СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 23, № 3 (91) Июль—сентябрь, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Адрес редакции:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/

e-mail: prokopevav85@gmail.com; madu@ysu.ru; ivanegorov51@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

УДК 517.957

ОБ ОБРАТИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЛЕБЕГОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Г. Гадоев, Ф. С. Исхоков

Аннотация. Строится правый регуляризатор для одного класса дифференциальных операторов с частными производными недивергентного вида в произвольной (ограниченной или неограниченной) области Ω n-мерного евклидова пространства с нестепенным вырождением на границе области, на его основе доказывается существование обратного оператора в пространстве $L_p(\Omega)$.
Ключевые слова: дифференциальный оператор с частными производными, нестепенное вырождение, правый регуляризатор, обратный оператор, разбиение единицы.

Введение

Одним из основных моментов в исследовании разделимости дифференциальных операторов (см., например, [1–7] и имеющуюся в них библиографию) является построение правого регуляризатора и доказательство обратимости исследуемого оператора. Большая часть работ по разделимости дифференциальных операторов посвящена исследованию обыкновенных дифференциальных операторов. Случай вырождающихся операторов с частными производными высокого порядка в основном исследовался в [3–7]. В этих работах сначала задается область Ω, в которой рассматривается дифференциальный оператор, и затем в этой области определяются функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора. В отличие от этого в настоящей работе область Ω и функции, характеризующие вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом и предполагается выполнение «условия погружения», введенного П. И. Лизоркиным в [8]. При этом дифференцируемость функций, с помощью которых определяется вырождение исследуемого оператора, не требуется.

1. Формулировка основного результата

Пусть Ω — произвольное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R_n, и пусть

$$\Pi(0) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n : |x_j| < \frac{1}{2},\ j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

— единичный куб с центром в начале системы координат.

Для любых точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R_n$ и вектора $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\vec{t}}(\xi) = \left\{ x \in R_n : \left(\frac{x_1 - \xi_1}{t_1}, \frac{x_2 - \xi_2}{t_2}, \dots, \frac{x_n - \xi_n}{t_n} \right) \in \Pi(0) \right\}.$$

Пусть $g_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, — определенные в Ω положительные функции. Положим

$$\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi) = \Pi_{\varepsilon \vec{g}(\xi)}(\xi),$$

где $\varepsilon > 0$ и $\vec{g}(\xi) = (g_1(\xi), g_2(\xi), \dots, g_n(\xi))$.

Далее в работе предполагается, что множество Ω и функции $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, связаны следующим условием.

(A) Существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для всех $\xi \in \Omega$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi)$ содержится в Ω.

Условие (A) является аналогом условия погружения, введенного П. И. Лизоркиным в [8]. В этой работе также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющих условию погружения.

Отметим, что вырождающиеся эллиптические операторы дивергентного вида в случае, когда область Ω и функции $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, характеризующие вырождение коэффициентов исследуемого оператора, удовлетворяют сформулированным выше условиям, ранее изучались в [9–11]. В этих работах в основном исследовалась разрешимость вариационной задачи Дирихле и изучались свойства ее решения. В отличие от этого здесь мы исследуем эллиптические операторы высокого порядка недивергентного вида и доказываем их непрерывную обратимость в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x) D_x^k, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где r — некоторое натуральное число, $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ — длина мультииндекса,

$$D_x^k = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k_n}$$

и i — мнимая единица.

Символом $B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, где τ — положительное число, обозначим класс символов

$$L(x, s) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x) s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

с измеримыми коэффициентами, удовлетворяющими следующим условиям:

(I) $\inf\limits_{x \in \Omega, s \in R_n} |L(x, s)| = \delta \ne 0$;

(II) $|a_k(x)s^{k'}| \le \tau g_1^{-k_1''}(x)g_2^{-k_2''}(x)\dots g_n^{-k_n''}(x)|L(x,s)|$ для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$, $k = k' + k''$, $k'' \ne 0$, $|k| \le 2r$;

(III) $\sum\limits_{|k|\le 2r} |(a_k(x) - a_k(y))s^k| \le \tau |L(x,s)|$ для всех $s \in R_n$ и всех $x, y \in \Omega$ таких, что $|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x)$, $j = 1, 2 \dots, n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Теорема 1. *Пусть существует число $\lambda > 0$ такое, что*

$$\lambda^{-1} \le \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \le \lambda, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

для всех $y \in \Omega$ и всех $x \in \Pi_{\varepsilon,\vec{g}}(y)$, и пусть при некотором $K > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k|\le 2r} |a_k(x)s^k| \le K|L(x,s)| \tag{3}$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$.

Тогда найдется число $\tau_0 = \tau_0(n, r, p, K) > 0$, $1 < p < +\infty$, такое, что если $\tau \in (0, \tau_0)$ и $L(x,s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, то замыкание $L_{(p)}$ оператора $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, в пространстве $L_p(\Omega)$ существует и имеет непрерывный обратный.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < +\infty$, выполнены все условия теоремы 1 и τ_0 — такое же число, как в теореме 1. Тогда если $\tau \in (0, \tau_0)$ и $L(x,s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, то имеет место неравенство*

$$\|u; L_p(\Omega)\| \le C_0 \|L_{(p)}u; L_p(\Omega)\|, \quad u \in D(L_{(p)}), \tag{4}$$

где число $C_0 > 0$ зависит только от r, n, p, K и нижней грани функции $|L(x,s)|$, $x \in \Omega$, $s \in R_n$.

2. Вспомогательные леммы

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 1 из [10].

Лемма 1. *Пусть область Ω и положительные функции $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют сформулированным выше условиям.*

Тогда существуют неотрицательные функции $\psi_1, \psi_2, \dots$ из класса $C_0^\infty(\Omega)$ такие, что

(1) $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \psi_m^2(x) \equiv 1$, $x \in \Omega$;

(2) *покрытие $\{\operatorname{supp}\psi_m\}_{m=1}^{+\infty}$ области Ω имеет конечную кратность $\Lambda(n,\lambda)$, где λ — константа из условия (2);*

(3) *для любого мультииндекса k существует конечное число $M_k > 0$ такое, что*

$$\left|D_x^k \psi_m(x)\right| \le M_k g_1^{-k_1}(x) g_2^{-k_2}(x) \dots g_n^{-k_n}(x), \quad x \in \Omega;$$

(4) *для всех $x, y \in \operatorname{supp}\psi_m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, выполняется неравенство*

$$|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

(5) *для любой функции* $f \in L_1(\Omega)$ *справедливо соотношение*

$$\sum_{m=N}^{+\infty} \int_{\Omega} \chi_m(x) f(x)\, dx \to 0, \quad N \to +\infty,$$

где $\chi_m(x)$ — *характеристическая функция множества* $\operatorname{supp} \psi_m$.

Лемма 2 (см. лемму 2.2 из [4]). *Пусть оператор* T *имеет вид*

$$T = \sum_{m=1}^{+\infty} \chi_m T_m \chi_m,$$

где χ_m $, m = 1, 2, 3, \ldots,$ — *характеристическая функция множества* $\operatorname{supp} \psi_m$, *а* $T_1, T_2, T_3, \ldots$ — *последовательность непрерывных операторов в* $L_p(\Omega)$ *таких, что*

$$\Lambda = \sup_{m=1,2,3,\ldots} \|T_m\|_p < +\infty,$$

где $p \in (1, +\infty)$. *Тогда* T — *ограниченный оператор и выполняется неравенство*

$$\|T_m\|_p \leq \Lambda^{1/p}(n, \lambda)\Lambda,$$

где $\Lambda(n, \lambda)$ — *кратность покрытия* $\{\operatorname{supp} \psi_m\}_{m=1}^{+\infty}$ *области* Ω.

Будем говорить, что T — *псевдодифференциальный оператор с символом* $t(s)$, если

$$(Tu)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R_n} e^{isx} \left(t(s) \int_{R_n} e^{-isx} u(y)\, dy \right) ds, \quad D(T) = C_0^\infty(\Omega).$$

Лемма 3 (см. лемму 2.3 из [4]). *Пусть*

$$A(s) = \sum_{|k| \leq 2r} b_k s^k$$

— *полином с постоянными коэффициентами,* $A(s) \neq 0$ *для всех* $s \in R_n$, *и пусть* T_k, $|k| \leq 2r$, — *псевдодифференциальный оператор в* R_n *с символом* $t_k(s) = s^k A^{-1}(s)$.

Пусть выполняется неравенство

$$\sum_{|k| \leq 2r} |b_k s^k| \leq K |A(s)|. \tag{5}$$

Тогда оператор T_k, $|k| \leq 2r$, *имеет непрерывное продолжение в* $L_p(R_n)$ *при любом* $p \in (1, +\infty)$ *и выполнено неравенство*

$$\|T_k\|_p \leq M \sup_{s \in R_n} |t_k(s)|, \tag{6}$$

где число M *зависит только от* r, p, n *и* K.

Замечание 1. В случае $p = 2$ утверждение леммы 3 имеет место без предположения о выполнении неравенства (5), при этом в (6) $M = 1$.

Пусть $1 < p < +\infty$. Положим $q = p/(p-1)$. В силу неравенства Гёльдера обозначение

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}\, dx$$

имеет смысл для всех $u \in L_p(\Omega)$ и всех $v \in L_q(\Omega)$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Qu)(x) = \sum_{|k| \le 2r} q_k(x) D_x^k u(x), \quad D(Q) = C_0^\infty(\Omega).$$

Предположим, что существуют локально ограниченные в Ω производные $D^l q_k(x)$, $|l| \le |k| \le 2r$, и рассмотрим оператор

$$(Q'u)(x) = \sum_{|k| \le 2r} D_x^k(\overline{q_k(x)} u(x)), \quad D(Q') = C_0^\infty(\Omega).$$

Обозначим через $Q_{(p)}$ замыкание оператора Q в пространстве $L_p(\Omega)$, а через $Q'_{(q)}$ — замыкание оператора Q' в пространстве $L_q(\Omega)$.

По определению сопряженного оператора функция $u(x) \in L_p(\Omega)$ принадлежит области определения оператора $(Q'_{(q)})^*$ тогда и только тогда, когда найдется функция $\sigma(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что

$$(\sigma, \varphi) = (u, Q'_{(q)}\varphi), \quad \varphi \in D(Q'_{(q)}),$$

при этом $\sigma = (Q'_{(q)})^* u$.

Символом $\langle f, \varphi \rangle$ обозначим значение обобщенной функции $f \in D'(\Omega)$ на функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Обобщенная функция $f(x)$ отождествляется с некоторой функцией $g(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, если

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} g(x)\varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Для $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ определим обобщенные функции $q_k(x) D_x^k u(x)$, $|k| \le 2r$, по формуле

$$\langle q_k D^k u, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \int\limits_{\Omega} u(x) D_x^k(q_k(x)\varphi(x))\, dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Положим

$$\sigma(x) = \sum_{|k| \le 2r} q_k(x) D_x^k u(x). \tag{7}$$

Лемма 4 (см. лемму 2.6 из [4]). *Справедливы следующие утверждения.*

(a) *Функция $u(x)$ принадлежит области определения оператора $(Q'_{(q)})^*$ тогда и только тогда, когда $u(x) \in L_p(\Omega)$ и найдется функция $v(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что*

$$(v, \varphi) = (u, Q'\varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(б) *Оператор* $(Q'_{(q)})^*$ *является расширением оператора* $Q_{(p)}$, *т. е.* $Q_{(p)} \subset (Q'_{(q)})^*$.

(в) *Если ядро* $\ker(Q'_{(q)})^* = 0$ *и область значений* $R(Q_{(p)})$ *оператора* $Q_{(p)}$ *совпадает с* $L_p(\Omega)$, *то* $Q_{(p)} = (Q'_{(q)})^*$.

(г) *Функция* $u(x)$ *принадлежит* $D((Q'_{(q)})^*)$ *тогда и только тогда, когда* $u(x) \in L_p(\Omega)$ *и обобщенная функция* $\sigma(x)$ (7) *принадлежит пространству* $L_p(\Omega)$.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть функции $\psi_m(x)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, такие же, как в лемме 1. В каждом множестве $\operatorname{supp}\psi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, фиксируем точки $\{x^{(m,k)}, |k| \leq 2r\}$ и положим

$$L_m(s) = \sum_{|k|\leq 2r} a_k(x^{(m,k)})s^k, \quad s \in R_n. \tag{8}$$

В пространстве $L_p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ вводим операторы

$$\begin{aligned} F &= \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m, \quad D(F) = C_0^\infty(\Omega), \\ F' &= \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi'_m \psi_m, \quad D(F') = C_0^\infty(\Omega), \end{aligned} \tag{9}$$

где Φ_m, Φ'_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$, — псевдодифференциальные операторы в R_n с символами $\Phi_m(s) = L_m^{-1}(s)$, $\Phi'_m(s) = \overline{\Phi_m(s)}$ соответственно. На функциях $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняются равенства

$$(Fu, v) = (u, F'v), \quad (\Phi_m u, v) = (u, \Phi'_m v), \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Символами $F_{(p)}$, $F'_{(q)}$ обозначим замыкания операторов F, F' с областями определения $D(F) = D(F') = C_0^\infty(\Omega)$ в пространствах $L_p(\Omega)$, $L_q(\Omega)$ соответственно.

Если коэффициенты $a_k(x)$, $|k| \leq 2r$, дифференциального оператора $L = L(x, D_x)\,(D(L) = C_0^\infty(\Omega))$ дифференцируемы достаточное число раз, то формально сопряженный дифференциальный оператор $L'(x, D_x)$ задается равенством

$$L'(x, D_x)u = \sum_{|k|\leq 2r} D_x^k(a_k(x)u(x)). \tag{10}$$

Однако в теореме 1 дифференцируемость коэффициентов $a_k(x)$, $|k| \leq 2r$, не предполагается. Поэтому в рассматриваемом случае равенство (10) теряет смысл и трудно исследовать оператор $(L_{(q)})^*$, сопряженный по отношению к оператору $L_{(q)}$. В связи с этим обстоятельством мы вводим другое дифференциальное выражение с гладкими коэффициентами, которое связано с выражением $L(x, D_x)$ и имеет некоторые близкие свойства.

Положим

$$G(x, D_x) = \sum_{|k|\leq 2r} \tilde{a}_k(x)D_x^k, \quad x \in \Omega, \tag{11}$$

где

$$\tilde{a}_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_k(x^{(m,k)})\psi_m^2(x), \quad |k| \leq 2r. \tag{12}$$

Обозначим через $G'(x, D_x)$ дифференциальное выражение, сопряженное к $G(x, D_x)$.

Отметим некоторые соотношения между символами $L(x,s)$, $L_m(s)$ и

$$G(x,s) = \sum_{|k|\leq 2r} \tilde{a}_k(x)s^k. \tag{13}$$

Из условия (III) имеем

$$|(a_k(x) - a_k(y))s^k| \leq \tau|L(x,s)|, \quad |k| \leq 2r,$$

для всех $s \in R_n$ и всех $x, y \in \operatorname{supp}\psi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Подставляя в этом неравенстве $y = x^{(k,m)}$, имеем

$$|(a_k(x) - a_k(x^{(k,m)}))s^k| \leq \tau|L(x,s)|. \tag{14}$$

В силу этого неравенства получаем

$$|L(x,s) - L_m(s)| \leq \sum_{|k|\leq 2r} |(a_k(x) - a_k(x^{(k,m)}))s^k|$$
$$\leq \tau|L(x,s)| \sum_{|k|\leq 2r} 1 = \tau(2r)^n|L(x,s)|.$$

Отсюда при выполнении условия

$$0 < \tau < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2r}\right)^n \tag{15}$$

следует, что

$$|L(x,s) - L_m(s)| \leq \frac{1}{2}|L(x,s)|, \quad x \in \operatorname{supp}\psi_m.$$

Следовательно,

$$|L(x,s)| \leq 2|L_m(s)| \leq 3|L(x,s)| \tag{16}$$

для всех $s \in R_n$ и всех $x \in \operatorname{supp}\psi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Согласно лемме 1 семейство функций $\{\psi_m^2(x)\}_{m=1}^{\infty}$ образует разбиение единицы области Ω конечной кратности $\Lambda(n, \lambda)$. Поэтому, используя равенство (12), имеем

$$a_k(x) - \tilde{a}_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_k(x)\psi_j^2(x) - \tilde{a}_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty}(a_k(x) - a_k(x^{(k,j)}))\psi_j^2(x).$$

В силу условии (III) имеем

$$|(a_k(x) - \tilde{a}_k(x))s^k| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |(a_k(x) - a_k(x^{(k,j)}))s^k|\psi_j^2(x)$$
$$\leq \tau|L(x,s)| \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2(x) = \tau|L(x,s)|,$$

т. е.
$$|(a_k(x)-\tilde{a}_k(x))s^k| \le \tau |L(x,s)|. \tag{17}$$
Используя равенство (13), получаем
$$|L(x,s)-G(x,s)| \le \sum_{|k|\le 2r} |(a_k(x)-\tilde{a}_k(x))s^k|$$
$$\le \tau |L(x,s)| \sum_{|k|\le 2r} 1 = \tau(2r)^n |L(x,s)|.$$
Отсюда при выполнении условия (15) следует, что
$$|L(x,s)| \le 2|G(x,s)| \le 3|L(x,s)|$$
для всех $s \in R_n$ и $x \in \Omega$.

Лемма 5. *В условиях теоремы* 1 *существует положительное число* t_0^* *такое, что если* $\tau \in (0,t_0^*)$, *то существуют операторы* $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ *с* $\|\cdot\|_p$*-нормами, не превосходящими* $1/2$, *такие, что на функциях* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *выполняются равенства*
$$GFu = (E+\Gamma_1)u, \quad G'F'u = (E+\Gamma_2)u, \tag{18}$$
где E *— тождественный оператор.*

Доказательство. В этой лемме и далее символом $\mathscr{L}_p[\Omega]$ обозначено пространство всех линейных операторов, действующих из $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_1(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$, замыкания которых в пространстве $L_p(\Omega)$ являются ограниченными операторами.

Так как Φ_m — псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $L_m(s)$ (см. (8)) и
$$L_m = L_m(x;D_x) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x^{(m,k)})D_x^k, \quad D(L_m) = C_0^\infty(\Omega),$$
— дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то
$$\sum_{m=1}^\infty \psi_m L_m \Phi_m \psi_m = \sum_{m=1}^\infty \psi_m^2 = E.$$
Используя это равенство, имеем
$$GFu = \sum_{m=1}^\infty G\psi_m\Phi_m\psi_m u = \sum_{m=1}^\infty [G,\psi_m]\Phi_m\psi_m u + \sum_{m=1}^\infty \psi_m G\Phi_m\psi_m u$$
$$= \sum_{m=1}^\infty [G,\psi_m]\Phi_m\psi_m u + \sum_{m=1}^\infty \psi_m(G-L_m)\Phi_m\psi_m u + \sum_{m=1}^\infty \psi_m L_m\psi_m\Phi_m u = (\Gamma_1+E)u,$$
где
$$\Gamma_1 = \sum_{m=1}^\infty [G,\psi_m]\Phi_m\psi_m + \sum_{m=1}^\infty \psi_m(G-L_m)\Phi_m\psi_m. \tag{19}$$
Здесь и далее символ $[\cdot,\cdot]$ обозначает коммутатор, т. е. $[T_1,T_2] = T_1T_2 - T_2T_1$.

Таким образом, мы доказали равенство

$$GFu = (E + \Gamma_1)u, \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

где оператор Γ_1 определяется равенством (19).

Представим оператор Γ_1 в виде

$$\Gamma_1 = \Gamma_* + \Gamma_0, \tag{20}$$

где

$$\Gamma_* = \sum_{m=1}^{\infty} [G, \psi_m]\Phi_m\psi_m, \quad \Gamma_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(G - L_m)\Phi_m\psi_m. \tag{21}$$

Заметим, что

$$[G, \psi_m]u = G(\psi_m u) - \psi_m G(u) = \sum_{|k|\le 2r} \tilde{a}_k(x) D_x^k(\psi_m(x)u(x))$$
$$- \sum_{|k|\le 2r} \tilde{a}_k(x)\psi_m(x)D_x^k u(x) = \sum_{|k|\le 2r} \tilde{a}_k(x)\Big[\sum_{\substack{k'+k^*=k,\\ k'\neq 0}} \big(D_x^{k'}\psi_m(x)\big)\big(D_x^{k^*}u(x)\big)\Big].$$

Поэтому

$$\Gamma_* = \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{|k|\le 2r} \tilde{a}_k(x) \sum_{\substack{k'+k^*=k,\\ k'\neq 0}} \psi_m^{(k')}\Phi_m^{(k^*)}\psi_m\Big),$$

где $\psi_m^{(k')} = D_x^{k'}\varphi_m(x)$ и $\Phi_m^{(k^*)}$ — псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^{k^*}L_m^{-1}(s)$. На основе этого равенства, применяя лемму 2, получаем

$$\|\Gamma_*\|_p \le M_1 \sum_{|k|\le 2r} \sum_{\substack{k'+k^*=k,\\ k'\neq 0}} \mathbb{P}_k^{(k',k^*)}, \tag{22}$$

где

$$\mathbb{P}_k^{(k',k^*)} = \sup_{m=1,2,3,\ldots} \big\|\psi_m^{(k')}\tilde{a}_k\Phi_m^{(k^*)}\psi_m\big\|_p. \tag{23}$$

Применяя лемму 3, оценим норму псевдодифференциального оператора $\Phi_m^{(k^*)}$:

$$\big\|\Phi_m^{(k^*)}\big\|_p \le M_2 \sup_{s\in R_n} \big|s^{k^*}L_m^{-1}(s)\big|. \tag{24}$$

Согласно п. 3 леммы 1 имеет место неравенство

$$\sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m} \big|\psi_m^{(k')}(x)g_1^{k'_1}(x)g_2^{k'_2}(x)\ldots g_n^{k'_n}(x)\big| \le M_k^* < \infty. \tag{25}$$

Из (23)–(25) следует, что

$$\mathbb{P}_k^{(k',k^*)} \le M \sup \big|g_1^{-k'_1}(x)g_2^{-k'_2}(x)\ldots g_n^{-k'_n}(x)\tilde{a}_k(x)\cdot s^{k^*}L_m^{-1}(s)\big|, \tag{26}$$

где супремум берется по $x \in \operatorname{supp}\psi_m$, $s \in R_n$, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Из равенства (12) в силу условия (II) имеем

$$
\begin{aligned}
|\tilde{a}_k(x)s^{k^*}| &\le \sum_{j=1}^{\infty} |a_k(x^{(k,j)})s^{k^*}|\psi_j^2(x) \\
&\le \tau \sum_{j=1}^{\infty} g_1^{-k_1'}(x^{(k,j)}) g_2^{-k_2'}(x^{(k,j)}) \dots g_n^{-k_n'}(x^{(k,j)}) \cdot |L(x^{(k,j)}, s)|\psi_j^2(x). \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Заметим, что для всех $x \in \operatorname{supp}\psi_j$ имеют место следующие неравенства:

$$
g_m^{-1}(x^{(k,j)}) \le \lambda g_m^{-1}(x), \quad m = 1, 2, \dots;
$$

$$
|L(x, s) - L(x^{(k,j)}, s)| < \tau |L(x, s)|.
$$

Первое неравенство следует из (2), а второе — из условия (III).

В силу последних неравенств из (27) следует, что

$$
|\tilde{a}_k(x)s^{k*}| \le \tau \lambda^{|k'|}(1+\tau)|L(x,s)| g_1^{-k_1'}(x) g_2^{-k_2'}(x) \dots g_n^{-k_n'}(x)
$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$, $k = k' + k^*$, $k' \neq 0$.

Если $x \in \operatorname{supp}\psi_m$, то в силу неравенства (16) из последнего неравенства вытекает, что

$$
|\tilde{a}_k(x)s^{k^*}| \le \tau M_0 g_1^{-k_1'}(x) g_2^{-k_2'}(x) \dots g_n^{-k_n'}(x) |L_m(s)|.
$$

Используя это неравенство, из (26) имеем

$$
\mathbb{P}_k^{(k',k^*)} \le \tau M_2 \qquad (28)
$$

для всех $k = k' + k^*$, $|k| \le 2r$, $k' \neq 0$.

Таким образом (см. (22), (28)), существует $M_3 > 0$ такое, что

$$
\|\Gamma_*\|_p \le \tau M_3. \qquad (29)
$$

Оценим норму оператора Γ_0. Из равенства (21) в силу леммы 2 имеем

$$
\|\Gamma_0\|_p \le \Lambda(n, \nu) \sup_{m=1,2,\dots} \|\psi_m (G - L_m) \Phi_m \psi_m\|_p. \qquad (30)
$$

Заметим, что

$$
(G - L_m)u = \sum_{|k| \le 2r} (\tilde{a}_k(x) - a_k(x^{(k,m)})) D_x^k u.
$$

Поэтому

$$
\|\psi_m (G - L_m) \Phi_m \psi_m\|_p \le \sup \left| (\tilde{a}_k(x) - a_k(x^{(k,m)})) s^k L_m^{-1}(s) \right|, \qquad (31)
$$

где супремум берется по $s \in R_n$ и $x \in \operatorname{supp}\psi_m$. Здесь также воспользовались леммой 3.

Из неравенств (14) и (16) следует, что

$$
|(a_k(x) - \tilde{a}_k(x)) s^k| \le 2\tau |L_m(s)|, \quad x \in \operatorname{supp}\psi_m, \ s \in R_n.
$$

С другой стороны, из (16), (17) имеем

$$|(a_k(x)-\tilde{a}_k(x))s^k| \leq 2\tau |L_m(s)|, \quad x \in \operatorname{supp}\psi_m,\ s \in R_n.$$

Поэтому из (31) следует, что

$$\|\psi_m(G-L_m)\Phi_m\psi_m\|_p \leq \tau M_4 \tag{32}$$

для всех $m=1,2,\ldots$; M_4 — некоторое конечное положительное число.

Таким образом (см. (30), (32)), существует положительное число M_5 такое, что

$$\|\Gamma_0\|_p \leq \tau M_5.$$

Учитывая равенство (см. (20)) $\Gamma_1 = \Gamma_* + \Gamma_0$, из (29) получим

$$\|\Gamma_1\|_p \leq \tau(M_3+M_5).$$

Следовательно, существует число $t' > 0$ такое, что при $\tau \in (0,t')$ норма оператора Γ_1 не превосходит $1/2$.

Утверждение леммы 5 относительно оператора GF доказано. Оставшаяся часть утверждения этой леммы относительно оператора $G'F'$ доказывается аналогично.

Если T — некоторый оператор с областью определения $D(T)=C_0^\infty(\Omega)$, допускающий замыкание в пространстве $L_p(\Omega)$, то далее обозначим это замыкание через $T_{(p)}$.

Лемма 6. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда найдется положительное число t_1^* такое, что если $\tau \in (0,t_1^*)$ и $L(x,s) \in B(\tau,\vec{g},\Omega)$, то оператор*

$$G = G(\cdot, D), \quad D(G) = C_0^\infty(\Omega),$$

в пространстве $L_p(\Omega)$, $1<p<\infty$, имеет замыкание $G_{(p)}$ со следующими свойствами:

$$G_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{1,(p)}, \tag{33}$$

$$R(G_{(p)}) = L_p(\Omega). \tag{34}$$

Здесь $\Gamma_{1,(p)}$ — замыкание в $L_p(\Omega)$ оператора Γ_1, $D(\Gamma_1)=C_0^\infty(\Omega)$, из леммы 5.

Доказательство. Согласно лемме 5 (см. (18))

$$GFu = (E+\Gamma_1)u, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{35}$$

где $\Gamma_1 \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\Gamma_1\|_p \leq 1/2$. Следовательно,

$$\|\Gamma_1 u; L_p(\Omega)\| \leq \frac{1}{2}\|u; L_p(\Omega)\| \tag{36}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$. В силу плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ из (36) следует, что оператор Γ_1, $D(\Gamma_1)=C_0^\infty(\Omega)$, допускает в $L_p(\Omega)$ замыкание $\Gamma_{1,(p)}$, норма которого не превосходит $1/2$. Поэтому

$$D(\Gamma_{1,(p)}) = L_p(\Omega). \tag{37}$$

Обозначим через $\underset{p}{\longrightarrow}$ сходимость по норме пространства $L_p(\Omega)$.

Пусть v — произвольный элемент из $L_p(\Omega)$. В силу плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ существует последовательность функций $\{v_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $v_j \underset{p}{\longrightarrow} v$ при $j \longrightarrow \infty$. В силу определения оператора $\Gamma_{1,(p)}$ имеем

$$(E+\Gamma_1)v_j \underset{p}{\longrightarrow} (E+\Gamma_{1,(p)})v \quad \text{при } j \longrightarrow \infty.$$

Из (35) следует, что

$$(E+\Gamma_1)v_j = GFv_j, \quad j=1,2,3,\ldots,$$

поэтому

$$GFv_j \underset{p}{\longrightarrow} (E+\Gamma_{1,(p)})v, \quad j \longrightarrow \infty. \tag{38}$$

По определению (см. (9))

$$F = \sum_{m=1}^\infty \psi_m \Phi_m \psi_m,$$

где Φ_m — псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $L_m^{-1}(s)$ (см. (8)). Согласно лемме 3 оператор Φ_m имеет непрерывное продолжение в $L_p(R_n)$ и

$$\|\Phi_m\|_p \le M \sup_{s\in R_n} \left|L_m^{-1}(s)\right|.$$

Поэтому оператор F, $D(F) = C_0^\infty(\Omega)$, допускает замыкание в пространстве $L_p(\Omega)$. Это замыкание обозначим через $F_{(p)}$. Следовательно,

$$Fv_j \underset{p}{\longrightarrow} F_{(p)}v, \quad j \longrightarrow \infty. \tag{39}$$

Пусть $R(F_{(p)})$ — область значений оператора $F_{(p)}$, и пусть $u(x)$ — произвольный элемент из $R(F_{(p)})$. Существует функция $v(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что $u = F_{(p)}v$. Пусть $\{v_j\}_{j=1}^\infty$ — последовательность функций из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $v_j \underset{p}{\longrightarrow} v$, $j \longrightarrow \infty$. Тогда из (39) следует, что $u_j \underset{p}{\longrightarrow} u$, $j \longrightarrow \infty$, где $u_j = Fv_j$, $j = 1,2,3\ldots.$

Так как $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ для всех $j = 1,2,3\ldots$ и $G_{(p)}$ — замыкание оператора $G = G(\cdot, D)$, $D(G) = C_0^\infty(\Omega)$, то

$$Gu_j \underset{p}{\longrightarrow} G_{(p)}u, \quad j \longrightarrow \infty.$$

Отсюда в силу равенств $u_j = Fv_j$, $u = F_{(p)}v$ имеем

$$GFv_j \underset{p}{\longrightarrow} G_{(p)}F_{(p)}v, \quad j \longrightarrow \infty.$$

Применяя равенство (38), получим

$$G_{(p)}F_{(p)}v = (E+\Gamma_{1,(p)})v \tag{40}$$

для всех $v \in L_p(\Omega) \cap D(F_{(p)})$. Так как $F_{(p)}$ — непрерывное продолжение оператора F, $D(F) = C_0^\infty(\Omega)$, на все пространство, равенство (40) имеет место для всех $v \in L_p(\Omega)$. Равенство (33) доказано.

Так как $D(\Gamma_{1,(p)}) = L_p(\Omega)$ и $\|\Gamma_{1,(p)}\|_p \le 1/2$, согласно известной теореме из теории операторов (см., например, [12, с. 230]) $(E + \Gamma_{1,(p)})$ — непрерывно обратимый оператор и

$$\|(E + \Gamma_{1,(p)})^{-1}\|_p < \frac{1}{1 - \|\Gamma_{1,(p)}\|_p}.$$

Следовательно,

$$R(E + \Gamma_{1,(p)}) = D((E + \Gamma_{1,(p)})^{-1}) = L_p(\Omega).$$

Отсюда и из равенства (33) следует, что $G_{(p)}F_{(p)}$ — обратимый оператор и

$$(G_{(p)}F_{(p)})^{-1} = (E + \Gamma_{1,(p)})^{-1}. \tag{41}$$

Поэтому

$$R(G_{(p)}F_{(p)}) = D((G_{(p)}F_{(p)})^{-1}) = L_p(\Omega).$$

Так как $R(G_{(p)}F_{(p)}) \subseteq R(G_{(p)})$ и $R(G_{(p)}) \subseteq L_p(\Omega)$, отсюда следует, что $R(G_{(p)}) = L_p(\Omega)$. Равенство (34) доказано.

Аналогично лемме 6 доказывается

Лемма 6*. *В условиях теоремы 1 существует число $t_2^* > 0$ такое, что если $\tau \in (0, t_2^*)$ и $L(x,s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, то оператор $G' = G'(\cdot, D)$, $D(G') = C_0^\infty(\Omega)$, в пространстве $L_q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, имеет замыкание $G'_{(q)}$ со следующими свойствами:*

$$G'_{(q)}F'_{(q)} = E + \Gamma_{2,(q)}; \tag{42}$$
$$R(G'_{(q)}) = L_q(\Omega).$$

Здесь $\Gamma_{2,(q)}$ — замыкание в $L_q(\Omega)$ оператора $\Gamma_2, D(\Gamma_2) = C_0^\infty(\Omega)$, из леммы 5.

Лемма 7. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и $t_3^* = \min\{t_1^*, t_2^*\}$, где t_1^*, t_2^* — константы из лемм 6 и 6^* соответственно. Тогда если $L(x,s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, то*

$$G_{(p)} = (G'_{(q)})^*, \quad G'_{(q)} = G^*_{(p)}. \tag{43}$$

Более того, операторы $G_{(p)}$ и $G'_{(q)}$ имеют непрерывные обратные и для них выполняются равенства

$$G^{-1}_{(p)} = F_{(p)}(E + \mathscr{S}_1), \quad (G'_{(q)})^{-1} = F'_{(q)}(E + \mathscr{S}_2), \tag{44}$$

где операторы $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ соответственно принадлежат пространствам $\mathscr{L}_p[\Omega]$, $\mathscr{L}_q[\Omega]$ и их норма меньше единицы.

Доказательство. Обычным интегрированием по частям доказывается равенство $(Gu, v) = (u, G'v)$ для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно,

$$(G_{(p)}u, v) = (u, G'_{(q)}v), \quad u, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

С другой стороны, согласно определению сопряженного оператора

$$(G_{(p)}u, v) = (u, (G_{(p)})^*v)$$

для всех $u \in D(G_{(p)})$, $v \in D(G^*_{(p)})$. Таким образом,

$$G^*_{(p)}v = G'_{(q)}v, \quad v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Согласно известной теореме из теории операторов в банаховом пространстве (см., например, [12, с. 233]) если A — непрерывный линейный оператор в некотором банаховом пространстве, то имеет место следующее равенство: $(\ker A)^\perp = R(A^*)$, где знак $\perp$ означает ортогональное дополнение. Поэтому из равенства (42), т. е. $R(G'_{(q)}) = L_q(\Omega)$, следует, что

$$\ker(G'_{(q)})^* = 0. \tag{45}$$

Так как (см. (34)) область значений $R(G_{(p)})$ оператора $G_{(p)}$ совпадает с $L_p(\Omega)$, применяя п. (в) леммы 4, из (45) получим $G_{(p)} = (G'_{(q)})^*$. Первое равенство в (43) доказано. Аналогичными рассуждениями доказывается и второе равенство в (43).

Из равенств (43) и (45) следует, что

$$\ker G_{(p)} = \ker(G'_{(q)})^* = 0.$$

Следовательно, $G_{(p)}$ — обратимый оператор. Поэтому из равенства (41) имеем

$$F^{-1}_{(p)}G^{-1}_{(p)} = (F_{(p)}G_{(p)})^{-1} = (E + \Gamma_{1,(p)})^{-1}. \tag{46}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathscr{S}_1 = (E + \Gamma_{1,(p)})^{-1} - E.$$

Используя (46), имеем

$$F_{(p)}(E + \mathscr{S}_1) = F_{(p)}(E + \Gamma_{1,(p)})^{-1} = F_{(p)}F^{-1}_{(p)}G^{-1}_{(p)} = G^{-1}_{(p)}.$$

Первое равенство в (44) доказано.

Из (43), (34) имеем $R((G_{(q)}))^* = R(G^{(p)}) = L_p(\Omega)$. Так как $(\ker(G'_{(q)}))^\perp = R((G'_{(q)})^*)$, отсюда следует, что $\ker(G'_{(q)}) = 0$. Поэтому $G'_{(q)}$ — непрерывно обратимый оператор.

Обозначим

$$\mathscr{S}_2 = (E + \Gamma_{2,(q)})^{-1} - E.$$

Действуя так же, как в доказательстве равенства (41), из равенства (42) находим

$$(G'_{(q)}F'_{(q)})^{-1} = (E + \Gamma_{2,(q)})^{-1}.$$

Имеем

$$F'_{(q)}(E + \mathscr{S}_2) = F'_{(q)}(E + \Gamma_{2,(q)})^{-1} = F'_{(q)}F^{-1}_{(q)}(G'_{(q)})^{-1} = (G'_{(q)})^{-1}.$$

Второе равенство в (43) доказано.

Применяя теорему 5 из [12, с. 230], получаем

$$\|(E + \Gamma_{1,(p)})^{-1}\|_p = \left\| \sum_{j=0}^\infty (-1)^j (\Gamma_{1,(p)})^j \right\|_p \le \frac{1}{1 - \|\Gamma_{1,(p)}\|_p} < 1.$$

Аналогично имеем
$$\|(E+\Gamma_{2,(q)})^{-1}\|_q = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\Gamma_{2,(q)})^j \right\|_q \le \frac{1}{1-\|\Gamma_{2,(q)}\|_q} < 1.$$

Отсюда следует, что
$$\mathscr{S}_1 = (E+\Gamma_{1,(p)})^{-1} - E = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (\Gamma_{1,(p)})^j,$$

поэтому
$$\|\mathscr{S}_1\|_p \le \frac{1}{1-\|\Gamma_{1,(p)}\|_p} < 1.$$

Аналогично доказывается, что
$$\mathscr{S}_2 = (E+\Gamma_{2,(q)})^{-1} - E = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (\Gamma_{2,(q)})^j,$$
$$\|\mathscr{S}_2\|_q \le \frac{1}{1-\|\Gamma_{2,(q)}\|_q} < 1.$$

Лемма 7 доказана полностью.

Лемма 8. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *и* t_3^* *— постоянная из леммы* 7. *Тогда если* $\tau \in \big(0, t_3^*\big)$ *и* $L(x,s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, *то имеют место следующие равенства:*
$$R(F_{(p)}) = D(G_{(p)}), \tag{47}$$
$$\ker F_{(p)} = 0. \tag{48}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ — произвольный элемент из $R(F_{(p)})$. Тогда существует функция $v(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что
$$u(x) = (F_{(p)}v)(x), \quad x \in \Omega. \tag{49}$$

Согласно нашим обозначениям $F_{(p)}$ — замыкание оператора
$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m, \quad D(F) = C_0^{\infty}(\Omega),$$

в $L_p(\Omega)$. Поэтому существует последовательность $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ такая, что
$$v_j \underset{p}{\longrightarrow} v, \quad Fv_j \underset{p}{\longrightarrow} F_{(p)}v, \quad j \longrightarrow \infty. \tag{50}$$

Положим $u_j = Fv_j$. Тогда из (49), (50) следует, что $u_j \underset{p}{\longrightarrow} u$, $j \longrightarrow \infty$.

Так как $u_j \in C_0^{\infty}(\Omega)$, согласно лемме 5 $GFv_j = (E+\Gamma_1)v_j$, $j = 1,2,3,\dots$. В силу ограниченности оператора $E+\Gamma_1$ имеем $(E+\Gamma_1)v_j \underset{p}{\longrightarrow} (E+\Gamma_{1,(p)})v$, $j \longrightarrow \infty$. Поэтому $GFv_j \underset{p}{\longrightarrow} (E+\Gamma_{1,(p)})v = G_{(p)}F_{(p)}v$, $j \longrightarrow \infty$. Следовательно, $u_j \underset{p}{\longrightarrow} u$ и $Gu_j \underset{p}{\longrightarrow} Gu$ при $j \longrightarrow \infty$, т. е. $u \in D(G_{(p)})$.

Таким образом, доказали включение

$$R(F_{(p)}) \subset D(G_{(p)}). \tag{51}$$

Пусть $w \in D(G_{(p)})$. Положим $v = G_{(p)}w$. Так как согласно лемме 7 существует обратный оператор $G_{(p)}^{-1}$, то $w = G_{(p)}^{-1}v$. Отсюда и из равенства (43) следует, что $w = F_{(p)}(E + \mathscr{S}_1)v$. Следовательно, $w \in R(F_{(p)})$, и доказано включение $D(G_{(p)}) \subset R(F_{(p)})$. Отсюда и из (51) следует равенство (47).

Докажем равенство (48). Пусть $F_{(p)}v = 0$. Тогда из равенства (см. (33)) $G_{(p)}F_{(p)}v = (E + \Gamma_1)v$ следует, что

$$(E + \Gamma_1)v = 0. \tag{52}$$

Из обратимости оператора $E + \Gamma_1$ следует, что $\ker(E + \Gamma_1) = 0$. Поэтому из (52) имеем $v = 0$. Равенство (48) доказано, что завершает доказательство леммы 8.

Лемма 9. *В условиях теоремы* 1 *существует число* $t_4^* > 0$ *такое, что если* $\tau \in (0, t_4^*)$ *и* $L(x,s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, *то существует оператор* $\Gamma \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ *с* $\|\cdot\|_p$*-нормой, не превосходящей* $1/2$, *такой, что*

$$LFu = (E + \Gamma)u \tag{53}$$

для всех функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Напомним, что (см. (9))

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m, \quad D(F) = C_0^\infty(\Omega),$$

где Φ_m, $m = 1, 2, 3, \ldots,$ — псевдодифференциальные операторы в R_n с символами $\Phi_m(s) = L_m^{-1}(s)$ (см. (8)).

Определим дифференциальный оператор

$$L_m(x, D) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x^{(m,k)}) D_x^k, \quad D(L_m) = C_0^\infty(\Omega).$$

Так как этот оператор с постоянными коэффициентами, то

$$(L_m \Phi_m u)(x) = u(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

В силу того, что система функций $\left\{\psi_m^2\right\}_{m=1}^\infty$ образует разбиение единицы области Ω, имеем

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m L_m \Phi_m \psi_m = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m^2 = E, \tag{54}$$

где E — тождественный оператор. Используя равенство (54), получаем

$$\begin{aligned} LFu = \sum_{m=1}^{+\infty} L\psi_m \Phi_m \psi_m u = \sum_{m=1}^{+\infty} [L, \psi_m] \Phi_m \psi_m u \\ + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m L \Phi_m \psi_m u = \sum_{m=1}^{+\infty} [L, \psi_m] \Phi_m \psi_m u \\ + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m (L - L_m) \Phi_m \psi_m u + u. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (53) имеет место, если определим оператор Γ следующим образом:

$$\Gamma = \sum_{m=1}^{+\infty} [L, \psi_m]\Phi_m \psi_m + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m (L - L_m)\Phi_m \psi_m.$$

Оценим норму этого оператора. Для этого представим оператор Γ в виде

$$\Gamma = \Gamma' + \Gamma'', \tag{55}$$

где

$$\Gamma' = \sum_{m=1}^{+\infty} [L, \psi_m]\Phi_m \psi_m, \quad \Gamma'' = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m (L - L_m)\Phi_m \psi_m. \tag{56}$$

Для $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\big[D_x^k, \psi_m\big] u(x) = D_x^k(\psi_m(x)u(x)) - \psi_m(x) D_x^k u(x) = \sum_{\substack{k'+k''=k,\\ k' \neq 0}} \big(D_x^{k'} \psi_m(x)\big)\big(D_x^{k''} u(x)\big).$$

Поэтому

$$\Gamma' = \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{|k| \leq 2r} a_k(x) \sum_{\substack{k'+k''=k,\\ k' \neq 0}} \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k'')} \psi_m \Big),$$

где $\psi_m^{(k')}(x) = D_x^{k'} \psi_m(x)$ и $\Phi_m^{(k'')}$ — псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^{k''} L_m^{-1}(s)$.

Применяя лемму 2, оценим норму оператора Γ'. Имеем

$$\|\Gamma'\|_p \leq \Lambda^{1/p}(n, \lambda) \sum_{|k| \leq 2r} \sum_{\substack{k'+k''=k,\\ k' \neq 0}} \mathscr{F}_{k',k''}^{(k)}, \tag{57}$$

где

$$\mathscr{F}_{k',k''}^{(k)} = \sup_{m=1,2,3,\ldots} \big\|\psi_m^{(k')} a_k \Phi_m^{(k'')} \psi_m\big\|_p. \tag{58}$$

Согласно п. 3 леммы 1 функции $\psi_m(x)$ для любого мультииндекса k', $|k'| \leq 2r$, удовлетворяют условию

$$\sup_{x \in \operatorname{supp} \psi_m} \big|\psi_m^{(k')}(x) g_1^{k'_1}(x) g_2^{k'_2}(x) \ldots g_n^{k'_n}(x)\big| \leq M_{k'} < +\infty. \tag{59}$$

Для оценки нормы псевдодифференциального оператора $\Phi_m^{k''}$ используем лемму 3 и неравенство (16). В результате приходим к оценке

$$\big\|\Phi_m^{(k'')}\big\| \leq M_* \sup_{s \in R_n} \big|s^{k''} L_m^{-1}(s)\big| \leq M'_* \sup |s^{k''} L^{-1}(x, s)|, \tag{60}$$

где супремум берется по $x \in \operatorname{supp} \psi_m$, $s \in R_n$. Из (58)–(60) получим

$$\mathscr{F}_{k',k''}^{(k)} \leq M''_* \sup_{\substack{x \in \operatorname{supp} \psi_m,\\ s \in R_n}} \big|a_k(x) g_1^{-k'_1}(x) g_2^{-k'_2}(x) \ldots g_n^{-k'_n}(x) s^{k''} L^{-1}(x, s)\big|.$$

Так как $L(x,s) \in B(\tau,\vec{g},\Omega)$, в силу условия (II) (см. определение класса $B(\tau,\vec{g},\Omega)$) из этого неравенства следует, что

$$\mathscr{F}^{(k)}_{k',k''} \leq M_{**}\tau.$$

С учетом этой оценки из (57) вытекает, что

$$\|\Gamma'\|_p \leq \mathbb{M}_0\tau, \tag{61}$$

где $\mathbb{M}_0$ — некоторая положительная постоянная.

Оценим норму оператора Γ''. Применяя лемму 2, из (56) имеем

$$\|\Gamma''\|_p \leq \Lambda^{1/p}(n,\lambda) \sup_{m=1,2,\dots} \big\|\psi_m(L-L_m)\Phi_m\psi_m\big\|_p. \tag{62}$$

Так как

$$L(x,\, D_x) - L_m(D_x) = \sum_{|k|\leq 2r} (a_k(x) - a_k(x^{(m,k)}))D^k_x,$$

то

$$\|\psi_m(L-L_m)\Phi_m\psi_m\|_p \leq \sum_{|k|\leq 2r} \big\|\psi_m(a_k(x) - a_k(x^{(m,k)}))\Phi^{(k)}_m\psi_m\big\|_p, \tag{63}$$

где $\Phi^{(k)}_m$ — псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^k L^{-1}_m(s)$.

Используя лемму 3, оценим норму псевдодифференциального оператора $\Phi^{(k)}_m$:

$$\big\|\Phi^{(k)}_m\big\|_p \leq M \sup_{s\in R_n} \big|s^k L^{-1}_m(s)\big|.$$

Отсюда и из (63) следует, что

$$\|\psi_m(L-L_m)\Phi_m\psi_m\|_p \leq M \sup \sum_{|k|\leq 2r} \big|(a_k(x) - a_k(x^{(m,k)}))s^k L^{-1}_m(s)\big|,$$

где супремум берется по $x \in \operatorname{supp}\psi_m,\ s \in R_n$.

Используя неравенство (16) и условие (III) (см. определение класса $B(\tau,\vec{g},\Omega)$), получаем

$$\|\psi_m(L-L_m)\Phi_m\psi_m\|_p \leq M' \sup \sum_{|k|\leq 2r} |(a_k(x) - a_k(x^{(m,k)}))s^k L^{-1}(x,s)| \leq M_0\tau.$$

Таким образом (см. (62)),

$$\|\Gamma''\|_p \leq \mathbb{M}_1\tau, \tag{64}$$

где $\mathbb{M}_1$ — некоторая положительная постоянная.

Объединяя (55), (61), (64), находим

$$\|\Gamma\|_p \leq \tau(\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_1).$$

Следовательно, при $t^*_4 = \frac{1}{2(\mathbb{M}_0+\mathbb{M}_1)}$ и $\tau \in (0, t^*_4)$ норма оператора Γ не превосходит $1/2$.

Лемма 9 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1. Сначала покажем, что оператор (см. (1)) $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, допускает замыкание в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Для этого достаточно показать, что если $Lu_j \underset{p}{\longrightarrow} v$, $u_j \underset{p}{\longrightarrow} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$, где $v \in L_p(\Omega)$ и $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ для $j = 1, 2, \dots$, то $v = 0$.

Так как $C_0^\infty(\Omega) \subset D(G_{(p)})$ и согласно лемме 6 (см. (34)) $D(G_{(p)}) = R(F_{(p)})$, то $u_j \in R(F_{(p)})$ для $j = 1, 2, \dots$. Следовательно, существуют функции $v_j \in L_p(\Omega)$, $j = 1, 2, \dots$, такие, что $u_j = F_{(p)}v_j$, $j = 1, 2, \dots$. Поэтому $LF_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} v$ и $F_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$. Далее, применяя лемму 9 (см. (53)), имеем

$$LF_{(p)}v_j = (E + \Gamma_{(p)})v_j \underset{p}{\longrightarrow} v, \quad F_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда в силу обратимости оператора $(E + \Gamma_{(p)})$ следует, что

$$v_j \underset{p}{\longrightarrow} (E + \Gamma_{(p)})^{-1}v, \quad F_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty. \tag{65}$$

Так как $F_{(p)}$ — замкнутый непрерывный оператор, из того, что $v_j \underset{p}{\longrightarrow} w$, $F_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$, следует, что $F_{(p)}w = 0$. Поэтому из (65) получаем $F_{(p)}(E + \Gamma_{(p)})^{-1}v = 0$. Отсюда в силу равенства (48) имеем $(E + \Gamma_{(p)})^{-1}v = 0$, т. е. $v = 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, доказано, что оператор $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, имеет в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, замыкание. Это замыкание обозначим через $L_{(p)}$.

Докажем равенство

$$\ker L_{(p)} = 0. \tag{66}$$

Для этого докажем, что если $L_{(p)}v = 0$, то $v = 0$. Пусть $L_{(p)}v = 0$. Так как $L_{(p)}$ — замыкание оператора $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, существует последовательность $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$u_j \underset{p}{\longrightarrow} v, \quad Lu_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \quad \text{при } j \longrightarrow +\infty. \tag{67}$$

Так как (см. (47)) $C_0^\infty(\Omega) \subset D(G_{(p)}) = R(F_{(p)})$, функции u_j, $j = 1, 2, \dots$, можно представить в виде $u_j = F_{(p)}v_j$, $j = 1, 2, \dots$. Подставляя это в (67), имеем

$$F_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} v, \quad LF_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \quad \text{при } j \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда в силу леммы 9 получим $(E + \Gamma_{(p)})v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$. Поскольку $(E + \Gamma_{(p)})$ — обратимый оператор, то $v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$. Таким образом,

$$F_{(p)}v_j \underset{p}{\longrightarrow} v, \quad v_j \underset{p}{\longrightarrow} 0 \quad \text{при } j \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда в силу замкнутости оператора $F_{(p)}$ находим $F_{(p)}v = 0$. Следовательно (см. лемму 8), $v = 0$. Равенство (66) доказано.

Далее, поступая так же, как в доказательстве леммы 6, докажем равенство

$$L_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}. \tag{68}$$

Согласно лемме 9
$$LFu = (E + \Gamma)u, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{69}$$
где $\Gamma \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\Gamma\|_p \leq 1/2$. Оператор Γ имеет в $L_p(\Omega)$ замыкание $\Gamma_{(p)}$ и $D(\Gamma_{(p)}) = L_p(\Omega)$.

Пусть v — произвольный элемент из $L_p(\Omega)$. В силу плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ существует последовательность $\{v_j\}_{j=1}^\infty$ элементов класса $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $v_j \underset{p}{\longrightarrow} v$ при $j \longrightarrow +\infty$.

Так как $(E + \Gamma)v_j \underset{p}{\longrightarrow} (E + \Gamma_{(p)})v$ при $j \longrightarrow +\infty$, из равенства (69) следует, что
$$LFv_j \underset{p}{\longrightarrow} (E + \Gamma_{(p)})v \quad \text{при } j \longrightarrow +\infty.$$
С другой стороны, из $v_j \underset{p}{\longrightarrow} v$, $j \longrightarrow +\infty$, следует, что
$$Fv_j \underset{p}{\longrightarrow} F_{(p)}v, \quad j \longrightarrow +\infty.$$
Вводим обозначения $w_j = Fv_j$, $j = 1, 2, \ldots$; $w = F_{(p)}v$. В этих обозначениях полученные выше соотношения записываются в виде
$$w_j \underset{p}{\longrightarrow} w, \quad L_{(p)}w_j \underset{p}{\longrightarrow} (E + \Gamma_{(p)})v \quad \text{при } j \longrightarrow +\infty.$$
Отсюда в силу замкнутости оператора $L_{(p)}$ следует, что
$$L_{(p)}w = (E + \Gamma_{(p)})v.$$
Подставляя в этом равенстве $w = F_{(p)}v$, получим
$$L_{(p)}F_{(p)}v = (E + \Gamma_{(p)})v.$$
Равенство (68) доказано.

Так как $R(E + \Gamma_{(p)}) = L_p(\Omega)$, из (68) следует, что $R(L_{(p)}F_{(p)}) = L_p(\Omega)$. Отсюда и из того, что
$$R(L_{(p)}F_{(p)}) \subseteq R(L_{(p)}) \subseteq L_p(\Omega),$$
получим
$$R(L_{(p)}) = L_p(\Omega).$$

Таким образом, доказали, что (см. (66)) $\ker L_{(p)} = 0$ и $R(L_{(p)}) = L_p(\Omega)$. Эти равенства обеспечивают существование обратного оператора $L_{(p)}^{-1}$.

Так же, как в доказательстве леммы 7, из $\|\Gamma_{(p)}\| \leq 1/2$ следует, что $(E + \Gamma_{(p)})$ — обратимый оператор и $\|(E + \Gamma_{(p)})^{-1}\| \leq 1$.

Положим
$$\mathscr{J} = (E + \Gamma_{(p)})^{-1} - E.$$
Используя равенство (68), имеем
$$F_{(p)}(E + \mathscr{J}) = F_{(p)}(E + \Gamma_{(p)})^{-1} = F_{(p)}(L_{(p)}F_{(p)})^{-1} = L_{(p)}^{-1}.$$
Таким образом, обратный оператор $L_{(p)}^{-1}$ существует и представляется в виде
$$L_{(p)}^{-1} = F_{(p)}(E + \mathscr{J}),$$
где $\mathscr{J} \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\mathscr{J}\|_p < 1$.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

В процессе доказательства теоремы 1 мы показали, что для обратного оператора $L_{(p)}^{-1}$ имеет место представление

$$L_{(p)}^{-1} = F_{(p)}(E + \mathscr{J}), \tag{70}$$

где $\mathscr{J} \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\mathscr{J}\|_p < 1$. Напомним, что $F_{(p)}$ — замыкание в $L_p(\Omega)$ оператора (см. (9))

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m, \quad D(F) = C_0^\infty(\Omega).$$

Применяя лемму 2 для нормы оператора $F_{(p)}$, получаем следующее неравенство:

$$\|F_{(p)}\|_p \le \Lambda^{1/p}(n,\lambda) \sup_{m=1,2,\dots} \|\Phi_m\|_p. \tag{71}$$

Так как Φ_m — псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $L_m^{-1}(s)$, по лемме 3 имеем

$$\|\Phi_m\|_p \le M \sup_{s\in R_n} \left|L_m^{-1}(s)\right|, \tag{72}$$

где число $M > 0$ зависит только от r, n, p, K.

В условиях теоремы

$$\inf_{x\in\Omega,\, s\in R_n} |L(x,s)| = \delta \ne 0.$$

Поэтому из (71), (72) следует, что

$$\|F_{(p)}\|_p \le M_0(r,n,p,K,\delta,\lambda) < +\infty.$$

Отсюда и из (70) имеем

$$\left\|L_{(p)}^{-1}\right\|_p \le M_0(r,n,p,K,\delta,\lambda)\|E + \mathscr{J}\|_p \le 2M_0(r,n,p,K,\delta,\lambda).$$

Следовательно,

$$\left\|L_{(p)}^{-1} v; L_p(\Omega)\right\| \le 2M_0 \|v; L_p(\Omega)\|$$

для всех $v \in R(L_{(p)})$. Подставляя в этом равенстве $v = L_{(p)}u$, получим (4).

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Everitt W. N., Giertz M.* Inequalities and separation for Schrödinger-type operators in $L_2(\mathbb{R}^n)$ // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. 1977. V. 79. P. 257–265.
2. *Brown R. C., Hinton D. B.* Two separation criteria for second order ordinary or partial differential operators // Math. Bohem. 1999. V. 124, N 2-3. P. 273–292.
3. *Отелбаев М.* Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$ // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 161. С. 195–217.
4. *Бойматов К. Х.* Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 170. С. 37–76.
5. *Бойматов К. Х.* Сильно вырождающиеся эллиптические дифференциальные операторы класса Трибеля // Изв. вузов. Математика. 1988. № 8. С. 39–47.

6. *Бойматов К. Х.* Коэрцитивные свойства сильно вырождающихся эллиптических уравнений // Докл. АН России. 1993. Т. 330, № 4. С. 409–414.
7. *Zayed E. M. E., Mohamed A. S., Atia H. A.* Inequalities and separation for the Laplace–Beltrami differential operator in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 336. P. 81–92.
8. *Лизоркин П. И.* Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p-нормах // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 156. С. 130–142.
9. *Исхоков С. А.* О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 3. С. 306–309.
10. *Исхоков С. А.* О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 1536–1542.
11. *Исхоков С. А., Гадоев М. Г., Якушев И. А.* Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением // Докл. АН. 2012. Т. 443, № 3. С. 286–289.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд.. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 14 января 2016 г.

Гадоев Махмадрахим Гафурович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
политехнический институт (филиал) в г. Мирном
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678170, Республика Саха (Якутия)
gadoev@rambler.ru

Исхоков Фаридун Сулаймонович
Институт математики им. А. Джураева
Академии наук Республики Таджикистан,
ул. Айни, 299/4, Душанбе 734063, Республика Таджикистан
fariduniskhokov@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

UDC 517.957

ON INVERTIBILITY OF A CLASS OF DEGENERATE DIFFERENTIAL OPERATORS IN THE LEBESGUE SPACE

M. G. Gadoev and F. S. Iskhokov

Abstract. We construct the right-hand regularizing operator for a class of partial differential operators in non-divergent form in an arbitrary (bounded or unbounded) domain in the n-dimensional Euclidian space with non-power degeneracy on the boundary. On its base we prove the existence of the inverse operator in the Lebesgue space.

Keywords: partial differential operator, non-power degeneration, right-hand regularizing operator, inverse operator, partition of unity.

REFERENCES

1. *Everitt W. N. and Giertz M.* "Inequalities and separation for Schrodinger-type operators in $L_2(\mathbb{R}^n)$," Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math., **79**, 257–265 (1977).
2. *Brown R. C. and Hinton D. B.* "Two separation criteria for second order ordinary or partial differential operators," Math. Bohem., **124**, No. 2-3, 273–292 (1999).
3. *Otelbaev M.* "Coercive estimates and separability theorems for elliptic equations in $\mathbb{R}^n$," Proc. Steklov Inst. Math., **161**, 213–239 (1984).
4. *Boimatov K. Kh.* "Separability theorems, weighted spaces and their applications," Proc. Steklov Inst. Math., **170**, 39–81 (1987).
5. *Boimatov K. Kh.* "Strongly degenerate elliptic differential operators of the Triebel class," Soviet Math. (Iz. VUZ. Matematika), **32**, No. 8, 53–63 (1988).
6. *Boimatov K. Kh.* "Coercivity properties of strongly degenerate elliptic equations," Dokl. Akad. Nauk, Math., **47**, No. 3, 489–497 (1993).
7. *Zayed E. M. E., Mohamed A. S., and Atia H. A.* "Inequalities and separation for the Laplace–Beltrami differential operator in Hilbert spaces," J. Math. Anal. Appl., **336**, 81–92 (2007).
8. *Lizorkin P. I.* "Estimates of mixed and intermediate derivatives in weighted L_p-norms," Proc. Steklov Inst. Math., **156**, 141–153 (1983).
9. *Iskhokov S. A.* "Smoothness of generalized solutions to elliptic equations with non-exponential degeneracies," Dokl. Math., **63**, No. 3, 332–338 (2001).
10. *Iskhokov S. A.* "Smoothness of the generalized solution of an elliptic equation with non-power degeneracy," Differ. Equ., **39**, No. 11, 1618–1625 (2003).
11. *Iskhokov S. A. Gadoev M. G. and Yakushev I. A.* "Garding's inequality for higher order elliptic operators with nonpower degeneration," Dokl. Math., **85**, No. 2, 215–218 (2012).

12. *Kolmogorov A. N. and Fomin S. V.*, Elements of the theory of functions and functional analysis [in Russian]. Nauka, Moscow (1976).

Submitted January 14, 2016

Makhmadrakhim Gafurivich Gadoev
North-Eastern Federal University,
Mirny Polytechnic Institute (branch),
5/1 Tikhonov Street, Mirny 678170, Yakutia, Russia
`gadoev@rambler.ru`

Faridun Sulaimonovich Iskhokov
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,
A. Dzhuraev Mathematical Institute,
299/4 Aini Street, Dushanbe 734063, Tajikistan
`fariduniskhokov@mail.ru`

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

УДК 517.946

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Григорьева

Аннотация. Изучается разрешимость задачи сопряжения для неклассических дифференциальных уравнений, а именно для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений. Заданные уравнения рассматриваются с некоторым разрывным коэффициентом в одномерном случае. Для доказательства теорем существования и единственности регулярных решений используется метод продолжения по параметру.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, псевдогиперболическое уравнение, разрывные коэффициенты, задача сопряжения, существование, единственность, регулярное решение.

Введение

Работа посвящена исследованию разрешимости задач сопряжения (обобщенных задач дифракции или transmission problems) для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений.

Обычная задача сопряжения, или задача дифракции, соответствует ситуации, в которой то или иное дифференциальное уравнение (возможно, с разрывными коэффициентами) рассматривается в двух областях с общим участком границы, при этом на общем участке границы задаются условия непрерывности решения и потока. С точки зрения математического моделирования задача дифракции подразумевает, что моделируется тот или иной физический, механический или химический процесс, протекающий в двух средах с разными характеристиками [1].

В настоящей работе будем рассматривать задачу сопряжения в более общей постановке — вместо условий непрерывности будем задавать условия сопряжения (склейки) с произвольными коэффициентами.

Для классических дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического, параболического или гиперболического типов задачи дифракции (сопряжения) изучаются с давних времен — см., например, работы [2–6]; из более поздних работ отметим статьи [7–12]. Задачи с условиями сопряжения (склейки) естественным образом возникают и также давно изучаются в теории уравнений смешанного типа и в теории вырождающихся уравнений (см., например, [13–21]).

Наконец, отметим, что в последнее время задачи сопряжения изучаются и для неклассических дифференциальных уравнений [22–29].

Как указано выше, задачи сопряжения естественным образом возникают в математическом моделировании — при изучении процессов теплопроводности в составных средах, колебаний неоднородных (составных) сред, в электродинамике, в теории упругости и во многих других ситуациях. Некоторые примеры можно найти в [30–33].

Уравнения, изучаемые в настоящей работе, а именно псевдопараболические и псевдогиперболические, в последнее время в литературе называют в целом *уравнениями соболевского типа*. Их активное изучение началось с работы С. Л. Соболева [34]; обширную библиографию по тематике, связанной с подобными уравнениями, можно найти в монографиях [35–40]. Вместе с тем заметим, что задачи сопряжения, или обобщенные задачи дифракции, для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений ранее практически не изучались. Можно отметить лишь работу [23]. Частично восполнить этот пробел и предполагается в настоящей статье.

1. Постановки задач

Пусть x — точка интервала $(-1,1)$ оси Ox; Q_1, Q_2 и Q — цилиндры $(-1,0)\times(0,T)$, $(0,1)\times(0,T)$ и $(-1,1)\times(0,T)$ конечной высоты T; $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ суть заданные функции, определенные при $(x,t)\in\overline{Q}$; $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — заданные функции, определенные при $t\in[0,T]$. Далее, пусть $h(x)$ — заданная функция, определенная при $x\in[-1,0]$ и $x\in(0,1]$, строго положительная и дифференцируемая на указанных множествах и такая, что у нее определено конечное значение $h(+0)$, также являющееся положительным числом, а также определены конечные производные $h'(\pm 0)$.

Задача сопряжения I. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения*

$$u_t-\frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{xt})-a(x,t)u_{xx}+b(x,t)u_x+c(x,t)u=f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(-1,t)=u(1,t)=0,\quad 0<t<T, \tag{2}$$

$$u(x,0)=0,\quad x\in(-1,0)\cup(0,1), \tag{3}$$

$$u(-0,t)=\alpha(t)u(+0,t),\quad 0<t<T, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}h(+0)u_{xt}(+0,t)+a(+0,t)u_x(+0,t)&\\ =\beta(t)[h(-0)u_{xt}(-0,t)+a(-0,t)u_x(-0,t)],&\quad 0<t<T.\end{aligned} \tag{5}$$

Задача сопряжения II. *Найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндрах* Q_1 *и* Q_2 *решением уравнения*

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{xt}) - a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{6}$$

и такую, что для нее выполняются начальные условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1), \tag{7}$$

а также условия (2), (4), (5).

Определим необходимые функциональные пространства V_1 и V_2:

$$V_1 = \left\{ v(x,t) : \int\limits_{Q_1 \cup Q_2} (v^2 + v_{xxt}^2)\, dxdt < +\infty, \right\},$$

$$V_2 = \left\{ v(x,t) : \int\limits_{Q_1 \cup Q_2} (v^2 + v_{tt}^2 + v_{xxt}^2)\, dxdt < +\infty \right\},$$

где все производные понимаются как обобщенные производные по С. Л. Соболеву [45]. Зададим нормы в этих пространствах:

$$\|v\|_{V_1} = \left\{ \int\limits_{Q_1 \cup Q_2} \left(v^2 + v_{xxt}^2\right) dxdt \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{V_2} = \left\{ \int\limits_{Q_1 \cup Q_2} \left(v^2 + v_{tt}^2 + v_{xxt}^2\right) dxdt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что V_1 и V_2 с заданными нормами являются банаховыми пространствами.

Прежде чем перейти к содержательной части, отметим, что в [23] аналогичная задача сопряжения изучалась для уравнения (1) с условиями (2)–(4), но при выполнении условий $a(x,t) = \alpha_0 h(x)$, $b(x,t) = -\alpha_0 h'(x)$, $\alpha_0 = \text{const}$, $\alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv 1$. При этом в [23] было доказано существование обобщенных решений.

В настоящей работе подобных ограничений на функции $a(x,t)$, $b(x,t)$ нет (другими словами, будут рассмотрены более общие модели, чем в [23]), кроме того, будет доказано существование регулярных решений, имеющих все производные, входящие в уравнения (1), (6).

И еще одно замечание. Условие (5) задач сопряжения I и II, определяющее склеивание потока, интегрированием нетрудно преобразовать к виду, не содержащему вторых производных $u_{xt}(-0,t)$ и $u_{xt}(+0,t)$. В случае работы [23] такое преобразование позволяет перейти к более простой формулировке задачи сопряжения, в которой задается условие склеивания лишь первой (конормальной в многомерном случае) производной. В настоящей работе вышеназванное преобразование приводит к видоизмененному условию склеивания (5). Именно в такой видоизмененной постановке и будем рассматривать задачи сопряжения для уравнений (1) и (6).

Пусть дополнительно заданы функции $\beta_0(t)$ и $K(t,\tau)$, определенные при $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,t]$, $0 \le t \le T$.

Задача сопряжения I$'$. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2)–(4), *а также условие*

$$h(+0)u_x(+0,t) = \beta_0(t)h(-0)u_x(-0,t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)u_x(-0,\tau)d\tau, \quad 0 < t < T. \quad (5')$$

Задача сопряжения II$'$. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения* (6) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (4), (5$'$) *и* (7).

Задачи сопряжения I$'$ и II$'$ дают более общую по сравнению с задачами I и II постановку задач сопряжения для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений. В каком случае решения задач сопряжения I$'$ и II$'$ дают решения задач I и II, покажем ниже.

2. Разрешимость задачи сопряжения I$'$

Обсудим вначале вопрос о единственности решений.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\alpha(t) \in C^1([0,T]), \quad \beta_0(t) \in C^1([0,T]), \quad (8)$$

$$|\beta_0(t)| > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T], \quad (9)$$

$$K(t,\tau) \in C^1(D), \quad a(x,t) \in C(\overline{Q_1}) \cap C(\overline{Q_2}), \quad (10)$$

$$h(x) \in C^1([-1,0]), \quad h(x) \in C^1([0,1]), \quad |h'(x)| \le C\sqrt{h(x)}, \quad C \ge 0, \quad (11)$$

$$\frac{\alpha(t)}{\beta_0(t)} \ge \gamma_0 \ge 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]. \quad (12)$$

Тогда задача сопряжения I$'$ *имеет в пространстве V_1 не более одного решения.*

Доказательство. Пусть $f(x,t) \equiv 0$ при $(x,t) \in Q$. Умножим уравнение (1) на $\big(u - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x\big)$ и проинтегрируем по области Q_1. Далее умножим уравнение (1) на $\gamma(t)\big(u - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x\big)$ и проинтегрируем по области Q_2, где $\gamma(t) = \frac{\alpha(t)}{\beta_0(t)}$. Просуммировав полученные равенства, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 u^2(x,t)\,dx + \frac{\gamma(t)}{2}\int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx + \int\limits_{-1}^0 h(x)u_x^2(x,t)\,dx + \gamma(t)\int\limits_0^1 h(x)u_x^2(x,t)\,dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 h'^2(x)u_x^2(x,t)\,dx + \frac{\gamma(t)}{2}\int\limits_0^1 h'^2(x)u_x^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 h^2(x)u_{xx}^2(x,t)\,dx$$
$$+ \frac{\gamma(t)}{2}\int\limits_0^1 h^2(x)u_{xx}^2(x,t)\,dx = h(-0)u(-0,t)u_x(-0,t) - \gamma(t)h(+0)u(+0,t)u_x(+0,t)$$

$$
-\int\limits_{-1}^{0} h'(x)h(x)u_x(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx - \gamma(t)\int\limits_{0}^{1} h'(x)h(x)u_x(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx
$$

$$
-\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0} c(x,\tau)u^2\,dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 \left[\gamma(\tau)c(x,\tau) - \frac{\gamma'(\tau)}{2}\right]u^2\,dxd\tau
$$

$$
+\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0} h'(x)b(x,\tau)u_x^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 \left[h'(x)\gamma(\tau)b(x,\tau) + \frac{h'^2(x)\gamma'(\tau)}{2}\right]u_x^2\,dxd\tau
$$

$$
-\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0} h'(x)a(x,\tau)u_{xx}^2\,dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 \left[h(x)\gamma(\tau)a(x,\tau) - \frac{h^2(x)\gamma'(\tau)}{2}\right]u_{xx}^2\,dxd\tau
$$

$$
-\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0}[b(x,\tau) - h'(x)c(x,\tau)]uu_x\,dxd\tau
$$

$$
-\int\limits_0^t\int\limits_0^1[\gamma(\tau)b(x,\tau) - h'(x)\gamma(\tau)c(x,\tau) + h'(x)\gamma'(\tau)]uu_x\,dxd\tau
$$

$$
-\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0}[h'(x)a(x,\tau) - h(x)b(x,\tau)]u_xu_{xx}\,dxd\tau
$$

$$
-\int\limits_0^t\int\limits_0^1[h'(x)\gamma(\tau)a(x,\tau) - h(x)\gamma(\tau)b(x,\tau) - h'(x)h(x)\gamma'(\tau)]u_xu_{xx}\,dxd\tau
$$

$$
+\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0}[a(x,\tau) + h(x)c(x,\tau)]uu_{xx}\,dxd\tau +
$$

$$
+\int\limits_0^t\int\limits_0^1[\gamma(\tau)a(x,\tau) + h(x)\gamma(\tau)c(x,\tau) - h(x)\gamma'(\tau)]uu_{xx}\,dxd\tau.
$$

Имеют место следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^t \nu^2(-0,\tau)\,d\tau \le \delta\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0}\nu_x^2\,dxd\tau + C(\delta)\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0}\nu^2\,dxd\tau,\\
&\int\limits_0^t \nu^2(+0,\tau)\,d\tau \le \delta\int\limits_0^t\int\limits_0^1\nu_x^2\,dxd\tau + C(\delta)\int\limits_0^t\int\limits_0^1\nu^2\,dxd\tau,
\end{aligned} \tag{$*$}
$$

где δ — произвольное положительное число.

Введем обозначение

$$
I_1 = h(-0)u(-0,t)u_x(-0,t) - \gamma(t)h(+0)u(+0,t)u_x(+0,t). \tag{14}
$$

Тогда, используя условия (2)–(4) и (5′) в (14), перепишем I_1 в виде

$$I_1 = -\gamma(t)u(+0,t)\int\limits_0^t K(t,\tau)u_x(-0,\tau)d\tau. \tag{15}$$

Применяя в (13) неравенства (∗), Гёльдера, Юнга, используя (15) и условия теоремы, получим неравенство

$$k_0\left[\int\limits_{-1}^0 u^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx + \int\limits_{-1}^0 u_x^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 u_x^2(x,t)\,dx + \int\limits_{-1}^0 u_{xx}^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx\right] \le C_1\left[\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0 u^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 u^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0 u_x^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_x^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0 u_{xx}^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xx}^2\,dxd\tau\right],$$

где k_0 определяется функциями $h(x)$, $\gamma(\tau)$, а C_1 — функциями $h(x)$, $\gamma(\tau)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $K(x,t)$.

Если

$$z_1(t) = \int\limits_{-1}^0 u^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx + \int\limits_{-1}^0 u_x^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 u_x^2(x,t)\,dx + \int\limits_{-1}^0 u_{xx}^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx,$$

то следствием (16) будет неравенство

$$z_1(t) \le M_1\int\limits_0^t z_1(\tau)d\tau,$$

где число M_1 определяется функциями $h(x)$, $\gamma(\tau)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $K(x,t)$.

Из этого неравенства и леммы Гронуолла следует, что $z_1(t) \equiv 0$ при $t \in [0,T]$, откуда очевидно, что имеют место тождества $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q_1}$ и $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q_2}$. Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о существовании решений. Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (8)–(12), *и пусть также*

$$\frac{\lambda_0}{h(+0)}\left[\beta_0(t)h(-0) + \int\limits_0^t K(t,\tau)\,d\tau\right] \ne 0, \qquad 1 - \lambda_0\alpha(t) \ne 0 \quad \text{при} \quad \lambda \in [0,1], \quad t \in [0,T]. \tag{17}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ задача сопряжения I′ имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_1.

Доказательство. Воспользуемся методом продолжения по параметру [33, с. 146–148]. Пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим задачу: *найти решение $u(x,t)$ уравнения* (1) *такое, что для него выполняются условия* (2), (3), *а также условия*

$$u(-0,t) = \lambda\alpha(t)u(+0,t), \quad 0 < t < T, \tag{4_λ}$$

$$u_x(+0,t) = \frac{\lambda}{h(+0)}\left[\beta_0(t)h(-0)u_x(-0,t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)u_x(-0,\tau)d\tau\right], \quad 0 < t < T. \tag{5_λ}$$

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых задача (1)–(3), (4_λ), (5_λ) разрешима в пространстве V_1 для любой функции $f(x,t)$, принадлежащей пространству $L_2(Q)$. Если это множество непусто, открыто и замкнуто, то оно будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$.

При $\lambda = 0$ задача (1)–(3), (4_λ), (5_λ) разрешима [36], отсюда следует, что число 0 принадлежит множеству Λ, а значит, множество Λ непусто.

Докажем, что множество Λ открыто. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$, $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$. Покажем, что при малых $|\tilde{\lambda}|$ число λ также принадлежит Λ.

Пусть $v(x,t)$ — произвольная функция из пространства V. Рассмотрим задачу: *найти решение $u(x,t)$ уравнения* (1) *такое, что для него выполняются условия* (2), (3), *а также условия*

$$u(-0,t) = \lambda_0\alpha(t)u(+0,t) + \tilde{\lambda}v(+0,t), \quad 0 < t < T, \tag{$4_{\lambda,v}$}$$

$$u_x(+0,t) = \frac{\lambda_0}{h(+0)}\left[\beta_0(t)h(-0)u_x(-0,t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)u_x(-0,\tau)\,d\tau\right] + \tilde{\lambda}v(-0,t), \quad 0 < t < T. \tag{$5_{\lambda,v}$}$$

Введем обозначения $\varphi_1(t) = \tilde{\lambda}v(+0,t)$, $\psi_1(t) = \tilde{\lambda}v_x(-0,t)$, и пусть

$$v_0(x,t) = \frac{x - x^3}{\frac{\lambda_0}{h(+0)}\left[\beta_0(t)h(-0) + \int\limits_0^t K(t,\tau)\,d\tau\right]}\psi_1(t) + \frac{1-x^2}{1-\lambda_0\alpha(t)}\varphi_1(t),$$

что в силу (17) определено корректно.

Полагая $u(x,t) = w(x,t) + v_0(x,t)$, в силу условий ($4_{\lambda,v}$), ($5_{\lambda,v}$) получим равенства

$$w_t - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{xt}) - a(x,t)w_{xx} + b(x,t)w_x + c(x,t)w = f_0(x,t), \tag{18}$$

$$w(-1,t) = w(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{19}$$

$$w(x,0)=0, \quad x\in(-1,0)\cup(0,1), \tag{20}$$

$$w(-0,t)=\alpha(t)\lambda_0 w(+0,t), \quad 0<t<T, \tag{21}$$

$$w_x(+0,t)=\frac{\lambda_0}{h(+0)}\Bigg[\beta_0(t)h(-0)w_x(-0,t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)w_x(-0,\tau)d\tau\Bigg], \quad 0<t<T, \tag{22}$$

где

$$f_0(x,t)=f(x,t)-v_{0t}+\frac{\partial}{\partial x}(h(x)v_{0xt})+a(x,t)v_{0xx}-b(x,t)v_{0x}-c(x,t)v_0, \quad 0<t<T.$$

Заметим, что функция $f_0(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$ (в силу того, что функция $v(x,t)$ принадлежит пространству V). Поскольку число λ_0 принадлежит Λ, задача (18)–(22) имеет решение, принадлежащее V. Возвращаясь к функции $u(x,t)$, получим, что задача (1)–(3), $(4_{\lambda,v})$, $(5_{\lambda,v})$ при всех $v(x,t)$ из V имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V. Тем самым эта задача порождает оператор G, переводящий пространство V в себя: $G(v)=u$. Покажем, что при малых $|\tilde{\lambda}|$ этот оператор сжимающий.

Пусть $w(x,t)=u(x,t)-v_0(x,t)$, $\tilde{f}(x,t)=f_0(x,t)-f(x,t)$. Для функции $w(x,t)$ выполняются равенства (19)–(22), а также выполняется уравнение

$$w_t-\frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{xt})-a(x,t)w_{xx}+b(x,t)w_x+c(x,t)w=\tilde{f}(x,t). \tag{23}$$

Для получения необходимых оценок рассмотрим равенство, являющееся следствием (23):

$$\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0\left(w_\tau-\frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{x\tau})-a(x,\tau)w_{xx}+b(x,\tau)w_x+c(x,\tau)w-\tilde{f}(x,\tau)\right) \times\left(w-\frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_x)+w_\tau-\frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{x\tau})\right)dxd\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(w_\tau-\frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{x\tau})-a(x,\tau)w_{xx}+b(x,\tau)w_x+c(x,\tau)w-\tilde{f}(x,\tau)\right) \times\gamma(\tau)\left(w-\frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_x)+w_\tau-\frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{x\tau})\right)dxd\tau=0. \tag{24}$$

Проинтегрировав в равенстве (24) по частям, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 w^2(x,t)\,dx+\frac{\gamma(t)}{2}\int\limits_0^1 w^2(x,t)\,dx+\int\limits_{-1}^0 h(x)w_x^2(x,t)\,dx+\gamma(t)\int\limits_0^1 h(x)w_x^2(x,t)\,dx$$

$$
\begin{gathered}
+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} h'^2(x)w_x^2(x,t)\,dx+\frac{\gamma(t)}{2}\int\limits_{0}^{1} h'^2(x)w_x^2(x,t)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} h^2(x)w_{xx}^2(x,t)\,dx\\
+\frac{\gamma(t)}{2}\int\limits_{0}^{1} h^2(x)w_{xx}^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0} w_\tau^2\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \gamma(\tau)w_\tau^2\,dxd\tau\\
+\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0} h^2(x)w_{x\tau}^2\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \gamma(\tau)h^2(x)w_{x\tau}^2\,dxd\tau\\
+\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0} h'^2(x)w_{x\tau}^2\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \gamma(\tau)h'^2(x)w_{x\tau}^2\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0} h^2(x)w_{xx\tau}^2\,dxd\tau\\
+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \gamma(\tau)h^2(x)w_{xx\tau}^2\,dxd\tau=h(-0)w(-0,t)w_x(-0,t)-\gamma(t)h(+0)w(+0,t)w_x(+0,t)\\
+\int\limits_0^t h(-0)w_{x\tau}(-0,\tau)w_\tau(-0,\tau)d\tau-\int\limits_0^t \gamma(\tau)h(+0)w_{x\tau}(+0,\tau)w_\tau(+0,\tau)d\tau\\
-\int\limits_{-1}^{0} h'(x)h(x)w_x(x,t)w_{xx}(x,t)\,dx-\gamma(t)\int\limits_0^1 h'(x)h(x)w_x(x,t)w_{xx}(x,t)\,dx\\
-2\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0} h'(x)h(x)w_{x\tau}w_{xx\tau}\,dxd\tau-2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \gamma(\tau)h'(x)h(x)w_{x\tau}w_{xx\tau}\,dxd\tau\\
+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \gamma'(\tau)w^2\,dxd\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \gamma'(\tau)h'(x)ww_x\,dxd\tau\\
-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \gamma'(\tau)h(x)ww_{xx}\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \gamma'(\tau)h'^2(x)w_x^2\,dxd\tau\\
+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \gamma'(\tau)h'(x)h(x)w_xw_{xx}\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \gamma'(\tau)h^2(x)w_{xx}^2\,dxd\tau\\
+\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{0}(a(x,\tau)w_{xx}-b(x,\tau)w_x-c(x,\tau)w+\tilde f(x,\tau))\\
\times\left(w-\frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_x)+w_\tau-\frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{x\tau})\right)\\
+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \gamma(\tau)(a(x,\tau)w_{xx}-b(x,\tau)w_x-c(x,\tau)w+\tilde f(x,\tau))
\end{gathered}
$$

$$\times\left(w - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_x) + w_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{x\tau})\right). \quad (25)$$

Введем обозначение

$$I_2 = \int_0^t h(-0)w_{x\tau}(-0,\tau)w_\tau(-0,\tau)\,d\tau - \int_0^t \gamma(\tau)h(+0)w_{x\tau}(+0,\tau)w_\tau(+0,\tau)\,d\tau. \quad (26)$$

Используя условия (19)–(22), приведем (26) к виду

$$I_2 = h(-0)\int_0^t \alpha'(\tau)w_{x\tau}(-0,\tau)w(+0,\tau)\,d\tau$$

$$- h(-0)\int_0^t \beta_0'(\tau)\gamma(\tau)w_x(-0,\tau)w_\tau(+0,\tau)\,d\tau$$

$$- \int_0^t \gamma(\tau)K(\tau,\tau)w_\tau(+0,\tau)w_x(-0,\tau)\,d\tau$$

$$- \int_0^t \gamma(\tau)w_\tau(+0,\tau)\int_0^\tau K_\tau(\tau,\xi)w_x(-0,\xi)\,d\xi d\tau.$$

Применяя неравенства $(*)$, Гёльдера, Юнга и лемму Гронуолла, как и выше, получим, что следствием равенства (25) будет оценка

$$\|w(x,t)\|_V^2 \le M_2||\tilde{f}(x,t)||^2_{L_2(Q)},$$

где число M_2 представлено через λ и определяется функциями $h(x)$, $\gamma(\tau)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $K(x,t)$. Перейдя к функции $w(x,t) = u(x,t) - v_0(x,t)$, получим

$$\|u(x,t)\|_V^2 \le M_3|\tilde{\lambda}||v(x,t)|_{L_2(Q)},$$

где число M_3 также определяется функциями $h(x)$, $\gamma(\tau)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $K(x,t)$.

Пусть $\tilde{\lambda}$ настолько мало, что выполняется неравенство

$$M_3|\tilde{\lambda}| < 1.$$

Для таких чисел $\tilde{\lambda}$ отображение G будет сжимающим и, следовательно, будет иметь неподвижную точку $u(x,t)$: $G(u) = u$. Отсюда и получим, что число $\lambda_0 + \tilde{\lambda}$ принадлежит Λ и тем самым что Λ открыто.

Докажем теперь, что Λ замкнуто. Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность элементов множества Λ такая, что $\lambda_k \to \lambda_0$. Покажем, что λ_0 также принадлежит Λ. Пусть $u_k(x,t)$ — решение задачи (1)–(3), (4_{λ_k}), (5_{λ_k}). Вследствие принадлежности чисел λ_k множеству Λ функции u_k будут принадлежать пространству V. Обозначим через $w_{km}(x,t)$ функцию $u_k(x,t) - u_m(x,t)$. Имеют место следующие равенства:

$$w_{kmt} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{kmxt}) - a(x,t)w_{kmxx} + b(x,t)w_{kmx} + c(x,t)w_{km} = 0, \quad (27)$$

$$w_{km}(-1,t) = w_{km}(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{28}$$

$$w_{km}(x,0) = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1), \tag{29}$$

$$w_{km}(-0,t) = \alpha(t)\lambda_k w_{km}(+0,t) + (\lambda_k - \lambda_m)\alpha(t)u_m(+0,t), \quad 0 < t < T, \tag{30}$$

$$w_{kmx}(+0,t) = \frac{\lambda_k}{h(+0)}\left[\beta_0(t)h(-0)w_{kmx}(-0,t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)w_{kmx}(-0,\tau)\,d\tau\right]$$

$$+\frac{\lambda_k-\lambda_m}{h(+0)}\left[\beta_0(t)h(-0)u_{mx}(-0,t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)u_{mx}(-0,\tau)\,d\tau\right], \quad 0 < t < T. \tag{31}$$

Умножим равенство (27) на

$$w_{km} + w_{km\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{kmx}) - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{kmx\tau})$$

и проинтегрируем по области Q_1, умножим равенство (27) на

$$\gamma(t)\left[w_{km} + w_{km\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{kmx}) - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{kmx\tau})\right]$$

и проинтегрируем по области Q_2. Суммируя полученные равенства, интегрируя по частям и используя условия (28)–(31), а также применяя неравенства Гёльдера, Юнга, $(*)$ и лемму Гронуолла, получим следующую оценку:

$$\|w_{km}(x,t)\|^2 \le M_4|\lambda_k - \lambda_m|^2, \tag{32}$$

в которой число M_4 определяется функциями $h(x)$, $\gamma(\tau)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $K(x,t)$.

Из (32) следует, что $\{u_k(x,t)\}$ есть фундаментальная в пространстве V последовательность. Поскольку V банахово, существует функция $u(x,t)$ из этого пространства, являющаяся пределом семейства функций $\{u_k(x,t)\}$. Переходя к пределу в семействе задач (1)–(3), (4_{λ_k}), (5_{λ_k}) при $k \to \infty$, получим, что предельная функция $u(x,t)$ будет решением задачи (1)–(3), (4_{λ_0}), (5_{λ_0}), принадлежащим пространству V, это и означает, что число λ_0 принадлежит Λ.

Таким образом, множество Λ непусто, открыто и замкнуто. Следствием этого является совпадение со всем отрезком $[0,1]$ и то, что задача I$'$ разрешима в пространстве V. Теорема доказана.

3. Разрешимость задачи сопряжения II$'$

Как и в предыдущей задаче, сначала докажем единственность решений.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (8)–(12). *Тогда задача сопряжения* II$'$ *имеет в пространстве* V_2 *не более одного решения.*

Доказательство. Рассмотрим равенство, являющееся следствием уравнения (6):

$$\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0\Big[u_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{x\tau}) - a(x,\tau)u_{xx}$$

$$+ b(x,\tau)u_x + c(x,\tau)u\Big] \left(u_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x)\right) dxd\tau$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \Big[u_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{x\tau}) - a(x,\tau)u_{xx}$$
$$+ b(x,\tau)u_x + c(x,\tau)u\Big]\gamma(\tau)\left(u_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x)\right) dxd\tau = 0.$$

Интегрируя по частям и используя начальные условия, перейдем от данного равенства к следующему:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 u_t^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \gamma(t)u_t^2(x,t)\,dx + \int\limits_{-1}^0 h'^2(x)u_x^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 \gamma(t)h'^2(x)u_x^2(x,t)\,dx$$
$$+ \int\limits_{-1}^0 h^2(x)u_{xx}^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 \gamma(t)h^2(x)u_{xx}^2(x,t)\,dx = h(-0)u_x(-0,t)u_t(-0,t)$$
$$- \gamma(t)h(+0)u_x(+0,t)u_t(+0,t) - \int\limits_{-1}^0 h(x)u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\,dx$$
$$- \int\limits_0^1 \gamma(t)h(x)u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\,dx$$
$$- 2\int\limits_{-1}^0 h'(x)h(x)u_x(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx - 2\int\limits_0^1 \gamma(t)h'(x)h(x)u_x(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{-1}^0 [a(x,\tau)u_{xx} - b(x,\tau)u_x - c(x,\tau)u]\left(u_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x)\right) dxd\tau$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \gamma(\tau)[a(x,\tau)u_{xx} - b(x,\tau)u_x - c(x,\tau)u]\left(u_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x)\right) dxd\tau.$$

Применяя условия сопряжения и неравенства $(*)$, Гёльдера, Юнга, а также используя равенство (33), получим неравенство вида

$$k_2\Bigg[\int\limits_{-1}^0 u_t^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 \gamma(t)u_t^2(x,t)\,dx + \int\limits_{-1}^0 u_{xt}^2(x,t)\,dx$$
$$+ \int\limits_0^1 \gamma(t)u_{xt}^2(x,t)\,dx + \int\limits_{-1}^0 u_{xxt}^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 \gamma(t)u_{xxt}^2(x,t)\,dx\Bigg]$$
$$\le C_3\Bigg[\int\limits_0^t \int\limits_{-1}^0 u^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \gamma(\tau)u^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{-1}^0 u_x^2\,dxd\tau$$

$$+\int_0^t\int_0^1 \gamma(\tau)u_x^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_{-1}^0 u_\tau^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 \gamma(\tau)u_\tau^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_{-1}^0 u_{xx}^2\,dxd\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^1 \gamma(\tau)u_{xx}^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_{-1}^0 u_{x\tau}^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 \gamma(\tau)u_{x\tau}^2\,dxd\tau$$
$$\left.+\int_0^t\int_{-1}^0 u_{xx\tau}^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 \gamma(\tau)u_{xx\tau}^2\,dxd\tau\right], \quad (34)$$

где число k_2 определяется функциями $h(x)$, $\gamma(\tau)$, а C_3 — функциями $h(x)$, $\gamma(\tau)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $N(x,t)$.

Введем обозначение

$$z_2(t)=\int_{-1}^0 u_{xt}^2(x,t)\,dx+\int_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx+\int_{-1}^0 u_t^2(x,t)\,dx$$
$$+\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx+\int_{-1}^0 u_{xxt}^2(x,t)\,dx+\int_0^1 u_{xxt}^2(x,t)\,dx.$$

Тогда следствием (34) будет неравенство

$$z_2(t)\le M_5\int_0^t z_2(\tau)\,d(\tau),$$

где M_5 определяется функциями $h(x)$, $\gamma(\tau)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $K(x,t)$.

Применяя лемму Гронуолла, из этого неравенства получим $z_2(t)\equiv 0$ при $t\in[0,T]$, откуда имеют место тождества $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{Q_1}$, $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{Q_2}$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (8)–(12). *Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ задача сопряжения* II′ *имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_2.*

Доказательство теоремы также основано на методе продолжения по параметру [33, с. 146–148]. Рассматривается задача: найти решение уравнения (6) такое, что для него выполняются условия (2), (3), а также условия (4_λ) и (5_λ). Λ — это множество чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых исследуемая задача разрешима в пространстве V_2 для любой функции $f(x,t)$, принадлежащей пространству $L_2(Q)$. Если множество Λ непусто, открыто и замкнуто, то оно будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$.

Множество Λ непусто в силу разрешимости задачи (6), (2), (3), (4_λ), (5_λ) при $\lambda=0$ [36]. Для доказательства открытости и замкнутости множества Λ достаточно показать наличие для всех решений исследуемой задачи равномерной по λ априорной оценки вида

$$\|u\|_{V_2}\le M_6\|f\|_{L_2(Q)}. \quad (35)$$

Для получения необходимой оценки умножим уравнение (6) на выражение $u_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{x\tau})$ и проинтегрируем по области Q_1, умножим уравнение (6) на $\gamma(t)(u_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{x\tau}))$ и проинтегрируем по области Q_2, затем полученные равенства суммируем. Интегрируя по частям, используя условия теоремы, неравенства (∗), Гёльдера, Юнга, как и выше, получим

$$k_3\left[\int_0^t\int_{-1}^0 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau + \int_0^t\int_0^1 \gamma(\tau)u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau + \int_0^t\int_{-1}^0 u_{x\tau}^2\,dxd\tau + \int_0^t\int_0^1 \gamma(\tau)u_{x\tau}^2\,dxd\tau\right.$$
$$\left.\int_0^t\int_{-1}^0 u_{xx\tau}^2\,dxd\tau + \int_0^t\int_0^1 \gamma(\tau)u_{xx\tau}^2\,dxd\tau\right]$$
$$\leq C_4\left[\int_0^t\int_{-1}^0 f^2(x,\tau)\,dxd\tau + \int_0^t\int_0^1 \gamma(\tau)f^2(x,\tau)\,dxd\tau\right], \quad (36)$$

где k_3 определяется функциями $h(x)$, $\gamma(\tau)$, а C_4 определяется λ и функциями $h(x)$, $\gamma(\tau)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $K(x,t)$.

Из неравенства (36) нетрудно получить оценку (35). Таким образом, множество Λ непусто, открыто и замкнуто и, следовательно, исходная задача разрешима в пространстве V. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, вып. 3. С. 3–19.

2. *Олейник О. А.* Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типов с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25. № 1. С. 3–20.

3. *Ильин В. А.* О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 1. С. 28–30.

4. *Ильин В. А.* Метод Фурье для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 1. С. 21–24.

5. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Метод потенциалов для задач Дирихле и Неймана в случае уравнения с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 1. С. 46–58.

6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

7. *Ильин В. А., Луференко П. В.* Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности, разные упругости, но одинаковые импедансы // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 1. С. 12–15.

8. *Андропова О. А.* Спектральные задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии // Тр. ИПММ НАН Украины. 2009. Т. 19. С. 10–22.

9. *Рогожников А. М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волн по каждому из этих участков // Докл. АН. 2012. Т. 441, № 4. С. 449–451.

10. *Кулешов А. А.* Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Докл. АН. 2012. Т. 442, № 4. С. 451–454.

11. *Рогожников А.М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Докл. АН. 2012. Т. 444, № 5. С. 488–491.

12. *Смирнов И. Н.* О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 49, № 5. С. 643–648.

13. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

14. *Ладыженская О. А., Ступялис Л.* Об уравнениях смешанного типа // Вестн. ЛГУ. 1967. № 18. С. 38–46.

15. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.

16. *Ладыженская О. А., Ступялис Л.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 116. С. 101–136.

17. *Ступялис Л.* Краевые задачи для эллиптико-гиперболических уравнений // Тр. МИАН СССР. 1973. Т. 125. С. 211–229.

18. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Ин-т математики, 1982.

19. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1986.

20. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

21. *Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В.* Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 633–647.

22. *Кожанов А. И.* Задача сопряжения для одного класса уравнений составного типа перменного направления // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. С. 96–109.

23. *Bouziani A., Merazga N.* Solution to a transmission problem for quasilinear pseudoparabolic equations by the Rothe method // Electronic Journal of Differential Equ. 2007. № 14. P. 1–27.

24. *Шубин В. В.* Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 1. С. 126–138.

25. *Potapova S. V.* Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction // TWMS J. Pure Appl. Math. 2012. V. 3, № 1. P. 73–91.

26. *Кожанов А. И., Шарин Е. Ф.* Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Укр. мат. вiсник. 2014. Т. 11, № 2. С. 181–202.

27. *Кожанов А. И., Потапова С. В.* Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 14, № 1. С. 48–65.

28. *Антипин В.И.* Разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 8–15.

29. *Pyatkov S. G., Popov S., Antipin V. I.* On solvability of boundary value problem for kinetic operator-differential equations // Integral Equ. Operator Theory. 2014. V. 80, № 4. P. 557–580.

30. *von Petersdorff T.* Boundary integral equations for mixed Dirichlet, Neumann and transmission problems // Math. Meth. Appl. Sci. V. 11. 1989. P. 185–213.

31. *Никольский Д. Н.* Эволюция раздела различных жидкостей в неоднородных слоях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 7. С. 1269–1275.

32. *Никольский Д. Н.* Трехмерная эволюция границы загрязнения в ограниченной кусочно-пористой среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 5. С. 913–919.

33. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007.

34. *Соболев С. Л.* Об одной краевой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 2. С. 3–50.

35. *Демиденко Г. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной Новосибирск: Науч. кн., 1998.

36. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.

37. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroup of operators. Utrecht: VSP, 2003.
38. *Hayashi N., Kaikina E. I., Naumkin P. I., Shishmarev I. A.* Asymptotic for dissipative nonlinear equations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2006.
39. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
40. *Корпусов М. О.* Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: Либроком, 2011.

Статья поступила 1 августа 2016 г.

Григорьева Александрв Ивановна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
shadrina_ai

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

UDC 517.946

THE CONJUGATION PROBLEM FOR PSEUDOPARABOLIC AND PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS

A. I. Grigorieva

Abstract. We study solvability of a conjugation problem for pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations. The equations are considered as equations with discontinuous coefficients. We prove the existence and uniqueness theorem using natural parameter continuation.
Keywords: pseudoparabolic equation, pseudohyperbolic equation, discontinuous coefficient, conjugation problem.

REFERENCES

1. *Gelfand I. M.* "Some questions of analysis and differential equations," Usp. Mat. Nauk, **14**, No. 3, 3–19 (1959).
2. *Oleinik O. A.* "Boundary value problems for linear equations of elliptic and parabolic type with discontinuous coefficients," Izv. AN USSR, Ser. Mat., **25**, No. 1, 3–20 (1961).
3. *Ilyin V. A.* "On the solvability of the Dirichlet and Neumann problems for linear elliptic operator with discontinuous coefficients," Dokl. Akad. Nauk, **137**, No. 1, 28–30 (1961).
4. *Ilyin V. A.* "Fourier method for hyperbolic equations with discontinuous coefficients," Dokl. Akad. Nauk, **142**, No. 1, 21–24 (1962).
5. *Ilyin V. A. and Shishmarev I. A.* "Potential method for the Dirichlet and Neumann problems in the case of equations with discontinuous coefficients," Sib. Math. J., **2**, No. 1, 46–58 (1961).
6. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Uraltseva N. N.*, Linear and quasilinear parabolic equations [in Russian], Nauka, Moscow, 1967.
7. *Ilyin V. A. and Luferenko P. V.* "Mixed problems describing the longitudinal vibrations of a rod consisting of two segments with different densities, different elastic, but the same impedances," Dokl. Math., **428**, No. 1, 12–15 (2009).
8. *Andropova O. A.* "Spectral problems interfacing with surface dissipation of energy," Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh., **19**, 10–22 (2009).
9. *Rogozhnikov A. M.* "Study of the mixed problem, describing the process of shaft vibrations, which consists of several sections, provided match the transit time of waves in each of these areas," Dokl. Math., **441**, No. 4, 449–451 (2012).
10. *Kuleshov A. A.* "Mixed problem for the equation of longitudinal vibrations of an inhomogeneous bar with a free or fixed right end, consisting of two sections of different density and elasticity," Dokl. Math., **442**, No. 4, 451-454 (2012).
11. *Rogozhnikov A. M.* "Study of the mixed problem, describing the process of shaft vibrations, consisting of several sections with arbitrary lengths," Dokl. Math., **444**, No. 5, 488–491 (2012).
12. *Smirnov I. N.* "Oscillations described by the telegraph equation for a system consisting of several sections of different density and elasticity," Differ. Equ., **49**, No. 5, 643–648 (2012).
13. *Bitsadze A. V.*, Mixed type equations, AN USSR, Kiev (1959).
14. *Ladyzhenskaya O. A. and Stupyalis L.* "About mixed type equations," Vestn. Leningrad. Univ., No. 18, 38–46 (1967).
15. *Smirnov I. N.*, Mixed type equations, Nauka, Moscow (1970).

16. *Ladyzhenskaya O. A. and Stupyalis L.* “Boundary value problems for mixed type equations,” Tr. Mat. Inst. Steklova, **116**, 101–136 (1971).

17. *Stupyalis L.* “Boundary value problems for for elliptic-hyperbolic equations,” Tr. Mat. Inst. Steklova, **125**, 211–229 (1973).

18. *Tersenov S. A.*, Introduction to the theory of parabolic equations with a varying direction of time, Inst. Mat., Novosibirsk (1982).

19. *Juraev T. D.*, Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types, Fan, Tashkent (1986).

20. *Moiseev E. I.*, Mixed type equations with a spectral parameter, Izd. Moskov. Univ., Moscow (1988).

21. *Sabitov K. B. and Martemyanova N. V.* “The inverse problem for an equation of elliptic-hyperbolic type with a nonlocal boundary condition,” Sib. Math. J., **53**, No. 3, 633–647 (2012).

22. *Kozhanov A. I.* “A conjugation problem for a class of composite type equations with changing direction,” in: Nonclassical Equ. Math. Phys., Inst. Math., Novosibirsk, 96–109 (2002).

23. *Bouziani A. and Merazga N.* “Solution to a transmission problem for quasilinear pseudoparabolic equations by the Rothe method,” Electron. J. Differ. Equ., No. 14, 1–27 (2007).

24. *Shubin V. V.* “Boundary problems for third-order equations with discontinuous coefficients,” Vestn. Novosib. Gos. Univ., **12**, No. 1, 126–138 (2012).

25. *Potapova S. V.* “Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction. TWMS,” J. Pure Appl. Math., **3**, No. 1, 73–91 (2012).

26. *Kozhanov A. I. and Sharin E. F.* “A conjugation problem for some nonclassical differential equations of higher order,” Ukr. Mat. Vestn., **11**, No. 2, 181–202 (2014).

27. *Kozhanov A. I. and Potapova S. V.* “The Dirichlet problem for a class of composite type equations with a discontinuous coefficient of the highest derivative,” Dalnevost. Math. J., **14**, No. 1, 48–65 (2014).

28. *Antipin V. I.* “The solvability of the boundary value problem for a third-order equation with changing time direction,” Mat. Zamet. YaGU, **18**, No. 1, 8–5 (2011).

29. *Pyatkov S. G., Popov S., and Antipin V. I.* “On solvability of boundary value problems for kinetic operator-differential equations,” Integral Equ. Operator Theory, **80**, No. 4, 557–580 (2014).

30. *Von Petersdorff T.,* “Boundary integral equations for mixed Dirichlet, Neumann and transmission problems,” Math. Mech. Appl. Sci. **11**, 185–213 (1989).

31. *Nikolskiy D. N.* “Evolution section of various liquids in non-uniform layers,” Comput. Math. Math. Phys., **50**, No 7, 1269–1275 (2010).

32. *Nikolskiy D. N.* “The three-dimensional pollution in the border bounded by a piecewise-porous medium,” Comput. Math. Math. Phys., **51**, No. 5, 913–919 (2011).

33. *Trenogin V. A.*, Functional analysis, Fizmatlit, Moscow (2007).

34. *Sobolev S. L.*, “On a boundary problem of mathematical physics,” Izv. Akad. Nauk, **18**, No. 2, 3–50 (1954).

35. *Demidenko G. V.*, Equations and systems unsolvable with respect to the higher derivative, Nauchn. Kniga, Novosibirsk (1998).

36. *Kozhanov A. I.*, Composite type equations and inverse problems, VSP, Utrecht (1999).

37. *Sviridyuk G. A. and Fedorov V. E.*, Linear Sobolev type equations and degenerate semigroup of operators, VSP, Utrecht (2003).

38. *Hayashi N., Kaikina E. I., Naumkin P. I., and Shishmarev I. A.*, Asymptotic for dissipative nonlinear equations, Springer-Verl., Berlin; Heidelberg (2006).

39. *Sveshnikov A. G., Alshin A. B., Korpusov M. O., and Pletner Yu. D.*, Linear and non-linear equations of Sobolev type, Fizmatlit, Moscow (2007).

40. *Korpusov M. O.*, The destruction of solutions in the nonclassical non-local equations, Librokom, Moscow (2011).

Submitted August 1, 2016

Alexandra Ivanovna Grigorieva
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovskii Street, Yakutsk 677000, Russia
`shadrina_ai@mail.ru`

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

УДК 519.172.2

ОПИСАНИЕ ГРАНЕЙ В 3–МНОГОГРАННИКАХ БЕЗ ВЕРШИН СТЕПЕНЕЙ ОТ 4 ДО 9

А. О. Иванова

Аннотация. В 1940 г. Лебег доказал, что в каждой нормальной плоской карте найдется грань, набор степеней инцидентных вершин которой мажорируется одной из следующих последовательностей: $(3,6,\infty)$, $(3,7,41)$, $(3,8,23)$, $(3,9,17)$, $(3,10,14)$, $(3,11,13)$, $(4,4,\infty)$, $(4,5,19)$, $(4,6,11)$, $(4,7,9)$, $(5,5,9)$, $(5,6,7)$, $(3,3,3,\infty)$, $(3,3,4,11)$, $(3,3,5,7)$, $(3,4,4,5)$, $(3,3,3,3,5)$.

В данной заметке доказывается, что в каждом 3-многограннике, не содержащем вершины степеней от 4 до 9, найдется грань, набор степеней инцидентных вершин которой мажорируется одной из следующих последовательностей: $(3,3,\infty)$, $(3,10,12)$, $(3,3,3,\infty)$, $(3,3,3,3,3)$, где все параметры точны.

Ключевые слова: плоский граф, плоская карта, структурные свойства, 3-многогранник, вес.

1. Введение

Степень $d(v)$ вершины v ($r(f)$ грани f) в нормальной плоской карте M есть число инцидентных ей ребер (петли учитываются дважды в $d(v)$, а разделяющие ребра — дважды в $r(f)$). Через Δ и δ обозначим максимальную и минимальную степени вершин в M соответственно. Под *k-вершиной* (*k-гранью*) подразумеваем вершину (грань) степени k; *k^+-вершина* имеет степень не менее k, и т. д.

Хорошо известно, что каждая *нормальная* плоская карта, в которой допускаются петли и кратные ребра, но степень каждой вершины и каждой грани не менее трех, содержит 5^--вершину и 5^--грань. Далее через M будем обозначать нормальную плоскую карту.

Весом грани в M называется сумма степеней ее граничных вершин, а $w(M)$, или просто w, обозначает минимальный вес 5^--граней в M. Будем говорить, что f является *гранью типа* $(k_1,k_2,\dots)$ или просто $(k_1,k_2,\dots)$*-гранью*, если множество степеней вершин, инцидентных f, мажорируется вектором $(k_1,k_2,\dots)$.

Еще в 1940 г. Лебег [1] дал описание 5^--граней в нормальных плоских картах.

Работа выполнена в рамках государственной работы «Организация проведения научных исследований» и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 15–01–05867 и 16–01–00499).

Теорема 1 (Лебег [1]). *Каждая нормальная плоская карта содержит* 5^--*грань одного из следующих типов:*

$$(3,6,\infty),\quad (3,7,41),\quad (3,8,23),\quad (3,9,17),\quad (3,10,14),\quad (3,11,13),$$

$$(4,4,\infty),\quad (4,5,19),\quad (4,6,11),\quad (4,7,9),\quad (5,5,9),\quad (5,6,7),$$

$$(3,3,3,\infty),\quad (3,3,4,11),\quad (3,3,5,7),\quad (3,4,4,5),\quad (3,3,3,3,5).$$

Теорема 1, как и другие идеи Лебега [1], нашли множество приложений в задачах раскраски плоских графов (первое из таких приложений и недавний обзор можно найти в [2–4]).

Некоторые параметры лебеговской теоремы были улучшены для узких классов плоских графов. Коциг [5] в 1963 г. доказал, что для каждой плоской триангуляции с $\delta = 5$ верно неравенство $w \le 18$ и выдвинул гипотезу, что $w \le 17$. В 1989 г. гипотезу Коцига в более общем виде подтвердил О. В. Бородин [6].

Теорема 2 (Бородин [6]). *В каждой нормальной плоской карте с* $\delta = 5$ *найдется* $(5,5,7)$-*грань или* $(5,6,6)$-*грань, где все параметры точны.*

Кроме того, теорема 2 подтверждает гипотезу Грюнбаума [7] 1975 г. о том, что циклическая связность (минимальное число ребер, при удалении которых из графа получается две компоненты, каждая из которых содержит цикл) каждого 5-связного плоского графа не превосходит 11, причем оценка точна (ранее Пламмером [8] была получена оценка 13).

Под 3-*многогранником* мы подразумеваем конечный 3-связный выпуклый многогранник. Еще в 1922 г. Штейниц [9] доказал, что 3-многогранники взаимно однозначно соответствуют 3-связным плоским графам. Как показывает n-пирамида, двойная n-пирамида и схожая с ними конструкция, в которой каждая 3-грань инцидентна 3-вершине, 4-вершине и n-вершине, 3-многогранники, содержащие $(4,4,\infty)$-грани, могут иметь неограниченный w. То же верно для $(3,3,3,\infty)$-граней. Чтобы убедиться в этом, возьмем двойную $2n$-пирамиду и удалим в ней все верхние нечетные ребра и нижние четные; в полученной четыреангуляции все грани являются $(3,3,3,n)$-гранями.

Для плоских триангуляций, не содержащих 4-вершины, Коциг [10] доказал, что $w \le 39$, а О. В. Бородин [11], подтверждая гипотезу Коцига [10], доказал, что $w \le 29$. Оценка 29 неулучшаема, как следует из дважды усеченного додекаэдра. В дальнейшем О. В. Бородин [12] показал, что каждый триангулированный 3-многогранник без $(4,4,\infty)$-граней удовлетворяет неравенству $w \le 29$, а для каждой триангуляции без смежных 4-вершин имеет место точная оценка $w \le 37$.

Для произвольных плоских нормальных карт теорема 1 влечет $w \le \max\{51, \Delta + 9\}$. Хорняк и Йендроль [13] усилили это неравенство следующим образом: если не существует ни $(4,4,\infty)$-граней, ни $(3,3,3,\infty)$-граней, то $w \le 47$. О. В. Бородин и Вудал [14] доказали, что запрет $(3,3,3,\infty)$-граней влечет $w \le \max\{29, \Delta + 8\}$.

Также в [13] рассматривается минимальный вес w^* по всем граням вместо веса только 5^--граней, как это делалось ранее, начиная с Лебега [1]. Очевидно, что $w^* \le w$. Хорняк и Йендроль [13] доказали, что любая плоская нормальная карта без $(4,4,\infty)$-граней и $(3,3,3,\infty)$-граней имеет $w^* \le 32$.

Для четыреангулированных 3-многогранников С. В. Августинович и О. В. Бородин [15] улучшили описание 4-граней, вытекающее из теоремы Лебега, следующим образом: $(3,3,3,\infty)$, $(3,3,4,10)$, $(3,3,5,7)$, $(3,4,4,5)$.

Другие результаты, связанные с теоремой Лебега, можно найти в перечисленных выше статьях, в недавнем обзоре Йендроля и Фосса [16], а также в [14, 17–25].

В 2002 г. О. В. Бородин [26] усилил теорему 1 Лебега следующим образом (где звездочками помечены неулучшаемые параметры, доказанные в [26]).

Теорема 3 (Бородин [26]). *В каждой нормальной плоской карте найдется 5^--грань одного из следующих типов:*

$$(3,6,\infty^*),\quad (3,8^*,22),\quad (3,9^*,15),\quad (3,10^*,13),\quad (3,11^*,12),$$

$$(4,4,\infty^*),\quad (4,5^*,17),\quad (4,6^*,11),\quad (4,7^*,8),\quad (5,5^*,8),\quad (5,6,6^*),$$

$$(3,3,3,\infty^*),\quad (3,3,4^*,11),\quad (3,3,5^*,7),\quad (3,4,4,5^*),\quad (3,3,3,3,5^*).$$

Недавно О. В. Бородин и А. О. Иванова [27] получили точное описание 3-граней в нормальных плоских картах (в частности, в плоских графах) с $\delta \ge 4$.

Теорема 4 (Бородин, Иванова [27]). *Каждая нормальная плоская карта без 3-вершин содержит 3-грань одного из следующих типов:*

(Ta) $(4,4,\infty)$,
(Tb) $(4,5,14)$,
(Tc) $(4,6,10)$,
(Td) $(4,7,7)$,
(Te) $(5,5,7)$,
(Tf) $(5,6,6)$.

Более того, все параметры в (Ta)–(Tf) точные и достигаются независимо друг от друга.

Целью данной заметки является доказательство следующего факта.

Теорема 5. *Каждый 3-многогранник без вершин степеней от 4 до 9 содержит 5^--грань одного из следующих типов:* $(3,3,\infty)$, $(3,10,12)$, $(3,3,3,\infty)$, $(3,3,3,3,3)$, *где все параметры точны.*

Из теоремы 3 следует, что при запрете вершин степеней от 6 до 9 остаются 5^--грани следующих типов: $(3,10,13)$, $(3,11,12)$, $(3,3,\infty)$, $(3,3,3,\infty)$, $(3,3,3,3,3)$. В теореме 5 имеем только $(3,10,12)$ вместо $(3,10,13)$ и $(3,11,12)$, где параметры 10 и 12 в типе $(3,10,12)$ точные.

2. Доказательство теоремы

Все параметры в теореме 5 точные. Конструкции, подтверждающие точность типов $(3, 3, \infty)$ и $(3, 3, 3, \infty)$, описаны во введении, а точность типа $(3, 3, 3, 3, 3)$ следует из додекаэдра. Чтобы подтвердить точность типа $(3, 10, 12)$, возьмем хорошо известную триангуляцию, в которой имеются только 5-вершины и 6-вершины, причем каждая из 5-вершин окружена 6-вершинами, и вставим 3-вершину в каждую 3-грань.

Предположим, что 3-многогранник M' является контрпримером к теореме 5. Пусть M — контрпример к теореме 5 на том же множестве вершин, что и M', но имеющий наибольшее число ребер.

Замечание 1. В M нет 4^+-грани $v_1v_2\ldots$, где $d(v_1) \geq 10$ и $d(v_3) \geq 10$. Действительно, иначе проведем диагональ v_1v_3, что противоречит максимальности M.

2.1. Перераспределение зарядов. Множества вершин, ребер и граней контрпримера M обозначим через V, E и F соответственно. Из формулы Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для M следует

$$\sum_{v\in V}(d(v) - 6) + \sum_{f\in F}(2r(f) - 6) = -12. \tag{1}$$

Положим *начальный заряд* $\mu(v)$ равным $d(v) - 6$ для каждой вершины v и $\mu(f)$ — равным $2d(f) - 6$ для каждой грани f; таким образом, только 5^--вершины имеют отрицательный начальный заряд. С учетом свойств контрпримера M локально перераспределим начальные заряды вершин и граней, при этом сохраняя их сумму, таким образом, что *новый заряд* $\mu'(x)$ для всех $x \in V \cup F$ будет неотрицательным. Полученное из (1) противоречие завершит доказательство теоремы 5. Данная техника перераспределения зарядов часто используется при решении структурных задач и задач раскраски плоских графов.

Через $v_1, \ldots, v_{d(v)}$ обозначим соседей вершины v в циклическом порядке вокруг v.

Будем использовать следующие правила перераспределения зарядов (см. рис. 1):

R1. Каждая 4^+-грань дает 1 каждой инцидентной 3-вершине.

R2. Каждая 10-вершина v дает 3-вершине v_1 следующий заряд через грань $f = v_1vv_2\ldots$:

(a) $\frac{2}{5}$, если $d(f) = 3$ и $d(v_2) \geq 10$,
(b) $\frac{1}{5}$, если $d(f) \geq 4$ и $d(v_2) = 3$.

R3. Каждая 11^+-вершина v дает 3-вершине v_1 следующий заряд через грань $f = v_1vv_2$:

(a) $\frac{1}{2}$, если $11 \leq d(v) \leq 12$,
(b) $\frac{11}{20}$, если $d(v) \geq 13$.

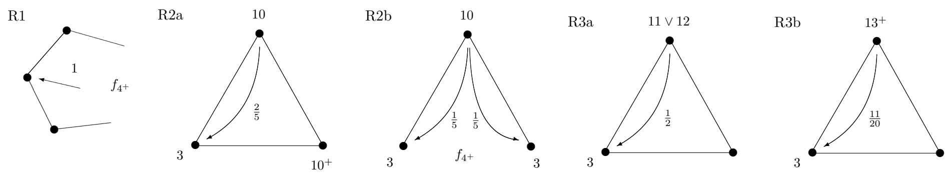

Рис. 1. Правила перераспределения зарядов

2.2. Доказательство неравенства $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$. Сначала рассмотрим грань f в M. Если $d(f) = 3$, то f не участвует в правилах перераспределения зарядов, поэтому $\mu'(v) = \mu(f) = 2 \times 3 - 6 = 0$. Если $d(f) = 4$, то $\mu'(v) = 8 - 6 - 2 \times 1 = 0$ по R1 ввиду отсутствия $(3, 3, 3, \infty)$-граней в M. Если $d(f) = 5$, то $\mu'(v) = 10 - 6 - 4 \times 1 = 0$ по R1 ввиду отсутствия $(3, 3, 3, 3, 3)$-граней в M. Если $d(f) \geq 6$, то $\mu'(v) = 2d(f) - 6 - d(f) \times 1 \geq 0$ по R1.

Пусть далее v является вершиной в M.

Случай 1: $d(v) = 3$. Если v инцидентна трем 4^+-граням, то $\mu'(v) \geq 3 - 6 + 3 \times 1 = 0$ по R1.

Если v инцидентна в точности двум 4^+-граням и 3-грани $v_1 v v_2$, то v получает 1 от каждой 4^+-грани, и нам необходимо получить 1 в сумме от v_1 и v_2. Напомним, что грани типов $(3, 3, \infty)$ и $(3, 10, 12)$ запрещены в M, следовательно, $d(v_1) \geq 10$ и $d(v_2) \geq 10$.

Если $d(v_1) = 10$, то $d(v_2) \geq 13$; тем самым $\mu'(v) \geq -3 + 2 \times 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{11}{20} > 0$ по R1, R2 и R3b.

Если $11 \leq d(v_1) \leq 12$, то $d(v_2) \geq 11$, откуда получаем либо $\mu'(v) \geq -3 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 0$ по R1 и R3a, либо $\mu'(v) \geq -3 + 2 \times 1 + \frac{1}{2} + \frac{11}{20} > 0$ по R1, R3a и R3b.

Заметим, что случай, когда v инцидентна в точности одной 4^+-грани, исключен ввиду отсутствия $(3, 3, \infty)$-граней в M с учетом замечания 1.

Пусть теперь v окружена 3-гранями. Если $d(v_1) = 10$, то $d(v_2) \geq 13$ и $d(v_2) \geq 13$, а следовательно, $\mu'(v) = -3 + 2 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{11}{20} = 0$ по R2 и R3b. Если $d(v_i) \geq 11$ для всех $1 \leq i \leq 3$, то $\mu'(v) \geq -3 + 6 \times \frac{1}{2} = 0$ по R2, R3a и R3b.

Случай 2: $d(v) \geq 10$. Если $d(v) = 10$, то v посылает через каждую грань не более $\frac{2}{5}$ согласно R2, откуда $\mu'(v) \geq 10 - 6 - 10 \times \frac{2}{5} = 0$.

Предположим, что $d(v) = 11$. Если v инцидентна хотя бы одной 4^+-грани, то v ничего не посылает через них, откуда имеем $\mu'(v) \geq 11 - 6 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$ по R3a. Если v окружена только 3-гранями, то она инцидентна не менее чем одной грани, в границе которой нет 3-вершин ввиду нечетности $d(v)$ и отсутствию $(3, 3, \infty)$-граней, и снова $\mu'(v) \geq 11 - 6 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$ по R3a.

Рассуждая так же в случае $d(v) = 13$, получаем $\mu'(v) \geq 13 - 6 - 12 \times \frac{11}{20} > 0$ по R3b.

Если $d(v) = 12$, то $\mu'(v) \geq 12 - 6 - 12 \times \frac{1}{2} = 0$ по R3a.

Наконец, если $d(v) \geq 14$, то имеем $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - d(v) \times \frac{11}{20} = \frac{3(3d(v) - 40)}{20} > 0$ согласно R3b.

Таким образом, доказали, что $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$, что противоречит формуле (1) и завершает доказательство теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.

2. *Borodin O. V.* Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.

3. *Ore O., Plummer M. D.* Cyclic coloration of plane graphs // Recent progress in combinatorics (W. T. Tutte, ed.) New York: Acad. Press, 1969. P. 287–293.

4. *Plummer M. D., Toft B.* Cyclic coloration of 3-polytopes // J. Graph Theory. 1987. V. 11. P. 507–515.

5. *Kotzig A.* From the theory of Eulerian polyhedra (Russian) // Mat. Čas. 1963. V. 13. P. 20–31.

6. *Бородин О. В.* Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. V. 46, N 5. P. 9–12.

7. *Grünbaum B.* Polytopal graphs // Studies in graph theory (D. R. Fulkerson, ed.). 1975. P. 201–224. (MAA Stud. Math.; V. 12).

8. *Plummer M. D.* On the cyclic connectivity of planar graph // Graph theory and application. Berlin: Springer-Verl., 1972. P. 235–242.

9. *Steinitz E.* Polyeder und Raumeinteilungen // Enzykl. math. Wiss. (Geometrie), 3AB. 1922. V. 12. P. 1–139.

10. *Kotzig A.* Extremal polyhedral graphs // Ann. New York Acad. Sci. 1979. V. 319. P. 569–570.

11. *Бородин О. В.* Минимальный вес грани в плоских триангуляциях без 4-вершин // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 16–19.

12. *Borodin O. V.* Triangulated 3-polytopes with restricted minimal weight of faces // Discrete Math. 1998. V. 186. P. 281–285.

13. *Horňák M., Jendrol' S.* Unavoidable sets of face types for planar maps // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16, N 2. P. 123–142.

14. *Бородин О. В., Вудал Д. Р.* Вес граней в плоских картах // Мат. заметки. 1998. V. 6, N 5. P. 648–657.

15. *Августинович С. В., Бородин О. В.* Окрестности ребер в нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 3–9.

16. *Jendrol' S., Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane – a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.

17. *Бородин О. В.* Совместное обобщение теорем Лебега и Коцига о комбинаторике плоских графов // Дискрет. математика. 1991. Т. 3, № 4. С. 24–27.

18. *Бородин О. В., Лопарев Д. В.* Высота младших граней в плоских нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1998. Т. 5, № 4. С. 6–17.

19. *Ferencová B., Madaras T.* On the structure of polyhedral graphs with prescribed edge and dual edge weight // Acta Univ. M. Belii Math. 2005. V. 12. P. 13–18.

20. *Ferencová B., Madaras T.* Light graph in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310. P. 1661–1675.

21. *Jendrol' S.* Triangles with restricted degrees of their boundary vertices in plane triangulations // Discrete Math. 1999. V. 196. P. 177–196.

22. *Madaras T., Soták R.* The 10-cycle C_{10} is light in the family of all plane triangulations with minimum degree five // Tatra Mt. Math. Publ. 1999. V. 18. P. 35–56.

23. *Madaras T., Škrekovski R., Voss H.-J.* The 7-cycle C_7 is light in the family of planar graphs with minimum degree 5 // Discrete Math. 2007. V. 307. P. 1430–1435.

24. *Mohar B., Škrekovski R., Voss H.-J.* Light subraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9 // J. Graph Theory. 2003. V. 44. P. 261–295.

25. *Madaras T., Škrekovski R.* Heavy paths, light stars, and big melons // Discrete Math. 2004. V. 286. P. 115–131.

26. *Бородин О. В.* Усиление теоремы Лебега о строении младших граней в выпуклых многогранниках // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2002. Т. 9, № 3. С. 29–39.

27. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2841–2847.

28. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Cyclic degrees of 3-polytopes // Graphs Comb. 1999. V. 15. P. 267–277.

29. *Kotzig A.* Contribution to the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Čas. 1955. V. 5. P. 101–113.

30. *Wernicke P.* Über den kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58. P. 413–426.

Статья поступила 7 мая 2016 г.

Иванова Анна Олеговна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
`shmgnanna@mail.ru`

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

UDC 519.172.2

DESCRIPTION OF FACES IN 3–POLYTOPES WITHOUT VERTICES OF DEGREE FROM 4 TO 9

A. O. Ivanova

Abstract. In 1940, Lebesgue proved that every normal plane map contains a face for which the set of degrees of its vertices is majorized by one of the following sequences:

$$(3,6,\infty),\ (3,7,41),\ (3,8,23),\ (3,9,17),\ (3,10,14),\ (3,11,13),$$

$$(4,4,\infty),\ (4,5,19),\ (4,6,11),\ (4,7,9),\ (5,5,9),\ (5,6,7),$$

$$(3,3,3,\infty),\ (3,3,4,11),\ (3,3,5,7),\ (3,4,4,5),\ (3,3,3,3,5).$$

In this note prove that every 3-polytope without vertices of degree from 4 to 9 contains a face for which the set of degrees of its vertices is majorized by one of the following sequences: $(3,3,\infty)$, $(3,10,12)$, $(3,3,3,\infty)$, $(3,3,3,3,3)$, which is tight.

Keywords: planar graph, plane map, structure properties, 3-polytope, weight.

REFERENCES

1. *Lebesgue H.* “Quelques conséquences simples de la formule d’Euler,” J. Math. Pures Appl., **19**, 27–43 (1940).
2. *Borodin O. V.* “Colorings of plane graphs: a survey,” Discrete Math., **313**, 4, 517–539 (2013).
3. *Ore O. and Plummer M. D.* “Cyclic coloration of plane graphs,” in: Recent progress in combinatorics (W. T. Tutte, ed.), Acad. Press, New York (1969), pp. 287–293.
4. *Plummer M. D. and Toft B.* “Cyclic coloration of 3-polytopes,” J. Graph Theory **11**, 507–515 (1987)
5. *Kotzig A.* “From the theory of Eulerian polyhedra,” Mat. Čas., **13**, 20–31 (1963).
6. *Borodin O. V.* “Solution of Kotzig’s and Grünbaum’s problems on the separability of a cycle in a planar graph,” Mat. Zametki, **46**, 5, 9–12 (1989)
7. *Grünbaum B.* “Polytopal graphs,” in: Studies in graph theory (D. R. Fulkerson, ed.), Washington, DC, Math. Assoc. Amer. (1975), pp. 201–224. (MAA Stud. Math.; V. 12).
8. *Plummer M. D.* “On the cyclic connectivity of planar graph,” in: Graph theory and application, Springer-Verl., Berlin (1972), pp. 235–242.
9. *Steinitz E.* “Polyeder und Raumeinteilungen,” Enzykl. math. Wiss. (Geometrie), 3AB, **12**, 1–139 (1922).
10. *Kotzig A.* “Extremal polyhedral graphs,” Ann. New York Acad. Sci., **319**, 569–570 (1979).
11. *Borodin O. V.* “Minimal weight of face in plane triangulations without 4-vertices,” Mat. zametki, **51**, 1, 16–19 (1992).
12. *Borodin O. V.* “Triangulated 3-polytopes with restricted minimal weight of faces,” Discrete Math., **186** 281–285 (1998).
13. *Horňák M. and Jendrol’ S.* “Unavoidable sets of face types for planar maps,” Discus. Math. Graph Theory, **16**, 2, 123–142 (1996).
14. *Borodin O. V. and Woodall D. R.* “The weight of faces in plane maps,” Mat. Zametki, **6**, 5, 648–657 (1998).

15. *Avgustinovich S. V. and Borodin O. V.* "Neighborhoods of edges in normal maps," Diskretn. Anal. Issled. Oper., **2**, 3, 3–9 (1995).
16. *Jendrol' S. and Voss H.-J.* "Light subgraphs of graphs embedded in the plane – a survey," Discrete Math., **313**, 4, 406–421 (2013).
17. *Borodin O. V.* "Joint generalization of the theorems of Lebesgue and Kotzig on the combinatorics of planar maps," Diskret. Mat., **3**, 4, 24–27 (1991).
18. *Borodin O. V. and Loparev D. V.* "The height of small faces in planar normal maps," Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1, **5** , 4, 6–17 (1998).
19. *Ferencová B. and Madaras T.* "On the structure of polyhedral graphs with prescribed edge and dual edge weight," Acta Univ. M. Belii Math., **12**, 13–18 (2005).
20. *Ferencová B. and Madaras T.* "Light graph in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight," Discrete Math., **310**, 1661–1675 (2010).
21. *Jendrol' S.* "Triangles with restricted degrees of their boundary vertices in plane triangulations," Discrete Math., **196**, 177–196 (1999).
22. *Madaras T. and Soták R.* "The 10-cycle C_{10} is light in the family of all plane triangulations with minimum degree five," Tatra Mt. Math. Publ., **18**, 35–56 (1999).
23. *Madaras T., Škrekovski R., and Voss H.-J.* "The 7-cycle C_7 is light in the family of planar graphs with minimum degree 5," Discrete Math., **307**, 1430–1435 (2007).
24. *Mohar B., Škrekovski R., and Voss H.-J.* "Light subraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9," J. Graph Theory, **44**, 261–295 (2003).
25. *Madaras T. and Škrekovski R.* "Heavy paths, light stars, and big melons," Discrete Math., **286**, 115–131 (2004).
26. *Borodin O. V.* "An improvement of Lebesgue's theorem on the structure of minor faces of 3-polytopes," Diskretn. Anal. Issled. Oper., **9**, 3, 29–39 (2002).
27. *Borodin O. V. and Ivanova A. O.* "Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4," Discrete Math., **313**, 23, 2841–2847 (2013).
28. *Borodin O. V. and Woodall D. R.* "Cyclic degrees of 3-polytopes," Graphs Comb., **15**, 267–277 (1999).
29. *Kotzig A.* "Contribution to the theory of Eulerian polyhedra," Mat.-Fyz. Čas., **5**, 101–113 (1955).
30. *Wernicke P.* "Über den kartographischen Vierfarbensatz," Math. Ann., **58**, 413–426 (1904).

Submitted May 07, 2016

Anna Olegovna Ivanova
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Kulakovskogo st., 48, Yakutsk 677000, Yakutia, Russia
`shmgnanna@mail.ru`

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

УДК 519.21

НЕСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ И РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЛАНЖЕВЕНА

Е. В. Карачанская, А. П. Петрова

Аннотация. Строятся решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) типа Ланжевена, обладающих неслучайной функцией, зависящей от решения уравнения. Определены условия, при которых возникает эта неслучайная функция. С использованием вида решения однородного стохастического дифференциального уравнения построено решение СДУ типа Ланжевена более общего вида в результате представления его в виде линейного. Построен стохастический процесс с неслучайным квадратом модуля, не являющийся решением СДУ Ито.

Ключевые слова: уравнение Ланжевена, броуновское движение, стохастическое дифференциальное уравнение, формула Ито, неслучайный модуль скорости, точное решение.

Введение

Классическая теория стохастических дифференциальных уравнений [1] определяет построение решения линейного уравнения на основе применения формулы Ито. В работе В. А. Дубко [2] введено понятие первого интеграла для стохастического многомерного уравнения Ито. Далее в [3] были получены условия, которым должна удовлетворять функция случайных аргументов, чтобы быть первым интегралом системы СДУ. На основе этих результатов было построено аналитическое решение СДУ типа Ланжевена [4]. Однако позднее в [4] была обнаружена ошибка, несколько сужающая класс уравнений, для которых было найдено решение. В данной статье представлено корректное решение СДУ типа Ланжевена. Внесение уточнений в интегрирование уравнения позволило сконструировать случайный процесс, для которого не существует соответствующего СДУ.

Рассмотрение нового класса СДУ типа Ланжевена актуально, поскольку стохастические уравнения Ланжевена имеют большой спектр применения, например, в финансовой математике и экономике [5], статистической физике [6, 7] и т. д.

Уравнение Ланжевена (1908 г.) рассматривается в статистической физике для описания нелинейного броуновского движения [6]. Это дифференциальное уравнение со случайной (ланжевеновской) силой $\xi(t)$, которая возникает из-за наличия флуктуации скорости $\mathbf{v}(t)$ броуновской частицы массы m с среде с постоянным коэффициентом трения μ:

$$m\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -m\mu\,\mathbf{v}(t) + \xi(t). \qquad (1)$$

Введение Ито в 1948 г. стохастического интеграла позволило предствить уравнение Ланжевена в виде стохастического дифференциального уравнения Ито [8]:

$$d\mathbf{v}(t) = a\mathbf{v}(t)dt + bd\mathbf{w}(t), \quad t \geq 0, \qquad (2)$$

где $\mathbf{w}(t)$ — винеровский процесс.

Нахождение решения дифференциального уравнения, описывающего какой-либо процесс, или нахождение его первого интеграла дают возможность дальнейшего моделирования этого процесса и управления им в случае необходимости.

Процесс решения стохастических дифференциальных уравнений очень сложен. Чаще всего речь идет о существовании и единственности решения, а не его нахождении. Решения можно найти только в очень специфических случаях (см., например, [1, 3, 4, 9–13]). В основном при нахождении решения опираются на метод, предложенный И. И. Гихманом и А. В. Скороходом, или используют замены, приводящие уравнения к виду, для которого можно найти решение. Еще один метод связан с возможностью перехода от уравнения Ито к уравнению Стратоновича, что в итоге позволяет решать СДУ как обыкновенное дифференциальное уравнение.

Следует отметить, что стохастических дифференциальных уравнений, для которых найдено точное решение, не очень много.

В. А. Дубко в 1978 г. было доказано, что для СДУ Ито существуют первые интегралы — детерминированные (неслучайные) функции, зависящие от случайных функций — решений этих СДУ [2, 3].

Определение 1 [2]. Пусть $\mathbf{x}(t)$ — n-мерный случайный процесс, подчиненный системе СДУ Ито

$$dx_i(t) = a_i(t, \mathbf{x}(t))\,dt + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(t, \mathbf{x}(t))\,dw_k(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \qquad (3)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям существования и единственности решения [1], и $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ — его решение, удовлетворяющее заданному начальному условию. Неслучайная функция $u(t, \mathbf{x}) \in \mathscr{C}^{1,2}_{t,x}$ называется *первым интегралом системы* СДУ, если она с вероятностью единица на любой из траекторий решения (3) принимает постоянное значение, зависящее только от $\mathbf{x}_0$: $u(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = u(0, \mathbf{x}_0)$, или, другими словами, ее стохастический дифференциал равен нулю: $d_t u(t, \mathbf{x}(t)) = 0$.

Возможность построения решения для уравнений из этого класса связана с определением вида неслучайных функций — первых интегралов — и их дальнейшим использованием [3, 14]. Однако определение вида функции для первого интеграла не всегда возможно, но при этом возникает возможность построения решения СДУ при условии, что оно обладает неслучайным функционалом, зависящим от решения СДУ.

Целью данной статьи является определение условий, обеспечивающих существование детерминированных функций для стохастических дифференциальных уравнений типа Ланжевена и построение решений соответствующих уравнений.

1. Уравнение типа Ланжевена с ортогональными воздействиями

Пусть $\mathbf{v}(t)$ — скорость броуновской частицы, $\mathbf{w}(t)$ — винеровский процесс в пространстве $\mathbb{R}^3$. Исходя из некоррелированности компонент лагранжевой силы и нулевого среднего их воздействия на броуновскую частицу [15], движение броуновской частицы в трехмерном пространстве можно описать кроме уравнений (1) и (2) еще одним СДУ специального вида — уравнением типа Ланжевена, предложенным в [3]:

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu\mathbf{v}(t)\,dt + \frac{b}{|\mathbf{v}(t)|}\big[\mathbf{v}(t)\times d\mathbf{w}(t)\big], \tag{4}$$

где $[\mathbf{v}(t)\times d\mathbf{w}(t)]$ означает векторное произведение векторов $\mathbf{v}(t)$ и $d\mathbf{w}(t)$, $\mathbf{v}(0) = 0$, $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$, μ, $b\in\mathbb{R}^1$, $\mu\geq 0$ — постоянная.

В работе [3] показано, что уравнение (4) обладает первым интегралом вида

$$u(t,\mathbf{v}) = \exp\{2\mu t\}\left(|\mathbf{v}|^2 - \frac{b^2}{\mu}\right), \tag{5}$$

при этом для всех $t\geq 0$, как следует из (5), выполняется равенство

$$|\mathbf{v}(t)|^2 = \exp\{-2\mu t\}\left(|\mathbf{v}(0)|^2 - \frac{b^2}{\mu}\right) + \frac{b^2}{\mu}. \tag{6}$$

Таким образом, $|\mathbf{v}(t)|^2$ — неслучайная функция от t.

Для задач моделирования реальных систем интерес представляет случай, когда свойства среды изменяются с течением времени, т. е. коэффициенты этого уравнения зависят от параметра t: $\mu = \mu(t)$, $a = a(t)$.

Рассмотрим уравнение типа (4) для $\mathbf{v}(t)$ более общего вида, а именно

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t)\,dt + \frac{b(t)}{|\mathbf{v}(t)|}\big[\mathbf{v}(t)\times d\mathbf{w}(t)\big], \tag{7}$$

где $\mu(t), b(t)\in\mathbb{R}^1$ — неслучайные функции от t.

Относительно гладкости этих и других встречающихся коэффициентов будем полагать, что она достаточна для обеспечения условий существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения.

Введем обозначения для матриц группы поворотов:

$$B_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad B_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad B_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{8}$$

С учетом (8) и $\mathbf{v}(t) = (v_1, v_2, v_3)^*$ преобразуем векторное произведение в (7) аналогично [3]:

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{w} = dw_1\, B_1^0\mathbf{v} + dw_2\, B_2^0\mathbf{v} + dw_3\, B_3^0\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{3} B_k^0 \mathbf{v} d\mathbf{w}. \tag{9}$$

Тогда (7) можно записать в виде СДУ Ито:

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t)\,dt + \frac{b(t)}{|\mathbf{v}(t)|}\sum_{k=1}^{3} B_k^0\mathbf{v}(t)\,d\mathbf{w}(t), \tag{10}$$

Воспользовавшись (10), построим уравнение для $|\mathbf{v}(t)|^2$. Продифференцировав по Ито каждую компоненту $v_i^2(t)$, получаем

$$d|\mathbf{v}(t)|^2 = -2\mu(t)|\mathbf{v}(t)|^2\,dt + 2b^2(t)\,dt, \tag{11}$$

т. е. $|\mathbf{v}^2(t)|$ является неслучайной функцией. Уравнение (11) линейное, и его решение имеет вид

$$|\mathbf{v}(t)|^2 = \exp\left\{-2\int_0^t \mu(\tau)\,d\tau\right\}\left[2\int_0^t b^2(u)\exp\left\{2\int_0^u \mu(\tau)\,d\tau\right\}du + |\mathbf{v}(0)|^2\right]. \tag{12}$$

Таким образом, получили следующий результат.

Лемма 1. *Для стохастического процесса* $\mathbf{v}(t)$, *подчиненного уравнению* (7), *функция* $|\mathbf{v}(t)|^2$ *является неслучайной.*

Это означает, что коэффициент диффузионной части уравнения (7) неслучаен, но при этом зависит от модуля скорости самой частицы в текущий момент времени.

Заметим, что для уравнения (4) был найден первый интеграл (5), хотя для уравнения (7) это проблематично. Однако существует возможность построения решения уравнения.

Введем обозначение $b(t)/|\mathbf{v}(t)| = a(t)$. Очевидно, что в силу представления (12) функция $a(t)$ неслучайная. Будем исследовать решение уравнения

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t)\,dt + a(t)[\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)]. \tag{13}$$

Перепишем (13) в виде

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t)\,dt + \sum_{k=1}^{3} B_k(t)\mathbf{v}(t)\,d\mathbf{w}(t), \tag{14}$$

где матрицы $B_k(t)$, $k = \overline{1,3}$, имеют вид

$$B_1(t) = a(t)B_1^0, \quad B_2(t) = a(t)B_2^0, \quad B_3(t) = a(t)B_3^0. \tag{15}$$

Запись динамики стохастического процесса допускает, кроме представления Ито (14), еще и представление Стратоновича:

$$d\mathbf{v}(t) = -\tilde{\mu}(t)\mathbf{v}(t)\,dt + \sum_{k=1}^{3} b_k(t, \mathbf{v}(t))\mathbf{v}(t)\,d\widetilde{\mathbf{w}}(t), \tag{16}$$

где

$$\tilde{\mu} = \mu + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} b_{j,k}(t,\mathbf{v})\frac{\partial b_{i,k}(t,\mathbf{v})}{\partial v_j}. \tag{17}$$

Рассмотрим следующее уравнение Ито:

$$d\mathbf{v}(t) = -A\mathbf{v}(t)\,dt + \sum_{k=1}^{3} B_k^0\mathbf{v}(t)\,d\mathbf{w}(t), \tag{18}$$

где $A = \mu I$. Связь между представлениями Стратоновича и Ито описывается уравнениями (17), где $b_{i,j}^k$, $i,j,k = \overline{1,3}$, — соответствующие элементы матриц B_k^0, $k = \overline{1,3}$. Тогда уравнение (18) в представлении Ито можно записать в представлении Стратоновича:

$$d\mathbf{v}(t) = \left(-A - \frac{a^2}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} B_k(\tau)B_j(\tau)\right)\mathbf{v}(t)\,dt + a\sum_{k=1}^{3} B_k^0\mathbf{v}(t)\,d\widetilde{\mathbf{w}}(t). \tag{19}$$

Между коэффициентами уравнений (18) и (19) можно установить функциональную связь, если потребовать совпадения в среднеквадратическом решений уравнений (18) и (19) (см. [14]). Таким образом, для нахождения решения уравнения (18) достаточно решить уравнение (19), поскольку его можно интерпретировать как обыкновенное дифференциальное уравнение.

После перехода к представлению Стратоновича решение уравнения (19) принимает следующий вид (см. [14]):

$$\mathbf{v}(t) = T^+\exp\left\{t\left(-\mu I - \frac{a^2}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} B_k(\tau)B_j(\tau)\right) + a\sum_{k=1}^{3}\int_{t_0}^{t} B_k^0\,d\widetilde{\mathbf{w}}(\tau)\right\}\mathbf{v}(0), \tag{20}$$

где T^+ — оператор хронологического упорядочения.

Рассмотрим нахождение решения уравнения Ито с функциональными неслучайными коэффициентами:

$$d\mathbf{v}(t) = -A(t)\mathbf{v}(t)\,dt + \sum_{k=1}^{3} B_k(t)\mathbf{v}(t)\,d\mathbf{w}(t), \tag{21}$$

где $A(t) = \mu(t)A$, A — постоянная матрица. Уравнение (21) внешне подобно уравнению (18), при этом также возможен переход к представлению Стратоновича:

$$d\mathbf{v}(t) = \left(-A(t) - \frac{a^2(t)}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} B_k(\tau)B_j(\tau)\right)\mathbf{v}(t)\,dt + a(t)\sum_{k=1}^{3} B_k^0\mathbf{v}(t)\,d\widetilde{\mathbf{w}}(t). \tag{22}$$

Так как уравнения (21) и (22) эквивалентны, по аналогии с (20) запишем решение уравнения (22) следующим образом:

$$\mathbf{v}(t) = T^+ \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\left(-A(\tau) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} B_k(\tau)B_j(\tau)\right)d\tau + \sum_{k=1}^{3}\int\limits_{t_0}^{t} B_k(\tau)\,d\widetilde{w}_k(\tau)\right\}\mathbf{v}(0). \quad (23)$$

При выполлнении условий типа Лаппо — Данилевского [16] оператор хронологического упорядочения T^+ можно опустить. Определим возможность такого действия для выражения (23).

1. Учитывая вид и свойства матриц $A(t)$, $B_k(t)$, $k = \overline{1,3}$, первое слагаемое в экспоненте в (23) упростим:

$$-A(\tau) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} B_k(\tau)B_j(\tau) = (a^2(\tau) - \mu(\tau))I.$$

2. В выражении (23) матрицы, определяемые первым и вторым слагаемыми в экспоненте, коммутируют. Поэтому (23) можно представить в виде

$$\mathbf{v}(t) = T^+\left[\exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t}(a^2(\tau) - \mu(\tau))I\,d\tau\right\}\exp\left\{\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{t_0}^{t} B_k(\tau)\,dw_k(\tau)\right\}\right]\mathbf{v}(0). \quad (24)$$

3. Для матрицы в первой экспоненте условие Лаппо — Данилевского выполняется, но для матрицы во второй экспоненте данное условие будет выполняться только в случае, когда $w_1(t) = w_2(t) = w_3(t)$.

При выполнении этого условия можно снять оператор T^+ в выражении (23) (поэтому в дальнейшем T^+ не используется) и построить решение уравнения

$$d\mathbf{v}(t) = -A(t)\,\mathbf{v}(t)\,dt + \sum_{k=1}^{3} B_k(t)\mathbf{v}(t)\,d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{w}(t) = (w(t), w(t), w(t))^*. \quad (25)$$

Рассмотрим построение точного решения для $\mathbf{v}(t)$ даже в более общем виде, чем (14), используя результаты, представленные в [14]. Используем переход к представлению Стратоновича для решения (25).

Если $A(t) = \mu(t)I$ и $\mu(t) = \mu$, $a(t) = a$ — константы, то (23) примет вид

$$\mathbf{v}(t) = \exp\{t(a^2 - \mu)\,I\}\exp\left\{a\sum_{k=1}^{3} w_k(t)B_k^0\right\}\mathbf{v}(0), \quad (26a)$$

$$w_1(t) = w_2(t) = w_3(t). \quad (26b)$$

Замечание 1. В выражении (26) перешли от $\widetilde{\mathbf{w}}(t)$ к $\mathbf{w}(t)$, поскольку для любых $\alpha(t) \in C^1_{[0,T]}$ выполняется соотношение

$$\int\limits_0^t \alpha(\tau)\,d\widetilde{\mathbf{w}}(\tau) = \int\limits_0^t \alpha(\tau)\,d\mathbf{w}(\tau),$$

2. Разложение матричной экспоненты для группы поворотов

Рассмотрим разложение в степенной ряд выражения $\exp\left\{a\sum\limits_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right\}$ для произвольного случайного процесса $\boldsymbol{\xi}(t)\in\mathbb{R}^3$. Исходя из определения матричной экспоненты, имеем

$$\exp\left\{a\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right\}=I+a\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0+\frac{a^2}{2!}\left(\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right)^2+\frac{a^3}{3!}\left(\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right)^3+\cdots. \quad (27)$$

Лемма 2. *Степени матрицы* $\sum\limits_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0$, *где* B_k^0, $k=\overline{1,3}$, — *матрицы поворотов, определяются следующим образом:*

$$\begin{gathered}\left(\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right)^{2m-1}=(-1)^{m+1}(|\boldsymbol{\xi}(t)|^2)^{m-1}\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0,\quad m=1,2,\dots,\\ \left(\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right)^{2m}=(-1)^{m+1}(|\boldsymbol{\xi}(t)|^2)^{m-1}\left(\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right)^2,\quad m=1,2,\dots,\end{gathered}\quad (28)$$

где $|\boldsymbol{\xi}(t)|^2=\xi_1^2(t)+\xi_2^2(t)+\xi_3^2(t)$.

Доказательство. Возводя последовательно выражение $\sum\limits_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0$ в различные степени, получим соответствующие рекуррентные соотношения. □

Лемма 3. *Если* B_k^0, $k=\overline{1,3}$, — *матрицы группы поворотов,* $\xi(t)\in\mathbb{R}^3$, *то имеет место следующее представление матричной экспоненты:*

$$\exp\left\{a\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right\}=I+\frac{\sin\left(a\,|\boldsymbol{\xi}(t)|\right)}{|\boldsymbol{\xi}(t)|}\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0+\frac{2\sin^2\left(a\,\frac{|\boldsymbol{\xi}(t)|}{2}\right)}{|\boldsymbol{\xi}(t)|^2}\left(\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right)^2. \quad (29)$$

Доказательство. Подставляя результаты леммы 2 в выражение (27) и используя разложение в степенные ряды синуса и косинуса, получаем

$$\exp\left\{a\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right\}=I+a\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}(t)|}\sin\left(a\,|\boldsymbol{\xi}(t)|\right)+\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}(t)|^2}\left(\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right)^2\left(1-\cos\left(a\,|\boldsymbol{\xi}(t)|\right)\right)=$$

$$=I+\frac{\sin\left(a|\boldsymbol{\xi}(t)|\right)}{|\boldsymbol{\xi}(t)|}\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0+\frac{2\sin^2\left(a\frac{|\boldsymbol{\xi}(t)|}{2}\right)}{|\boldsymbol{\xi}(t)|^2}\left(\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right)^2. \quad □$$

В данном случае функция $\xi(t)$ может быть случайным процессом любой природы в $\mathbb{R}^3$, в частности, это может быть пуассоновский процесс. Кроме того, координатные компоненты этого процесса могут быть с любой коррелятивной зависимостью, в том числе и быть равными, как определено в (26) — условие (26b).

Таким образом получаем представление для случайного процесса $\mathbf{v}(t)$, определяемого (26):

$$\mathbf{v}(t) = \exp\{t(a^2-\mu)\}\left[I + \frac{\sin\left(\sqrt{3}a\,|w(t)|\right)}{\sqrt{3}|w(t)|}\sum_{k=1}^{3} w(t)B_k^0 + \frac{2\sin^2\left(\frac{\sqrt{3}a|w(t)|}{2}\right)}{3}\left(\sum_{k=1}^{3} B_k^0\right)^2\right]\mathbf{v}(0), \quad (30)$$

которое является решением уравнения

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu I\mathbf{v}(t)\,dt + a\sum_{k=1}^{3} B_k^0\mathbf{v}(t)dw(t), \quad (31)$$

Принимая во внимание характер алгоритма построения решения при постоянных μ, a и результат (30), с учетом явного вида матриц $A(t) = -\mu(t)I$, $B_k(t)$, $k=\overline{1,3}$, соответствующих уравнению (31), можем убедиться, что и уравнение (21) с условием (26b):

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)I\mathbf{v}(t)\,dt + a(t)\sum_{k=1}^{3} B_k^0\mathbf{v}(t)\,dw(t), \quad (32)$$

будет иметь точное решение, подобное (30), но при замене a на $\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau$ и μ на $\int\limits_0^t \mu(\tau)\,d\tau$ и переходе от $w_k(t)$ к $\int\limits_0^t a(\tau)\,dw_k(\tau)$ (в силу замечания 1).

Собирая полученные результаты, сформулируем их в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* $a(t), \mu(t) \in \mathscr{C}^1$. *Тогда решение уравнения* (32) *существует и имеет вид*

$$\mathbf{v}(t) = \exp\left\{\int\limits_0^t (a^2(\tau)-\mu(\tau))\,d\tau\right\}\left[I + \frac{\sin\left(\sqrt{3}\int\limits_0^t a(\tau)\,dw(\tau)\right)}{\sqrt{3}|w(t)|}\sum_{k=1}^{3} w(t)B_k^0 + \frac{2\sin^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_0^t a(\tau)\,dw(\tau)\right)}{3}\left(\sum_{k=1}^{3} B_k^0\right)^2\right]\mathbf{v}(0). \quad (33)$$

Таким образом, наличие детерминированной функции, зависящей от решения стохастического дифференциального уравнения, позволяет найти это решение.

Замечание 2. Отметим, что в процессе построения решения уравнения (25) помимо требования непрерывности по t коэффициентов $\mu(t)$ и $a(t)$ другие ограничения не использовались. Поэтому полученное решение является решением более общей задачи, чем исходная.

Как видим, это решение похоже на классическое решение однородного линейного СДУ, построенного в [1]. Используя вид решения линейного СДУ из [1], будем искать решение СДУ типа Ланжевена более общего вида.

Замечание 3. Одним из результатов следует выделить построение случайного процесса $\mathbf{y}(t)$ вида

$$\mathbf{y}(t) = \exp\{t(a^2-\mu)\}\left[I + \frac{\sin(a|\boldsymbol{\xi}(t)|)}{|\boldsymbol{\xi}(t)|}\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0 + \frac{2\sin^2\left(a\frac{|\boldsymbol{\xi}(t)|}{2}\right)}{|\boldsymbol{\xi}(t)|^2}\left(\sum_{k=1}^{3}\xi_k(t)B_k^0\right)^2\right]. \tag{34}$$

определяемого случайным процессом $\xi(t)$ произвольной природы, со свойством: $|\mathbf{y}(t)|^2$ — неслучайная функция, для которого нельзя построить стохастическое дифференциальное уравнение в силу невыполнения условий типа Лаппо — Данилевского.

3. Получение обобщения уравнения типа Ланжевена

Рассмотрим следующее обобщение уравнения типа Ланжевена [17]:

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t)\,dt + \frac{b_1(t)}{|\mathbf{v}(t)|}[\mathbf{v}(t)\times d\mathbf{w}(t)] + \frac{b_2(t)}{\sqrt{2}|\mathbf{v}(t)|^2}[\mathbf{v}(t)\times[\mathbf{v}(t)\times d\mathbf{w}(t)]], \tag{35}$$

которое описывает более сложный (турбулентный, с «вихрями») вид броуновского движения. Само уравнение (35) будем в дальнейшем называть усложненным.

Поскольку неслучайность функции $|\mathbf{v}(t)|^2$ позволила построить решение уравнения (7), определим условия, при которых уравнение (35) также будет обладать подобным свойством.

С учетом представления (9) и свойств двойного векторного произведения получаем

$$\begin{aligned}
[\mathbf{v}(t)\times[\mathbf{v}(t)\times d\mathbf{w}(t)]] &= \left[\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -v_3\,dw_2+v_2\,dw_3\\ v_3\,dw_1-v_1\,dw_3\\ -v_2\,dw_1+v_1\,dw_2\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix} -v_2^2\,dw_1+v_1\,v_2\,dw_2-v_3^2\,dw_1+v_1\,v_3\,dw_3\\ -v_3^2\,dw_2+v_2\,v_3\,dw_3+v_1\,v_2\,dw_1-v_1^2\,dw_2\\ v_1\,v_3\,dw_1-v_1^2\,dw_3+v_2\,v_3\,dw_2-v_2^2\,dw_3\end{pmatrix}\\
&= -\begin{pmatrix} |\mathbf{v}(t)|^2-v_1^2 & -v_1v_2 & -v_1v_3\\ -v_1v_2 & |\mathbf{v}(t)|^2-v_2^2 & -v_2v_3\\ -v_1v_3 & -v_2v_3 & |\mathbf{v}(t)|^2-v_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dw_1\\ dw_2\\ dw_3\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Лемма 4. *Уравнение типа Ланжевена* (35) *может быть представлено в виде следующего уравнения Ито:*

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t)\,dt + \left[\frac{b_1(t)}{|\mathbf{v}(t)|}K + \frac{b_2(t)}{\sqrt{2}|\mathbf{v}(t)|^2}K^2\right]d\mathbf{w}(t), \tag{36}$$

где матрицы K *и* K^2 *имеют вид соответственно*

$$K = \sum_{k=1}^{3} B_k^0\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$K^2 = -\begin{pmatrix} |\mathbf{v}(t)|^2 - v_1^2 & -v_1v_2 & -v_1v_3 \\ -v_1v_2 & |\mathbf{v}(t)|^2 - v_2^2 & -v_2v_3 \\ -v_1v_3 & -v_2v_3 & |\mathbf{v}(t)|^2 - v_3^2 \end{pmatrix}$$

Для уравнений (35) и соответственно (36) функция $|\mathbf{v}(t)|^2$ также неслучайна [3] и является решением обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$d|\mathbf{v}(t)|^2 = h\big(t, |\mathbf{v}(t)|\big)\,dt, \tag{38}$$

где $h(t, |\mathbf{v}(t)|)$ — некоторая неслучайная функция.

Лемма 5. *Для уравнения* (35) *функция* $|\mathbf{v}(t)|^2$ *является неслучайной.*

Доказательство. Для сокращения записи обозначим

$$B(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|) = \frac{b_1(t)}{|\mathbf{v}(t)|}K + \frac{b_2(t)}{\sqrt{2}|\mathbf{v}(t)|^2}K^2. \tag{39}$$

Продифференцируем по Ито функцию $\mathbf{v}^2(t)$, учитывая, что $\mathbf{v}(t)$ является решением уравнения (36). Получаем

$$\mathbf{v}^2(t) = 2\left[-\mu(t)|\mathbf{v}(t)|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|) \cdot B^*(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|))\right]dt. \tag{40}$$

В силу кососимметричности матрицы K имеем

$$K^2 = -K \cdot K^*, \quad (K^2)^* = (-K \cdot K^*)^* = K^2.$$

Следовательно,

$$B(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|) \cdot B^*(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|) = \frac{b_1^2(t)}{|\mathbf{v}(t)|^2}(-K^2) + \frac{b_2^2(t)}{2|\mathbf{v}(t)|^4}K^4.$$

Вычисление K^4 привело к такому результату:

$$K^4 = |\mathbf{v}(t)|^2 \cdot \begin{pmatrix} v_2^2 + v_3^2 & -v_1v_2 & -v_1v_3 \\ -v_1v_2 & v_1^2 + v_3^2 & -v_2v_3 \\ -v_1v_3 & -v_2v_3 & v_1^2 + v_2^2 \end{pmatrix} = -|\mathbf{v}(t)|^2 \cdot K^2.$$

Тогда

$$B(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|) \cdot B^*(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|)$$
$$= -\left(\frac{b_1^2(t)}{|\mathbf{v}(t)|^2} + \frac{b_2^2(t)}{2|\mathbf{v}(t)|^2}\right)K^2 = \left(\frac{b_1^2(t)}{|\mathbf{v}(t)|^2} + \frac{b_2^2(t)}{2|\mathbf{v}(t)|^2}\right)K \cdot K^*.$$

Стало быть,

$$\operatorname{tr} K \cdot K^* = -\operatorname{tr} K^2 = 2|\mathbf{v}(t)|^2.$$

В результате имеем

$$d\mathbf{v}^2(t) \equiv |d\mathbf{v}(t)|^2 = 2\left[-\mu(t)|\mathbf{v}(t)|^2 + b_1^2(t) + \frac{b_2^2(t)}{2}\right] dt, \tag{41}$$

т. е. функция $|\mathbf{v}(t)|^2$ неслучайна. Лемма доказана.

Таким образом, уравнение (36) также имеет детерминированную функцию, зависящую от случайной — решения самого уравнения. Следовательно, и исходное уравнение (7), и расширяющее его уравнение (35) связаны с неслучайной функцией $|\mathbf{v}(t)|^2$. Это позволяет сделать вывод о возможности решения уравнения (35), опираясь на решение уравнения (7) с выполнением условия (26b).

Решение уравнения (41) с учетом (12) будет таким:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(t)|^2 = \exp\left\{-2\int\limits_0^t \mu(\tau)\,d\tau\right\} \\ \times \left[2\int\limits_0^t \left(b_1^2(u) + \frac{b_2^2(u)}{2}\right)\exp\left\{2\int\limits_0^u \mu(\tau)\,d\tau\right\} du + |\mathbf{v}(0)|^2\right]. \end{aligned} \tag{42}$$

4. Построение решения для усложненного уравнения Ланжевена

Представим полученное векторное произведение несколько в ином виде, а именно с применением матриц группы поворотов, используя представление уравнения в лемме 4 и (9):

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}(t) \times [\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)]] &= \left[\mathbf{v}(t) \times \left[\left(\sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t)\right) d\mathbf{w}(t)\right]\right] \\ &= \left(\sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t)\right)[\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)] = \left(\sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t)\right)\sum_{k=1}^3 B_j^0 \mathbf{v}(t) d\mathbf{w}(t) \\ &= |\mathbf{v}(t)|^2 \sum_{k=1}^3 C_k^0\, d\mathbf{w}(t), \end{aligned}$$

где $C_k^0 = \bigl(B_1^0 + B_2^0 + B_3^0\bigr)B_k^0$. Тогда уравнение (36) примет следующий вид:

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t)\,dt + \left[\frac{b_1(t)}{|\mathbf{v}(t)|}\sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t) + \frac{b_2(t)}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^3 C_k^0\right] d\mathbf{w}(t). \tag{43}$$

Таким образом, имеет место следующий результат.

Лемма 6. *Обобщение уравнения типа Ланжевена* (35) *может быть представлено в виде линейного стохастического дифференциального уравнения* (43), *где* B_k^0, $k=\overline{1,3}$, *составляют группу поворотов*, $C_k^0 = \big(B_1^0 + B_2^0 + B_3^0\big) B_k^0$.

Такой вид уравнения позволяет воспользоваться результатом теоремы 1 для нахождения решения уравнения (35).

Уравнение (35) есть стохастическое линейное уравнение. Согласно [1] его решение можно найти, используя решение соответствующего однородного, в данном случае — уравнения (21) при условии $A(t) = \mu(t)I$.

Решение однородного уравнения (21) запишем в виде

$$\mathbf{v}(t) = R(t)\mathbf{v}(0). \tag{44}$$

Тогда решение $\mathbf{V}(t)$ соответствующего линейного уравнения (35) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(t) = R(t)\Bigg[\mathbf{v}(0) - \int\limits_0^t \frac{b_1(s)}{|\mathbf{v}(s)|}\frac{b_2(s)}{\sqrt{2}}(R(s))^{-1}\sum_{k=1}^{3} C_k^0 \sum_{j=1}^{3}(B_j^0)^*\,ds \\ + \int\limits_0^t \frac{b_1(s)}{|\mathbf{v}(s)|}(R(s))^{-1}\sum_{j=1}^{3} B_j^0\,d\mathbf{w}(s)\Bigg],\end{aligned} \tag{45}$$

где $|\mathbf{v}(t)|$ определяется из (42).

С учетом кососимметричности матриц группы поворотов получим

$$\sum_{k=1}^{3} C_k^0 \left(\sum_{j=1}^{3} B_j^0\right)^* = 3\sum_{k=1}^{3} B_k^0. \tag{46}$$

Таким образом, получаем решение уравнения (35).

Теорема 2. *Пусть* $b_1(t), b_2(t), \mu(t) \in \mathscr{C}^1$ *и* $\mu(t) > 0$ *для всех* t. *Тогда решение усложненного уравнения типа Ланжевена*

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t)\,dt + \frac{b_1(t)}{|\mathbf{v}(t)|}[\mathbf{v}(t)\times d\mathbf{w}(t)] + \frac{b_2(t)}{\sqrt{2}|\mathbf{v}(t)|^2}[\mathbf{v}(t)\times[\mathbf{v}(t)\times d\mathbf{w}(t)]] \tag{47}$$

при выполнении условия $\mathbf{w}(t) = (w(t), w(t), w(t))^*$ *имеет вид*

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(t) = R(t)\Bigg[\mathbf{v}(0) + 3\int\limits_0^t \frac{b_1(s)}{|\mathbf{v}(s)|}\frac{b_2(s)}{\sqrt{2}}(R(s))^{-1}\sum_{k=1}^{3} B_k^0\,ds \\ + \int\limits_0^t \frac{b_1(s)}{|\mathbf{v}(s)|}(R(s))^{-1}\sum_{k=1}^{3} B_k^0\,d\mathbf{w}(s)\Bigg],\end{aligned}$$

где B_k^0, $k=\overline{1,3}$, *составляют группу поворотов* (8), $R(s)$ *определяется выражением* (44) *и* $|\mathbf{v}(t)|$ *определяется из* (42).

5. Заключение

Неслучайность квадрата модуля скорости броуновской частицы позволила получить в явном виде выражение для нее в специфическом случае. Кроме того, неслучайность модуля скорости объясняет, почему движущиеся частицы (в том числе и свет) не могут иметь сколь угодно большую скорость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гихман И. И.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1968.
2. *Дубко В. А.* Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. 22 с. (Препринт).
3. *Дубко В. А.* Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1989.
4. *Дубко В. А., Чалых Е. В.* Построение аналитического решения для одного класса уравнений типа Ланжевена с ортогональными случайными воздействиями // Укр. мат. журн., 1998. Т. 50, № 4. С. 666–668.
5. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Факты, модели. Теория. М.: ФАЗИС, 2004. Т. 1, 2.
6. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1.
7. *Климонтович Ю. Л.* Нелинейное броуновское движение // Успехи физ. наук. 1994. Т. 164. № 8. С. 811–844.
8. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968.
9. *Дубко В. А., Карачанская Е. В.* Специальные разделы теории стохастических дифференциальных уравнений. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013.
10. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. М. : Мир, 1972. (Сер.: Библиотека сборника Математика).
11. *Леваков, А. А.* Стохастические дифференциальные уравнения. Минск: БГУ. 2009.
12. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004.
13. *Миллер Б. М., Панков А. Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002.
14. *Карачанская Е. В.* Случайные процессы с инвариантами. Хабаровск: Изд-во Тихоокеанск. гос. ун-та, 2014.
15. *Risken H.* The Fokker–Planck equation: methods of solution and applications. Berlin: Springer-Verl., 1984.
16. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
17. *Чалых Е. В.* Об одном обобщении уравнений Ланжевена с детерминированным модулем скорости // Укр. мат. журн. 1998. Т. 50, № 7. С. 1004–1006.

Статья поступила 15 августа 2016 г.

Карачанская Елена Викторовна
Государственный университет путей сообщения,
ул. Серышева, 47, Хабаровск 680000
elena_chal@mail.ru

Петрова Алена Петровна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
alyona.petrova393@gmail.com

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

UDC 519.21

NON–RANDOM FUNCTIONS AND SOLUTIONS OF LANGEVIN–TYPE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

E. V. Karachanskaya and A. P. Petrova

Abstract. We construct a solution of a Langevine-type stochastic differential equation (SDE) with a non-random function depending on its solution. We determine conditions for such non-random function to appear. Using the solution of a homogeneous SDE, we obtain a solution of the generalized Langevine-type SDE by reducing it to a linear one. We construct a stochastic process with non-random modulus in square which is not a solution to an Itô-type SDE.

Keywords: Langevine-type equation, Brownian motion, stochastic differential equation, Itô's formula, deterministic modulus in square for velocity, analytical solution.

REFERENCES

1. *Gihman I. I. and Skorohod A. V.*, Stochastic differential equations, Springer-Verl., Berlin; New York, 1972.
2. *Dubko V. A.*, The first integral of a stochastic differential equations system [in Russian], Kiev: Inst. Mat. Akad. Nauk Ukr. SSR (1978).
3. *Dubko V. A.*, Questions of theory and appplication of stochastic differential equations [in Russian], DVNC Akad. Nauk, Vladivostok (1989).
4. *Dubko V. A. and Chalykh E. V.* “Construction of an analytic solution of one class of Langevin-type equations with orthogonal random actions,” Ukr. Mat. Zh., **50**, No. 4, 588–589 (1998).
5. *Shiryaev A. N.*, Essentials of stochastic finance: Facts, models, theory. World Sci. Publ. Company (1999).
6. *Balescu R.*, Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics, John Wiley & Sons, New York (1975).
7. *Klimontovich Yu. L.* “Nonlinear Brownian motion,” Usp. fiz. nauk, **164**, No. 8, 811–844 (1994).
8. *Itô K. and McKean H. P., Jr.*, Diffusion processes and their sample paths, Acad. Press, New York; Springer-Verl., Berlin (1965).
9. *Dubko V. A. and Karachanskaya E. V.*, Specific sections of the theory of stochastic differential equations [in Russian], Pacific Nat. Univ., Khabarovsk (2013).
10. *McKean H. P., Jr.*, Stochastic integrals, Acad. Press, New York; London (1969).
11 *Levakov A. A.*, Stochastic differential equations [in Russian], Belarusian Gos. Univ., Minsk (2009).
12. *Pugachev V. S. and Sinitsyn I. N.*, Theory of stochastic systems [in Russian], Logos, Moscow (2004).
13. *Miller B. M. and Pankov A. S.*, Theory of random processes in examples and problems [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2002).
14. *Karachanskaya E. V.*, Stochastic processes with invariants [in Russian], Pacific Nat. Univ., Khabarovsk (2014).
15. *Risken H.*, The Fokker–Planck equation: methods of solution and applications, Springer-Verl., Berlin (1984).

16. *Demidovich B. P.*, Lectures on mathematical stability theory [in Russian], Nauka, Moscow (1967).

17. *Chalykh E. V.* “On one generalization of the Langevin equation with determinate modulus of velocity,” Ukr. Mat. Zh., **50**, No. 7, 1004–1006 (1998).

Submitted August 15, 2016

Elena Victorovna Karachanskaya
Far Eastern State Transport University,
47 Seryshev Street, Khabarovsk 680000, Russia
`elena_chal@mail.ru`

Alena Petrovna Petrova
North-Eastern Federal University,
48 Kulakovskii Street, Yakutsk 677000, Russia
`alyona.petrova393@gmail.com`

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ НЕСТАНДАРТНОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Кожанов, С. В. Потапова

Аннотация. Исследована разрешимость в классах регулярных решений одной задачи сопряжения для эллиптических уравнений с нестандартными граничными условиями и условиями сопряжения на плоскости $x = 0$. Область, в которой рассматривается задача сопряжения, является параллелепипедом Q. На нижней границе Q условие задается для самой функции в области, где $x > 0$, и для ее частной производной по t в области, где $x < 0$, а при переходе через плоскость $x = 0$ эти условия «перекручиваются» и на верхней границе Q условие для самой функции уже задается в области, где $x < 0$, а для ее частной производной по t — в области, где $x > 0$. Путем сочетания метода регуляризации и метода продолжения по параметру доказаны теоремы единственности и существования регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений этой задачи сопряжения.

Ключевые слова: задача сопряжения, регулярное решение, условия склеивания (сопряжения), эллиптическое уравнение, разрывные граничные условия.

1. Введение

Одним из методов исследования разрешимости краевых задач для параболических уравнений является метод эллиптической регуляризации [1, 2]. Если при этом само параболическое уравнение имеет некоторые особенности, в частности, является уравнением с меняющимся направлением эволюции [3–8], то возникающая при эллиптической регуляризации краевая задача при наличии условий склеивания (сопряжения) окажется нестандартной и ранее неизученной. Именно такая ситуация будет рассмотрена в настоящей работе и, как представляется авторам, полученный результат имеет самостоятельное значение.

Приведем постановку задачи. Пусть Q — параллелепипед $(-1, 1) \times (0, T) \times (0, A)$, $0 < T, A < +\infty$, $f(x, t, a)$ — заданная при $(x, t, a) \in \overline{Q}$ функция, α и β — заданные действительные числа. Обозначим

$$Q^+ = \{(x, t, a) : (x, t, a) \in Q,\ x > 0\},$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15–01–06582), работа второго автора выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект № 3047).

$$Q^- = \{(x,t,a) : (x,t) \in Q,\ x < 0\},$$
$$Q_1 = Q^+ \cup Q^-.$$

Краевая задача. *Найти функцию $u(x,t,a)$, являющуюся на множестве Q_1 решением уравнения*

$$\Delta u = f(x,t,a) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия

$$u(-1,t,a) = u(1,t,a) = 0, \quad (t,a) \in (0,T) \times (0,A); \tag{2}$$

$$\begin{gathered} u(x,T,a) = u_t(x,0,a) = 0, \quad (x,a) \in (-1,0) \times (0,A); \\ u_t(x,T,a) = u(x,0,a) = 0, \quad (x,a) \in (0,1) \times (0,A); \end{gathered} \tag{3}$$

$$u(x,t,0) = u_a(x,t,A) = 0, \quad (x,t) \in (-1,1) \times (0,T), \tag{4}$$

а также условия сопряжения

$$\begin{gathered} u(+0,t,a) = \alpha u(-0,t,a), \quad (t,a) \in (0,T) \times (0,A); \\ u_x(-0,t,a) = \beta u_x(+0,t,a), \quad (t,a) \in (0,T) \times (0,A). \end{gathered} \tag{5}$$

Отметим, что граничные условия (3) являются разрывными и «перекрученными», т. е., например, на нижней границе параллелепипеда Q при $t = 0$ условие задается для самой функции $u(x,t,a)$ в области, где $x > 0$, и для ее производной $u_t(x,t,a)$ — в области, где $x < 0$, а при переходе через плоскость $x = 0$ эти условия «перекручиваются» (меняются местами) и на верхней границе параллелепипеда Q при $t = T$ условие для самой функции $u(x,t,a)$ уже задается в области, где $x < 0$, а для ее производной $u_t(x,t,a)$ — в области, где $x > 0$. Такие условия встречаются в задачах Жевре, например, для параболических уравнений с меняющимся направлением времени [3–8], для некоторых других неклассических уравнений отметим работы [6, 9–12].

2. Разрешимость краевой задачи

Пусть V_0 — линейное пространство

$$V_0 = \left\{v(x,t,a) : v \in W_2^2(Q^+),\, v \in W_2^2(Q^-)\right\}$$

с нормой

$$\|v\|_{V_0} = \left(\|v\|^2_{W_2^2(Q^+)} + \|v\|^2_{W_2^2(Q^-)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что V_0 с такой нормой является банаховым пространством.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие*

$$\alpha\beta \geq 0. \tag{6}$$

Тогда краевая задача (1)–(5) *имеет в пространстве V_0 не более одного решения $u(x,t,a)$.*

Доказательство. Пусть $u(x,t,a)$ — решение краевой задачи (1)–(5) такое, что $u(x,t,a) \in V_0$, и пусть в уравнении (1) выполняется $f(x,t) \equiv 0$. Если

$\alpha = 0$, то из первого условия (5), условий (2)–(4) и однородного уравнения (1) вытекает, что $u(x,y,t) \equiv 0$ в Q^+. Но тогда условие (5) преобразуется к виду $u(+0,y,t) = u_x(-0,y,t) = 0$. Эти условия, условия (2)–(4) и однородное уравнение (1) дают тождество $u(x,t,a) \equiv 0$ в Q^-. Таким образом, $u(x,t,a) \equiv 0$ в Q_1. Если $\beta = 0$, то аналогично можно показать, что решение $u(x,t,a)$ краевой задачи (1)–(5) единственно в V_0.

Пусть теперь $\alpha, \beta \neq 0$. Уравнение (1) умножим на функцию $u(x,t,a)$, проинтегрируем по цилиндру Q^-, затем умножим на функцию $\gamma u(x,t,a)$, $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$, проинтегрируем по Q^+ и сложим. Получим равенство

$$\int\limits_{Q^-} \left(u_t^2 + u_a^2 + u_x^2\right) dQ^- + \gamma \int\limits_{Q^+} \left(u_t^2 + u_a^2 + u_x^2\right) dQ^+$$
$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^A [-u_x(-0,t,a)u(-0,t,a) + \gamma u_x(+0,t,a)u(+0,t,a)]\, dtda = 0. \quad (7)$$

Вследствие условия (6) число γ положительно. Далее, условия сопряжения (5) дают равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^A [u_x(-0,t,a)u(-0,t,a) - \gamma u_x(+0,t,a)u(+0,t,a)]\, dtda = 0.$$

Тогда из равенства (7) и условий (2)–(4) следует, что функция $u(x,t,a)$ тождественно равна нулю в Q_1. Это означает, что решение краевой задачи (1)–(5) единственно в V_0. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются условие* (6) *и условия*

$$\begin{gathered} f(x,t,a) \in L_2(Q_1), \quad f_{tt}(x,t,a) \in L_2(Q_1), \quad f_{aa}(x,t,a) \in L_2(Q_1); \\ f(x,T,a) = f_t(x,0,a) = 0,\ (x,a) \in (-1,0) \times (0,A); \\ f(x,0,a) = f_t(x,T,a) = 0,\ (x,a) \in (0,1) \times (0,A); \\ f(x,t,0) = f(x,t,A) = 0,\ (x,t) \in (-1,1) \times (0,T). \end{gathered} \quad (8)$$

Тогда краевая задача (1)–(5) *имеет решение* $u(x,t,a)$, *принадлежащее пространству* V_0.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t,a)$, *являющуюся в* Q_1 *решением уравнения*

$$\varepsilon(u_{xxtttt} + u_{xxaaaa}) + \Delta u = f(x,t,a) \quad (9)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(5), *а также условия*

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,T,a) = u_{ttt}(x,0,a) = 0, \quad (x,a) \in (-1,0) \times (0,A); \\ u_{tt}(x,0,a) = u_{ttt}(x,T,a) = 0, \quad (x,a) \in (0,1) \times (0,A); \end{gathered} \quad (10)$$

$$u_{aa}(x,t,0) = u_{aaa}(x,0,A) = 0, \quad (x,t) \in (-1,1) \times (0,T). \quad (11)$$

Пусть V_1 — линейное пространство

$$V_1 = \{v(x,t,a) : v \in V_0, v_{xxtttt} \in L_2(Q^+),\, v_{xxaaaa} \in L_2(Q^+),\\ v_{xxtttt} \in L_2(Q^-),\, v_{xxaaaa} \in L_2(Q^-)\}$$

с нормой

$$\|v\|_{V_1} = \left(\|v\|^2_{V_0} + \int\limits_{Q^+} \left(v^2_{xxtttt} + v^2_{xxaaaa}\right) dQ^+ + \int\limits_{Q^-} \left(v^2_{xxtttt} + v^2_{xxaaaa}\right) dQ^-\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Покажем, что регуляризованная краевая задача (9), (2)–(5), (10), (11) при фиксированном ε разрешима в пространстве V_1 для любой функции $f(x,t,a) \in L_2(Q)$.

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию* $u(x,t,a)$ *являющуюся в* Q_1 *решением уравнения* (9) *и такую, что выполняются условия* (2)–(4), (10), (11), *а также*

$$\begin{aligned} u(+0,t,a) &= \lambda\alpha u(-0,t,a), \quad (t,a) \in (0,T)\times(0,A);\\ u_x(-0,t,a) &= \lambda\beta u_x(+0,t,a), \quad (t,a) \in (0,T)\times(0,A). \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть Λ — множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача (9), (2)–(4), (10)–(12) при фиксированном ε имеет решение, принадлежащее пространству V_1. Если множество Λ непусто, открыто и замкнуто, то оно совпадает со всем отрезком $[0,1]$ (см. [13]).

Множество Λ непусто, так как при $\lambda = 0$ краевая задача распадается на две независимые задачи в подобластях Q^+ и Q^-, разрешимость которых в классах регулярных решений известна (см. [14]).

Для доказательства открытости и замкнутости множества Λ достаточно показать, что для всевозможных решений $u(x,t,a) \in V_1$ краевой задачи (9), (2)–(4), (10)–(12) имеет место равномерная по λ априорная оценка

$$\|u\|_{V_1} \le N\|f\|_{L_2(Q_1)}. \tag{13}$$

Покажем, что искомая оценка действительно имеет место. Пусть $\alpha \ne 0$. Уравнение (9) умножим на функцию $u_{xx}(x,t,a)$, проинтегрируем по цилиндру Q^-, уравнение (9) умножим на функцию $\gamma u_{xx}(x,t,a)$, $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$, проинтегрируем по цилиндру Q^+ и сложим. При выполнении условий (2)–(4), (10)–(12) получим равенство

$$\varepsilon \int\limits_{Q^-} \left(u^2_{xxtt} + u^2_{xxaa}\right) dQ^- + \varepsilon \int\limits_{Q^+} \left(u^2_{xxtt} + u^2_{xxaa}\right) dQ^+ \\ + \int\limits_{Q^-} \left(u^2_{xt} + u^2_{xa} + u^2_{xx}\right) dQ^- + \int\limits_{Q^+} \left(u^2_{xt} + u^2_{xa} + u^2_{xx}\right) dQ^+ \\ = \int\limits_{Q^-} f u_{xx}\, dQ^- + \int\limits_{Q^+} f u_{xx}\, dQ^+. \tag{14}$$

Отметим, что согласно условию (6) число γ положительно. Применив неравенство Юнга к правой части (14), получим первую оценку:

$$\varepsilon \int\limits_{Q^-} \left(u_{xxtt}^2 + u_{xxaa}^2\right) dQ^- + \varepsilon \int\limits_{Q^+} \left(u_{xxtt}^2 + u_{xxaa}^2\right) dQ^+ \le C_1 \|f\|^2_{L_2(Q_1)}, \tag{15}$$

где $C_1 > 0$ определяется числами α, β.

Чтобы получить оценки для производных высокого порядка, определим функции $z(x,t,a)$ и $v(x,t,a)$:

$$\begin{aligned} z(x,t,a) &= u(x,t,a) - \lambda\beta(1+x)u_x(+0,t,a), \quad (x,t,a) \in Q^-; \\ v(x,t,a) &= u(x,t,a) - \lambda\alpha(1-x)u(-0,t,a), \quad (x,t,a) \in Q^+. \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что функция $u(x,t,a)$ однозначно вычисляется через функции $z(x,t,a)$ и $v(x,t,a)$:

$$\begin{aligned} u(x,t,a) &= z(x,t,a) + \frac{\lambda\beta(1+x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}[v_x(+0,t,a) - \lambda\alpha z(-0,t,a)], \quad (x,t,a) \in Q^-; \\ u(x,t,a) &= v(x,t,a) + \frac{\lambda\alpha(1-x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}[z_x(-0,t,a) + \lambda\beta v_x(+0,t,a)], \quad (x,t,a) \in Q^+; \end{aligned} \tag{17}$$

кроме того, выполняются равенства

$$\begin{gathered} z(-1,t,a) = z_x(-0,t,a) = 0, \\ z(x,T,a) = z_t(x,0,a) = z_{tt}(x,T,a) = z_{ttt}(x,0,a) = 0, \\ z(x,t,0) = z_a(x,t,A) = z_{aa}(x,t,0) = z_{aaa}(x,0,A) = 0, \ (x,t,a) \in Q^-; \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} v(1,t,a) = v(+0,t,a) = 0, \\ v(x,0,a) = v_t(x,T,a) = v_{tt}(x,0,a) = v_{ttt}(x,T,a) = 0, \\ v(x,t,0) = v_a(x,t,A) = v_{aa}(x,t,0) = v_{aaa}(x,0,A) = 0, \ (x,t,a) \in Q^+. \end{gathered} \tag{19}$$

Уравнение (9) преобразуется в следующие уравнения для функций $z(x,t,a)$ и $v(x,t,a)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(z_{xxtttt} + z_{xxaaaa}) + \Delta z = f(x,t,a) + \frac{\lambda\beta(1+x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}[v_{xtt}(+0,t,a) \\ - \lambda\alpha z_{tt}(-0,t,a) + v_{xaa}(+0,t,a) - \lambda\alpha z_{aa}(-0,t,a)], \quad (x,t,a) \in Q^-; \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(v_{xxtttt} + v_{xxaaaa}) + \Delta v = f(x,t,a) + \frac{\lambda\alpha(1-x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}[\lambda\beta v_{xtt}(+0,t,a) \\ + z_{tt}(-0,t,a) + \lambda\beta v_{xaa}(+0,t,a) + z_{aa}(-0,t,a)], \quad (x,t,a) \in Q^+. \end{aligned} \tag{21}$$

Уравнения (20), (21) вместе с условиями (18), (19) дают краевую задачу для функций $z(x,t,a)$ и $v(x,t,a)$, эквивалентную вследствие взаимно однозначной связи (16), (17) задаче (9), (2)–(4), (10)–(12). Поэтому вначале установим открытость и замкнутость множества Λ на семействе задач (20), (21), (18), (19), а из этого будет следовать открытость и замкнутость множества Λ для семейства задач (9), (2)–(4), (10)–(12). Отметим, что для решений $z(x,t,a)$ и $v(x,t,a)$ в силу их взаимно однозначной связи (16), (17) сохранится оценка (15).

Уравнение (20) умножим на функцию $[z_{xxtttt}(x,t,a)+z_{xxaaaa}(x,t,a)]$, проинтегрируем по Q^-, уравнение (21) умножим на $[v_{xxtttt}(x,t,a)+v_{xxaaaa}(x,t,a)]$, проинтегрируем по Q^+ и сложим. При выполнении граничных условий (18), (19) получим равенство

$$\varepsilon\int\limits_{Q^-}\left(z^2_{xxtttt}+2z^2_{xxttaa}+z^2_{xxaaaa}\right)dQ^-+\varepsilon\int\limits_{Q^+}\left(v^2_{xxtttt}+2v^2_{xxttaa}+v^2_{xxaaaa}\right)dQ^+$$
$$+\int\limits_{Q^-}\left(z^2_{xttt}+z^2_{xaaa}+z^2_{xtta}+z^2_{xtaa}+z^2_{xxtt}+z^2_{xxaa}\right)dQ^-$$
$$+\int\limits_{Q^+}\left(v^2_{xttt}+v^2_{xaaa}+v^2_{xtta}+v^2_{xtaa}+v^2_{xxtt}+v^2_{xxaa}\right)dQ^+$$
$$=\int\limits_{Q^-}f[z_{xxtttt}+z_{xxaaaa}]\,dQ^-+\int\limits_{Q^-}\Bigg(\frac{\lambda\beta(1+x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}[v_{xtt}(+0,t,a)-\lambda\alpha z_{tt}(-0,t,a)$$
$$+v_{xaa}(+0,t,a)-\lambda\alpha z_{aa}(-0,t,a)]\Bigg)[z_{xxtttt}+z_{xxaaaa}]\,dQ^-$$
$$+\int\limits_{Q^+}f[v_{xxtttt}+v_{xxaaaa}]\,dQ^++\int\limits_{Q^+}\Bigg(\frac{\lambda\alpha(1-x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}[\lambda\beta v_{xtt}(+0,t,a)+z_{tt}(-0,t,a)$$
$$+\lambda\beta v_{xaa}(+0,t,a)+z_{aa}(-0,t,a)]\Bigg)[v_{xxtttt}+v_{xxaaaa}]\,dQ^+. \quad (22)$$

Правую часть (22) оценим с помощью неравенства Юнга и неравенств

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^A\varphi^2(+0,t,a)\,dtda\le C\int\limits_{Q^+}\varphi^2_x(x,t,a)\,dQ^+,$$
$$\int\limits_0^T\int\limits_0^A\psi^2(-0,t,a)\,dtda\le C\int\limits_{Q^-}\psi^2_x(x,t,a)\,dQ^-,$$

где C — некоторая положительная константа. Тогда в правой части получившегося неравенства будут интегралы от функций $v^2_{xxtt}(x,t,a)$, $z^2_{xxtt}(x,t,a)$, $v^2_{xxaa}(x,t,a)$, $z^2_{xxaa}(x,t,a)$, для которых, как отмечалось выше, справедлива оценка (15) в силу взаимно однозначной связи (16), (17). Тем самым получим априорную оценку

$$\varepsilon\int\limits_{Q^-}\left(z^2_{xxtttt}++z^2_{xxaaaa}\right)dQ^-+\varepsilon\int\limits_{Q^+}\left(v^2_{xxtttt}+v^2_{xxaaaa}\right)dQ^+$$
$$+\int\limits_{Q^-}\left(z^2_{xxtt}+z^2_{xxaa}\right)dQ^-+\int\limits_{Q^+}\left(v^2_{xxtt}+v^2_{xxaa}\right)dQ^+\le C_2\|f\|^2_{L_2(Q_1)}, \quad (23)$$

где положительное число C_2 определяется числами $\varepsilon, \alpha, \beta, C$.

Из этой оценки следует равномерная по параметру λ оценка (13) для решения краевой задачи (20), (21), (18), (19) при фиксированном ε. Следовательно, краевая задача (9), (2)–(5), (10), (11) ($\lambda = 1$) в силу взаимно однозначной связи (16), (17) при фиксированном ε также имеет решение $u(x,t,a)$, принадлежащее пространству V_1 для любой функции $f(x,t,a) \in L_2(Q_1)$.

Покажем, что для семейства решений $\{u_\varepsilon(x,t,a)\}$ краевой задачи (9), (2)–(5), (10), (11) имеет место априорная оценка, равномерная по ε и такая, что с ее помощью можно будет организовать процедуру предельного перехода.

Для этого повторим действия, с помощью которых получено равенство (22), т. е. уравнение (9) умножим на функцию $[u_{\varepsilon xxtttt}(x,t,a) + u_{\varepsilon xxaaaa}(x,t,a)]$, проинтегрируем по Q^-, затем умножим на $\gamma[u_{\varepsilon xxtttt}(x,t,a)+u_{\varepsilon xxaaaa}(x,t,a)]$, $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$, проинтегрируем по Q^+ и сложим. При выполнении условий (2)–(5), (10), (11) получим равенство (22), где в правой части будут лишь интегралы от функций $f[u_{\varepsilon xxtttt} + u_{\varepsilon xxaaaa}]$ в соответствующих подобластях Q^+, Q^-. В этих интегралах выполним дважды интегрирование по частям по переменным t и a соответственно, затем применим неравенство Юнга. Тогда при выполнении условий (8) получим

$$\varepsilon \int\limits_{Q^-} \left(u^2_{\varepsilon xxtttt} + u^2_{\varepsilon xxaaaa}\right) dQ^- + \varepsilon \int\limits_{Q^+} \left(u^2_{\varepsilon xxtttt} + u^2_{\varepsilon xxaaaa}\right) dQ^+$$
$$+ \int\limits_{Q^-} \left(u^2_{\varepsilon xxtt} + u^2_{\varepsilon xxaa}\right) dQ^- + \int\limits_{Q^+} \left(u^2_{\varepsilon xxtt} + u^2_{\varepsilon xxaa}\right) dQ^+$$
$$\leq C_3\left(\|f_{tt}\|^2_{L_2(Q_1)} + \|f_{aa}\|^2_{L_2(Q_1)}\right), \quad (24)$$

в котором число $C_3 > 0$ определяется только числами α, β. Из этой оценки следует априорная оценка

$$\|u_\varepsilon\|^2_{V_1} \leq M\left(\|f_{tt}\|^2_{L_2(Q_1)} + \|f_{aa}\|^2_{L_2(Q_1)}\right). \quad (25)$$

Из оценки (25) и свойства рефлексивности пространства L_2 следует, что существуют последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел и функция $u(x,t,a)$ такие, что при $n \to \infty$ выполняется

$$\varepsilon_n \to 0, \quad u_{\varepsilon_n}(x,t,a) \to u(x,t,a), \quad u_{\varepsilon_n tt}(x,t,a) \to u_{tt}(x,t,a),$$

$$u_{\varepsilon_n aa}(x,t,a) \to u_{aa}(x,t,a), \quad u_{\varepsilon_n xx}(x,t,a) \to u_{xx}(x,t,a)$$

слабо в пространстве $L_2(Q)$.

Очевидно, что предельная функция $u(x, y, t)$ принадлежит пространству V_0, для нее в областях Q^+ и Q^- выполнены уравнение (1), а также краевые условия (2)–(4) и условия сопряжения (5). Другими словами, функция $u(x, y, t)$ дает решение краевой задачи (1)–(5) из требуемого класса. Теорема доказана.

3. Замечания

1. Теоремы 1 и 2 также справедливы, например, для квазиэллиптических уравнений

$$u_{tt} + (-1)^{m+1}\frac{\partial^{2m} u}{\partial a^{2m}} + u_{xx} = f(x, t, a), \quad m \geq 2,$$

с граничными условиями (2), (3), (5) и условиями

$$\left.\frac{\partial^k u(x,t,a)}{\partial a^k}\right|_{a=0} = \left.\frac{\partial^k u(x,t,a)}{\partial a^k}\right|_{a=A} = 0, \quad (x,t) \in (-1,1)\times(0,T), \quad k = 0, \ldots, m-1.$$

2. Вместо симметричного интервала $(-1, 1)$ переменной x можно рассмотреть произвольный интервал (a, b).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубинский Ю. А.* Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях // Мат. сб. 1965. Т. 67. № 4. С. 609–642.
2. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. М.: ВИНИТИ, 1971.
3. *Gevrey M.* Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique // J. Math. Appl. 1913. V. 9, №. 6. P. 305–478.
4. *Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н.* Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983.
5. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
6. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
7. *Кислов Н. В., Пулькин И. С.* О существовании и единственности слабого решения задачи Жевре с обобщенными условиями склейки // Вестн. МЭИ. 2002. № 6. С. 88–92.
8. *Петрушко И. М., Черных Е. В.* О параболических уравнениях 2-го порядка с меняющимся направлением времени // Вестн. МЭИ. № 6. 2003. С. 85–93.
9. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН. 1979.
10. *Pyatkov S. G., Popov S., Antipin V. I.* On solvability of boundary value problem for kinetic operator-differential equations // Integral Equ. Operator Theory, 2014. V. 80, No. 4, P. 557–580.
11. *Антипин В. И.* Разрешимость краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 245–257.
12. *Potapova S. V.* Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction // TWMS J. Pure Appl. Math. 2012. V. 3, N 1. P. 75–91.
13. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

14. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

Статья поступила 28 августа 2016 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Потапова Саргылана Викторовна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Научно-исследовательский институт математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
sargyp@inbox.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

UDC 517.95

ON A NON–STANDARD CONJUGATION PROBLEM FOR ELLIPTIC EQUATIONS

A. I. Kozhanov and S. V. Potapova

Abstract. We investigate the regular solvability of the conjugation problem for elliptic equations with non-standard boundary conditions and sewing conditions on the plane $x = 0$. Let Q be a parallelepiped. On the bottom of Q we give a boundary condition for $u(x, t, a)$ in the part where $x > 0$ and for $u_t(x, t, a)$ in the part where $x < 0$. On the plane $x = 0$ these conditions "intertwist", so on the top of Q we give a boundary condition for $u(x, t, a)$ in the part where $x < 0$ and for $u_t(x, t, a)$ in the part where $x > 0$. Combining the regularization method and natural parameter continuation, we prove the uniqueness and existence theorems for regular solutions of this non-standard conjugation problem.

Ключевые слова: conjugation problem, regular solution, sewing condition, elliptic equation, discontinuous boundary conditions.

REFERENCES

1. *Dubinskii Yu. A.* “Weak convergence for nonlinear elliptic and parabolic equations,” Mat. Sb., **67**, No. 4, 609–642 (1965).

2. *Oleinik O. A. and Radkevic E. V.* “ Second order equations with nonnegative characteristic form,” Itogi Nauki, Ser. Mat., Mat. Anal. 1969, 7–252 (1971).

3. *Gevrey M.* “Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique,” J. Math. Appl. **9**, No. 6, 305–478 (1913).

4. *Larkin N., Novikov B., and Yanenko N.*, Non-linear mixed type equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1983).

5. *Tersenov S. A.*, The parabolic equations with changing time direction [in Russian], Inst. Math., Novosibirsk (1985).

6. *Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V.*, Nonclassical operator-differential equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2000).

7. *Kislov N. V. and Pulkin I. S.* “On existence and uniqueness of a week solution to Gevrey problem with generalized sewing conditions,” Vestn. MEI, No. 6, 88–92 (2002).

8. *Petrushko I. M. and Chernykh E. V.* “About parabolic equations of second order with changing time direction,” Vestn. MEI, № 6, 85–93 (2003).

9. *Djuraev T. D.*, Boundary value problems for equations of mixed and mixed-compound type [in Russian], FAN, Tashkent (1986).

10. *Pyatkov S. G., Popov S. V., and Antipin V. I.* “On solvability of boundary value problem for kinetic operator-differential equations,” Integral Equ. Operator Theory, **80**, No. 4, 557–580 (2014).

11. *Antipin V. I.*, “Solvability of a boundary value problem for operator-differential equations of mixed type”, Sib. Math. J., **54**, No. 2, 185–195 (2013);

12. *Potapova S. V.* “Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction,” TWMS J. Pure Appl. Math., **3**, No. 1, 75–91 (2012).

13. *Trenogin V. A.*, Functional analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1993).

14. *Yakubov S. Ya.*, Linear differential-operator equations and their applications [in Russian], Elm, Baku (1985).

Submitted August 28, 2016

Aleksandr Ivanovich Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 2, Novosibirsk 630090, Russia
kozhanov@math.nsc.ru

Sargylana Viktorovna Potapova
M. K. Ammosov Nord-Eastern Federal University,
Research Institute of Mathematic,
Kulakovskogo st., 48, Yakutsk 677000, Russia
sargyp@inbox.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

УДК 512.547.214

О СТРОЕНИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С БОЛЬШИМ НЕПРИВОДИМЫМ ХАРАКТЕРОМ СТЕПЕНИ p^2q

С. С. Поисеева

Аннотация. Изучаются конечные неединичные группы G, обладающие неприводимым комплексным характером Θ степени $\Theta(1) = p^2q$, для которых $|G| \leq 2\Theta(1)^2$, где p, q — простые числа.

Ключевые слова: конечная группа, характер конечной группы, степень неприводимого характера конечной группы.

Конечную неединичную группу порядка больше двух, обладающую неприводимым комплексным характером Θ, для которого $2\Theta(1)^2 \geq |G|$, будем называть $LC(\Theta)$-группой (от "Large character"), см [1]. $LC(\Theta)$-группы представляют особый интерес, поскольку очевидно обладают экстремальным свойством, ибо в силу известной теоремы Фробениуса порядок группы является суммой квадратов степеней ее неприводимых комплексных характеров и при этом часто он значительно больше степени любого ее неприводимого характера.

В общем случае задача описания строения группы, обладающей неприводимым характером Θ, таким, что $|G| \leq c\Theta(1)^2$, при $c < 5$ представляется довольно сложной. Атлас конечных групп [2] содержит таблицу характеров 90 конечных простых групп, из них 23 группы обладают таким неприводимым комплексным характером Θ степени $\Theta(1)$, для которого верно неравенство $c\Theta(1)^2 \geq |G|$, при $c < 5$. Из этих 23 групп: 8 спорадических простых групп (M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, Th, J_1, HS), 6 знакопеременных (A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{11}), 6 классических простых групп лиева типа ($L_2(11)$, $L_3(2)$, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $U_4(2)$, $U_4(3)$) и 3 исключительных простых групп лиева типа ($Sz(8)$, ${}^2F_4(2)'$, $O_8^+(2)$). При $c < 4$ всего 15 групп, для которых выполняется неравенство $c\Theta(1)^2 \geq |G|$. При $c < 3$ условию удовлетворят только 8 групп.

Таким неприводимым характером Θ степени $\Theta(1) = 190373976$ при $c < 2,6$ обладает спорадическая группа Томпсона $Th = F_{3|3}$, т. е. $|Th| < 2,51\Theta(1)^2$. При $c < 3$ четыре группы Матье $M_{11}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$ имеют неприводимый характер Θ степени $\Theta(1)$, равный соответственно 55, 385, 2024, 10395. При $c < 2,7$ группа $L_3(2)$ порядка 168, обладает неприводимым характером степени $\Theta(1) = 8$. Знакопеременные группы A_5, A_7 при $c < 2,5$ имеют неприводимый характер степени 5 и 35 соответственно.

Заметим, что в [2] нет таких групп, у которых степень неприводимого комплексного характера Θ удовлетворяла бы условию $c\Theta(1)^2 \geq |G|$, при $c \leq 2$.

Естественно изучать конечные $LC(\Theta)$-группы, у которых $\Theta(1)$ имеет некоторые дополнительные ограничения. В [3] показано, что если $\Theta(1)$ — степень простого числа p и силовская p-подгруппа группы G абелева, то G является p-нильпотентной группой. В [4] доказано, что в случае, когда $\Theta(1)$ — произведение двух различных простых чисел p и q, группа G является разрешимой группой с абелевой нормальной подгруппой K индекса pq. А в [1] изучались $LC(\Theta)$-группы с $\Theta(1) = p^2q$, где $p > q$, которые, как выяснилось, являются разрешимыми группами с абелевой нормальной подгруппой M индекса p^2q.

Большая часть работы [1] посвящена $LC(\Theta)$-группам с $\Theta(1) = p^2q$, для которых $p > 3$ и $p > q$. Для этого случая было доказано, что конечная группа с таким неприводимым характером Θ обладает абелевой нормальной подгруппой индекса p^2q. Для групп с $p = 3$ была сделана ссылка на систему *GAP* [5] и на Атлас конечных групп [2]. Однако имеет смысл показать, что основные результаты [1] выполняются также и для $LC(\Theta)$-групп с $\Theta(1) = p^2q$, для которых $p = 3, q = 2$ или $p = q$.

Для краткости $LC(\Theta)$-группы с $\Theta(1) = 3^2 \cdot 2$ или $\Theta(1) = p^3$, где p — простое число, будем называть *исключительными $LC(\Theta)$-группами.*

Цель настоящей работы — уточнение строения исключительных конечных $LC(\Theta)$-групп, а также исправление формулировки и доказательства леммы 12, использованной в доказательстве теоремы 2 из [1].

Следует заметить, что хотя лемма 12 из [1] требует коррекции, от этого результат теоремы 2 не изменится.

Рассмотрим исключительные $LC(\Theta)$-группы с $\Theta(1) = p^3$, где p — простое число.

(1) В [3] установлено, что $LC(\Theta)$-группы с $\Theta(1) = p^m$ и абелевой силовской p-подгруппой являются либо группами Фробениуса, либо прямым произведением групп Фробениуса. Пример В. И. Зенкова из [6] является не единственным исключением, как показалось на первый взгляд. С помощью системы *GAP* [5] были найдены и другие примеры $LC(\Theta)$-групп с $\Theta(1) = p^m$ и неабелевой силовской p-подгруппой.

Пусть $\boldsymbol{G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes Q_8}$, где $V_9 \cong C_3 \times C_3$ — элементарная абелева подгруппа порядка 9. Тогда $\overline{G} = G/O_3(G) \cong Q_8$ и таблица характеров для Q_8 известна, ибо Q_8 изоморфна D_8 (см. приложение 1 в [7]).

(2) В [3] также доказано, что почти всегда любой неприводимый характер $LC(\Theta)$-группы входит в разложение квадрата характера Θ. Исключение составляют группы порядка, равного степени двойки. Типичный пример — экстраспециальная 2-группа. Первое предположение о том, что только такие группы и являются исключениями, оказалось неверным. Примеры неэкстраспециальных 2-групп, являющихся $LC(\Theta)$-группами, также были также найдены с помощью *GAP* [5].

Так, $LC(\Theta)$-группы порядка 128 обладают неприводимым характером Θ степени 2^3. У экстраспециальной группы порядка 2^7 имеется 64 характера степени 1 и один характер Θ степени 8, а таблица характеров $LC(\Theta)$-группы

Таблица 1

	$\lvert G\rvert$ $1A$	16 $2A$	16 $2B$	16 $2C$	32 $2D$	32 $2E$	64 $2F$	128 $2G$	8 $4A$	8 $4B$	16 $4C$	16 $4D$	16 $4E$	16 $4F$	32 $4G$	8 $8A$	16 $4H$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_3	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
χ_5	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1
χ_6	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
χ_7	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_8	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
χ_9	2	0	0	-2	-2	2	2	2	0	0	0	0	0	2	-2	0	0
χ_{10}	2	0	0	2	-2	2	2	2	0	0	0	0	0	-2	-2	0	0
χ_{11}	2	0	-2	0	2	-2	2	2	0	0	0	0	2	0	-2	0	0
χ_{12}	2	0	0	0	-2	-2	2	2	0	0	0	-2	0	0	2	0	2
χ_{13}	2	0	0	0	-2	-2	2	2	0	0	0	2	0	0	2	0	-2
χ_{14}	2	0	2	0	2	-2	2	2	0	0	0	0	-2	0	-2	0	0
χ_{15}	4	-2	0	0	0	0	-4	4	0	0	2	0	0	0	0	0	0
χ_{16}	4	2	0	0	0	0	-4	4	0	0	-2	0	0	0	0	0	0
χ_{17}	8	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

порядка 2^7, не являющейся экстраспециальной, приведена в табл. 1,

$$\boldsymbol{G = (((C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2}, \quad |G| = 128 = 2^7, \quad \Theta(1) = 8 = 2^3.$$

Рассмотрим исключительные $LC(\Theta)$-группы с $\Theta(1) = 3^2 \cdot 2$.

В [1] доказано, что если $\Theta(1) = 3^2 \cdot 2$, то порядок группы G содержится в $\{342, 486, 504, 648\}$. Остановимся подробнее на каждой из этих исключительных $LC(\Theta)$-групп.

(3) $LC(\Theta)$-группа порядка $342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$ обладает неприводимым характером Θ степени $3^2 \cdot 2$ и $\boldsymbol{G \cong (C_{19} \rtimes C_9) \rtimes C_2 = C_{19} \rtimes C_{18}}$. У данной группы всего 18 характеров степени 1 и один характер Θ степени 18. Силовская 19-подгруппа M из G абелева нормальная индекса 18.

(4) Исключительная $LC(\Theta)$-группа порядка 486 обладает неприводимым характером Θ степени $3^2 \cdot 2$. Пусть $\boldsymbol{G \cong ((C_3 \times (C_9 \rtimes C_3)) \rtimes C_3) \rtimes C_2}$ и $|G| = 486 = 2 \cdot 3^5$. Силовская 3-подгруппа P из G нормальная индекса 2. У данной группы всего 6 линейных характеров, по 12 характеров степени 2 и 3, один характер Θ степени 18. Имеется абелева нормальная подгруппа $C_3 \times C_3 \times C_3$ индекса 18.

Таблица характеров данной группы G приведена в табл. 2.

(5) Следующая исключительная $LC(\Theta)$-группа порядка 504 обладает неприводимым характером Θ степени $3^2 \cdot 2$. Пусть $\boldsymbol{G \cong ((C_7 \rtimes C_3) \times A_4) \rtimes C_2}$ и $|G| =$

Таблица 2

$\left(a = \varepsilon_3^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2};\ b = 2\cdot\varepsilon_3 = -1+\sqrt{-3};\ c = 3\cdot\varepsilon_3^2 = \frac{-3-3\cdot\sqrt{-3}}{2}\right)$

	$\lvert G\rvert$	18	162	27	27	162	243	18	18	162	27	27	162	27	162	18
	1A	2A	3A	3B	3C	3D	3E	6A	6B	3F	3G	3H	3I	9A	3J	6C
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1
χ_3	1	-1	a	1	1	1	1	$-a$	-1	$\bar{a}$	a	a	a	1	1	$-\bar{a}$
χ_4	1	-1	$\bar{a}$	1	1	1	1	$-\bar{a}$	-1	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	1	1	$-a$
χ_5	1	1	a	1	1	1	1	a	1	$\bar{a}$	a	a	a	1	1	$\bar{a}$
χ_6	1	1	$\bar{a}$	1	1	1	1	$\bar{a}$	1	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	1	1	a
χ_7	2	0	2	2	-1	2	2	0	0	2	2	-1	2	-1	2	0
χ_8	2	0	2	-1	2	2	2	0	0	2	-1	2	2	-1	2	0
χ_9	2	0	2	-1	-1	2	2	0	0	2	-1	-1	2	-1	2	0
χ_{10}	2	0	2	-1	-1	2	2	0	0	2	-1	-1	2	2	2	0
χ_{11}	2	0	b	2	-1	2	2	0	0	$\bar{b}$	b	$-\bar{a}$	b	-1	2	0
χ_{12}	2	0	$\bar{b}$	2	-1	2	2	0	0	b	$\bar{b}$	$-a$	$\bar{b}$	-1	2	0
χ_{13}	2	0	b	-1	2	2	2	0	0	$\bar{b}$	$-\bar{a}$	b	b	-1	2	0
χ_{14}	2	0	$\bar{b}$	-1	2	2	2	0	0	b	$-a$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	-1	2	0
χ_{15}	2	0	$\bar{b}$	-1	-1	2	2	0	0	b	$-a$	$-a$	$\bar{b}$	-1	2	0
χ_{16}	2	0	b	-1	-1	2	2	0	0	$\bar{b}$	$-\bar{a}$	$-\bar{a}$	b	-1	2	0
χ_{17}	2	0	$\bar{b}$	-1	-1	2	2	0	0	b	$-a$	$-a$	$\bar{b}$	2	2	0
χ_{18}	2	0	b	-1	-1	2	2	0	0	$\bar{b}$	$-\bar{a}$	$-\bar{a}$	b	2	2	0
χ_{19}	3	-1	3	0	0	c	3	-1	$-a$	3	0	0	c	0	$\bar{c}$	-1
χ_{20}	3	-1	3	0	0	$\bar{c}$	3	-1	$-\bar{a}$	3	0	0	$\bar{c}$	0	c	-1
χ_{21}	3	-1	c	0	0	c	3	$-a$	$-a$	$\bar{c}$	0	0	$\bar{c}$	0	$\bar{c}$	$-\bar{a}$
χ_{22}	3	-1	$\bar{c}$	0	0	$\bar{c}$	3	$-\bar{a}$	$-\bar{a}$	c	0	0	c	0	c	$-a$
χ_{23}	3	-1	c	0	0	$\bar{c}$	3	$-a$	$-\bar{a}$	$\bar{c}$	0	0	3	0	c	$-\bar{a}$
χ_{24}	3	-1	$\bar{c}$	0	0	c	3	$-\bar{a}$	$-a$	c	0	0	3	0	$\bar{c}$	$-a$
χ_{25}	3	1	3	0	0	c	3	1	a	3	0	0	c	0	$\bar{c}$	1
χ_{26}	3	1	3	0	0	$\bar{c}$	3	1	$\bar{a}$	3	0	0	$\bar{c}$	0	c	1
χ_{27}	3	1	c	0	0	c	3	a	a	$\bar{c}$	0	0	$\bar{c}$	0	$\bar{c}$	$\bar{a}$
χ_{28}	3	1	$\bar{c}$	0	0	$\bar{c}$	3	$\bar{a}$	$\bar{a}$	c	0	0	c	0	c	a
χ_{29}	3	1	c	0	0	$\bar{c}$	3	a	$\bar{a}$	$\bar{c}$	0	0	3	0	c	$\bar{a}$
χ_{30}	3	1	$\bar{c}$	0	0	c	3	$\bar{a}$	a	c	0	0	3	0	$\bar{c}$	a
χ_{31}	18	0	0	0	0	0	-9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2 (окончание)

	18 6D	18 6E	27 3K	27 3L	162 3M	27 9B	162 3N	27 9C	18 6F	18 6G	27 9D	162 3O	27 9E	18 6H	27 9F
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1
χ_3	$-a$	-1	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	a	a	1	$-\bar{a}$	$-a$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	a	$-\bar{a}$	$\bar{a}$
χ_4	$-\bar{a}$	-1	a	a	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	1	$-a$	$-\bar{a}$	a	a	$\bar{a}$	$-a$	a
χ_5	a	1	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	a	a	1	$\bar{a}$	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$
χ_6	$\bar{a}$	1	a	a	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	1	a	$\bar{a}$	a	a	$\bar{a}$	a	a
χ_7	0	0	2	-1	2	-1	2	-1	0	0	-1	2	-1	0	-1
χ_8	0	0	-1	2	2	-1	2	-1	0	0	-1	2	-1	0	-1
χ_9	0	0	-1	-1	2	-1	2	2	0	0	-1	2	2	0	2
χ_{10}	0	0	-1	-1	2	2	2	-1	0	0	2	2	-1	0	-1
χ_{11}	0	0	$\bar{b}$	$-a$	$\bar{b}$	$-\bar{a}$	b	-1	0	0	$-a$	$\bar{b}$	$-\bar{a}$	0	$-a$
χ_{12}	0	0	b	$-\bar{a}$	b	$-a$	$\bar{b}$	-1	0	0	$-\bar{a}$	b	$-a$	0	$-\bar{a}$
χ_{13}	0	0	$-a$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{a}$	b	-1	0	0	$-a$	$\bar{b}$	$-\bar{a}$	0	$-a$
χ_{14}	0	0	$-\bar{a}$	b	b	$-a$	$\bar{b}$	-1	0	0	$-\bar{a}$	b	$-a$	0	$-\bar{a}$
χ_{15}	0	0	$-\bar{a}$	$-\bar{a}$	b	$-a$	$\bar{b}$	2	0	0	$-\bar{a}$	b	$\bar{b}$	0	b
χ_{16}	0	0	$-a$	$-a$	$\bar{b}$	$-\bar{a}$	b	2	0	0	$-a$	$\bar{b}$	b	0	$\bar{b}$
χ_{17}	0	0	$-\bar{a}$	$-\bar{a}$	b	$\bar{b}$	$\bar{b}$	-1	0	0	b	b	$-a$	0	$-\bar{a}$
χ_{18}	0	0	$-a$	$-a$	$\bar{b}$	b	b	-1	0	0	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{a}$	0	$-a$
χ_{19}	$-a$	$-\bar{a}$	0	0	c	0	$\bar{c}$	0	$-a$	$-\bar{a}$	0	$\bar{c}$	0	$-\bar{a}$	0
χ_{20}	$-\bar{a}$	$-a$	0	0	$\bar{c}$	0	c	0	$-\bar{a}$	$-a$	0	c	0	$-a$	0
χ_{21}	$-\bar{a}$	$-\bar{a}$	0	0	3	0	3	0	-1	-1	0	c	0	$-a$	0
χ_{22}	$-a$	$-a$	0	0	3	0	3	0	-1	-1	0	$\bar{c}$	0	$-\bar{a}$	0
χ_{23}	-1	$-a$	0	0	c	0	$\bar{c}$	0	$-a$	$-\bar{a}$	0	3	0	-1	0
χ_{24}	-1	$-\bar{a}$	0	0	$\bar{c}$	0	c	0	$-\bar{a}$	$-a$	0	3	0	-1	0
χ_{25}	a	$\bar{a}$	0	0	c	0	$\bar{c}$	0	a	$\bar{a}$	0	$\bar{c}$	0	$\bar{a}$	0
χ_{26}	$\bar{a}$	a	0	0	$\bar{c}$	0	c	0	$\bar{a}$	a	0	c	0	a	0
χ_{27}	$\bar{a}$	$\bar{a}$	0	0	3	0	3	0	1	1	0	c	0	a	0
χ_{28}	a	a	0	0	3	0	3	0	1	1	0	$\bar{c}$	0	$\bar{a}$	0
χ_{29}	1	a	0	0	c	0	$\bar{c}$	0	a	$\bar{a}$	0	3	0	1	0
χ_{30}	1	$\bar{a}$	0	0	$\bar{c}$	0	c	0	$\bar{a}$	a	0	3	0	1	0
χ_{31}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. Силовская 7-подгруппа T из G нормальная индекса 72. Подгруппа, изоморфная $C_7 \times V_4$, абелева нормальная индекса 18.

(6) Интересным оказался случай, когда $LC(\Theta)$-группы имеют порядок 648. Пусть $\boldsymbol{G = ((C_2 \times C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_3)) \rtimes C_3) \rtimes C_2}$ и G обладает неприводи-

Таблица 3

$$\big(a = 2\cdot\varepsilon_9^2 + \varepsilon_9^4 + \varepsilon_9^5 + 2\cdot\varepsilon_9^7;\ b = -\varepsilon_9^2 - 2\cdot\varepsilon_9^4 - 2\cdot\varepsilon_9^5 - \varepsilon_9^7;$$
$$c = -\varepsilon_9^2 + \varepsilon_9^4 + \varepsilon_9^5 - \varepsilon_9^7;\ d = \varepsilon_3^2 = \tfrac{-1-\sqrt{-3}}{2};\ e = 2\cdot\varepsilon_3^2 = -1-\sqrt{-3};$$
$$f = 3\cdot\varepsilon_3^2 = \tfrac{-3-3\cdot\sqrt{-3}}{2};\ g = 4\cdot\varepsilon_3^2 = -2-2\cdot\sqrt{-3}\big)$$

	$\lvert G\rvert$	216	324	108	108	36	27	27	27	72	36	72
	1A	2A	3A	6A	3B	6B	9A	9B	9C	3C	6C	6D
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	d	d	d
χ_4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\bar d$	$\bar d$	$\bar d$
χ_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	d	d	d
χ_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\bar d$	$\bar d$	$\bar d$
χ_7	2	2	2	2	2	2	-1	-1	-1	2	2	2
χ_8	2	2	2	2	2	2	-1	-1	-1	e	e	e
χ_9	2	2	2	2	2	2	-1	-1	-1	$\bar e$	$\bar e$	$\bar e$
χ_{10}	3	-1	3	-1	3	-1	0	0	0	3	-1	-1
χ_{11}	3	-1	3	-1	3	-1	0	0	0	3	-1	-1
χ_{12}	3	-1	3	-1	3	-1	0	0	0	f	$-d$	$-d$
χ_{13}	3	-1	3	-1	3	-1	0	0	0	$\bar f$	$-\bar d$	$-\bar d$
χ_{14}	3	-1	3	-1	3	-1	0	0	0	f	$-d$	$-d$
χ_{15}	3	-1	3	-1	3	-1	0	0	0	$\bar f$	$-\bar d$	$-\bar d$
χ_{16}	6	6	6	6	-3	-3	0	0	0	0	0	0
χ_{17}	6	-2	6	-2	-3	1	0	0	0	0	-2	4
χ_{18}	6	-2	6	-2	-3	1	0	0	0	0	$-e$	g
χ_{19}	6	-2	6	-2	-3	1	0	0	0	0	$-\bar e$	$\bar g$
χ_{20}	6	6	-3	-3	0	0	a	c	b	0	0	0
χ_{21}	6	6	-3	-3	0	0	b	a	c	0	0	0
χ_{22}	6	6	-3	-3	0	0	c	b	a	0	0	0
χ_{23}	18	-6	-9	3	0	0	0	0	0	0	0	0

мым характером Θ степени 18 (табл. 3). У данной группы всего шесть характеров степени 1 и 3, три характера степени 2, семь характеров степени 6 и один характер Θ степени 18. Подгруппа, изоморфная $C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3$, абелева нормальная индекса 18.

В доказательстве теоремы 2 из [1] использована лемма 12. Напомним, что хотя она требует коррекции, от этого результат теоремы 2 не изменится. Формулировка и доказательство этой леммы должны быть изменены следующим образом.

Таблица 3 (окончание)

	9 3D	72 3E	36 6E	72 6F	9 3F	12 2B	12 4A	12 6G	12 12A	12 6H	12 12B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_3	d	$\bar{d}$	$\bar{d}$	$\bar{d}$	$\bar{d}$	-1	-1	$-d$	$-d$	$-\bar{d}$	$-\bar{d}$
χ_4	$\bar{d}$	d	d	d	d	-1	-1	$-\bar{d}$	$-\bar{d}$	$-d$	$-d$
χ_5	d	$\bar{d}$	$\bar{d}$	$\bar{d}$	$\bar{d}$	1	1	d	d	$\bar{d}$	$\bar{d}$
χ_6	$\bar{d}$	d	d	d	d	1	1	$\bar{d}$	$\bar{d}$	d	d
χ_7	-1	2	2	2	-1	0	0	0	0	0	0
χ_8	$-d$	$\bar{e}$	$\bar{e}$	$\bar{e}$	$-\bar{d}$	0	0	0	0	0	0
χ_9	$-\bar{d}$	e	e	e	$-d$	0	0	0	0	0	0
χ_{10}	0	3	-1	-1	0	-1	1	-1	1	-1	1
χ_{11}	0	3	-1	-1	0	1	-1	1	-1	1	-1
χ_{12}	0	$\bar{f}$	$-\bar{d}$	$-\bar{d}$	0	-1	1	$-d$	d	$-\bar{d}$	$\bar{d}$
χ_{13}	0	f	$-d$	$-d$	0	-1	1	$-\bar{d}$	$\bar{d}$	$-d$	d
χ_{14}	0	$\bar{f}$	$-\bar{d}$	$-\bar{d}$	0	1	-1	d	$-d$	$\bar{d}$	$-\bar{d}$
χ_{15}	0	f	$-d$	$-d$	0	1	-1	$\bar{d}$	$-\bar{d}$	d	$-d$
χ_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{17}	0	0	-2	4	0	0	0	0	0	0	0
χ_{18}	0	0	$-\bar{e}$	$\bar{g}$	0	0	0	0	0	0	0
χ_{19}	0	0	$-e$	g	0	0	0	0	0	0	0
χ_{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{21}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{22}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{23}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Лемма. *Пусть G — $LC(\Theta)$-группа с $\Theta(1) = p^2q$, где p и q — различные простые числа и $p > q$. Тогда силовская p-подгруппа P группы G имеет порядок не больше p^5. Если $P \lhd G$, то $|G| = 486$. Если P не нормальна в G и $|G| \neq 648$, то $|P| \leq p^3$.*

Доказательство. Пусть G — $LC(\Theta)$-группа с $\Theta(1) = p^2q$, где $p > q$. Так как $|G| \leq 2p^4q^2$, то $|P| \leq p^6$, иначе q не делит $|G|$. Если $|P| = p^6$, то $2p^4q^2 < 2p^6$ ввиду $q < p$. Значит, $|G| = |P| = p^6$, что неверно, ибо в таком случае q не делит $|G|$. Итак, $|P| \leq p^5$.

Допустим, что $|P| = p^5$. Так как $|G| = p^5q^bm \leq 2p^4q^2$, где $(m, pq) = 1$, то $b \leq 2$. Однако $p > q \geq 2$. Следовательно, можно считать, что $b = 1$. В этом случае $pm \leq 2q$. Если $m = 2$, то $p < q$ вопреки предположению. При $m = 1$ будет $P \lhd G$ и $|G| = p^5q$.

По теореме 9.12 из [8] и лемме 9 из [4]

$$\Theta_P = \sum_{i=1}^{q} \chi_i,$$

где $\chi_i \in \mathrm{Irr}(P)$, причем из $\Theta(1) = p^2q$ следует, что $\chi_i(1) = p^2$ для $i = 1, 2, \ldots, q$. Так как χ_i — неприводимые характеры P, то $Z(P) \subseteq Z(\chi_i)$. Поэтому

$$\sum_{z \in Z(P)} |\chi_i(z)|^2 = |Z(P)|p^4 \le |P| = p^5.$$

Следовательно, $|Z(P)| = p$. Так как $|Z(P)|\Theta(1)^2 = |G| = p^5q$, то $Z(G) = 1$ и подгруппа $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ порядка q действует на $Z(P)$ нетривиально. Отсюда $q|p-1$. Существует $\frac{p-1}{q}$ сопряженных характеров группы G степени p^2q, исчезающих на $P - Z(P)$. Группа Q разбивает множество характеров χ_i степени p^2 на орбиты длины q. Таким образом, у группы G имеется $\frac{p-1}{q}$ характеров степени p^2q. Так как G не может иметь более одного характера степени p^2q, то $p-1 = q$. Стало быть, $p = 3, q = 2$ и $|G| = 486$ (см. табл. 2). Вычисления с помощью GAP [5] показывают, что группа с рассматриваемыми свойствами существует.

Допустим, что $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ имеет порядок p^4. Если $P \triangleleft G$, то по теореме 6.2 из [9] имеем

$$\Theta_P = e\sum_{i=1}^{s} \chi_i,$$

где $e, s||G/P|$ и $\chi_i \in \mathrm{Irr}(P)$. Так как $|G/P|$ взаимно просто с p и $\Theta(1) = p^2q$, то $\chi_i(1) = p^2$. Это приводит к противоречию, поскольку сумма степеней неприводимых характеров группы P не может быть больше $|P| = p^4$. Стало быть, P не может быть нормальной. Поскольку $|G| \le 2p^4q^2$, то $|G| = p^4q^bm$, где $q^bm \le 2q^2$ и $(m, pq) = 1$. Отсюда имеются также возможности для G:

1) $b = 2$, $|G| = p^4q^2$;

2) $b = 2$, $|G| = 8p^4, q = 2$;

3) $b = 1$, $|G| = p^4qm$, где $m < 2q$.

Случай, когда $|G| = 2p^4q^2$, при $q > 2$ невозможен, ибо тогда в G имеется подгруппа индекса 2, что противоречит лемме 10 из [4]. Допустим, что $|G| = p^4q^2$. Так как P не нормальна в G, то $|G : N_G(P)| = q^2 = 1 + kp$. Отсюда p делит $q^2 - 1$ и $p|q + 1$, что возможно только при $p = 3, q = 2$ и $|G| = 324$, система GAP [5] показывает, что группа порядка 324 не является $LC(\Theta)$-группой.

Предположим, что $|G| = 8p^4$. Тогда G имеет подгруппу P индекса 8 и ввиду того, что P не нормальна в G, получаем, что $|G : N_G(P)|$ равно 4 или 8. В первом случае получаем $p = 3$ и $|G| = 648$ (см. табл. 3). Использование GAP [5] показывает, что группа с рассматриваемыми свойствами существует. Если $p = 7$, то $N_G(P) = P$ и по теореме 1.1 из [10] G разрешима. Легко видеть, что $G/O_7(G)$ — группа Фробениуса порядка $56 = 2^3 \cdot 7$. Подгруппа $O_7(G)$ не может быть абелевой ввиду теоремы 6.15 (Ито) из [9]. Поэтому она неабелева. Так как $|O_7(G)| = 7^3$, имеется циклическая подгруппа T порядка 7, нормальная в G, и

$|G : C_G(T)|$ делит $|Out(T)| = 6$. Так как G не имеет подгрупп индекса 2 или 3, то $T \leq Z(G)$. Это противоречит тому, что $Z(G) = 1$.

Рассмотрим теперь случай 3. Порядок G равен p^4mq, где $m < 2q$ и $(m, pq) = 1$. По теореме A из [11] получаем, что $P \cap P^x = O_p(G)$ для некоторого $x \in G$. При этом $|P/O_p(G)|^2 < |G/O_p(G)|$. Так как $mq < 2p^2$, при $P \neq N_G(P)$ получаем, что $|O_p(G)| \geq p^3$, а при $P = N_G(P)$ группа G разрешима. Если $|O_p(G)| = p^2$, то ввиду теоремы Бернсайда (группа $P/O_p(G)$ абелева) получаем, что $G/O_p(G)$ — p-нильпотентна. Из существования подгруппы порядка p^4q в G теперь следует, что $N_G(P) \neq P$. Поэтому можно считать, что $|O_p(G)| \geq p^3$. Так как P не нормальна в G по предыдущему, то $|O_p(G)| = p^3$ и $O_p(G)$ неабелева по теореме 6.15 (Ито) из [9]. Поэтому $Z(O_p(G)) = T$ имеет порядок p и $T \lhd G$. Следовательно, $C_G(T) \lhd G$ и $G/C_G(T) \leq \mathrm{Aut}(T)$ имеет порядок, делящий $p - 1$. По лемме 10 из [4] получаем, что $|G/C_G(T)|$ — степень q. Отсюда $|G/C_G(T)| = q$. В частности, $|C_G(T)| = p^4m$. По теореме 9.12 из [8] заключаем, что имеется $\frac{p-1}{q}$ характеров группы G степени p^2q, так что $p = q + 1 = 3, q = 2$. Отсюда $m \leq 2$. Этот случай уже рассмотрен выше. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поисеева С. С.* Конечные группы с большой степенью неприводимого характера // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 4. С. 43–61.

2. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups: maximal subgroups and ordinary characters for simple groups. Oxford: Clarendon Press., 1985.

3. *Казарин Л. С., Поисеева С. С.* Конечные группы с большим неприводимым характером // Мат. заметки. 2015. Т. 98, №. 2. С. 237–246.

4. *Казарин Л. С., Поисеева С. С.* О конечных группах с большой степенью неприводимого характера // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, № 4. С. 483–499.

5. *The GAP Group* GAP — Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4.10. [Электронный ресурс] / Aachen, St. Andrews, 2008. Режим доступа: http://www.gap-system.org

6. *Зенков В. И.* О p-блоках дефекта 0 в p-разрешимых группах // Тр. ИММ УрО РАН. М.: Факториал, 1995. № 2. С. 36–40.

7. *Белоногов В. А.* Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990.

8. *Feit W.* Characters of finite groups. New York, Amsterdam: Yale University, 1967.

9. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York, San Francisco, London: Acad. Press, 1976.

10. *Guralnick R. M., Malle G., Navarro G.* Self-normalizing Sylow subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 132, No 4. P. 973–979.

11. *Зенков В. И.* Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундамент. и прикл. математика. 1996. Т. 2, № 1. С. 1–92.

Статья поступила 11 июня 2016 г.

Поисеева Саргылана Семеновна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
pss.iii@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

UDC 512.547.214

ON THE STRUCTURE OF FINITE GROUPS WITH LARGE IRREDUCIBLE CHARACTER DEGREE p^2q

S. S. Poiseeva

Abstract. We study a finite nontrivial group G with an irreducible complex character Θ degree $\Theta(1) = p^2q$ such that $|G| \leq 2\Theta(1)^2$, where p, q are primes.
Keywords: finite group, character of a finite group, irreducible character degree of a finite group.

REFERENCES

1. *Poiseeva S. S.* “Finite groups with an irreducible character large degree,” Mat. Zamet. SVFU, **22**, №. 4, 43–61 (2015).
2. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., and Wilson R. A.*, Atlas of finite groups: maximal subgroups and ordinary characters for simple groups, Clarendon Press, Oxford (1985).
3. *Kazarin L. S. and Poiseeva S. S.* “Finite groups with large irreducible character,” Math. Notes, **98**, №. 1, 265–272 (2015).
4. *Kazarin L. S. and Poiseeva S. S.* “On finite groups with large degree irreducible character,” Model. Analiz Inform. Sistem, **22**, №. 4, 483–499 (2015).
5. *The GAP Group*, GAP — Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4.10. St. Andrews, Aachen (2008).
6. *Zenkov V. I.* “On p-blocks of zero defect in p-solvable groups,” Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, №. 2, 36–40 (1995).
7. *Belonogov V. A.*, Representations and characters of finite groups, Akad. Nauk USSR, Sverdlovsk (1990).
8. *Feit W.*, Characters of finite groups, Yale Univ., New York; Amsterdam (1967).
9. *Isaacs I. M.*, Character theory of finite groups, Acad. Press, New York; San Francisco; London (1976).
10. *Guralnick R. M., Malle G., and Navarro G.* “Self-normalizing Sylow subgroups,” Proc. Amer. Math. Soc., **132**, №. 4, 973–979 (2003).
11. *Zenkov V. I.* “The intersections of nilpotent subgroups in finite groups,” Fundam. Prikl. Mat., **2**, №. 1, 1–92 (1996).

Submitted June 11, 2016

Sargylana Semyonovna Poiseeva
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
48 Kulakovskii Street, Yakutsk 677000, Yakutia, Russia
pss.iii@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

УДК 550.344

УСТОЙЧИВОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ШАРЕ

А. Г. Фатьянов

Аннотация. Исследовано известное аналитическое решение для волновых полей в шаре. Показано, что использование стандартной асимптотики цилиндрических функций приводит к помехе в решении. Получено новое асимптотическое выражение для цилиндрических функций. Это дает устойчивое аналитическое решение, что позволяет получить его точное решение. На основе новой асимптотики введено понятие однородных и неоднородных волн для шара. Приведены примеры аналитического расчета полных волновых полей и только прямой волны для шара.
Ключевые слова: математическое моделирование в шаре, устойчивое аналитическое решение, полное волновое поле, прямая волна, новая асимптотика цилиндрических функций, однородные и неоднородные волны для шара.

Введение

Аналитическое решение задачи распространения волновых полей в шаре получено давно [1–7]. При этом ряд исследователей ограничивается только построением аналитического решения. Вычислительная сторона вопроса при этом остается без внимания. Но аналитическое решение далеко не всегда может быть доведено до численных результатов. Дело в том, что аналитическое решение после соответствующих интегральных преобразований, как правило, содержит отношение соответствующих цилиндрических функций. В этом случае из-за их быстрого возрастания (убывания) возникают неопределенности различного типа. Как отмечается в [7], в этой ситуации вычисление на компьютере может стать неустойчивым. Для преодоления неустойчивости предлагается использовать асимптотику цилиндрических функций. В работе использована классическая асимптотика цилиндрических функций. Показано, что в этом случае в решении возникает помеха. Помеха имеет вид «ложной» волны. Это происходит из-за того, что классическая асимптотика, например для функции Бесселя, верна для $\nu \gg |z|$. А значения функции Бесселя выходят за границы числового диапазона уже при $\nu \sim |z|$. В работе получена новая асимптотика цилиндрических функций. Это позволяет получить точное решение волновых полей в шаре.

Новая асимптотика цилиндрических функций имеет наглядный физический смысл. На ее основе введено определение однородных и неоднородных

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 14–07–00832, 15–07–06821).

волн для шара. Известно классическое представление прямой волны в полупространстве на основе однородных и неоднородных волн. Аналогичное представление для шара в точности дает граничную волну по сфере. Это не было известно ранее.

Аналитическое представление решения позволяет получать не только полное поле, но и проводить анализ волнового поля по частям. В качестве примера анализа волнового поля в работе получено решение для прямой волны. Оно сконструировано следующим образом. В качестве фундаментального решения взяты функции Ганкеля. Формально их брать нельзя, так как они не являются ограниченными в нуле (центр шара). Однако решение с функциями Ганкеля определено с помощью новой асимптотики для произвольных индексов и аргументов. Оно дает волновое поле для прямой волны в шаре.

Проведено аналитическое моделирование волновых полей в шаре. В качестве иллюстрации принципиального отличия волновой картины в шаре и полупространстве отметим следующее. Для сферических волн происходит фокусировка на обратной стороне шара. За счет сферической геометрии убывание волн происходит гораздо медленнее, чем в полупространстве.

1. Постановка задачи

Математическая постановка задачи моделирования волновых полей формулируется в сферической системе координат $(0 \le r < R_0, 0 \le \theta \le \pi, 0 < \phi \le 2\pi)$ следующим образом: определить компоненты вектора смещения для неупругой среды, которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}
\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\phi + \tau_{r\theta}\cos\theta) + f_r \cdot f(t), \\
\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}((\sigma_\theta - \sigma_\phi)\cos\theta + 3\tau_{r\theta}) + f_\theta \cdot f(t), \quad (1) \\
\rho\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r}(2\tau_{\theta\phi}\cos\theta + 3\tau_{\phi r}) + f_\phi \cdot f(t)
\end{gathered}$$

с начальными условиями при $t = 0$

$$u_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} = u_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = u_\phi = \frac{\partial u_\phi}{\partial t} = 0$$

и граничными данными при $r = R_0$

$$\sigma_r = \tau_{\theta r} = \tau_{\phi r}. \tag{2}$$

Предполагается, что компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций (а они с компонентами вектора смещения) известными соотношениями, в которых коэффициенты λ, μ по принципу Вольтерра заменяются интегральными операторами Λ, M, учитывающими влияние упругого последействия:

$$\Lambda x \equiv \lambda x(t) - \lambda^1 \int\limits_{-\infty}^{t} h(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad \mathrm{M}x \equiv \mu x(t) - \mu^1 \int\limits_{-\infty}^{t} g(t-\tau)x(\tau)d\tau \tag{3}$$

Здесь λ^1, μ^1 — величины, определяющие уровень поглощения. Функции последействия (ядра) $h(\xi)$, $g(\xi)$ определяют спектральный состав поглощения [8]. Среда (c_{ij}, c^1_{ij}, ρ) предполагается кусочно-непрерывной по координате r. На границах разрыва параметров ставятся известные условия сопряжения. Компоненты вектора силы $F = (f_r, f_\theta, f_\phi)$ описывают сосредоточенные и распределенные источники различного типа.

2. Построение устойчивого аналитического решения

Аналитическое решение для наглядности приведено в случае распространения SH волн. Приложим в точке $r = d$, $\theta = 0$ вращательное воздействие в виде момента сил [8]:

$$F = \delta(r-d)\frac{\delta(\theta)}{d^3\sin^2\theta}f(t)e_\phi = f_\phi \cdot f(t)e_\phi. \tag{4}$$

В этом случае задача определения вектора смещения в сферической системе координат сводится к нахождению единственной отличной от нуля компоненты вектора смещения $u_\phi(r,\theta,t)$ из следующей краевой задачи:

$$\rho\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{M}}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial\theta} - u_\phi\operatorname{ctg}\theta\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mathrm{M}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}\right)\right]$$
$$+\frac{3\mathrm{M}}{r}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}\right) + \frac{2\mathrm{M}}{r^2}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial\theta} - u_\phi\operatorname{ctg}\theta\right)\operatorname{ctg}\theta + \rho f_\phi f(t), \tag{5}$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}\right)\bigg|_{r=R_0} = 0, \tag{6}$$

$$u_\phi|_{t=0} = \frac{\partial u_\phi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{7}$$

На границах разрыва параметров ставятся известные условия сопряжения. В случае рассмотрения сейсмологической модели жидкого ядра нужно задать дополнительное граничное условие

$$\mathrm{M}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}\right)\bigg|_{r=R_1} = 0.$$

Для исследования устойчивости аналитического решения рассмотрим случай однородного шара. Решение ищется в виде разложения Фурье — Лежандра по переменным (θ, t):

$$u_\phi(r,\theta,t) = \frac{1}{2T}\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}u(r,k,\omega_n)\exp(i\omega_n t)P^1_k(\cos\theta). \tag{8}$$

Здесь $P^1_k(x)$ — полином Лежандра 1-го рода, $\omega_n = \frac{n\pi}{T}$. В итоге постановка (5)–(7) сведена к двухпараметрическому семейству (k,ω_n) краевых задач (для сокращения записи несущественные переменные обозначаются буквой c, а несущественные индексы опускаются):

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{(k+0.5)^2}{r^2}u + c\cdot\delta(r-d)F(\omega) = -\frac{\omega^2}{v^2}u, \tag{9}$$

$$-\frac{3}{2}\frac{1}{r}+\frac{du}{dr}\bigg|_{r=R_0}=0. \tag{10}$$

Здесь

$$v^2=\frac{1}{\rho}\left(\mu-\mu^1\int\limits_0^T g(t)e^{-i\omega t}\,dt\right),$$

$F(\omega)$ — спектр входного сигнала $f(t)$.

Функции Бесселя полуцелого индекса $J_{k+0.5}(z)$ и $J_{-k-0.5}(z)$ являются фундаментальной системой решений однородного уравнения (9) [1]. Из условия ограниченности решения в центре шара получим его при $r=R_0$ в следующем виде:

$$u=\frac{J_{k+0.5}(z)}{-1.5J_{k+0.5}(z)+z\cdot J_{k+0.5}(z)'}cF(\omega)=\frac{1}{-1.5+z\cdot J_{k+0.5}(z)'/J_{k+0.5}(z)}cF(\omega). \tag{11}$$

В (11) для наглядности рассмотрен случай, когда источник расположен на поверхности шара. При этом $z=\omega R_0/v$. Выражение для аналитического решения (11) или эквивалентные ему получены давно и во многих работах [1–7]. При этом ряд исследователей ограничивается только построением аналитического решения и не обращает внимания на вычислительную сторону вопроса. В (11) при возрастании k возникает особенность типа $\frac{0}{0}$. Известно, что функция Бесселя $J_{k+0.5}(z)$ быстро стремится к нулю. Поэтому особенность в (11) возникает уже при небольших значениях k. В [7] говорится, что из-за быстрого убывания бесселевых функций возникает неустойчивость и соответственно потеря точности. Для преодоления этой проблемы в [7] предлагается использовать классическую асимптотику

$$J_\nu(z)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\left(\frac{ez}{2\nu}\right)^\nu,$$

которая выполняется для фиксированного z при $\nu\to\infty$.

Применительно к (11) получим

$$J'_{k+0.5}(z)/J_{k+0.5}(z)\to(k+0.5)/z. \tag{12}$$

На рис. 1 приведен расчет полного поля (8) в однородном шаре по (11). При этом использовалась классическая асимптотика (12). Функции Бесселя брались из математической библиотеки спецфункций Фортрана [9]. Входной сигнал по времени взят в виде импульса Гауса — Пузырева:

$$f(t)=\exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}f_0t\right)^2\right]\sin(2\pi f_0t).$$

Доминирующая частота в источнике f_0 равна 0.05 Гц. Радиус шара R_0 равен 6371200 м. Скорость в однородном шаре 3000 м/сек. Выдача произведена на свободной поверхности шара через 1 градус до 180 градусов. Время (по

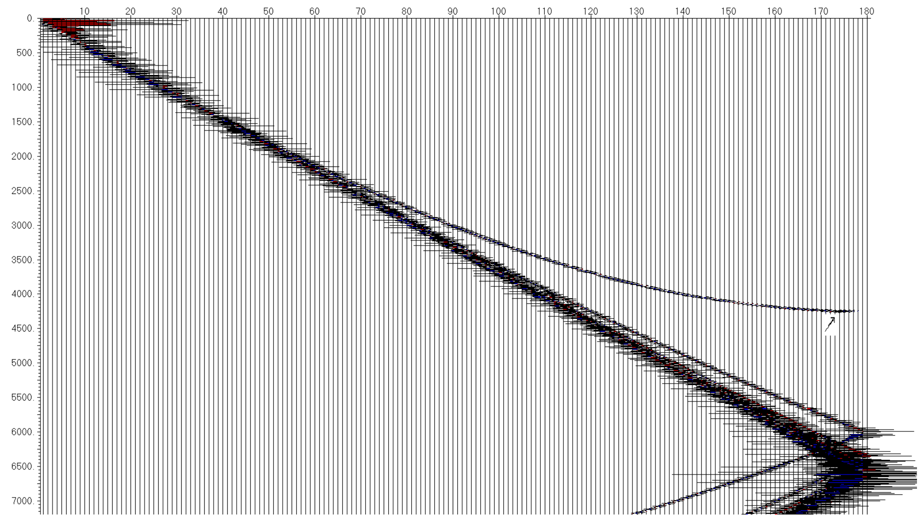

Рис. 1. Волновая картина в однородном шаре.

Рис. 2. Схема лучей в однородном шаре.

вертикали) выдано в секундах. Расчет проведен до времени 7200 сек, т. е. до 2-х часов.

На рис. 2 приведена схема некоторых лучей в произвольной плоскости $\phi = \phi_0$ однородного шара. В действительности их будет гораздо больше. В общем случае лучи будут распространяться по равносторонним вписанным многоугольникам. На рис. 1 стрелкой обозначена прямая волна. Она приходит раньше всех. Далее приходят волны по вписанным многоугольникам. Последней придет волна, идущая по границе шара. Аналогичные явления будут наблюдаться для произвольного значения ϕ_0. Это приводит к фокусировке на обратной стороне шара. На времени, большем 6000 сек, четко прослеживаются волны с обратным годографом. Эти волны пришли с обратной стороны шара.

На рис. 3 выдан фрагмент волнового поля, приведенного на рис. 1. Из него видно, что помимо прямой волны возникает еще одна волна. Она обозначена

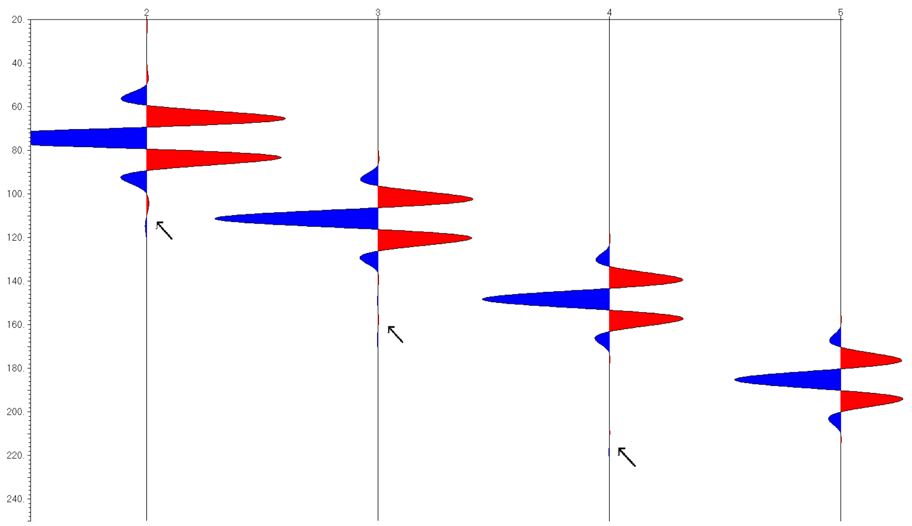

Рис. 3. Фрагмент волнового поля, приведенного на рис.1.

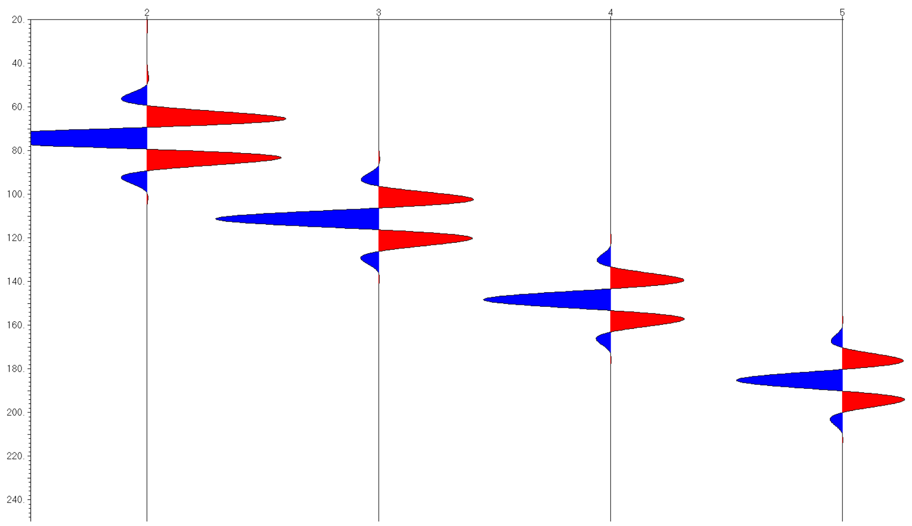

Рис. 4. Фрагмент волнового поля, полученный с использованием новой асимптотики.

стрелками. Ее интенсивность составляет половину процента от прямой волны. Из рис. 2 следует, что ее быть не должно. Это помеха. В результате моделирования выяснилось, что $J_{k+0.5}(z)$ становится малым при $k+0.5$, сравнимым с $|z|$, а классическая асимптотика (12) работает при $k+0.5 \gg |z|$. Иначе говоря, здесь классическую асимптотику применять нельзя.

В работе получена новая асимптотика цилиндрических функций. Введем следующее обозначение: $x(z) = Z'_\nu(z)/Z_\nu(z)$. Здесь $Z_\nu(z)$ — произвольная ци-

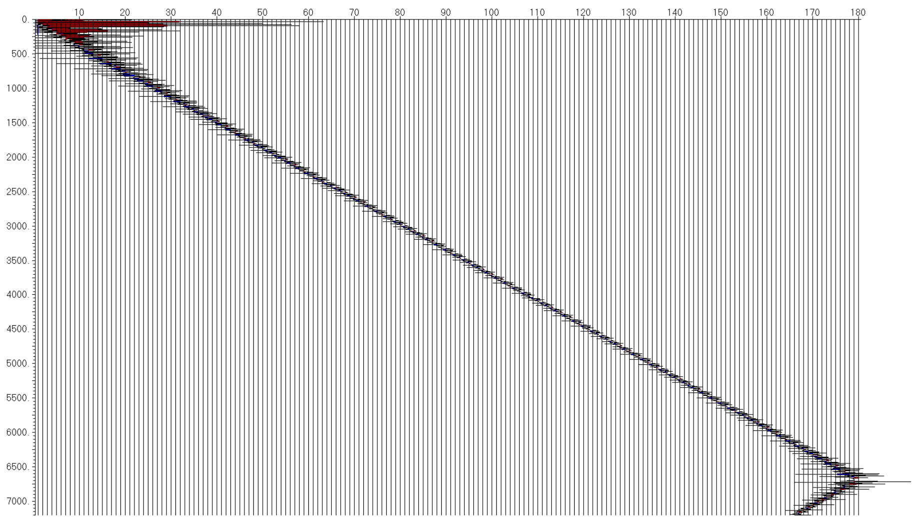

Рис. 5. Граничная волна, пришедшая по поверхности шара.

линдрическая функция $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)$. Используя правило Лопиталя при малых (или больших) Z_ν и Z'_ν, получим

$$x(z) = Z'_\nu(z)/Z_\nu(z) = Z''_\nu/Z'_\nu. \qquad (13)$$

Из определения функции $Z_\nu(z)$ следует:

$$Z''_\nu(z) + \frac{1}{z}Z'_\nu(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)Z_\nu(z) = 0. \qquad (14)$$

Из (14) и (15) нетрудно получить следующее уравнение на $x(z)$:

$$x(z) = -\left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)/x(z) - \frac{1}{z}, \qquad (15)$$

$$x^2 + \frac{1}{z}x + 1 - \frac{\nu^2}{z^2} = 0. \qquad (16)$$

Оно имеет следующие корни:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\nu^2 + 1 - 4z^2}}{2z}, \qquad (17)$$

тем самым

$$Z'_\nu(z)/Z_\nu(z) \to \frac{-1 \pm \sqrt{4\nu^2 + 1 - 4z^2}}{2z}. \qquad (18)$$

Выражение (18) дает новую асимптотику цилиндрических функций для произвольных z, ν, когда $Z'_\nu(z), Z_\nu(z) \to 0$ и $Z'_\nu(z), Z_\nu(z) \to \infty$.

Используем (18) в (11) в случае, когда значения функций Бесселя выходят за границы числового диапазона. В этом случае получим

$$u(R_0) = \frac{2}{-4 + \sqrt{4(k+0.5)^2 + 1 - 4z^2}}cF(\omega). \qquad (19)$$

На рис. 4 приведен фрагмент волнового поля в однородном шаре (11) с использованием (19). Сравнение с рис. 3 показывает, что помехи нет. Таким образом, получено устойчивое аналитическое решение в шаре.

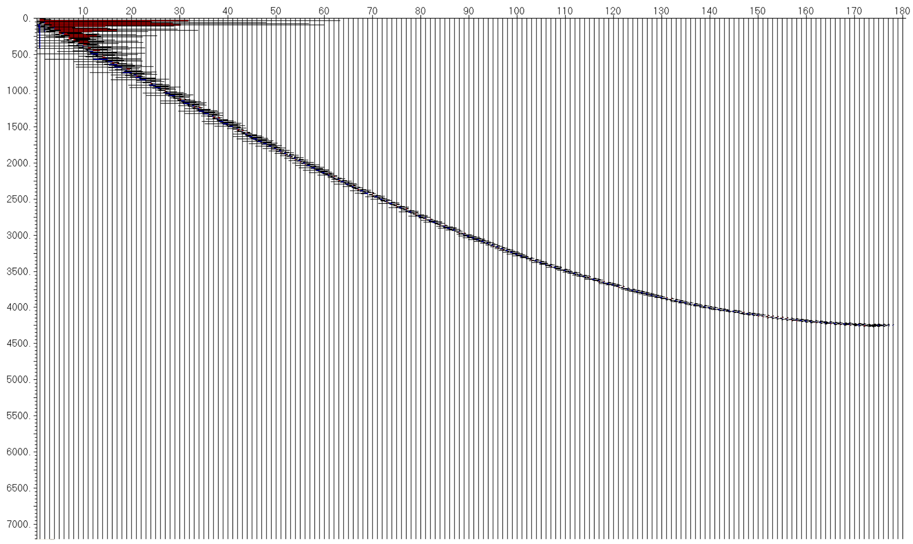

Рис. 6. Аналитическое моделирование прямой волны для шара.

3. Анализ волнового поля в шаре по частям

Аналитическое решение позволяет проводить анализ волнового поля по частям [10, 11]. Ниже будет показано, как проводить анализ волнового поля по частям в случае сферической системы координат.

Сначала выясним физический смысл корней квадратного уравнения (18). Для этого рассмотрим SH волны в цилиндрической системе координат. После преобразования Фурье — Бесселя в спектральной области получим следующее двухпараметрическое семейство краевых задач в однородной среде [12, 13]:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = (k^2 - \omega^2/v^2)w, \quad \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=0} = F(\omega). \tag{20}$$

Здесь

$$\nu^2 = \frac{1}{\rho}\left(\mu - \mu^1 \int\limits_0^T g(t)e^{-i\omega t}\,dt\right).$$

Функции $y_{1,2} = \exp\bigl(\pm z\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}\bigr)$ составляют фундаментальную систему решений однородного уравнения из (20). Рассмотрим отношение $y'_{1,2}$ к $y_{1,2}$. Оно равно

$$\pm\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}. \tag{21}$$

Выражение (21) классическое. Оно встречается во многих работах по теории волн. Так, например, решение (20) на свободной поверхности будет выглядеть следующим образом [14]:

$$w|_{z=0} = F(\omega)/\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}. \tag{22}$$

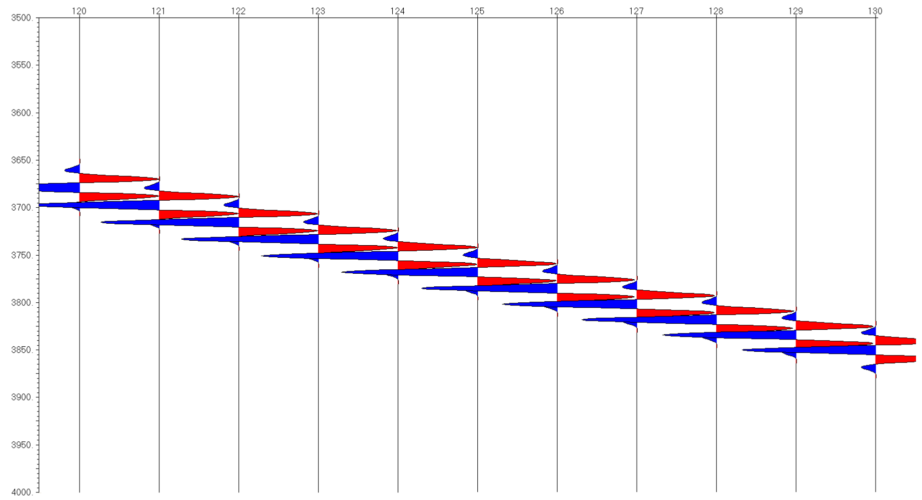

Рис. 7. Диаграмма направленности прямой волны для шара.

На рис. 5 приведено волновое поле, полученное по формуле (19). Из сравнения с рис. 1 видно, что это граничная волна, пришедшая по поверхности шара. А (22) есть волна, идущая по поверхности полупространства. В этом случае аналогом (21) для шара радиуса R_0 будет следующее выражение:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{4(k+0.5)^2 + 1 - 4(\omega R_0/v)^2}}{(2\omega R_0/v)}. \tag{23}$$

Таким образом, новая асимптотика цилиндрических функций (23) имеет наглядный физический смысл. Это аналог характеристических значений (21) для полупространства.

На основе анализа выражения (21) в упругой среде вводится понятие однородных и неоднородных волн [14]. При $k < \frac{\omega}{c}$ волна называется однородной. При $k > \frac{\omega}{c}$ волна называется неоднородной. Понятие однородных и неоднородных волн имеет фундаментальное значение в динамической теории волновых полей.

На основании новых формул (23) вводится понятие однородных и неоднородных волн для шара радиуса R_0. При

$$\frac{(k+0.5)^2}{R_0^2} + \frac{1}{4R_0^2} < \frac{\omega^2}{c^2}$$

волна называется *однородной*. При

$$\frac{(k+0.5)^2}{R_0^2} + \frac{1}{4R_0^2} > \frac{\omega^2}{c^2}$$

волна называется *неоднородной*. При достаточно большом радиусе шара R_0 получим приближенное выражение. При $\frac{(k+0.5)}{R_0} < \frac{\omega}{c}$ волна называется *однородной*, при $\frac{(k+0.5)}{R_0} > \frac{\omega}{c}$ — *неоднородной*.

Возьмем в качестве фундаментальной системы решений однородного уравнения (9) функции Ганкеля. Далее построим два вспомогательных решения:

$$\begin{aligned} u^1(R_0) &= \frac{H^{(1)}_{k+0.5}(z)}{-1.5H^{(2)}_{k+0.5}(z) + zH^{(2)}_{k+0.5}(z)'}cF(\omega), \\ u^2(R_0) &= \frac{H^{(2)}_{k+0.5}(z)}{-1.5H^{(1)}_{k+0.5}(z) + zH^{(1)}_{k+0.5}(z)'}cF(\omega) \end{aligned} \tag{24}$$

В соответствие с общей теорией в данном случае функции Ганкеля брать нельзя [1]. Они не являются ограниченными в нуле (центр шара). Однако выражение (24) определено с помощью новой асимптотики (18) для произвольных индексов и аргументов.

На рис. 6 приведена полусумма полей из (24). Из сравнения рис. 6 и рис. 1 видно, что это прямая волна в однородном шаре.

При моделировании выяснился интересный факт. На рис. 7 приведен фрагмент прямой волны в однородном шаре. Выдача на свободной поверхности в диапазоне углов θ от 120 до 130 градусов. Это диаграмма направленности прямой волны. Видно, что прямая волна практически постоянна. На первый взгляд это противоречит теории распространения волновых полей. По теории убывание прямой волны в дальней зоне должно быть обратно пропорционально пройденному пути [14]. Расстояние для прямой волны равно $2R\sin\frac{\theta}{2}$. Поэтому убывание прямой волны в диапазоне углов $\theta_1 < \theta_2$ будет

$$\sin\frac{\theta_1}{2}\Big/\sin\frac{\theta_2}{2}. \tag{25}$$

Из (25) следует незначительное убывание прямой волны в этом случае. Это иллюстрирует принципиальное отличие волновой картины в шаре и полупространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики М.: Наука, 1977.
2. *James J., Faran Jr.* Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoustic Soc. Amer. 1951. V. 3, N 4. P. 405–418.
3. *Varadan V. V., Ma Y., Varadan V. K., Lakhtakia A.* Scattering of waves by spheres and cylinders // Field representations and Introduction to Scattering. Amsterdam: North-Holland, 1991. P. 211–324.
4. *Avila-Carrera R., S'anchez-Sesma F. J.* Scattering and diffraction of elastic P- and S-waves by a spherical obstacle // A review of the classical solution. Geofys. Intern. 2006, V. 45, N. 1. P. 3–21.
5. *Агаян Г. М., Воеводин Вад. В., Романов С. Ю.* О применимости послойных моделей в решении трехмерных задач ультразвуковой томографии // Вычисл. методы и программирование. 2013. Т. 14. С. 533–542.
6. *Толоконников Л. А., Родионова Г. А.* Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием // Изв. Тульск. гос. ун-та. 2014. Вып. 3. С. 131–137.
7. *Korneev V. A., Johnson L. R.* Scattering of elastic waves by a spherical inclusion. 1. Theory and numerical results // Geophys. J. Int. 1993. N 115. P. 230–250.
8. *Фатьянов А. Г.* Численное моделирование волновых полей в неоднородном неупругом шаре. Новосибирск. 1981. 22 с. (Препринт / АН СССР Сиб. Отд-ние, ВЦ; 337).

9. *Shanjie Zhang, Jian-Ming Jin.* Computation of special functions. John Wiley, 1996.
10. *Fatianov A. G., Mikhailenko B. G.* Numerically-analytical method for calculation of theoretical seismograms in layered-inhomogeneous inelastic media // Geophys. data inversion methods and applications. Free University of Berlin. 1989. P. 499–530.
11. *Burmin V. Yu., Fat'yanov A. G.* Analytical modeling of wave fields at extremely long distances and experimental research of water waves //Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2009, V. 45, N 4. P. 313–325.
12. *Фатьянов А. Г.* Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Докл. АН. 1990. Т. 310, № 2. С. 323–327.
13. *Фатьянов А. Г.* Аналитическое моделирование волновых полей для сред сложного строения и структуры на сверхдальние расстояния // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 3, С. 101–113.
14. *Aki K., Richards P. G.* Quantitative seismology. Theory and methods. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1980.

Статья поступила 25 августа 2016 г.

Фатьянов Алексей Геннадьевич
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
fat@nmsf.sscc.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2016. Том 23, № 3

UDC 550.344

THE STABLE ANALYTICAL SOLUTION FOR THE WAVE FIELDS IN THE SPHERE

A. G. Fatyanov

Abstract. We investigate the well-known analytical solution to the problem of the wave fields in the sphere. It is shown that the use of the standard asymptotic behavior of the Bessel functions leads to interference in the solution. A new asymptotic expression for the Bessel functions is found which gives a stable analytical solution that allows one to obtain the exact solution. The homogeneous and inhomogeneous waves for the sphere are detected. We present some examples of analytical calculation of the full wave fields and the primary wave for the sphere.
Keywords: mathematical modeling in the sphere, stable analytical solution, full wave field, primary wave, new asymptotic behavior of Bessel functions, homogeneous and inhomogeneous waves for the sphere.

REFERENCES

1. *Tikhonov A. N. and Samarskii A. A.*, Equations of mathematical physics [in Russian], Nauka, Moscow (1997).
2. *Faran J. J., Jr.* “Sound scattering by solid cylinders and spheres,” J. Acoustic Soc. Amer. **3**, No. 4, 405–418 (1951).
3. *Varadan V. V., Ma Y., Varadan V. K., and Lakhtakia A.* “Scattering of waves by spheres and cylinders,” in: Field representations and introduction to scattering, North-Holland, Amsterdam, 211–324 (1991).
4. *Avila-Carrera R. and Sánchez-Sesma F. J.* “Scattering and diffraction of elastic P- and S-waves by a spherical obstacle. A review of the classical solution,” Geophys. J. Int., **45**, No. 1, 3–21 (2006).
5. *Aganyan G. M., Voevodin Vad. V., and Romanov S. Yu.* “On applicability of layered models in solving 3D problems of ultrasonic tomography,” Vychisl. Metody i Programmirovanie, **14**, 533–542 (2013).
6. *Tolokonnikov L. A. and Rodionova G. A.* “Diffraction of the spherical sonic wave on an elastic sphere with heterogeneous covering,” Izv. Tulsk. Gos. Univ., No. 3, 131–137 (2014).
7. *Korneev V. A. and Johnson L. R.* “Scattering of elastic waves by a spherical inclusion. 1. Theory and numerical results,” Geophys. J. Int., No. 115, 230–250 (1993).
8. *Fatyanov A. G.*, Numerical modeling of wave fields in an inhomogeneous sphere, Novosibirsk, 1981. 22 p. (Preprint/AN SSSR. SO, Comp. Center, 337).
9. *Shanjie Zhang and Jian-Ming Jin*, Computation of special functions, John Wiley & Sons, Inc., 1996.
10. *Fatianov A. G. and Mikhailenko B. G.* “Numerically-analytical method for calculation of theoretical seismograms in layered-inhomogeneous inelastic media,” in: Geophys. Data Inversion Methods Appl. Free Univ. Berlin, 499–530 (1989).
11. *Burmin V. Yu. and Fat’yanov A. G.* “Analytical modeling of wave fields at extremely long distances and experimental research of water waves,” Izv. Phys. Solid Earth, **45**, No. 4, 313–325 (2009).
12. *Fatianov A. G.* “A semi-analytical method to solve direct dynamic problems in layered media,” Dokl. Akad. Nauk, **310**, No. 2, 323–327 (1990).

13. *Fatyanov A. G.* “Analytical modeling of superlong-distance wave fields in the media with composite subsurface geometries,” Mat. Zamet. SVFU, **22**, No. 3, 86–96 (2015).
14. *Aki K. and Richards P. G.*, Quantitative seismology. Theory and methods, W. H. Freeman and Co, San Francisco (1980).

Submitted August 25, 2016

Aleksei Gennadievich Fatyanov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
6 Lavrent’ev Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
fat@nmsf.sscc.ru

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья может быть представлена в виде файла в формате pdf или распечатки, подготовленной с использованием какой-либо компьютерной системы подготовки математических текстов.

5. В начале статьи указывается индекс УДК. Статья сопровождается краткой аннотацией, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках. Подготовленная с использованием компьютера графика должна быть высококачественной, не ниже 600 DPI, и не использующей шрифты Adobe, отсутствующие в пакете MikTeX.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках.

Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних трех лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в издательстве и в редакции издания в течение пяти лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство образования и науки Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. Если статья принимается к опубликованию после доработки, то автор направляет в редакцию файл ее последней версии. При подготовке файла следует использовать, как правило, макропакет AMS-TEX со стилевым файлом amsppt.

11. Предоставление файлов в форматах TEX или LaTeX возможно только при согласовании с редакцией. Автор не должен использовать необязательные авторские командные последовательности, введенные для облегчения набора. Запрещается переопределять греческие буквы, стандартные команды и т. п.

12. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

13. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

14. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.