задачи

Изучим следующую краевую задачу для дифференциального оператора пятого порядка, задаваемого дифференциальным уравнением вида

$$y^{(5)}(x) + q(x)y(x) = \lambda a^5 y(x), \quad 0 \le x \le \pi,\ a > 0, \tag{1}$$

с разделенными граничными условиями

$$\begin{gathered} y^{(m_1)}(0) = y^{(m_2)}(0) = y^{(m_3)}(0) = y^{(m_4)}(0) = y^{(n_1)}(\pi) = 0, \\ m_1 < m_2 < m_3 < m_4, \quad m_k, n_1 \in \{0,1,2,3,4\}, \quad k = 1,2,3,4. \end{gathered} \tag{2}$$

Предполагаем, что потенциал $q(x)$ является суммируемой функцией на отрезке $[0;\pi]$:

$$q(x) \in L_1[0;\pi] \Longleftrightarrow \left(\int\limits_0^x q(t)\,dt \right)'_x = q(x) \tag{3}$$

почти для всех $x \in [0;\pi]$.

Наша цель — найти асимптотику собственных значений дифференциального оператора (1)–(3).

3. Асимптотика решений дифференциального уравнения (1)

Для начала получим асимптотику решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра λ.

Пусть $\lambda = s^5$, $s = \sqrt[5]{\lambda}$, $\sqrt[5]{1} = +1$.

Пусть w_k, $k = 1,2,\ldots,5$, — различные корни пятой степени из единицы:

$$\begin{gathered} w_k^5 = 1, \quad w_k = e^{\frac{2\pi i}{5}(k-1)}, \quad k = 1,2,\ldots,5, \\ w_1 = 1, \quad w_2 = e^{\frac{2\pi i}{5}}, \quad w_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = z \neq 0, \\ w_3 = e^{\frac{4\pi i}{5}} = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = w_2^2 = z^2, \quad w_4 = w_2^3, \ldots, \\ w_k = w_2^{k-1}, \quad k = 1,2,\ldots,5. \end{gathered} \tag{4}$$

При этом для чисел w_k, $k = 1,2,\ldots,5$, из (4) справедливы следующие равенства:

$$\sum_{k=1}^{5} w_k^m = 0,\ m = 1,2,3,4, \quad \sum_{k=1}^{5} w_k^m = 5,\ m = 0,\ m = 5. \tag{5}$$

С помощью метода вариации постоянных аналогично работам [14, гл. 2; 15, гл. 4; 16; 17, гл. 1] устанавливается следующее утверждение.

Теорема 1. *Общее решение дифференциального уравнения* (1) *имеет вид*

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{5}C_k y_k(x,s),\quad y^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{5}C_k y_k^{(m)}(x,s),\quad m=1,2,3,4, \tag{6}$$

$$y_k(x,s)=e^{aw_k sx}-\frac{1}{5a^4s^4}A^0_{4,k}(x,s)+\underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|x}}{s^8}\right),\quad k=1,2,\ldots,5, \tag{7}$$

$$\frac{y_k^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=w_k^m e^{aw_k sx}-\frac{A^m_{4,k}(x,s)}{5a^4s^4}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|x}}{s^8}\right),\quad m=1,2,3,4,\ k=1,2,\ldots,5, \tag{8}$$

$$A^0_{4,k}(x,s)=\sum_{n=1}^{5}w_n e^{aw_n sx}\int\limits_0^x q(t)e^{a(w_k-w_n)st}\,dt_{akn},\quad k=1,2,\ldots,5, \tag{9}$$

$$A^m_{4,k}(x,s)=\sum_{n=1}^{5}w_n w_n^m e^{aw_n sx}\int\limits_0^x q(t)e^{a(w_k-w_n)st}dt_{akn},\ k=1,2,\ldots,5,\ m=1,2,3,4. \tag{10}$$

При выводе формул (6)–(10) использованы следующие начальные условия:

$$\begin{gathered}A^0_{4,k}(0,s)=0,\quad A^m_{4,k}(0,s)=0,\quad y_k(0,s)=1,\\ y_k^{(m)}(0,s)=w_k^m(as)^m,\quad y(0,s)=\sum_{k=1}^{5}C_1\cdot 1,\\ y_k^{(m)}(0,s)=\sum_{k=1}^{5}C_k w_k^m(as)^m,\quad m=1,2,3,4,\ k=1,2,\ldots,5.\end{gathered} \tag{11}$$

4. Изучение граничных условий (2)

Применяя формулы (6)–(8) и начальные условия (11), изучим граничные условия (2). Подставляя формулы (6) в граничные условия (2), имеем

$$\begin{gathered}y^{(m_p)}(0,s)\overset{(2)}{=}0\overset{(6)}{\Longleftrightarrow}\sum_{k=1}^{5}C_k y_k^{(m_p)}(0,s)=0,\quad p=1,2,3,4,\\ y^{(n_1)}(\pi,s)\overset{(2)}{=}0\overset{(6)}{\Longleftrightarrow}\sum_{k=1}^{5}C_k y_k^{(n_1)}(\pi,s)=0,\quad m_p,n_1\in\{0,1,2,3,4\}.\end{gathered} \tag{12}$$

Теорема 2. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(2) *с условием* (3) *суммируемости потенциала имеет следующий вид:*

$$f(s)=\begin{vmatrix} y_1^{(m_1)}(0,s) & y_2^{(m_1)}(0,s) & \ldots & y_4^{(m_1)}(0,s) & y_5^{(m_1)}(0,s)\\ y_1^{(m_2)}(0,s) & y_2^{(m_2)}(0,s) & \ldots & y_4^{(m_2)}(0,s) & y_5^{(m_2)}(0,s)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(m_4)}(0,s) & y_2^{(m_4)}(0,s) & \ldots & y_4^{(m_4)}(0,s) & y_5^{(m_4)}(0,s)\\ y_1^{(n_1)}(\pi,s) & y_2^{(n_1)}(\pi,s) & \ldots & y_4^{(n_1)}(\pi,s) & y_5^{(n_1)}(\pi,s)\end{vmatrix}=0. \tag{13}$$

Для доказательства теоремы 2 применим к системе (2) метод Крамера: однородная система (12) имеет ненулевые решения ($C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_5^2 \neq 0$) только в том случае, когда ее определитель равен нулю.

Учитывая формулы (11), уравнение (13) перепишем в следующем виде:

$$f(s) = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_4^{m_1} & w_5^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_4^{m_2} & w_5^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_4} & w_2^{m_4} & \dots & w_4^{m_4} & w_5^{m_4} \\ y_1^{(n_1)}(\pi,s) & y_2^{(n_1)}(\pi,s) & \dots & y_4^{(n_1)}(\pi,s) & y_5^{(n_1)}(\pi,s) \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Раскладывая определитель $f(s)$ из (14) по последней строке, имеем

$$f(s) = y_1^{(n_1)}(\pi,s)D_{5,1} - y_2^{(n_1)}(\pi,s)D_{5,2} + y_3^{(n_1)}(\pi,s)D_{5,3} \\ - y_4^{(n_1)}(\pi,s)D_{5,4} + y_5^{(n_1)}(\pi,s)D_{5,5} = 0, \quad n_1 \in \{0,1,2,3,4\}, \quad (15)$$

где $D_{5,k}$ — алгебраические миноры к элементу последней строки k-го столбца, $k = 1,2,\dots,5$. При этом

$$D_{5,5} = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & w_4^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & w_4^{m_2} \\ w_1^{m_3} & w_2^{m_3} & w_3^{m_3} & w_4^{m_3} \\ w_1^{m_4} & w_2^{m_4} & w_3^{m_4} & w_4^{m_4} \end{vmatrix} = D_4 \neq 0, \quad (16)$$

так как $D_{5,5}$ представляет собой определитель Вандермонда чисел $w_2^{m_1}, w_2^{m_2}, \dots,$ $w_2^{m_4}$:

$$D_{5,5} = \det \text{Wandermond's}\big(w_2^{m_1}, w_2^{m_2}, w_2^{m_3}, w_2^{m_4}\big) = \prod_{\substack{k>p, \\ k,p\in\{1,2,3,4\}}} \big(w_2^{m_k} - w_2^{m_p}\big) \neq 0. \quad (17)$$

Введя обозначения $w_{m+5} = w_m$, $m = 1,2,\dots,5$, по формулам (4), (5) находим

$$D_{5,1} = \begin{vmatrix} w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & w_4^{m_1} & w_5^{m_1} \\ w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & w_4^{m_2} & w_5^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^{m_4} & w_3^{m_4} & w_4^{m_4} & w_5^{m_4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & z^{3m_1} & z^{4m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & z^{3m_2} & z^{4m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{m_4} & z^{2m_4} & z^{3m_4} & z^{4m_4} \end{vmatrix},$$

тем самым в силу свойств определителей вынося из k-й строки определителя $D_{5,1}$ множитель z^{m_k}, $k = 1,2,3,4$, имеем

$$D_{5,1} = z^{M_4} \begin{vmatrix} 1 & z^{m_1} & z^{2m_1} & z^{3m_1} \\ 1 & z^{m_2} & z^{2m_2} & z^{3m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z^{m_4} & z^{2m_4} & z^{3m_4} \end{vmatrix} = z^{M_4} \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & w_4^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & w_4^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_4} & w_2^{m_4} & w_3^{m_4} & w_4^{m_4} \end{vmatrix} \\ = z^{M_4} \prod_{\substack{k>n, \\ k,n\in\{1,2,3,4\}}} \big(z^{m_k} - z^{m_n}\big) = z^{M_4} D_4 \neq 0, \quad M_4 = \sum_{n=1}^{4} m_n. \quad (18)$$

Для минора $D_{5,2}$ получаем

$$D_{5,2} = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_3^{m_1} & w_4^{m_1} & w_5^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_3^{m_2} & w_4^{m_2} & w_5^{m_2} \\ \hdotsfor{4} \\ w_1^{m_4} & w_3^{m_4} & w_4^{m_4} & w_5^{m_4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_3^{m_1} & w_4^{m_1} & w_5^{m_1} & w_1^{m_1} \\ w_3^{m_2} & w_4^{m_2} & w_5^{m_2} & w_1^{m_2} \\ \hdotsfor{4} \\ w_3^{m_4} & w_4^{m_4} & w_5^{m_4} & w_1^{m_4} \end{vmatrix} \cdot (-1),$$

откуда с учетом того, что $w_1^{m_k} = w_6^{m_k} = z^{5m_k}$, вынося z^{2m_k} из k-й строки определителя, находим

$$D_{5,2} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & z^{m_1} & z^{2m_1} & z^{3m_1} \\ 1 & z^{m_2} & z^{2m_2} & z^{3m_2} \\ \hdotsfor{4} \\ 1 & z^{m_4} & z^{2m_4} & z^{3m_4} \end{vmatrix} \cdot z^{M_4} = (-1) z^{2M_4} D_4. \tag{19}$$

Аналогичным образом выводятся следующие формулы:

$$D_{5,3} = z^{3M_4} D_4, \ D_{5,4} = (-1) z^{4M_4} D_4, \ldots, D_{5,k} = (-1)^{k-1} z^{kM_4} D_4 \neq 0,$$
$$k = 1, 2, \ldots, 5, \quad M_4 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4.$$

5. Исследование уравнения на собственные значения

Учитывая формулы (7), (8), подставим формулы (16)–(20) в уравнение (15):

$$\frac{f(s)}{(as)^{n_1} D_4} = \left[w_1^{n_1} e^{aw_1 s\pi} - \frac{A_{4,1}^{n_1}(\pi, s)}{5a^4 s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right)\right] z^{M_4}$$
$$- \left[w_2^{n_1} e^{aw_2 s\pi} - \frac{A_{4,2}^{n_1}(\pi, s)}{5a^4 s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right)\right] z^{2M_4} + \cdots - \left[w_4^{n_1} e^{aw_4 s\pi} - \frac{A_{4,4}^{n_1}(\pi, s)}{5a^4 s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right)\right] z^{4M_4}$$
$$+ \left[w_5^{n_1} e^{aw_5 s\pi} - \frac{A_{4,5}^{n_1}(\pi, s)}{5a^4 s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right)\right] z^{5M_4} = 0, \quad n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \tag{21}$$

Индикаторная диаграмма уравнения (21) представляет собой правильный пятиугольник, вершинами которого являются точки w_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$, из (4). При этом корни уравнения (21) могут находиться только в пяти секторах бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам этого пятиугольника. Поэтому из общей теории нахождения корней функций вида (21) (см. [18, гл. 12]) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Уравнение на собственные значения оператора* (1)–(3) *в секторе* 1, *соответствующем отрезку* $[w_1; w_2]$ *индикаторной диаграммы, имеет следующий вид:*

$$g_1(s) = (as)^{n_1} D_4 z^{M_4} \left\{ \left[w_1^{n_1} e^{aw_1 s\pi} - \frac{A_{4,1}^{n_1}(\pi, s)}{5a^4 s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right)\right] \right.$$
$$\left. - z^{M_4} \left[w_2^{n_1} e^{aw_2 s\pi} - \frac{A_{4,2}^{n_1}(\pi, s)}{5a^4 s^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right)\right] \right\} = 0. \tag{22}$$

Чтобы найти корни функции $g_1(s)$ из (22), перепишем ее в следующем виде:

$$g_1(s) = g_{10}(s) - \frac{1}{5a^4 s^4} g_{1,4}(s) + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right) = 0, \tag{23}$$

$$g_{10}(s) = w_1^{n_1} e^{aw_1 s\pi} - z^{M_4} w_2^{n_1} e^{aw_2 s\pi}, \tag{24}$$

$$g_{1,4}(s) = A_{4,1}^{n_1}(\pi, s) - z^{M_4} A_{4,2}^{n_1}(\pi, s). \tag{25}$$

Поделив уравнения (23)–(25) на $w_1^{n_1} e^{aw_2 s\pi} \neq 0$, получаем

$$\tilde{g}_1(s) = \tilde{g}_{10}(s) - \frac{1}{5a^4 s^4}\tilde{g}_{1,4}(s) + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right) = 0, \tag{26}$$

$$\tilde{g}_{10}(s) = e^{a(w_1 - w_2)s\pi} - z^{M_4} w_2^{n_1} w_1^{-n_1}, \tag{27}$$

$$\tilde{g}_{1,4}(s) = w_1^{-n_1} e^{-aw_2 s\pi} A_{4,1}^{n_1}(\pi, s) - z^{M_4} w_1^{-n_1} e^{-aw_2 s\pi} A_{4,2}^{n_1}(\pi, s). \tag{28}$$

Основное приближение уравнения (26)–(28) имеет вид $\tilde{g}_{10}(s) = 0$. Учитывая, что $z = w_2 = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $w_1 = 1$, видим, что $\tilde{g}_{10}(s) = 0$ только в следующем случае:

$$\exp[a\pi s(w_1 - w_2)] = z^{M_4} z^{n_1} e^{2\pi i k}$$
$$\Longleftrightarrow \exp[a\pi s(w_1 - w_2)] = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}(M_4 + n_1) + 2\pi i k\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тем самым корни основного приближения уравнения (26)–(28) (т. е. корни уравнения $\tilde{g}_{10}(s) = 0$) находятся в явном виде по формуле

$$s_{k,1,\text{осн}} = \frac{2i\tilde{k}}{a(w_1 - w_2)}, \quad \tilde{k} = k + \frac{1}{5}(M_4 + n_1), \quad M_4 = \sum_{n=1}^{4} m_n.$$

6. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(3)

Из общей теории нахождения асимптотики корней целых функций вида (26)–(28) (см. [18, гл. 12; 19–21]) следует, что справедлива

Теорема 4. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(2) (*с условием* (3) *суммируемости потенциала*) *в секторе* 1 *индикаторной диаграммы имеет следующий вид:*

$$s_{k,1} = \frac{2i\tilde{k}}{a(w_1 - w_2)} + \frac{2id_{4,k,1}}{a(w_1 - w_2)\tilde{k}^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right), \quad \tilde{k} = k + \frac{1}{5}(M_4 + n_1),\ k \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

Чтобы доказать теорему 4, достаточно вычислить коэффициенты $d_{4,k,1}$ из (29) в явном виде. Применяя формулы (9), (10) для выражений $A_{4,1}^{n_1}(\pi, s)$ и

$A^{n_1}_{4,2}(\pi,s)$ из (28) и формулу Тейлора, находим

$$A^{n_1}_{4,1}(\pi,s)\big|_{s_{k,1}} = \left[w_1 w_1^{n_1} e^{aw_1 s\pi}\int_0^\pi q(t)\exp((w_1-w_2)as\pi)\,dt_{a11}\right.$$
$$\left. + w_2 w_2^{n_1} e^{aw_2 s\pi}\int_0^\pi q(t)\exp((w_1-w_2)as\pi)\,dt_{a12} + \bar{\bar{o}}(1)\right]_{s_{k,1}}, \tag{30}$$
$$A^{n_1}_{4,2}(\pi,s)\big|_{s_{k,1}} = \left[w_1 w_1^{n_1} e^{aw_1 s\pi}\int_0^\pi q(t)\exp((w_2-w_1)as\pi)\,dt_{a21}\right.$$
$$\left. + w_2 w_2^{n_1} e^{aw_2 s\pi}\int_0^\pi q(t)\exp((w_2-w_2)as\pi)\,dt_{a22} + \bar{\bar{o}}(1)\right]_{s_{k,1}},$$

$$e^{a(w_1-w_2)s\pi}|_{s_{k,1}} = z^{M_4} z^{n_1}\left[1 + \frac{2\pi i d_{4,k,1}}{\tilde{k}^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right)\right], \tag{31}$$

$$\frac{1}{s^4}\bigg|_{s_{k,1}} = \frac{1}{2^4 i^4 \tilde{k}^4} a^4 (w_1-w_2)^4\left[1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^5}\right)\right]. \tag{32}$$

Подставляя формулы (29)–(32) в уравнения (26)–(28) и проводя необходимые преобразования, имеем

$$\left[z^{M_4} z^{n_1} + z^{M_4} z^{n_1}\frac{2\pi i d_{4,k,1}}{\tilde{k}^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right) - z^{M_4} z^{n_1}\right]$$
$$-\frac{a^4(w_1-w_2)^4}{5a^4 2^4 i^4 \tilde{k}^4}\left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^5}\right)\right)\left\{\left[w_1 e^{a(w_1-w_2)s\pi}\left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a11}\right.\right.$$
$$\left. - w_2 w_2^{n_1} z^{M_4}\left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a22}\right] - \left[w_1 z^{M_4} e^{a(w_1-w_2)s\pi}\left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a21}\right.$$
$$\left.\left. + w_2 z^{n_1} z^{M_4} z^{M_4}\left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a12}\right]\right\}\Bigg|_{s=s_{k,1,\text{осн}}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right) = 0. \tag{33}$$

Из формул (4), (5) получаем

$$w_1 - w_2 = 1 - z = 1 - e^{\frac{2\pi i}{5}} = e^{\frac{\pi i}{5}}[e^{-\frac{\pi i}{5}} - e^{\frac{\pi i}{5}}] = (-2i)e^{\frac{\pi i}{5}}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right). \tag{34}$$

Подставляя (34) в (33) и учитывая, что $\left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a11} = \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a22} = \int_0^\pi q(t)\,dt_{a11}$, выводим

$$d_{4,k,1} = \frac{1}{5\pi}\frac{1}{z^{M_4} z^{n_1} 2^5}(w_1-w_2)^4\left\{\left[w_1 z^{M_4} z^{n_1}\left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a11} - w_2 z^{M_4} z^{n_1}\left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a22}\right]\right.$$
$$\left. + \left[w_2 z^{M_4} z^{-M_4} z^{n_1}\left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a12} - w_1 z^{M_4} z^{M_4} z^{n_1}\left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a21}\right]\right\}\Bigg|_{s=s_{k,1,\text{осн}}}. \tag{35}$$

Второе выражение в (35) равно

$$\left[w_2 z^{n_1}\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a12} - w_1 z^{2M_4} z^{n_1}\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{a21}\right]\Bigg|_{s=s_{k,1,\text{осн}}}$$

$$= \left[z\cdot z^{n_1}\int\limits_0^{\pi} q(t)e^{a(w_1-w_2)st}\,dt_{a12} - z^{n_1}\cdot z^{2M_4}\int\limits_0^{\pi} q(t)e^{a(w_1-w_2)st}\,dt_{a21}\right]\Bigg|_{s=\frac{2i\tilde{k}}{a(w_1-w_2)}}$$

$$= z^{n_1}z^{M_4}e^{\frac{\pi i}{5}}e^{\frac{\pi i}{5}}e^{-\frac{2\pi i}{5}M_4}\int\limits_0^{\pi} q(t)\exp\left[at2i\frac{\tilde{k}}{a}\right]dt - z^{n_1}z^{M_4}e^{\frac{2\pi i}{5}M_4}\int\limits_0^{\pi} q(t)\exp[-2\tilde{k}ti]\,dt$$

$$= e^{\frac{\pi i}{5}}z^{n_1}z^{M_4}2i\int\limits_0^{\pi} q(t)\sin\left[2\tilde{k}t+\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}M_4\right]dt_{n_1}. \quad (36)$$

Из (35), (36) находим

$$d_{4,k,t} = \frac{(w_1-w_2)^5}{5\pi\cdot 2^5}\left[\int\limits_0^{\pi} q(t)\,dt_{a11} - \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{5})}\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{n_1}\right], \quad k\in\mathbb{Z}, \quad (37)$$

$M_4 = \sum\limits_{k=1}^{4} m_k$, $\tilde{k} = k + \frac{M_4+n_1}{5}$, интеграл $\left(\int\limits_0^{\pi}\ldots\right)_{n_1}$ определен в (37).

Таким образом, теорема 4 полностью доказана.

Изучая другие сектора индикаторной диаграммы и соответствующие уравнения на собственные значения, приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 5. 1. *В секторе* 2 *индикаторной диаграммы, биссектриса которого является серединным перпендикуляром к отрезку* $[w_2; w_3]$, *асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(3) *имеет следующий вид:*

$$s_{k,2} = s_{k,1}e^{\frac{2\pi i}{5}}, \quad (38)$$

где $s_{k,1}$ *определены в* (29), (36), (37).

2. *Для остальных секторов индикаторной диаграммы справедливы формулы*

$$s_{k,n} = s_{k,1}e^{\frac{2\pi i}{5}(n-1)},\ n=1,2,\ldots,5, \quad s_{k,n+5} = s_{k,n},\ n=1,2,\ldots,5. \quad (39)$$

3. *Собственные значения дифференциального оператора* (1)–(3) *находятся по формуле*

$$\lambda_{k,n} = s_{k,n}^5, \quad n=1,2,\ldots,5,\ k=1,2,3,\ldots. \quad (40)$$

С помощью формул (29) и (36)–(40) устанавливается следующая теорема о поведении собственных функций дифференциального оператора (1)–(3).

Теорема 6. *Собственные функции* $f_k(x,s_k)$, $k=1,2,3,\ldots$, *дифференциального оператора* (1)–(3), *соответствующие собственным значениям* λ_k *из* (39), (40), *вычисляются по формуле*

$$f_k(x,s_k)=\begin{vmatrix} y_1^{(m_1)}(0,s) & y_2^{(m_1)}(0,s) & \ldots & y_4^{(m_1)}(0,s) & y_5^{(m_1)}(0,s) \\ y_1^{(m_2)}(0,s) & y_2^{(m_2)}(0,s) & \ldots & y_4^{(m_2)}(0,s) & y_5^{(m_2)}(0,s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m_4)}(0,s) & y_2^{(m_4)}(0,s) & \ldots & y_4^{(m_4)}(0,s) & y_5^{(m_4)}(0,s) \\ y_1(x,s) & y_2(x,s) & \ldots & y_4(x,s) & y_5(x,s) \end{vmatrix}. \qquad (41)$$

Используя (11), перепишем формулу (41) в следующем виде:

$$f_k(x,s_k)=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \ldots & w_4^{m_1} & w_5^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \ldots & w_4^{m_2} & w_5^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{m_4} & w_2^{m_4} & \ldots & w_4^{m_4} & w_5^{m_4} \\ y_1(x,s) & y_2(x,s) & \ldots & y_4(x,s) & y_5(x,s) \end{vmatrix}. \qquad (42)$$

Формула (42) позволяет аналогично работам [16, 22] вычислить асимптотику собственных функций дифференциального оператора (1)–(3).

7. Заключение

Граничные условия (2) задают целое семейство дифференциальных операторов пятого порядка с суммируемым потенциалом. Полученные нами формулы для собственных значений и собственных функций можно применять для получения регуляризованных следов этих операторов и для исследования свойств базисности собственных функций. Получение формул (6)–(11) позволяет аналогичным образом исследовать и операторы более высоких порядков с суммируемыми коэффициентами, при этом с возрастанием порядка дифференциального оператора сложность вычислений возрастает многократно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Садовничий В. А.* О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Мат. сб. 1967. Т. 72, № 2. С. 293–310.

2. *Чернятин В. А.* Асимптотики высшего порядка спектра оператора Штурма — Лиувилля // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 2. С. 206–215.

3. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Мат. сб. 1968. Т. 75, № 4. С. 558–566.

4. *Ильин В. А.* О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 5. С. 698–723.

5. *Митрохин С. И.* О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1986. № 6. С. 3–6.

6. *Gottlieb H. P. W.* Iso-spectral operators: some model examples with discontinuous coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 132. P. 123–137.

7. *Будаев В. Д.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 223, № 6. С. 941–952.

8. *Митрохин С. И.* О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Докл. АН. 1997. Т. 356, № 1. С. 13–15.

9. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1423–1427.

10. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом // Уфим. мат. журн. 2011. Т. 3, № 4. С. 95–115.

11. *Митрохин С. И.* Асимптотика собственных значений дифференциального оператора десятого порядка с суммируемым потенциалом // Успехи современ. естествознания. 2010. № 3. С. 146–149.

12. *Митрохин С. И.* Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 2009. № 3. С. 14–17.

13. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 12. С. 1808–1811.

14. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

15. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

16. *Митрохин С. И.* Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений с интегрируемыми коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1085–1093.

17. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.

18. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

19. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Мат. сб. 1968. Т. 65, № 4. С. 558–566.

20. *Садовничий В. А., Любишкин В. А.* О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 109–116.

21. *Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белабасси Ю. О.* О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 6. С. 1346–1348.

22. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2008. № 8. С. 172–187.

Статья поступила 5 мая 2016 г.

Митрохин Сергей Иванович
НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова,
Ленинские Горы, 6, Москва 119234
`mitrokhin-sergey@yandex.ru`

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

UDC 517.927.6

ON A STUDY OF THE SPECTRUM OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE FIFTH–ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR WITH INTEGRABLE POTENTIAL

S. I. Mitrokhin

Abstract: A boundary value problem for the fifth-order differential operator with separated boundary conditions is considered. The potential of the operator is a summable function on the segment. For large values of the spectral parameter we obtain the asymptotic behavior of the corresponding differential equation. The equation on eigenvalues of the considered operator and the indicator diagram of this equation are studied. A new method for finding an asymptotics of eigenvalues of the studied operator is offered.
Keywords: boundary value problem, differential operator, separated boundary conditions, summable potential, asymptotics of the eigenvalues, eigenfunction.

REFERENCES

1. *Sadovničiĭ V. A.*, "The trace of ordinary differential operators of high order," Sb. Math., **1**, No. 2, 263–288 (1967).
2. *Chernyatin V. A.*, "Higher-order spectral asymptotics for the Sturm–Liouville operator," Differ. Equ., **38**, No. 2, 217–227 (2002).
3. *Lidskiĭ V. B. and Sadovničiĭ V. A.*, "Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions," Sb. Math., **4**, No. 4, 519–527 (1968).
4. *Il'in V. A.*, "Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator," Math. Notes, **22**, No. 5, 870–882 (1977).
5. *Mitrokhin S. I.*, "Formulas for the regularized traces of the second order differential operators with discontinuous coefficients," Mosc. Univ. Math. Bull., **41**, No. 6, 1–5 (1986).
6. *Gottlieb H. P. W.*, "Iso-spectral operators: some model examples with discontinuous coefficients," J. Math. Anal. Appl., **132**, 123–137 (1988).
7. *Budaev V. D.*, "On the unconditional basis property on a closed interval of systems of eigen and adjoint functions for the operator of the second order with discontinuous coefficients," Differential equations. **223**, No. 6, 941–952 (1987).
8. *Mitrokhin S. I.*, "Spectral properties of second-order differential operators with a discontinuous positive weight function," Dokl. Math., **56**, No. 2, 652–654 (1997).
9. *Vinokurov V. A. and Sadovnichii V. A.*, "Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the boundary value Sturm–Liouville problem on a segment with integrable potential," Differ. Uravn., **34**, No. 10, 1423–1426 (1998).
10. *Mitrokhin S. I.*, "On spectral properties of a differential operator with summable coefficients and retarded argument," Ufim. Mat. Zh., **3**, No. 4. 95–115 (2011).
11. *Mitrokhin S. I.*, "The asymptotics of the eigenvalues of a tenth-order differential operator with integrable potential," Uspekhi Sovrem. Estestvozn., No. 3. 146–149 (2010).
12. *Mitrokhin S. I.*, "The asymptotics of the eigenvalues of a fourth-order differential operator with summable coefficients," Mosc. Univ. Math. Bull., **64**, No. 3. 102–104 (2009).

13. *Mitrokhin S. I.*, "On the spectral properties of odd-order differential operators with integrable potential," Differ. Equ., **47**, No. 12, 1833–1836 (2011).
14. *Naimark M. A.*, Linear differential operators [in Russian], Nauka, Moscow (1969).
15. *Fedoryuk M. V.*, Asymptotic methods for linear ordinary differential equations [in Russian], Nauka, Moscow (1983).
16. *Mitrokhin S. I.*, "Spectral properties of boundary value problems for functional-differential equations with integrable coefficients," Differ. Equ., **46**, No. 8, 1095–1103 (2010).
17. *Levitan B. M. and Sargsyan I. S.*, Introduction to the spectral theory [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
18. *Bellman R. and Cooke K. L.*, Differential-difference equations [Russian transl.], Mir, Moscow (1967).
19. *Lidskii B. V. and Sadovnichii V. A.*, "Regularized sums of zeros of a class of entire functions," Function. Anal. Appl., **1**, No. 2, 52–59 (1967).
20. *Sadovnichii V. A. and Lyubishkin V. A.*, "Some new results in the theory of regularized traces of differential operators," Differ. Uravn., **18**, No. 1, 109–116 (1982).
21. *Sadovnichii V. A., Lyubishkin V. A., and Belabassi Yu. O.*, "On regularized sums of zeros of an entire function of some class," Dokl. Math., **254**, No. 6, 1346–1348 (1980).
22. *Mitrokhin S. I.*, "On spectral properties of a differential operator with integrable potential and smooth weight function," Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauch. Ser., No. 8 (1/67), 172–187 (2008).

Submitted May 5, 2016

Sergey Ivanovich Mitrokhin
NIVTs of Moscow State University,
Leninskie gory, 6, Moscow 119234, Russia
mitrokhin-sergey@yandex.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

УДК 517.946

О ПОВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ НА КОНЦАХ КОНТУРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ

С. В. Попов

Аннотация. Рассматривается теорема Н. И. Мусхелишвили о поведении интеграла типа Коши на концах контура интегрирования и в точках разрыва плотности и ее приложение для краевых задач для $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением времени. Для параболических уравнений с меняющимся направлением времени гладкость начальных и граничных данных, вообще говоря, не обеспечивает принадлежность решения гёльдеровским пространствам. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения гёльдеровским пространствам. Более того, применением единого подхода при общих условиях сопряжения (склеивания) для таких уравнений можно показать, что нецелый показатель пространства может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость решения исходного уравнения. В предлагаемой работе для доказательства разрешимости краевых задач для таких уравнений рассмотрены непрерывные условия склеивания, включая $(2n-1)$-ю производную. Отметим случай $n=3$, когда гладкость входных данных с условиями разрешимости определяют принадлежность решения более гладким гёльдеровским пространствам вблизи концов контура интегрирования.

Ключевые слова: интеграл типа Коши, теорема Мусхелишвили, параболические уравнения с меняющимся направлением времени, условия склеивания, пространство Гёльдера, сингулярное интегральное уравнение.

1. Введение

Изучаются параболические уравнения с меняющимся направлением времени с помощью применения теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши [1–5], а также поведение интеграла типа Коши на концах контура интегрирования и в точках разрыва плотности в пространствах Гёльдера. Известно, что гёльдеровские классы решений параболических уравнений переменного направления времени существенно зависят от нецелого показателя

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014–2016 гг. (код проекта 3047).

$p-[p]$. Некоторые предварительные результаты о связи гладкости решений параболических уравнений переменного типа с условиями склеивания и нецелым показателем гёльдеровских классов были установлены в [6–9].

Отметим также, что большое число работ посвящено изучению линейных уравнений второго порядка. Общая теория краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольными коэффициентами и многообразием смены типа были предметом исследований многих авторов (см. [10–12] и имеющуюся там библиографию).

В настоящей работе изучается поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования и в точках разрыва плотности, доказательство теоремы Н. И. Мусхелишвили, с помощью которой уточнены теоремы разрешимости краевых задач для параболических уравнений с меняющимся направлением времени.

2. Теорема Н. И. Мусхелишвили

Пусть $L = ab$ — гладкая разомкнутая дуга на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\varphi(\tau) \in H^{\lambda}(L)$, $0 < \lambda < 1$, концы a или b обозначим через c. Будем считать, что положительное направление на L ведет от a к b.

Рассмотрим интеграл типа Коши с плотностью, имеющей интегрируемую особенность:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-c)^{\mu}(\tau-t)}\,d\tau, \tag{1}$$

где $0 < \mu < 1$ и $\varphi(\tau) \in H^{\lambda}(L)$ вблизи c, включая c, $0 < \lambda < 1$.

Перепишем формулу (1) в виде

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(c)}{(\tau-c)^{\mu}(\tau-t)}\,d\tau + \frac{\varphi(c)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{(\tau-c)^{\mu}(\tau-t)}\,d\tau \equiv F(t) + \varphi(c)\Omega(t), \tag{2}$$

где $\Omega(t)$ вблизи точки a определяется формулой

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{(\tau-a)^{\mu}(\tau-t)}\,d\tau = \frac{1}{2i}\operatorname{ctg}(\mu\pi)(t-a)^{-\mu} + \Omega_1(t), \tag{3}$$

вблизи точки b — формулой

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{(\tau-b)^{\mu}(\tau-t)}\,d\tau = -\frac{1}{2i}\operatorname{ctg}(\mu\pi)(t-b)^{-\mu} + \Omega_2(t), \tag{4}$$

здесь $\Omega_1(z)$ — аналитическая в окрестности точки a, а $\Omega_2(z)$ — аналитическая в окрестности точки b функции.

Введем обозначение

$$\Psi(t) = \frac{(t-c)^{\mu}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau)}{(\tau-c)^{\mu}(\tau-t)}\,d\tau \equiv (t-c)^{\mu}F(t), \tag{5}$$

где

$$\psi(\tau) = \varphi(\tau) - \varphi(c) \in H^{\lambda}(L)$$

вблизи c, включая c.

Докажем теорему о гёльдеровости функции $\Psi(t)$ для точек контура L в окрестности точки c, включая c.

Теорема 1 (Н. И. Мусхелишвили). *Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ вблизи c, $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$. Тогда для точек контура ab интеграл типа Коши*

$$\Psi(t) = (t - c)^{\mu} \int\limits_{ab} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - c)^{\mu}(\tau - t)}\, d\tau \tag{6}$$

удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c, включая c, с показателем $\min\{\lambda, \mu\}$ при $\lambda \neq \mu$ и условию Гёльдера с показателем $\lambda - \varepsilon$ при $\lambda = \mu$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Доказательство. Впервые теорема о гёльдеровости интеграла типа Коши $\Psi(t)$ для точек контура L была доказана в [4], но в несколько слабой форме и другим методом, чем она доказана в [2].

Лемма 1 [2, с. 82–88]. *Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ вблизи c, $0 < \lambda < 1$ и $0 < \mu < 1$. Тогда для точек контура ab интеграл типа Коши*

$$\Psi(t) = (t - c)^{\mu} \int\limits_{ab} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - c)^{\mu}(\tau - t)}\, d\tau \tag{7}$$

удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c, включая c, с показателем μ при $\mu < \lambda$ и условию Гёльдера с показателем $\lambda - \varepsilon$ при $\lambda \leq \mu$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Из леммы 1 имеем $\Psi(t) \in H^{\min\{\lambda,\mu\}-\varepsilon}(ab)$, но $\Psi(t) \in H^{\min\{\lambda,\mu\}}(ab)$ при $\lambda < \mu$.

Далее воспользуемся утверждением, доказанным в [3].

Лемма 2 [3, с. 14–17]. *Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ вблизи c, $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$ и $\mu = \frac{3}{4}$. Тогда для точек контура ab интеграл типа Коши $\Psi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c, включая c, с показателем λ.*

Из леммы 2 имеем $\Psi(t) \in H^{\lambda}(ab)$ при $\lambda < \frac{3}{4}$.

Перейдем к доказательству теоремы. Из утверждений лемм 1 и 2 следует, что для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $\lambda < \mu$.

Пусть $\lambda < \mu$. Без ограничения общности предполагаем $a = 0$, $b = 1$ и $L = [0, 1]$. При $c = 0$ имеем

$$\Psi(t) = t^{\mu} \int\limits_{0}^{1} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau^{\mu}(\tau - t)}.$$

Для доказательства принадлежности $\Psi(t) \in H^{\lambda}(0,1)$ достаточно показать, что функция $\Psi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$|\Psi(t+h) - \Psi(t)| \leq C \cdot h^{\lambda}$$

с постоянной C, не зависящей от h.

Если $0 < t < h$, то рассмотрим

$$\Psi(t) = t^{\mu} \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau^{\mu}(\tau - t)}\, d\tau + t^{\mu}\varphi(t) \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{\mu}(\tau - t)} = \Psi_1(t) + \Psi_2(t). \tag{8}$$

Покажем, что для первого интеграла $\Psi_1(t) = O(t^{\lambda})$ для t, близких к 0. В самом деле, справедливо неравенство

$$|\Psi_1(t)| \leq C_1 t^{\mu} \int\limits_0^1 \frac{|\tau - t|^{\lambda - 1}}{\tau^{\mu}}\, d\tau,$$

из которого, произведя подстановку $\tau = \sigma \cdot t$, получим

$$|\Psi_1(t)| \leq C_1 t^{\mu} \int\limits_0^{\frac{1}{t}} \frac{t^{\lambda-1}|1-\sigma|^{\lambda-1} t}{t^{\mu}\sigma^{\mu}}\, d\sigma \leq C_1 t^{\lambda} \int\limits_0^{+\infty} \sigma^{-\mu}|1-\sigma|^{\lambda-1}\, d\sigma = C_2 t^{\lambda},$$

где последний интеграл сходится, поскольку на бесконечности имеем $1 - \lambda + \mu > 1$, а вблизи точки 0 имеем $\mu < 1$. Рассмотрим второй интеграл

$$\Psi_2(t) = t^{\mu}\varphi(t) \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{\mu}(\tau - t)} = t^{\mu}\varphi(t) \left[\frac{\pi \operatorname{ctg}[(1-\mu)\pi]}{t^{\mu}} + \frac{1}{\mu} F(\mu, 1, 1+\mu; t) \right]$$
$$= \varphi(t)\pi \operatorname{ctg}[(1-\mu)\pi] + \frac{t^{\mu}\varphi(t)}{\mu} F(\mu, 1, 1+\mu; t).$$

Очевидно, $\Psi_2(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ для t, близких к 0.

Рассмотрим промежуток $h \leq t < 1$ при любом $h > 0$ и первый интеграл $\Psi_1(t)$ в (8). Имеем

$$\Psi_1(t+h) - \Psi_1(t) = t^{\mu}\varphi(t) \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{\mu}(\tau - t)} - (t+h)^{\mu}\varphi(t+h) \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{\mu}(\tau - t - h)}$$
$$- t^{\mu} \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{\mu}(\tau - t)}\, d\tau + (t+h)^{\mu} \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{\mu}(\tau - t - h)}\, d\tau$$
$$= [\varphi(t) - \varphi(t+h)] t^{\mu} \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{\mu}(\tau - t)} + [\varphi(t) - \varphi(t+h)] h \int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{t^{\mu}}{\tau^{\mu}(\tau - t)(\tau - t - h)}\, d\tau$$

$$+\left[(t+h)^\mu - t^\mu\right]\int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t+h)}{\tau^\mu(\tau-t-h)}\,d\tau + t^\mu h \int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau^\mu(\tau-t)(\tau-t-h)}\,d\tau$$

$$+\,t^\mu h \int\limits_{t+\frac{h}{2}}^1 \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t+h)}{\tau^\mu(\tau-t)(\tau-t-h)}\,d\tau = [\varphi(t)-\varphi(t+h)]\Bigg[t^\mu \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^\mu(\tau-t)}$$

$$+\,h \int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{t^\mu-\tau^\mu}{\tau^\mu(\tau-t)(\tau-t-h)}\,d\tau + h\int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{d\tau}{(\tau-t)(\tau-t-h)}\Bigg]$$

$$+\left[(t+h)^\mu - t^\mu\right]\int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t+h)}{\tau^\mu(\tau-t-h)}\,d\tau + t^\mu h \int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau^\mu(\tau-t)(\tau-t-h)}\,d\tau$$

$$+\,t^\mu h \int\limits_{t+\frac{h}{2}}^1 \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t+h)}{\tau^\mu(\tau-t)(\tau-t-h)}\,d\tau = [\varphi(t)-\varphi(t+h)][I_1+I_2+I_3]+J_1+J_2+J_3.$$

Так как $|\varphi(t)-\varphi(t+h)|\le Ch^\lambda$, в полученном равенстве в первых трех слагаемых достаточно доказать ограниченность интегралов I_1, I_2, I_3. Ограниченность I_1 очевидна, так как

$$I_1 = t^\mu \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^\mu(\tau-t)} = \pi\operatorname{ctg}[(1-\mu)\pi] + \frac{t^\mu}{\mu}F(\mu,1,1+\mu;t).$$

Рассмотрим интегралы I_2, I_3. Имеем

$$|I_2| = h\left|\int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{t^\mu-\tau^\mu}{\tau^\mu(\tau-t)(\tau-t-h)}\,d\tau\right| \le C_3 h \int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{|\tau-t|^{\mu-1}}{\tau^\mu|\tau-t-h|}\,d\tau.$$

Подставляя $\sigma=\frac{\tau-t}{h}$, получим

$$|I_2|\le C_2 h\int\limits_{-\frac{t}{h}}^{\frac12} \frac{h^{\mu-1}|\sigma|^{\mu-1}h\,d\sigma}{(t+h\sigma)^\mu|h\sigma-h|} = C_2h^\mu \int\limits_{-\frac{t}{h}}^{0} \frac{(-\sigma)^{\mu-1}}{(t+h\sigma)^\mu(1-\sigma)}\,d\sigma$$

$$+\,C_2h^\mu\int\limits_0^{\frac12} \frac{\sigma^{\mu-1}}{(t+h\sigma)^\mu(1-\sigma)}\,d\sigma = C_2h^\mu\int\limits_0^{\frac{t}{h}} \frac{\sigma^{\mu-1}}{(t-h\sigma)^\mu(1+\sigma)}\,d\sigma$$

$$+\,C_2h^\mu\int\limits_0^{\frac12} \frac{\sigma^{\mu-1}}{(t+h\sigma)^\mu(1-\sigma)}\,d\sigma \le C_2h^\mu\int\limits_0^{\frac{t}{h}} \frac{\sigma^{\mu-1}}{(t-h\sigma)^\mu}\,d\sigma + 2C_2h^\mu\int\limits_0^{\frac12} \frac{\sigma^{\mu-1}}{(t+h\sigma)^\mu}\,d\sigma$$

$$= C_2\int\limits_0^1 \frac{\tau^{\mu-1}}{(1-\tau)^\mu}\,d\tau + 2\,C_2\left(\frac{h}{t}\right)^\mu\int\limits_0^{\frac12}\sigma^{\mu-1}\,d\sigma \le C_3.$$

Рассмотрим интеграл I_3. Произведя подстановку $\sigma = -\frac{\tau - t}{h}$, получим

$$I_3 = h \int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{d\tau}{(\tau - t)(\tau - t - h)} = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{t}{h}} \frac{d\sigma}{\sigma(1+\sigma)} = \ln \frac{t}{h+t} \le C_3,$$

где последний интеграл существует в смысле главного значения по Коши при $h \le t$.

Остается исследовать три последних интеграла J_1, J_2 и J_3. В интеграле J_1 сделаем подстановку $\tau = (t+h)\sigma$:

$$|J_1| \le |(t+h)^\mu - t^\mu| \int\limits_0^1 \frac{|\varphi(\tau) - \varphi(t+h)|}{\tau^\mu |\tau - t - h|}\, d\tau \le C_4 h^\mu \int\limits_0^1 \frac{|\tau - t - h|^{\lambda - 1}}{\tau^\mu}\, d\tau$$

$$= C_4 h^\mu \int\limits_0^{\frac{1}{t+h}} \frac{(t+h)^{\lambda-1}|\sigma - 1|^{\lambda-1}}{(t+h)^\mu \sigma^\mu}(t+h)\, d\sigma$$

$$\le C_5 h^\mu (t+h)^{\lambda - \mu} \int\limits_0^{+\infty} \sigma^{-\mu}|\sigma - 1|^{\lambda-1}\, d\sigma \le C_6 h^\lambda,$$

так как $\frac{h^{\mu-\lambda}}{(t+h)^{\mu-\lambda}} < 1$ при $t \ge h$ и $\mu > \lambda$.

Рассмотрим интеграл J_2. Имеем

$$|J_2| \le t^\mu h \int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{|\varphi(\tau) - \varphi(t)|}{\tau^\mu |\tau - t||\tau - t - h|}\, d\tau \le C_7 t^\mu h \int\limits_0^{t+\frac{h}{2}} \frac{|\tau - t|^{\lambda-1}}{\tau^\mu |\tau - t - h|}\, d\tau.$$

Применяя подстановку $\sigma = \frac{\tau - t}{h}$, получим

$$|J_2| \le C_7 t^\mu h \int\limits_{-\frac{t}{h}}^{\frac{1}{2}} \frac{h^{\lambda-1}|\sigma|^{\lambda-1} h\, d\sigma}{(t+h\sigma)^\mu |h\sigma - h|}$$

$$= C_7 t^\mu h^\lambda \left[\int\limits_{-\frac{t}{h}}^{0} \frac{(-\sigma)^{\lambda-1}\, d\sigma}{(t+h\sigma)^\mu (1-\sigma)} + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma^{\lambda-1}\, d\sigma}{(t+h\sigma)^\mu (1-\sigma)} \right]$$

$$= C_7 h^\lambda \left[\int\limits_0^{\frac{t}{h}} \frac{\sigma^{\lambda-1}\, d\sigma}{(1-\frac{h}{t}\sigma)^\mu (1+\sigma)} + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma^{\lambda-1}\, d\sigma}{(1+\frac{h}{t}\sigma)^\mu (1-\sigma)} \right]$$

$$\le C_7 h^\lambda \left[2^\mu \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\lambda-1}\, d\sigma}{1+\sigma} + \int\limits_{\frac{t}{2h}}^{\frac{t}{2}} \frac{\sigma^{\lambda-1}\, d\sigma}{(1-\frac{h}{t}\sigma)^\mu (1+\sigma)} + 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma^{\lambda-1}\, d\sigma \right],$$

откуда, во втором интеграле применяя подстановку $\sigma = \frac{t}{h}\tau$, получим

$$|J_2| \le C_7 h^\lambda \left[C_0 + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\frac{t}{h})^\lambda \tau^{\lambda-1}\, d\tau}{(1-\tau)^\mu (1+\frac{t}{h}\tau)} \right] \le C_7 h^\lambda \left[C_0 + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\tau^{\lambda-2}\, d\tau}{(1-\tau)^\mu} \right] \le C_8\, h^\lambda,$$

где
$$\frac{(\frac{t}{h})^{\lambda}}{1+\frac{t}{h}\tau}=\frac{(\frac{h}{t})^{1-\lambda}}{\frac{h}{t}+\tau}\le\frac{1}{\frac{h}{t}+\tau}\le\frac{1}{\tau}.$$

Рассмотрим интеграл J_3. Имеем
$$|J_3|\le t^{\mu}h\int\limits_{t+\frac{h}{2}}^{1}\frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t+h)|}{\tau^{\mu}|\tau-t||\tau-t-h|}\,d\tau\le C_9t^{\mu}h\int\limits_{t+\frac{h}{2}}^{1}\frac{|\tau-t-h|^{\lambda-1}}{\tau^{\mu}|\tau-t|}\,d\tau,$$
откуда, применяя подстановку $\sigma=\frac{\tau-t}{h}$, получим
$$|J_3|\le C_9t^{\mu}h^{\lambda}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1-t}{h}}\frac{|\sigma-1|^{\lambda-1}}{(h\sigma+t)^{\mu}\sigma}\,d\sigma=C_9\,h^{\lambda}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1-t}{h}}\frac{|\sigma-1|^{\lambda-1}}{(1+\frac{h\sigma}{t})^{\mu}\sigma}\,d\sigma$$
$$\le C_{10}h^{\lambda}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{|\sigma-1|^{\lambda-1}}{\sigma}\,d\sigma\le C_{11}h^{\lambda}.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если $\mu=\lambda+\frac{1}{2}$, $0<\lambda<\frac{1}{2}$ и $\varphi(t)=O((t-c)^{\lambda})$ для t, близких к c, то $\Psi(t)=O((t-c)^{\lambda+\frac{1}{2}})$ для t, близких к c, при этом $\Psi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c с показателем $\lambda+\frac{1}{2}$.

3. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени

В области $Q=\Omega\times(0,T)$, $\Omega\equiv\mathbb{R}$, рассматривается параболическое уравнение $2n$-го порядка с меняющимся направлением времени
$$\operatorname{sgn}x\,u_t=(-1)^{n+1}\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}}.\tag{9}$$

Решение уравнения ищется из пространства Гёльдера $H^{p,p/2n}_{x\ \ t}(Q^{\pm})$, $p=2nl+\gamma$, $0<\gamma<1$, $l\ge1$ — целое число. Пусть оно удовлетворяет следующим начальным условиям
$$u(x,0)=\varphi_1(x),\ x>0,\quad u(x,T)=\varphi_2(x),\ x<0,\tag{10}$$
и условиям склеивания
$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0,t)=\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0,t),\quad 0<t<T,\ k=0,\dots,2n-1.\tag{11}$$

Теорема 2 [7, 8]. *Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in H^p$ $(p=2nl+\gamma)$. Тогда при выполнении $2[p](1-1/2n)+2$ условий*
$$L_s(\varphi_1,\varphi_2)=0,\quad s=1,\dots,2[p](1-1/2n)+2,\tag{12}$$

существует единственное решение уравнения (9), *удовлетворяющее условиям* (10), (11), *из пространства* $H_{x\ t}^{p,p/2n}(Q^{\pm})$.

Методом параболических потенциалов простого слоя, построенных при помощи фундаментального решения, и элементарных решений Каттабрига [13, 14] краевая задача (9)—(11) при непрерывных условиях склеивания (11) приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа

$$A\vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{B(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \vec{Q}(t). \tag{13}$$

В классе функций, ограниченных на концах отрезка $(0, T)$, каноническая функция соответствующей краевой задачи Римана имеет вид

$$\chi(z) = z^{\frac{1}{4}}(z-1)^{\frac{3}{4}}, \quad \text{если } n \text{ нечетно},$$

$$\chi(z) = z^{\frac{3}{4}}(z-1)^{\frac{1}{4}}, \quad \text{если } n \text{ четно},$$

индекс задачи $\varkappa = -1$. Имеем $\min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1+\gamma}{2n}\right\} = \frac{1+\gamma}{2n}$ при $n \geq 4$. С учетом этого и теоремы 1 количество условий разрешимости можно уменьшить до необходимых и достаточных $2nl$ условий. В случае $n = 2$ или $n = 3$ справедливы $4l$, $6l$ условий разрешимости при выполнении общих весовых условий склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0,t) = \sigma_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0,t), \quad 0 < t < T,\ k = 0, \ldots, 2n-1, \tag{14}$$

где σ_k — действительные постоянные.

При $n = 2$ справедлива

Теорема 3 [9]. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 4l + \gamma)$. *Тогда при выполнении* $4l$ *условий*

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \ldots, 4l, \tag{15}$$

существует единственное решение уравнения (9), *удовлетворяющее условиям* (10), (11), *из пространства*

1) $H_{x\ t}^{p,p/4}$, *если* $0 < \gamma < 1 - 4\theta$;

2) $H_{x\ t}^{q,q/4}$, $q = 4l + 1 - 4\theta$, *если* $1 - 4\theta < \gamma < 1$;

3) $H_{x\ \ t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/4}$, *если* $\gamma = 1 - 4\theta$, *где* ε *— сколь угодно малая положительная постоянная.*

Здесь

$$\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left|\frac{a}{b}\right| < \frac{1}{4}, \quad a = \sigma_0\sigma_1 + \sigma_0\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3,$$

$$b = \sigma_0\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_0\sigma_1.$$

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы при $\theta \geq \frac{1}{4}$, то из теоремы 3 следует существование единственного решения задачи (9)–(11) из пространства $H_{x\ t}^{p,p/4}$ при выполнении $6l + 2$ условий вида (15).

Примеры. Для уравнения (9) с начальными условиями (10) рассмотрим условия склеивания (11) при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 1$. В этом случае единственное решение исходной задачи существует при выполнении $6l + 2$ условий вида (15), если же рассмотрим условия склеивания (11) при $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, $\sigma_1 = -2$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}$, $\sigma_3 = -2$, то

$$\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+4}{16\sqrt{2}+4} \approx 0,064 < 0,25,$$

тем самым находимся в условиях теоремы 3 и единственное решение исходной задачи существует при выполнении $4l$ условий (15).

Рассмотрим случай $n = 3$:

$$\operatorname{sgn} x\, u_t - \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} = 0. \tag{16}$$

Отметим, что в силу замечания 1 к теореме 1

$$\frac{3}{4} - \frac{1+\gamma}{2n} = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2 < n < 4 \Longrightarrow n = 3 \quad \text{при } \gamma = \frac{1}{2}.$$

Теорема 4. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 6l + \gamma)$. *Тогда при выполнении* $10l + 2$ *условий* (12) *существует единственное решение уравнения* (16), *удовлетворяющее условиям* (10), (11) *из пространства* $H^{p,p/6}_{x\ \ t}(Q^\pm)$. *При* $\gamma = \frac{1}{2}$ *вблизи* $t = 0, T$ *решение принадлежит пространству* $H^{q,q/6}_{x\ \ t}(Q^\pm)$, $q = 6l + \frac{1}{2} + \varepsilon$, *где* ε *— сколь угодно малая положительная постоянная.*

Доказательство. Для удобства вместо уравнения (16) будем рассматривать систему уравнений

$$u^1_t = Lu^1, \quad -u^2_t = Lu^2, \quad L \equiv \frac{\partial^6}{\partial x^6}, \tag{17}$$

в области Q^+. При этом начальные условия и условия склеивания будут иметь вид

$$u^1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x,T) = \varphi_2(x), \quad x > 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^k u^1}{\partial x^k}(0,t) = (-1)^k \frac{\partial^k u^2}{\partial x^k}(0,t), \quad k = 0, \dots, 5. \tag{19}$$

Будем предполагать, что $\varphi_i(x) \in H^p(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$. Тогда функции

$$\omega_1(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} U(x,t;\xi,0)\varphi_1(\xi)\,d\xi, \quad \omega_2(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} U(\xi,T;x,t)\varphi_2(\xi)\,d\xi$$

являются решениями уравнений (17), удовлетворяющими условиям (18) в $\mathbb{R}$.

Будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (17):

$$\begin{aligned} u^1(x,t) &= \int\limits_0^t U(x,t;0,\tau)\alpha_0(\tau)\,d\tau + \sum_{p=1}^{2}\int\limits_0^t V_p(x,t;0,\tau)\alpha_p(\tau)\,d\tau + \omega_1(x,t),\\ u^2(x,t) &= \int\limits_t^T U(0,\tau;x,t)\beta_0(\tau)\,d\tau + \sum_{p=1}^{2}\int\limits_t^T W_p(0,\tau;x,t)\beta_p(\tau)\,d\tau + \omega_2(x,t), \end{aligned} \tag{20}$$

где U — фундаментальное решение, V_p, W_p — элементарные решения Каттабрига [13, 14].

В силу общих результатов [15, 16] плотности α_k, β_k, $k = 0, 1, 2$, должны принадлежать пространству $H^q(0, T)$, $q = \frac{p-5}{6}$, причем

$$\alpha_k^{(s)}(0) = \beta_k^{(s)}(T) = 0, \quad s = 0, \dots, l-1. \tag{21}$$

Из условий склеивания (19) получим систему интегральных уравнений с операторами Абеля относительно α_k, β_k

$$\begin{gathered} f^{(j)}(0) \int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1+j}{6}}}\, d\tau + \sum_{p=1}^{2} g_p^{(j)}(0) \int\limits_0^t \frac{\alpha_p(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1+j}{6}}}\, d\tau + \frac{\partial^j \omega_1}{\partial x^j}(0,t) \\ = \sigma_j \Bigg[f^{(j)}(0) \int\limits_t^T \frac{\beta_0(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1+j}{6}}}\, d\tau + \sum_{p=1}^{2} h_p^{(j)}(0) \int\limits_t^T \frac{\beta_p(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1+j}{6}}}\, d\tau \\ + \frac{\partial^j \omega_2}{\partial x^j}(0,t) \Bigg], \quad j = 0, \dots, 4, \\ \alpha_0(t) \int\limits_0^\infty f(\eta)\, d\eta + \sum_{p=1}^{2} \alpha_p(t) \int\limits_0^\infty g_p(\eta)\, d\eta - \frac{\partial^{2n-1} \omega_2}{\partial x^{2n-1}}(0,t) \\ + \sigma_5 \Bigg[\beta_0(t) \int\limits_{-\infty}^0 f(\eta)\, d\eta + \sum_{p=1}^{2} \beta_p(t) \int\limits_{-\infty}^0 h_p(\eta)\, d\eta \\ - \frac{\partial^{2n-1} \omega_1}{\partial x^{2n-1}}(0,t) \Bigg] = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Для удобства записи будем считать $T = 1$. Из системы (22) при помощи формул обращения оператора Абеля [1, 3] получим эквивалентные системы сингулярных интегральных уравнений шестого порядка:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sin\frac{\pi(1+j)}{6}}\, A_j(t) + (-1)^j \operatorname{ctg} \frac{\pi(1+j)}{6}\, B_j(t) - \frac{(-1)^j}{\pi} \int\limits_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\frac{1+j}{6}} \frac{B_j(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \\ = \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{\Phi_j(\tau)}{(t-\tau)^{1-\frac{1+j}{6}}}\, d\tau, \quad j = 0, \dots, 4, \\ 3(\alpha_0(t) + \beta_0(t)) + (\alpha_1(t) + \beta_1(t)) = -\Phi_5(t), \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sin\frac{\pi(1+j)}{6}}\, B_j(t) + (-1)^j \operatorname{ctg} \frac{\pi(1+j)}{6}\, A_j(t) + \frac{(-1)^j}{\pi} \int\limits_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1-t}\right)^{1-\frac{1+j}{6}} \frac{A_j(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \\ = (-1)^j \frac{d}{dt} \int\limits_t^1 \frac{\Phi_j(\tau)}{(\tau-t)^{1-\frac{1+j}{6}}}\, d\tau, \quad j = 0, \dots, 4, \\ 3(\alpha_0(t) + \beta_0(t)) + (\alpha_1(t) + \beta_1(t)) = -\Phi_5(t), \end{gathered} \tag{24}$$

где

$$\Phi_j(t) = \frac{6}{\pi\Gamma(\frac{1+j}{6})}\left[(-1)^j \frac{\partial^j \omega_2}{\partial x^j}(0,t) - \frac{\partial^j \omega_1}{\partial x^j}(0,t)\right], \quad j = 0,\dots,5,$$

$$A_j(t) = \bar{f}^{(j)}(0)\alpha_0(t) + \sum_{p=1}^{2} \bar{g}_p^{(j)}(0)\alpha_p(t), \quad B_j(t) = \bar{f}^{(j)}(0)\beta_0(t) + \sum_{p=1}^{2} \bar{h}_p^{(j)}(0)\beta_p(t).$$

Введем обозначения:

$$F_0^i(t) = \int_0^t \frac{\Phi_0^{(i+1)}(\tau) - \Phi_0^{(i+1)}(0)}{(t-\tau)^{\frac{5}{6}}}\, d\tau, \quad F_j^i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\Phi_j^{(i)}(\tau) - \Phi_j^{(i)}(0)}{(t-\tau)^{1-\frac{1+j}{6}}}\, d\tau,$$

$$F_5^i(t) = \Phi_5^{(i)}(t) - \Phi_5^{(i)}(0),$$

$$G_j^i(t) = (-1)^{1+j}\frac{d}{dt}\int_t^1 \frac{\Phi_j^{(i)}(1) - \Phi_j^{(i)}(\tau)}{(\tau - t)^{1-\frac{1+j}{6}}}\, d\tau, \quad i = 0,\dots,l-1,\ j = 1,\dots,4.$$

Так как [16] $\Phi_k^{l-1} \in H^{q_k}$, $q_k = 1+\frac{\gamma-k}{6}$, функции $F_k^{l-1}(t)$, $G_k^{l-1}(t)$, $k = 0,\dots,5$, принадлежат пространству $H^{(1+\gamma)/6}(0,1)$, причем $F_k^{l-1}(t) = O(t^{(1+\gamma)/6})$, $G_k^{l-1}(t) = O((1-t)^{(1+\gamma)/6})$ для малых t и $1-t$ соответственно.

Легко непосредственно проверить на основании формулы Лиувилля и того, что определитель Вронского от решений $f(\eta)$, $g_p(\eta)$, $h_p(\eta)$, $p = 1,2$, однородного линейного уравнения $z^{(5)}(\xi) + \frac{1}{6}\xi z(\xi) = 0$ отличен от нуля, что определители матриц

$$\begin{pmatrix} f & g_1 & g_2 \\ f'' & g_1'' & g_2'' \\ f^{IV} & g_1^{IV} & g_2^{IV} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g_1' & g_2' \\ g_1''' & g_2''' \end{pmatrix}$$

в нуле также отличны от нуля.

Проведя рассуждения, аналогичные [7, 8], приходим к следующему выводу. При выполнении $12l+2$ условий

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\sum\limits_{p=1}^{2} \bar{h}_p^{(j)}\beta_p(\tau)}{\tau^{\frac{1+j}{6}}}\, d\tau = \pi\Phi_j(0), && j = 1,3;\\
&\int_0^1 \frac{B_j(\tau)}{\tau^{\frac{1+j}{6}}}\, d\tau = -\pi\Phi_j(0), && j = 0,2,4;\\
&\tfrac{1+j}{6}\int_0^1 \frac{\sum\limits_{p=1}^{2} \bar{h}_p^{(j)}(0)(\beta_p^{(s)}(\tau) - \beta_p^{(s)}(0))}{\tau^{1+\frac{1+j}{6}}}\, d\tau = \sum_{p=1}^{2} \bar{h}_p^{(j)}(0)\beta_p^{(s)}(0) + \pi\Phi_j^{(s+1)}(0), &&\\
& && j = 1,3,\ s = 0,\dots,l-2;\\
&3\beta_0^{(s)}(0) + \beta_1^{(s)}(0) = -\Phi_5^{(s)}(0), && s = 0,\dots,l-1;\\
&\tfrac{1+j}{6}\int_0^1 \Big\{\frac{\bar{f}^{(j)}(0)[\beta_0^{(s)}(\tau) - \beta_0^{(s)}(0)(1-\tau)]}{\tau^{1+\frac{1+j}{6}}} + \frac{\sum\limits_{p=1}^{2} \bar{h}_p^{(j)}(0)[\beta_p^{(s)}(\tau) - \beta_p^{(s)}(0)(1-\tau)]}{\tau^{1+\frac{1+j}{6}}}\Big\}\, d\tau &&\\
&\qquad = \tfrac{6}{5-j}B_j^{(s)}(0) - \pi\Phi_j^{(s+1)}(0), &&\\
& && j = 0,2,4,\ s = 0,\dots,l-2,\ \text{и}\ j = 0,\ s = l-1,
\end{aligned}\right. \tag{25}$$

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^1 \frac{\sum\limits_{p=1}^{2} \bar{g}_p^{(j)} \alpha_p(\tau)}{(1-\tau)^{\frac{1+j}{6}}}\, d\tau = \pi \Phi_j(1), & j = 1, 3; \\
\int\limits_0^1 \frac{A_j(\tau)}{(1-\tau)^{\frac{1+j}{6}}}\, d\tau = \pi \Phi_j(1), & j = 0, 2, 4; \\
\frac{1+j}{6} \int\limits_0^1 \frac{\sum\limits_{p=1}^{2} \bar{g}_p^{(j)}(0)(\alpha_p^{(s)}(\tau) - \alpha_p^{(s)}(1))}{(1-\tau)^{1+\frac{1+j}{6}}}\, d\tau = \sum\limits_{p=1}^{2} \bar{g}_p^{(j)}(0)\alpha_p^{(s)}(1) - \pi \Phi_j^{(s+1)}(1), & \\
\qquad j = 1, 3,\ s = 0, \dots, l-2; & \\
3\alpha_0^{(s)}(1) + \alpha_1^{(s)}(1) = -\Phi_5^{(s)}(1), & s = 0, \dots, l-1; \\
\frac{1+j}{6} \int\limits_0^1 \Big\{ \frac{\bar{f}^{(j)}(0)[\alpha_0^{(s)}(\tau) - \alpha_0^{(s)}(1)\tau]}{(1-\tau)^{1+\frac{1+j}{6}}} + \frac{\sum\limits_{p=1}^{2} \bar{g}_p^{(j)}(0)[\alpha_p^{(s)}(\tau) - \alpha_p^{(s)}(1)\tau]}{(1-\tau)^{1+\frac{1+j}{6}}} \Big\}\, d\tau & \\
\qquad = \frac{5}{5-j} A_j^{(s)}(1) + \pi \Phi_j^{(s+1)}(1), & \\
\qquad j = 0, 2, 4,\ s = 0, \dots, l-2 \text{ и } j = 0,\ s = l-1, &
\end{cases} \tag{26}
$$

системы (23), (24) в матричной записи можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&A_1 \alpha^{(l-1)}(t) + D_{11} A_1 \tilde{\beta}^{(l-1)}(t) - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{D_{12}(\frac{t}{\tau}) A_1 \tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \mathscr{F}_1(t), \\
&A_2 \alpha^{(l-1)}(t) + D_{21} A_2 \tilde{\beta}^{(l-1)}(t) - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{D_{22}(\frac{t}{\tau}) A_2 \tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \mathscr{F}_2(t),
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_1 \beta^{(l-1)}(t) + D_{11} A_1 \tilde{\alpha}^{(l-1)}(t) + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{D_{12}(\frac{1-t}{1-\tau}) A_1 \tilde{\alpha}^{(l-1)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \mathscr{G}_1(t), \\
&A_2 \beta^{(l-1)}(t) + D_{21} A_2 \tilde{\alpha}^{(l-1)}(t) + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{D_{22}(\frac{1-t}{1-\tau}) A_2 \tilde{\alpha}^{(l-1)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \mathscr{G}_2(t),
\end{aligned} \tag{28}
$$

где $\alpha^{(l-1)}(t)$, $\beta^{(l-1)}(t)$ — векторы с компонентами $\alpha_j^{(l-1)}(t)$, $\beta_j^{(l-1)}(t)$, $j = 0, 1, 2$, соответственно;

$$
\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = \beta^{(l-1)}(t) - \beta^{(l-1)}(0)(1-t),
$$

$$
\tilde{\alpha}^{(l-1)}(t) = \alpha^{(l-1)}(t) - \alpha^{(l-1)}(1)t;
$$

$$
A_1 = \begin{pmatrix} \bar{f}(0) & \bar{g}_1(0) & \bar{g}_2(0) \\ \bar{f}^{(2)}(0) & \bar{g}_1^{(2)}(0) & \bar{g}_2^{(2)}(0) \\ \bar{f}^{(4)}(0) & \bar{g}_1^{(4)}(0) & \bar{g}_2^{(4)}(0) \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{g}_1'(0) & \bar{g}_2'(0) \\ 0 & \bar{g}_1^{(3)}(0) & \bar{g}_2^{(3)}(0) \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

D_{ij}, $i, j = 1, 2$, — диагональные матрицы:

$$
D_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_{12}\Big(\frac{t}{\tau}\Big) = \frac{1}{2} \Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\big(\frac{t}{\tau}\big)^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \big(\frac{t}{\tau}\big)^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix},
$$

$$D_{21}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad D_{22}\Big(\frac{t}{\tau}\Big)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(\frac{t}{\tau})^{\frac{1}{3}}&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$\mathscr{F}_1(t)$ и $\mathscr{G}_1(t)$ — векторы с компонентами $\sin\frac{\pi(1+j)}{6}\overline{F}_j^{l-1}(t)$ и $\sin\frac{\pi(1+j)}{6}\overline{G}_j^{l-1}(t)$, $j=0,2,4$; $\mathscr{F}_2(t)$ и $\mathscr{G}_2(t)$ — векторы с компонентами $\sin\frac{\pi(1+j)}{6}\overline{F}_j^{l-1}(t), \overline{F}_5^{l-1}(t)$ и $-\sin\frac{\pi(1+j)}{6}\overline{G}_j^{l-1}(t)$, $\overline{G}_5^{l-1}(t)$, $j=1,3$.

Отметим, что функции

$$\overline{F}_0^{l-1}(t)=F_0^{l-1}(t)-\frac{36}{5}B_0^{(l-1)}(0)\Big[F\Big(-\frac{5}{6},1,\frac{7}{6};t\Big)-1\Big]t^{1/6},$$

$$\overline{F}_j^{l-1}(t)=F_j^{l-1}(t)-\frac{(-1)^j36}{(5-j)(1+j)}B_j^{(l-1)}(0)F\Big(\frac{-5+j}{6},1,\frac{7+j}{6};t\Big)t^{(1+j)/6},$$

$$\overline{F}_5^{l-1}(t)=-F_5^{l-1}(t)+3\beta_0^{(l-1)}(0)+\beta_1^{(l-1)}(0),$$

$$\overline{G}_0^{l-1}(t)=G_0^{l-1}(t)-\frac{36}{5}A_0^{(l-1)}(1)\Big[F\Big(-\frac{5}{6},1,\frac{7}{6};1-t\Big)-1\Big](1-t)^{1/6},$$

$$\overline{G}_j^{l-1}(t)=G_j^{l-1}(t)-\frac{(-1)^j36}{(5-j)(1+j)}A_j^{(l-1)}(1)F\Big(\frac{-5+j}{6},1,\frac{7+j}{6};1-t\Big)(1-t)^{(1+j)/6},$$

$$\overline{G}_5^{l-1}(t)=-G_5^{l-1}(t)+3\alpha_0^{(l-1)}(1)+\alpha_2^{(l-1)}(1),\quad j=1,\dots,4,$$

принадлежат пространству $H^{\frac{1+\gamma}{6}}$, причем $\overline{F}_j^{l-1}(t)=O(t^{\frac{1+\gamma}{6}})$, $\overline{G}_j^{l-1}(t)=O((1-t)^{\frac{1+\gamma}{6}})$, $j=0,\dots,5$, для малых t и $1-t$ соответственно.

Легко видеть на основании сказанного выше замечания, что определители матриц A_1 и A_2 не равны тождественно нулю.

Значения $\beta_i^{(s)}(0)$, $\alpha_i^{(s)}(1)$, $i=0,1,2$, $s=0,\dots,l-1$, однозначно определяются из уравнений

$$A_2\beta^{(s)}(0)=\mathscr{F}_3^s,\quad A_2\alpha^{(s)}(1)=\mathscr{G}_3^s,\quad s=0,\dots,l-1,$$

где $\mathscr{F}_3^s$, $\mathscr{G}_3^s$ — векторы с компонентами

$$\frac{1}{\pi}\sin^2\frac{\pi(1+j)}{6}\Bigg(\int\limits_0^1\frac{F_j^s(\tau)}{(1-\tau)^{\frac{1+j}{6}}\tau}\,d\tau+G_j^s(0)\Bigg),\ (-1)^n\Phi_5^{(s)}(0),$$

$$\frac{1}{\pi}\sin^2\frac{\pi(1+j)}{6}\Bigg(\int\limits_0^1\frac{G_j^s(\tau)}{\tau^{\frac{1+j}{6}}(1-\tau)}\,d\tau+F_j^s(1)\Bigg),\ -\Phi_5^{(s)}(1),\quad j=1,3.$$

Исключим $\alpha^{(l-1)}(t)$ из системы (27), а $\beta^{(l-1)}(t)$ — из системы (28). Имеем

$$K_1\vec{\beta}\equiv A\vec{\beta}(t)-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{B(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\vec{Q}_1(t),\tag{29}$$

$$K_2\vec{\alpha} \equiv A\vec{\alpha}(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{B(1-t,1-\tau)\vec{\alpha}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \vec{Q}_2(t), \tag{30}$$

где

$$\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) \equiv \vec{\beta}(t), \quad \tilde{\alpha}^{(l-1)}(t) \equiv \vec{\alpha}(t),$$

$$A = A_1^{-1}D_{11}A_1 - A_2^{-1}D_{21}A_2, \quad B(t,\tau) = A_1^{-1}D_{12}\left(\frac{t}{\tau}\right)A_1 - A_2^{-1}D_{22}\left(\frac{t}{\tau}\right)A_2,$$

$$\vec{Q}_1(t) = A_1^{-1}\mathscr{F}_1(t) - A_2^{-1}\mathscr{F}_2(t), \quad \vec{Q}_2(t) = A_1^{-1}\mathscr{G}_1(t) - A_2^{-1}\mathscr{G}_2(t),$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t,t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Характеристическая часть операторов K_i определяется формулами

$$K_1^0\vec{\beta} \equiv \vec{\beta}(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \quad K_2^0\vec{\alpha} \equiv \vec{\alpha}(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\vec{\alpha}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \tag{31}$$

Полученные системы сингулярных уравнений будем решать в классе функций, ограниченных на концах отрезка $(0,1)$:

$$K_1^0\vec{\beta} = \vec{G}_1, \quad K_2^0\vec{\alpha} = \vec{G}_2, \tag{32}$$

где

$$\vec{G}_1 = -B^{-1}(\vec{Q}_1 - k_1\vec{\beta}), \quad \vec{G}_2 = -B^{-1}(\vec{Q}_2 - k_2\vec{\alpha}),$$

$$k_1\vec{\beta} = (A+B)\vec{\beta}(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{B - B(t,\tau)}{\tau - t}\vec{\beta}(\tau)\,d\tau,$$

$$k_2\vec{\alpha} = (A+B)\vec{\alpha}(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{B(t,\tau) - B}{\tau - t}\vec{\alpha}(\tau)\,d\tau.$$

Для этого введем кусочно голоморфные функции

$$\vec{\Psi}_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \quad \vec{\Psi}_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \frac{\vec{\alpha}(\tau)}{\tau - z}\,d\tau.$$

Согласно общей теории [1, 2]

$$\begin{aligned} \vec{\beta}(t) &= \vec{\Psi}_1^+(t) - \vec{\Psi}_1^-(t) = \frac{1}{2}\vec{G}_1(t) - \frac{\chi_1(t)}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{\vec{G}_1(\tau)\,d\tau}{\chi_1(\tau)(\tau - t)}, \\ \vec{\alpha}(t) &= \vec{\Psi}_2^+(t) - \vec{\Psi}_2^-(t) = \frac{1}{2}\vec{G}_2(t) + \frac{\chi_2(t)}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{\vec{G}_2(\tau)\,d\tau}{\chi_2(\tau)(\tau - t)}, \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$\chi_1(z) = z^{\frac{1}{4}}(z-1)^{\frac{3}{4}}, \quad \chi_2(z) = z^{\frac{3}{4}}(z-1)^{\frac{1}{4}},$$

индекс задачи $\varkappa = -1$.

Подставляя в (33) значения $\vec{G}_k(t)$, приходим к системе уравнений Фредгольма

$$\vec{\beta} + K_1^* k_1 \vec{\beta} = \vec{Q}_1^*, \quad \vec{\alpha} + K_2^* k_1 \vec{\alpha} = \vec{Q}_2^*, \tag{34}$$

где

$$K_1^* k_1 \vec{\beta} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 M(t,\tau) \vec{\beta}(\tau)\, d\tau, \quad K_2^* k_2 \vec{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 M(1-t, 1-\tau) \vec{\alpha}(\tau)\, d\tau.$$

Исследуем ядра $M(t,\tau)$, $M(1-t,1-\tau)$ и свободные члены $\vec{Q}_k^*$ уравнений Фредгольма (34), полученных в результате регуляризации исходных сингулярных уравнений (29), (30). Функции $\vec{Q}_k^*$ будут, очевидно, удовлетворять условию Гёльдера во всех точках контура $(0,1)$, отличных от концов. Функции $M(t,\tau)$, $M(1-t,1-\tau)$ имеют интегрируемые особенности при $t=\tau$ во всех точках контура $(0,1)$, отличных от концов.

В силу теоремы 1 Н. И. Мусхелишвили легко вывести, что $M(t,\tau)$, $\vec{Q}_1^*(t)$ на концах 0, 1 будут вести себя как $t^{\frac{1}{6}}(1-t)^{\frac{1+\gamma}{6}}$, а функции $M(1-t,1-\tau)$, $\vec{Q}_2^*(t)$ — как $t^{\frac{1+\gamma}{6}}(1-t)^{\frac{1}{6}}$. Из указанных свойств ядер $M(t,\tau)$, $M(1-t,1-\tau)$ и свободных членов $\vec{Q}_k^*$ следует, что всякие ограниченные и интегрируемые решения систем уравнений Фредгольма (34) на концах 0, 1 ведут себя как $t^{\frac{1}{6}}(1-t)^{\frac{1+\gamma}{6}}$ и $t^{\frac{1+\gamma}{6}}(1-t)^{\frac{1}{6}}$ и [2, § 51] $\vec{\alpha}(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{6}}(0,1-\delta)$, $\vec{\beta}(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{6}}(\delta,1)$, где δ — фиксированное малое число.

При $\gamma = \frac{1}{2}$ свободные члены $\vec{Q}_1^*(t)$, $\vec{Q}_2^*(t)$ согласно формул (3), (4) на концах 0, 1 ведут себя как $t^{\frac{1}{6}}(1-t)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$, $t^{\frac{1}{4}+\varepsilon}(1-t)^{\frac{1}{6}}$ соответственно.

С другой стороны, из систем уравнений (27), (28) следует, что полученные решения уравнений Фредгольма (34) принадлежат пространству $H^{\frac{1+\gamma}{6}}(0,1)$.

Таким образом, системы уравнений (34) эквивалентны исходной системе уравнений (22) при выполнении условий (25), (26). Разрешимость систем уравнений Фредгольма (34) следует из доказанной единственности решения основной задачи (16), (10), (11) и однозначности представления их через потенциалы. Подставим найденные по формуле Тейлора значения функций

$$\vec{\beta}^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\vec{\beta}^{(k)}(0)}{(k-s)!}\, t^{k-s} + \frac{1}{(l-2-s)!} \int\limits_0^t (t-\tau)^{l-2-s} \vec{\beta}^{(l-1)}(\tau)\, d\tau,$$

$$\vec{\alpha}^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-2} (-1)^{k-s} \frac{\vec{\alpha}^{(k)}(1)}{(k-s)!}\, (1-t)^{k-s} + \frac{(-1)^{l-1-s}}{(l-2-s)!} \int\limits_t^1 (\tau-t)^{l-2-s} \vec{\alpha}^{(l-1)}(\tau)\, d\tau,$$

$s = 0, \ldots, l-2$, в условия (25), (26), получим $10l+2$ условий (12), что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
3. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
4. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
5. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1968.
6. *Попов С. В.* О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.
7. *Попов С. В.* Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени высокого порядка / Ред. журн. «Сиб. мат. журн.». Новосибирск, 1988. 56 с. Деп. в ВИНИТИ 07.12.88, № 8646–Б88.
8. *Попов С. В., Потапова С. В.* Гёльдеровские классы решений $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2009. Т. 424, № 5. С. 594–596.
9. *Попов С. В.* Гёльдеровские классы решений параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением времени с переменными условиями склеивания // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 81–93.
10. *Монахов В.Н., Попов С. В.* Контактные краевые задачи математической физики // Динамика сплошной среды. 2000. № 116. С. 62–72.
11. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
12. *Кислов Н. В., Пулькин И. С.* Краевая задача с обобщенными условиями склейки для уравнения параболического типа // Вестн. МЭИ. 2000. № 6. С. 51–59.
13. *Cattabriga L.* Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine $2n$ // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1958. V. 28, N 2. P. 376–401.
14. *Cattabriga L.* Equazioni paraboliche in due variabili. I, II // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. 1961. V. 31, N 1–2. P. 48–79; 1962. V. 32, N 3–4. P. 254–267.
15. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
16. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.

Статья поступила 10 марта 2016 г.

Попов Сергей Вячеславович
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
`madu@ysu.ru`

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

UDC 517.946

ON BEHAVIOR OF THE CAUCHY–TYPE INTEGRAL AT THE ENDPOINTS OF THE INTEGRATION CONTOUR AND ITS APPLICATION TO BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH CHANGING DIRECTION OF TIME

S. V. Popov

Abstract. We consider N. I. Muskhelishvili's theorem about the behavior of Cauchy-type integrals at the endpoints of the integration contour and the discontinuity points of the density and its application to boundary value problems for $2n$-parabolic equations with changing direction of time. For parabolic equations with changing direction of time, the smoothness of initial and boundary data does not imply in general that the solution belongs to the Hölder spaces. Application of the theory of singular equations makes it possible to specify necessary and sufficient conditions for the solution to belong to the Hölder spaces. Moreover, under general gluing conditions, using unified approach we can show that for such equations the nonintegral exponent of the space may essentially affect both the number of solvability conditions and the smoothness of the solutions. To prove the solvability of boundary value problems for such equations, we consider continuous bonding gluing conditions with the $(2n-1)$-th derivative. Note that in the case of $n = 3$ the smoothness of the initial data and solvability conditions determine that the solution belongs to smoother Hölder spaces near the endpoints of the integration contour.
Keywords: Cauchy-type integral, Muskhelishvili's theorem, parabolic equation with changing direction of time, bonding gluing condition, Hölder space, singular integral equation.

REFERENCES

1. *Gakhov F. D.*, Boundary value problems, Addison-Wesley, Reading, MA (1966).
2. *Muskhelishvili N. I.*, Singular integral equations, Wolters-Noordhoff, Groningen (1972).
3. *Tersenov S. A.*, Parabolic equations with changing time direction [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1985).
4. *Monakhov V. N.*, Free-surface boundary value problems for elliptic systems of equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1977).
5. *Vekua N. P.*, Systems of singular integral equations, Noordhoff, Groningen (1967).
6. *Popov S. V.*, "On smoothness of solutions to parabolic equations with changing evolution direction," Dokl. Math., **400**, No. 1, 29–31 (2005).
7. *Popov S. V.*, "Solvability of boundary value problems for a parabolic equation of higher order with changing time direction," Ed. Sib. Mat. Zh. Novosibirsk, 1988. 56 p. Dep. v VINITI 07.12.88, № 8646–B88.
8. *Popov S. V. and Potapova S. V.*, "Hölder classes of solutions to $2n$-parabolic equations with a varying direction of evolution," Dokl. Math., **79**, No. 1, 100–102 (2009).
9. *Popov S. V.*, "Hölder classes of solutions of parabolic fourth-order equations of with changing direction of time and varying gluing conditions," Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 2, 81–93 (2014).

10. *Monakhov V. N. and Popov S. V.*, “Contact boundary value problems of mathematical physics,” Dyn. Splosh. Sredy, **116**, 62–72 (2000).
11. *Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V.*, Nonclassical differential operator equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2000).
12. *Kislov N. V. and Pulkina I. S.*, “A boundary value problem with generalized gluing conditions for a parabolic type equation,” Vestn. MPEI, No. 6, 51–59 (2000).
13. *Cattabriga L.*, “Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine $2n$,” Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **28**, No. 2, 376–401 (1958).
14. *Cattabriga L.*, “Equazioni paraboliche in due variabili,” I: Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. **31**, No. 1, 48–79 (1961); II: Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. **32**, No. 3–4, 254–267 (1962).
15. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'ceva N. N.*, Linear and quasilinear equations of parabolic type, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1968) (Transl. Math. Monogr.; V. 23).
16. *Solonnikov V. A.*, “On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form,” Proc. Steklov Inst. Math., **83**, 1–184 (1965).

Submitted March 10, 2016

Sergey Vyacheslavovich Popov
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
Kulakovskogo st., 48, Yakutsk 677000 (Russia)
madu@ysu.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

УДК 517.929.4

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ ХИЩНИК–ЖЕРТВА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

М. А. Скворцова

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв, а также изучается асимптотическая устойчивость положений равновесия данной системы. С помощью модифицированного функционала Ляпунова — Красовского установлены оценки решений, характеризующие скорость сходимости к положениям равновесия.

Ключевые слова: модель хищник-жертва, уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, характеристический квазимногочлен, оценки решений, модифицированный функционал Ляпунова — Красовского.

1. Описание модели

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - px(t)y(t), \\ \frac{d}{dt}y(t) = bpe^{-c\tau}x(t-\tau)y(t-\tau) - dy(t), \\ \frac{d}{dt}z(t) = bpx(t)y(t) - bpe^{-c\tau}x(t-\tau)y(t-\tau) - cz(t). \end{cases} \tag{1}$$

Данная система описывает взаимодействие популяций хищников и жертв, обитающих на одной территории [1]. Здесь $x(t)$ — численность популяции жертв, $y(t)$ — численность популяции взрослых хищников, $z(t)$ — численность популяции молодых хищников. Предполагается, что только взрослые хищники могут нападать на жертв и воспроизводить потомство. Параметр запаздывания τ отвечает за время взросления хищников, r — коэффициент прироста популяции жертв, K — максимально допустимая численность популяции жертв, p — коэффициент взаимодействия жертв и взрослых хищников, b — коэффициент рождаемости хищников, c — коэффициент смертности молодых хищников, d — коэффициент смертности взрослых хищников. Все параметры системы предполагаются положительными.

Для системы (1) зададим начальные условия:

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t),\ t \in [-\tau, 0], \quad x(+0) = \varphi(0), \quad \varphi \in C([-\tau, 0]), \\ y(t) = \psi(t),\ t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \psi(0), \quad \psi \in C([-\tau, 0]), \\ z(0) = \eta. \end{cases} \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–00745).

Известно, что решение начальной задачи (1), (2) существует и единственно. Также легко показать, что если

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \psi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \tag{3}$$

то $x(t)$, $y(t)$ будут определены при всех $t \geq 0$, причем $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. Более того, если при этом выполнено неравенство

$$\eta \geq \int\limits_{-\tau}^{0} bpe^{c\xi}\varphi(\xi)\psi(\xi)\,d\xi, \tag{4}$$

то $z(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. Действительно, при $t \in [0, \tau]$ из третьего уравнения системы (1) нетрудно получить

$$\begin{aligned} z(t)e^{ct} = \eta - \int\limits_0^t bpe^{c(s-\tau)}\varphi(s-\tau)\psi(s-\tau)\,ds + \int\limits_0^t bpe^{cs}x(s)y(s)\,ds \\ \geq \int\limits_0^t bpe^{cs}x(s)y(s)\,ds \geq 0. \end{aligned}$$

Неравенство $z(t) \geq 0$ при $t \geq \tau$ доказывается аналогично.

Замечание. Условие (4) имеет вполне определенный биологический смысл. Действительно, если предположить, что хищники не размножаются ($b = 0$), то изменение численности молодых хищников происходит по закону $\frac{d}{dt}z(t) = -cz(t)$. Значит, если $z(t)$ — численность молодых хищников в момент времени t, то к моменту времени $t + \varepsilon$ их останется $e^{-c\varepsilon}z(t)$. Тем самым условие (4) означает, что численность молодых хищников в момент времени $t = 0$ больше или равна численности хищников, которые родились в промежуток времени $t \in [-\tau, 0]$ и дожили до момента времени $t = 0$.

Всюду далее будем предполагать, что начальные данные $\varphi(t)$, $\psi(t)$, η удовлетворяют условиям (3), (4).

Теперь найдем положения равновесия системы (1):

1) при условии $bpe^{-c\tau}K \leq d$ в системе два положения равновесия: $(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$ и $(x(t), y(t), z(t)) = (K, 0, 0)$;

2) при условии $bpe^{-c\tau}K > d$ в системе три положения равновесия: $(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$, $(x(t), y(t), z(t)) = (K, 0, 0)$ и $(x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0)$, где

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{d}{bpe^{-c\tau}}, \frac{r}{p}\left[1 - \frac{d}{bpe^{-c\tau}K}\right], \frac{d}{c}\frac{r}{p}\left[1 - \frac{d}{bpe^{-c\tau}K}\right](e^{c\tau} - 1)\right). \tag{5}$$

Целью работы является изучение устойчивости положений равновесия системы (1) и получение оценок решений, характеризующих скорость сходимости к положениям равновесия.

2. Устойчивость положений равновесия

В этом разделе будут сформулированы условия на коэффициенты системы, при которых положения равновесия устойчивы. Здесь существенно будем опираться на следующую известную теорему об устойчивости по первому приближению (см., например, [2, гл. 7, § 33]).

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(y(t), y(t-\tau)), \tag{6}$$

где A и B — вещественные постоянные матрицы размера $n \times n$, $F(y_1, y_2) \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$ — вещественнозначная вектор-функция такая, что

$$\frac{\|F(y_1, y_2)\|}{\|(y_1, y_2)\|} \to 0 \quad \text{при } \|(y_1, y_2)\| \to 0.$$

Справедлива

Теорема (об устойчивости по первому приближению). (I) *Если все корни характеристического квазимногочлена*

$$\det(\lambda I - A - e^{-\lambda\tau}B) = 0$$

лежат в левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, *то нулевое решение системы* (6) *асимптотически устойчиво.*

(II) *Если существует корень квазимногочлена, лежащий в правой полуплоскости* $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$, *то нулевое решение системы* (6) *неустойчиво.*

Применим этот результат к системе (1). Вначале рассмотрим нулевое положение равновесия $(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$. Система первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = rx(t), \\ \frac{d}{dt}y(t) = -dy(t), \\ \frac{d}{dt}z(t) = -cz(t). \end{cases}$$

Поскольку все параметры положительные, в этом случае очевидно, что нулевое решение неустойчиво.

Теперь рассмотрим положение равновесия $(x(t), y(t), z(t)) = (K, 0, 0)$. Замена $x(t) = K + \widetilde{x}(t)$ приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\widetilde{x}(t) = (K + \widetilde{x}(t))\big(-\frac{r\widetilde{x}(t)}{K} - py(t)\big), \\ \frac{d}{dt}y(t) = bpe^{-c\tau}(K + \widetilde{x}(t-\tau))y(t-\tau) - dy(t), \\ \frac{d}{dt}z(t) = bp(K + \widetilde{x}(t))y(t) - bpe^{-c\tau}(K + \widetilde{x}(t-\tau))y(t-\tau) - cz(t). \end{cases}$$

Значит,

$$A = \begin{pmatrix} -r & -pK & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ 0 & bpK & -c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & bpe^{-c\tau}K & 0 \\ 0 & -bpe^{-c\tau}K & 0 \end{pmatrix}$$

и характеристический квазимногочлен имеет вид

$$\det(\lambda I - A - e^{-\lambda\tau}B) = (\lambda + r)(\lambda + d - bpe^{-c\tau}Ke^{-\lambda\tau})(\lambda + c) = 0.$$

Таким образом, устойчивость положения равновесия $(K, 0, 0)$ зависит от расположения корней квазимногочлена

$$\lambda + d - bpe^{-c\tau}Ke^{-\lambda\tau} = 0.$$

Известно (см., например, [3, гл. 3, § 3]), что при условии $bpe^{-c\tau}K < d$ все корни квазимногочлена лежат в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$, а при условии $bpe^{-c\tau}K > d$ существуют корни в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

Тем самым приходим к следующему результату:

1) если $bpe^{-c\tau}K < d$, то положение равновесия $(K, 0, 0)$ асимптотически устойчиво;

2) если $bpe^{-c\tau}K > d$, то положение равновесия $(K, 0, 0)$ неустойчиво.

Замечание. При условии $bpe^{-c\tau}K < d$ в [1] доказан более сильный результат: $(K, 0, 0)$ глобально асимптотически устойчиво. Более того, в разд. 3 получим оценки решений, характеризующие скорость сходимости к данному положению равновесия.

Наконец, рассмотрим положение равновесия $(x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0)$. Замена $x(t) = x_0 + u(t)$, $y(t) = y_0 + v(t)$, $z(t) = z_0 + w(t)$ приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = (x_0 + u(t))\big(-\frac{r}{K}u(t) - pv(t)\big), \\ \frac{d}{dt}v(t) = bpe^{-c\tau}y_0u(t-\tau) + bpe^{-c\tau}(x_0 + u(t-\tau))v(t-\tau) - dv(t), \\ \frac{d}{dt}w(t) = bpy_0u(t) + bp(x_0 + u(t))v(t) \\ -bpe^{-c\tau}y_0u(t-\tau) - bpe^{-c\tau}(x_0 + u(t-\tau))v(t-\tau) - cw(t). \end{cases} \tag{7}$$

Отсюда легко получить, что

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{rx_0}{K} & -px_0 & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ bpy_0 & bpx_0 & -c \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ bpe^{-c\tau}y_0 & bpe^{-c\tau}x_0 & 0 \\ -bpe^{-c\tau}y_0 & -bpe^{-c\tau}x_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{y_0}{x_0}d & d & 0 \\ -\frac{y_0}{x_0}d & -d & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda I - A - e^{-\lambda\tau}B) = \left[\left(\lambda + \frac{rx_0}{K}\right)(\lambda + d) - de^{-\lambda\tau}\left(\lambda + \frac{rx_0}{K} - py_0\right)\right](\lambda + c) = 0.$$

Таким образом, задача свелась к исследованию расположения корней квазимногочлена

$$\left(\lambda + \frac{rx_0}{K}\right)(\lambda + d) - de^{-\lambda\tau}\left(\lambda + \frac{rx_0}{K} - py_0\right) = 0. \tag{8}$$

Вопрос о расположении корней широкого класса трансцендентных целых функций (в том числе функций вида (8)) очень подробно изучался в [4]. Здесь мы сформулируем и докажем утверждение, непосредственно касающееся квазимногочлена (8).

Вначале заметим, что можно считать, что x_0 и y_0 не зависят от τ. Действительно, учитывая явный вид величин x_0 и y_0 (см. формулу (5)) и вводя вместо b новый параметр $a = be^{-c\tau}$, получим

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{d}{bpe^{-c\tau}}, \frac{r}{p}\left[1 - \frac{d}{bpe^{-c\tau}K}\right]\right) = \left(\frac{d}{ap}, \frac{r}{p}\left[1 - \frac{d}{apK}\right]\right).$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма. (I) *Если* $0 < py_0 \le \frac{2rx_0}{K}$, *то все корни квазимногочлена* (8) *лежат в левой полуплоскости* $\mathbb{C}_-$.

(II) *Если* $py_0 > \frac{2rx_0}{K}$, *то существует* $\tau_0 > 0$ *такое, что при* $0 \le \tau < \tau_0$ *все корни квазимногочлена* (8) *лежат в левой полуплоскости* $\mathbb{C}_-$, *а при* $\tau > \tau_0$ *существуют корни квазимногочлена* (8), *лежащие в правой полуплоскости* $\mathbb{C}_+$.

Доказательство. Известно, что все корни квазимногочлена (8) содержатся в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < \sigma\}$ для некоторого $\sigma \in \mathbb{R}$, причем в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$ корней конечное число. Легко проверить, что при $\tau = 0$ все корни квазимногочлена (8) содержатся в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$. Значит, это верно и при $\tau \ll 1$. Поймем, при каких значениях параметра τ существуют корни в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

Вначале найдем условия, при которых у квазимногочлена (8) существуют корни на мнимой оси $\lambda = i\xi$:

$$\left(i\xi + \frac{rx_0}{K}\right)(i\xi + d) = de^{-i\xi\tau}\left(i\xi + \frac{rx_0}{K} - py_0\right). \tag{9}$$

Приравнивая модули выражений, стоящих слева и справа, получим

$$\left(-\xi^2 + \frac{rx_0}{K}d\right)^2 + \xi^2\left(\frac{rx_0}{K} + d\right)^2 = d^2\left(\xi^2 + \left(\frac{rx_0}{K} - py_0\right)^2\right),$$

откуда

$$\xi^4 + \xi^2\left(\frac{rx_0}{K}\right)^2 = d^2py_0\left(py_0 - \frac{2rx_0}{K}\right). \tag{10}$$

Если $0 < py_0 < \frac{2rx_0}{K}$, уравнение (10) не имеет вещественных решений. Значит, в этом случае все корни квазимногочлена (8) содержатся в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$.

Если $py_0 = \frac{2rx_0}{K}$, то из (10) получим $\xi = 0$, что противоречит (9). Следовательно, все корни квазимногочлена (8) также содержатся в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$.

Наконец, рассмотрим случай $py_0 > \frac{2rx_0}{K}$. Из (10) нетрудно получить

$$\xi_{1,2} = \pm\sqrt{\gamma}, \quad \text{где } \gamma = \sqrt{d^2py_0\left(py_0 - \frac{2rx_0}{K}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{rx_0}{K}\right)^4} - \frac{1}{2}\left(\frac{rx_0}{K}\right)^2 > 0.$$

Подставляя найденные значения $\xi_{1,2}$ в (9), имеем

$$e^{i\tau\sqrt{\gamma}} = \frac{d\big(i\sqrt{\gamma} + \frac{rx_0}{K} - py_0\big)}{\big(i\sqrt{\gamma} + \frac{rx_0}{K}\big)(i\sqrt{\gamma} + d)} = \omega,$$

откуда найдем τ:

$$\tau_n = \frac{\arg\omega + 2\pi n}{\sqrt{\gamma}}, \quad 0 < \arg\omega < 2\pi,\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Итак, существует счетное число значений τ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, при которых у квазимногочлена (8) существуют корни на мнимой оси. При этом в пределах одного промежутка $[0, \tau_0)$, (τ_0, τ_1), (τ_1, τ_2), ... квазимногочлен имеет одинаковое число корней в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

При $\tau \in [0, \tau_0)$ все корни квазимногочлена лежат в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$, поскольку это верно при $\tau = 0$.

Покажем, что при $\tau > \tau_0$ существуют корни квазимногочлена, лежащие в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Для этого поймем, как изменяется число корней с положительной вещественной частью при переходе τ через критическое значение τ_n. Вначале установим неравенство

$$\frac{\partial \operatorname{Re}\lambda}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=\tau_n} > 0$$

(при этом считаем, что $\lambda|_{\tau=\tau_n} = i\xi$, где $\xi = \pm\sqrt{\gamma}$). Дифференцируя (8) по τ, получим

$$\left[\left(\lambda + \frac{rx_0}{K}\right) + (\lambda + d)\right]\frac{\partial\lambda}{\partial\tau} = -de^{-\lambda\tau}\left[\tau\frac{\partial\lambda}{\partial\tau} + \lambda\right]\left(\lambda + \frac{rx_0}{K} - py_0\right) + de^{-\lambda\tau}\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}.$$

Отсюда и из равенства (8) имеем

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\tau} = -\lambda\left[\frac{1}{\big(\lambda + \frac{rx_0}{K}\big)} + \frac{1}{(\lambda + d)} - \frac{1}{\big(\lambda + \frac{rx_0}{K} - py_0\big)} + \tau\right]^{-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \operatorname{Re}\lambda}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=\tau_n} = \operatorname{Re}\left\{-i\xi\left[\frac{1}{\big(i\xi + \frac{rx_0}{K}\big)} + \frac{1}{(i\xi + d)} - \frac{1}{\big(i\xi + \frac{rx_0}{K} - py_0\big)} + \tau_n\right]^{-1}\right\}.$$

Отсюда нетрудно получить

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial \operatorname{Re}\lambda}{\partial\tau}\right)\bigg|_{\tau=\tau_n} = \operatorname{sgn}\left(\frac{\xi^2}{\xi^2 + \big(\frac{rx_0}{K}\big)^2} + \frac{\xi^2}{\xi^2 + d^2} - \frac{\xi^2}{\xi^2 + \big(\frac{rx_0}{K} - py_0\big)^2}\right)$$

$$= \operatorname{sgn}\left(\xi^4 + \left(2\xi^2 + \left(\frac{rx_0}{K}\right)^2\right)\left(\frac{rx_0}{K} - py_0\right)^2 + d^2py_0\left(py_0 - \frac{2rx_0}{K}\right)\right) > 0.$$

Таким образом, с увеличением τ при переходе через мнимую ось вещественная часть корня увеличивается. Значит, при переходе τ через критическое значение τ_n появляются корни с положительной вещественной частью. Следовательно, при $\tau > \tau_0$ квазимногочлен (8) имеет корни в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

Лемма доказана.

С учетом леммы из теоремы об устойчивости по первому приближению легко получить следующие утверждения:

1) если $0 < py_0 \le \frac{2rx_0}{K}$, то положение равновесия (x_0, y_0, z_0) асимптотически устойчиво;

2) если $py_0 > \frac{2rx_0}{K}$, то существует $\tau_0 > 0$ такое, что при $0 \le \tau < \tau_0$ положение равновесия (x_0, y_0, z_0) асимптотически устойчиво, а при $\tau > \tau_0$ положение равновесия (x_0, y_0, z_0) неустойчиво.

Замечание. Из явного вида величин x_0 и y_0 (см. формулу (5)) следует, что неравенство $0 < py_0 \le \frac{2rx_0}{K}$ эквивалентно $d < bpe^{-c\tau}K \le 3d$, а неравенство $py_0 > \frac{2rx_0}{K}$ эквивалентно $bpe^{-c\tau}K > 3d$.

В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. (I) *Пусть* $bpe^{-c\tau}K < d$. *Тогда* $(0,0,0)$ *неустойчиво, а* $(K,0,0)$ *асимптотически устойчиво.*

(II) *Пусть* $d < bpe^{-c\tau}K \le 3d$. *Тогда* $(0,0,0)$ *и* $(K,0,0)$ *неустойчивы, а* (x_0, y_0, z_0), *где* x_0, y_0, z_0 *определены в* (5), *асимптотически устойчиво.*

(III) *Пусть* $bpe^{-c\tau}K > 3d$. *Тогда* $(0,0,0)$ *и* $(K,0,0)$ *неустойчивы и существует* $\tau_0 > 0$ *такое, что при* $0 \le \tau < \tau_0$ *положение равновесия* (x_0, y_0, z_0) *асимптотически устойчиво, а при* $\tau > \tau_0$ *положение равновесия* (x_0, y_0, z_0) *неустойчиво.*

3. Оценки скорости сходимости к положению равновесия $(K, 0, 0)$

В этом разделе будем предполагать, что выполнено условие $bpe^{-c\tau}K < d$. В этом случае у системы (1) существуют только два положения равновесия $(0,0,0)$ и $(K,0,0)$, причем $(K,0,0)$ глобально асимптотически устойчиво. Получим оценки решений системы (1), характеризующие скорость сходимости к положению равновесия $(K,0,0)$.

При получении оценок будем использовать метод функционалов типа Ляпунова — Красовского, которые являются аналогами функций Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вначале рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + By(t-\tau). \tag{11}$$

При исследовании асимптотической устойчивости нулевого решения данной системы Н. Н. Красовский предложил использовать функционал

$$V(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle Qy(s), y(s)\rangle\, ds \tag{12}$$

с матрицами $H = H^* > 0$ и $Q = Q^* > 0$ [2, гл. 7, § 34]. Функционалы такого вида называют *функционалами Ляпунова — Красовского.* Отметим, что с помощью функционалов Ляпунова — Красовского можно проводить исследования асимптотической устойчивости нулевого решения и для нелинейных систем с запаздывающим аргументом.

Для получения оценок решений, характеризующих скорость убывания на бесконечности, применяют различные модификации функционалов Ляпунова — Красовского (см., например, [5–8]). В частности, в [8] предложен модифицированный функционал Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$V(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle Q(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds, \tag{13}$$

где $H = H^* > 0$ и $Q(s) = Q^*(s) > 0$. Отметим, что в отличие от функционала (12) здесь матрица Q переменная. С помощью функционала (13) в [8] получены оценки решений системы (11), являющиеся аналогами оценки Крейна для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [9, гл. 1, § 4]), а также оценки решений и области притяжения нулевого решения для широкого класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Важно отметить, что построение функционала (13) сводится к решению хорошо обусловленных задач и не требует информации о расположении корней характеристического квазимногочлена [8].

Перейдем к получению оценок решений системы (1). Заметим, что если $(x(t), y(t),\ z(t))$ — решение системы (1) с начальными условиями (2)–(4), то первая компонента решения $x(t)$ ограничена сверху решением уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

с теми же самыми начальными условиями. Для этого уравнения известно, что все решения с положительными начальными условиями стремятся к решению $x(t) \equiv K$. При этом для любого $\theta > 0$ существует $t_0 \geq 0$ такое, что $0 \leq x(t) \leq K + \theta$ при всех $t \geq t_0$. Следовательно, это верно и для первой компоненты решения $x(t)$ системы (1). Не ограничивая общности, можно считать, что $t_0 = 0$.

Теорема 2. *Пусть $\theta > 0$ и $k > 0$ такие, что*

$$bpe^{-c\tau}(K+\theta)e^{k\tau/2} < d.$$

Тогда для решений системы (1) *с начальными данными* (2), *удовлетворяющими условиям* (3), (4) *и условиям*

$$0 \leq \varphi(t) \leq K + \theta,\ t \in [-\tau, 0], \quad \varphi(0) > 0, \tag{14}$$

справедливы оценки

$$|x(t) - K| \leq \frac{K\exp(2p\sqrt{v(0,\psi)}/\delta)}{\min\{K, \varphi(0)\}}\left[|\varphi(0) - K|e^{-rt} + \varphi(0)p\sqrt{v(0,\psi)}\frac{e^{-\delta t/2} - e^{-rt}}{r - (\delta/2)}\right], \tag{15}$$

$$y(t) \le \sqrt{v(0,\psi)}e^{-\delta t/2}, \tag{16}$$

$$z(t) \le (\psi(0)+\eta)e^{-ct} + \alpha\sqrt{v(0,\psi)}\frac{e^{-\delta t/2}-e^{-ct}}{c-(\delta/2)}, \tag{17}$$

где

$$v(0,\psi) = \psi^2(0) + bpe^{-c\tau}(K+\theta)e^{k\tau/2}\int\limits_{-\tau}^{0} e^{ks}\psi^2(s)\,ds,$$

$$\delta = \min\{2(d - bpe^{-c\tau}(K+\theta)e^{k\tau/2}), k\}, \tag{18}$$

$$\alpha = \max\{c - d + bp(K+\theta), 0\}. \tag{19}$$

Замечание. Если $r = \delta/2$, то в неравенстве (15) функцию $\frac{e^{-\delta t/2}-e^{-rt}}{r-(\delta/2)}$ нужно заменить на $te^{-\delta t/2}$. Аналогично, в неравенстве (17) при $c = \delta/2$ функция $\frac{e^{-\delta t/2}-e^{-ct}}{c-(\delta/2)}$ заменяется на $te^{-\delta t/2}$.

Доказательство. Вначале докажем неравенство (16). Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова — Красовского

$$v(t,y) = y^2(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} \kappa(t-s)y^2(s)\,ds, \quad \text{где } \kappa(s) = \kappa(0)e^{-ks}. \tag{20}$$

Продифференцируем его вдоль решений системы (1):

$$\frac{d}{dt}v(t,y) = 2y(t)(bpe^{-c\tau}x(t-\tau)y(t-\tau) - dy(t))$$
$$+ \kappa(0)y^2(t) - \kappa(0)e^{-k\tau}y^2(t-\tau) - k\int\limits_{t-\tau}^{t} \kappa(0)e^{-k(t-s)}y^2(s)\,ds.$$

В силу условий (14), учитывая рассуждения, проведенные перед формулировкой теоремы 2, имеем $0 \le x(t-\tau) \le K+\theta$ при всех $t \ge 0$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le 2bpe^{-c\tau}(K+\theta)y(t-\tau)y(t) - 2dy^2(t)$$
$$+ \kappa(0)y^2(t) - \kappa(0)e^{-k\tau}y^2(t-\tau) - k\int\limits_{t-\tau}^{t} \kappa(0)e^{-k(t-s)}y^2(s)\,ds.$$

Далее, используя неравенство

$$2bpe^{-c\tau}(K+\theta)y(t-\tau)y(t) - \kappa(0)e^{-k\tau}y^2(t-\tau) \le \frac{(bpe^{-c\tau}(K+\theta))^2}{\kappa(0)e^{-k\tau}}y^2(t),$$

получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -\left(2d - \kappa(0) - \frac{(bpe^{-c\tau}(K+\theta))^2}{\kappa(0)e^{-k\tau}}\right)y^2(t) - k\int\limits_{t-\tau}^{t} \kappa(0)e^{-k(t-s)}y^2(s)\,ds.$$

Полагая $\kappa(0) = bpe^{-c\tau}(K+\theta)e^{k\tau/2}$, имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -2(d - bpe^{-c\tau}(K+\theta)e^{k\tau/2})y^2(t) - k\int\limits_{t-\tau}^{t} \kappa(0)e^{-k(t-s)}y^2(s)\,ds.$$

Учитывая обозначение (18) и определение (20) функционала $V(t,y)$, получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -\delta v(t,y),$$

откуда

$$y^2(t) \le v(t,y) \le v(0,y)e^{-\delta t} = v(0,\psi)e^{-\delta t}.$$

Теперь докажем неравенство (15). Из первого уравнения системы (1) выводим

$$x(t) - K = K\left[\varphi(0) - K - \varphi(0)\int\limits_0^t e^{rs}\exp\left(-\int\limits_0^s py(\xi)\,d\xi\right)py(s)\,ds\right] \times \left[K + \varphi(0)r\int\limits_0^t e^{rs}\exp\left(-\int\limits_0^s py(\xi)\,d\xi\right)ds\right]^{-1}.$$

В силу неравенств

$$\int\limits_0^t e^{rs}\exp\left(-\int\limits_0^s py(\xi)\,d\xi\right)py(s)\,ds \le \int\limits_0^t e^{rs}py(s)\,ds,$$

$$K + \varphi(0)r\int\limits_0^t e^{rs}\exp\left(-\int\limits_0^s py(\xi)\,d\xi\right)ds \ge \exp\left(-\int\limits_0^t py(\xi)\,d\xi\right)\left(K + \varphi(0)r\int\limits_0^t e^{rs}\,ds\right) \ge e^{rt}\exp\left(-\int\limits_0^t py(\xi)\,d\xi\right)\min\{K,\varphi(0)\}$$

имеем

$$|x(t) - K| \le \frac{Ke^{-rt}}{\min\{K,\varphi(0)\}}\exp\left(\int\limits_0^t py(\xi)d\xi\right)\left[|\varphi(0) - K| + \varphi(0)\int\limits_0^t e^{rs}py(s)\,ds\right].$$

Учитывая оценку (16), получим

$$\exp\left(\int\limits_0^t py(\xi)\,d\xi\right) \le \exp\left(p\sqrt{v(0,\psi)}\int\limits_0^t e^{-\delta\xi/2}\,d\xi\right) \le \exp(2p\sqrt{v(0,\psi)}/\delta),$$

$$\int\limits_0^t e^{rs} p y(s)\,ds \le p\sqrt{v(0,\psi)} \int\limits_0^t e^{(r-(\delta/2))s}\,ds = p\sqrt{v(0,\psi)}\frac{e^{(r-(\delta/2))t}-1}{r-(\delta/2)}.$$

Отсюда непосредственно вытекает (15).

Наконец, докажем неравенство (17). Из второго и третьего уравнений системы (1) нетрудно вывести

$$\frac{d}{dt}(y(t)+z(t)) = (c-d+bpx(t))y(t) - c(y(t)+z(t)).$$

Поскольку $0 < x(t) \le K+\theta$ при всех $t \ge 0$, то

$$\frac{d}{dt}(y(t)+z(t)) \le (c-d+bp(K+\theta))y(t) - c(y(t)+z(t)).$$

Далее, используя неравенство (16) и учитывая обозначение (19), получим

$$\frac{d}{dt}(y(t)+z(t)) \le \alpha\sqrt{v(0,\psi)}e^{-\delta t/2} - c(y(t)+z(t)).$$

Отсюда нетрудно установить неравенство (17).

Теорема доказана.

Замечание. Используя модифицированные функционалы Ляпунова — Красовского, также можно получить оценки решений, характеризующие скорость сходимости к положению равновесия (x_0, y_0, z_0).

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Forde J. E.* Delay differential equation models in mathematical biology: Thes. ... doct. philosophy. Univ. Michigan, 2005.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959.
3. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
4. *Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н.* Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. МИАН СССР. 1949. Т. 26. С. 3–331.
5. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.
6. *Kharitonov V. L., Hinrichsen D.* Exponential estimates for time delay systems // Syst. Control Lett. 2004. V. 53, N 5. P. 395–405.
7. *Mondié S., Kharitonov V. L.* Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. V. 50, N 2. P. 268–273.
8. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

9. *Демиденко Г. В.* Матричные уравнения. Уч. пособие. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2009.

Статья поступила 15 мая 2016 г.

Скворцова Мария Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`sm-18-nsu@yandex.ru`

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2016. Том 23, № 2

UDC 517.929.4

STABILITY OF SOLUTIONS IN THE PREDATOR—PREY MODEL WITH DELAY

M. A. Skvortsova

Abstract: We consider a system of delay differential equations describing the interaction between two populations — the predators and prey. We study the asymptotic stability of stationary solutions to this system. Using the modified Lyapunov–Krasovskii functional we establish estimates for solutions characterizing the rate of convergence to the stationary solutions.
Keywords: predator-prey model, delay differential equations, asymptotic stability, characteristic quasipolynomial, estimates for solutions, modified Lyapunov–Krasovskii functional.

REFERENCES

1. *Forde J. E.*, Delay differential equation models in mathematical biology: Thes. ... doct. philosophy. Univ. Michigan, 2005.
2. *Krasovskii N. N.*, Stability of motion, Stanford Uni. Press, Stanford, CA (1959).
3. *Elsgoltz L. E. and Norkin S. B.*, Introduction to the theory of differential equations with deviating argument [in Russian], Nauka, Moscow (1971).
4. *Chebotarev N. G. and Meiman N. N.*, "Raus–Gurvitz problem for polynomials and entire functions," Tr. Steklov Math. Inst., **26**, 3–331 (1949).
5. *Khusainov D. Ya., Ivanov A. F., and Kozhametov A. T.*, "Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay," Differ. Equ., **41**, No. 8, 1196–1200 (2005).
6. *Kharitonov V. L. and Hinrichsen D.*, "Exponential estimates for time delay systems," Syst. Control Lett., **53**, No. 5, 395–405 (2004).
7. *Mondié S. and Kharitonov V. L.*, "Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach," IEEE Trans. Autom. Control, **50**, No. 2, 268–273 (2005).
8. *Demidenko G. V. and Matveeva I. I.*, "Asymptotic properties of solutions to differential equations with delay argument," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., **5**, No. 3, 20–28 (2005).
9. *Demidenko G. V.*, Matrix equations [in Russian], Izdat. Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (2009).

Submitted May 15, 2016

Maria Aleksandrovna Skvortsova
Sobolev Institute of Mathematics,
Akademika Koptyuga ave., 4, Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University,
Pirogova st., 2, Novosibirsk 630090, Russia
`sm-18-nsu@yandex.ru`

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья может быть представлена в виде файла в формате pdf или распечатки, подготовленной с использованием какой-либо компьютерной системы подготовки математических текстов.

5. В начале статьи указывается индекс УДК. Статья сопровождается краткой аннотацией, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках. Подготовленная с использованием компьютера графика должна быть высококачественной, не ниже 600 DPI, и не использующей шрифты Adobe, отсутствующие в пакете MikTeX.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках.

Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних трех лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в издательстве и в редакции издания в течение пяти лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство образования и науки Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. Если статья принимается к опубликованию после доработки, то автор направляет в редакцию файл ее последней версии. При подготовке файла следует использовать, как правило, макропакет AMS-TEX со стилевым файлом amsppt.

11. Предоставление файлов в форматах TEX или LaTeX возможно только при согласовании с редакцией. Автор не должен использовать необязательные авторские командные последовательности, введенные для облегчения набора. Запрещается переопределять греческие буквы, стандартные команды и т. п.

12. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

13. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

14. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.