СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 23, № 4 (92) **Октябрь—декабрь, 2016**

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Математическое моделирование

Mathematical Notes of North-Eastern Federal University

Contents

Mathematics

Mathematical modeling

Адрес редакции:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/

e-mail: prokopevav85@gmail.com; guspopov@mail.ru; ivanegorov51@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

УДК 517.95

ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ПАРАМЕТРОМ

Н. Л. Абашеева

Аннотация. Исследуется вопрос о существовании и единственности решения обратной задачи

$$Bu_t + pLu = \varphi(t) + f(t,p), \quad u(0,p) = u(T,p) = 0.$$

Операторы B, L самосопряженные в гильбертовом пространстве E, спектр оператора L полуограничен. При выполнении конечного числа условий согласования установлена однозначная разрешимость такой задачи с помощью разложения в ряд по собственным и присоединенным элементам пучка $L - \lambda B$.
Ключевые слова: обратная задача, уравнение смешанного типа.

Рассмотрим следующую линейную обратную задачу. Требуется найти функции $u(t,p)$ и $\varphi(t)$, удовлетворяющие уравнению

$$Bu_t + pLu = \varphi(t) + f(t,p), \quad p \in D,\ t \in (0,T), \tag{1}$$

и краевым условиям

$$u(0,p) = u(T,p) = 0. \tag{2}$$

Здесь $T < \infty$, $D \subset \mathbb{C}$ — измеримое множество, имеющее предельную точку $p_0 \in \mathbb{C}$, L, B — самосопряженные операторы в данном комплексном гильбертовом пространстве E со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Оператор B имеет произвольное расположение спектра, а спектр оператора L полуограничен.

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений — интенсивно развивающаяся область математики. Обратные задачи для уравнений вида (1) в случае, когда $B \equiv I$, являются предметом изучения многих исследователей. Задача определения правой части изучалась как для модельных уравнений в частных производных, так и для абстрактных уравнений. Случай, когда от

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–06582).

оператора B не требуется положительной определенности, рассматривался, например, в [1, 2]. Обратные задачи для уравнения с параметром для случая $B \equiv I$ были исследованы в [3, 4].

В данной работе на основе известных результатов для прямых задач изучена обратная задача нахождения свободного члена для уравнения с параметром (1). Здесь доказательство проводится методом разложения в ряд по собственным и присоединенным элементам соответствующей спектральной задачи

$$Lu = \lambda Bu \tag{3}$$

и дано явное представление решения. Свойства собственных функций задачи (3) подробно изложены в монографии [5].

1. Основные предположения. Определения пространств $C^k([0,T];X)$, $L_p(0,T;X)$, $W_2^k(0,T;X)$ (X — банахово или гильбертово пространство) обычные и могут быть найдены в [6]. Через X' обозначаем негативное пространство, построенное по банахову пространству X и гильбертову пространству E.

Следующие определения и предположения аналогичны данным в [5]. Пусть P^+, P^- и P^0 — спектральные проекторы оператора L, отвечающие положительной, отрицательной и нулевой частям спектра соответственно.

(A). *Спектр оператора L, лежащий на полуоси $\lambda \le 0$, состоит из изолированных собственных значений конечной кратности,* $\dim R(P^-) < \infty$, $P^0 = 0$.

(B). *Пространство $H_1 = D(|L|^{1/2})$ плотно вложено в $D(|B|^{1/2})$ (в $D(|L|^{1/2})$, $D(|B|^{1/2})$ вводим норму графика).*

Очевидно, L допускает расширение как непрерывное отображение из H_1 в H_1'. Также оператор B допускает расширение до ограниченного оператора из $D(|B|^{1/2})$ в H_1' и, следовательно, $B \in L(H_1, H_1')$.

Заметим, что в пространстве H_1 можно ввести скалярное произведение и индефинитную метрику посредством равенств

$$(u,v)_1 = (|L|^{1/2}u, |L|^{1/2}v), \quad [u,v]_1 = (\pi u, v)_1,$$

$\pi = P^+ - P^-$. При этом пространство H_1 превращается в пространство Понтрягина с рангом индефинитности $\kappa = \dim R(\widetilde{P}^-) < \infty$ [7].

Определим F_0 как пополнение фактор-пространства $D(|B|^{1/2})/\ker B$ по норме $\|u\|_0 = \||B|^{1/2}u\|$. Пусть E^+, E^- и E^0 — спектральные проекторы оператора B, отвечающие положительной, отрицательной и нулевой частям спектра соответственно. Положим $J = E^+ - E^-$. Вводя в F_0 индефинитную метрику

$$[u,v]_0 = (J|B|^{1/2}u, |B|^{1/2}v),$$

получаем пространство Крейна. Определения и свойства пространств с индефинитной метрикой можно найти в [7].

Говорят, что $\lambda \in \mathbb{C}$ *принадлежит резольвентному множеству* $\rho(L - \lambda B)$ пучка $L - \lambda B$, если оператор $L - \lambda B : H_1 \to H_1'$ ограниченно обратим. Положим

$\sigma(L-\lambda B)=\mathbb{C}\setminus\rho(L-\lambda B)$. Под *собственным элементом задачи* (3) понимаем функцию $u\in H_1$ ($u\neq 0$) такую, что для некоторого $\lambda\in\mathbb{C}$ выполнено равенство (3). Множество $\{u_i\}_{i=0}^n$ ($u_i\in H_1$) есть *цепочка собственных и присоединенных элементов длины* $n+1$ (с.п.э.) пучка (3), соответствующих $\lambda\in\mathbb{C}$, если

$$(L-\lambda B)u_i=Bu_{i-1},\quad u_{-1}=0,\quad i=\overline{0,n}.$$

Корневое подпространство пучка (3), соответствующее некоторому $\lambda\in\mathbb{C}$, т. е. замыкание в H_1 линейной оболочки с.п.э. задачи (3), соответствующих данному λ, будем обозначать через L_λ.

Говорят, что $\{u_i\}_{i=0}^m$, где $u_i\in H_1$ ($i=\overline{0,m-1}$), $u_m\in D(|B|^{1/2})$, есть *цепочка с.п.э. длины* $m+1$ *пучка* (3), *соответствующих* $\lambda=\infty$, если

$$Bu_i=Lu_{i-1},\ i=\overline{0,m},\quad u_{-1}=0.$$

Обозначим через L_∞ замыкание в F_0 линейной оболочки элементов вида $\{I_0u_i\}_{i=0}^m$, где $\{u_i\}_{i=0}^m$ — цепочка с.п.э. пучка (3), соответствующих $\lambda=\infty$, I_0 — канонический гомоморфизм, сопоставляющий элементам $u\in D(|B|^{1/2})$ фактор-классы $I_0u=u+\ker B$.

Дополнительно введем следующие предположения.

(C). *Спектр пучка* (3) *имеет не более чем счетное множество предельных точек.*

(D). *Не существует $u\in L_\infty$, $u\neq 0$, такого, что $[u,v]_0=0$ для любого $v\in L_\infty$.*

Пусть $A=L^{-1}B$. Очевидно, $A\in L(H_1)$ — π-самосопряженный оператор в пространстве H_1, т. е. $[Au,v]_1=[u,Av]_1$ для любых $u,v\in H_1$. Через $L_\lambda(A)$ обозначаем корневое подпространство оператора A, соответствующее $\lambda\in\mathbb{C}$. Отметим, что $L_\lambda=L_{1/\lambda}(A)$ при $\lambda\neq 0,\infty$ и корневые подпространства $L_\lambda(A)$, $L_\mu(A)$ ортогональны относительно π-метрики при $\lambda\neq\bar{\mu}$. Кроме того, невещественный спектр оператора A симметричен относительно действительной оси и состоит из конечного числа нормальных собственных значений конечной кратности, а все корневые подпространства, соответствующие вещественным собственным значениям, за исключением не более κ из них, являются собственными положительными подпространствами [5, лемма 2.2.6]. Точка $\lambda\in\sigma(A)\cap\mathbb{R}$ называется *критической для π-самосопряженного оператора* A, если λ не является нормальным собственным значением и $\ker(A-\lambda I)$ вырожденно в H_1 (линеал $K\subset H_1$ вырожденный, если существует $u\in K$ такой, что $[u,v]_1=0$ $\forall v\in K$). Таким образом, из вышесказанного следует, что множество критических точек оператора A $S(A)$ состоит из конечного числа точек. Введем еще одно предположение.

(E). *Подпространства* $\mathrm{Lin}\{L_\lambda(A),\,\lambda\in S(A),\,\lambda\neq 0\}$ *и* $L_0(A)$ *невырожденны в* H_1.

Пусть $\widetilde{H}_1 = H_1/(\ker B \cap H_1)$. Построим пространство $\widetilde{H}_{-1}$ как пополнение F_0 по норме

$$\|u\|_{\widetilde{H}_{-1}} = \sup_{v\in\widetilde{H}_1} \frac{|(Bu,v)|}{\|v\|_{\widetilde{H}_1}}.$$

Предположим, что

$$(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_{-1})_{\frac{1}{2},2} = F_0 \qquad (4)$$

(через $(X,Y)_{\theta,p}$ обозначаем пространства, построенные с помощью метода вещественной интерполяции [6]).

2. Вспомогательные утверждения. Сформулируем леммы 2.3.5 и 2.3.6 из [5] в виде следующего утверждения. Напомним, что *базис Рисса гильбертова пространства* — это базис, ортонормированный относительно некоторого эквивалентного скалярного произведения [8].

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (A)–(E). *Тогда*

a) *в любом корневом подпространстве* L_λ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \infty$) *найдется базис Рисса, состоящий из элементов цепочек с.п.э.* u_{ik}^λ ($i = \overline{1, N_\lambda}$, $k = \overline{0, p_i^\lambda}$, $N_\lambda \leq \infty$, $p_i^\lambda < \infty$), *такой, что*

$$\left[u_{ik}^\lambda, u_{jl}^\lambda\right]_0 = \varepsilon_i^\lambda \delta_{ij} \delta_{k,p_i^\lambda - l}, \quad k = \overline{0, p_i^\lambda},\ l = \overline{0, p_j^\lambda},\ i,j = \overline{1, N_\lambda},$$

где $\varepsilon_i^\lambda = \pm 1$. *При этом если* $i = \overline{1, N_\lambda^1}$, *то* $p_i^\lambda > 0$, *если* $i = \overline{N_\lambda^1 + 1, N_\lambda^2}$ ($N_\lambda^2 < \infty$), *то* $p_i^\lambda = 0$ *и* $\varepsilon_i^\lambda = -1$, *если* $i = \overline{N_\lambda^2 + 1, N_\lambda}$, *то* $p_i^\lambda = 0$ *и* $\varepsilon_i^\lambda = 1$.

b) *найдется набор цепочек с.п.э.* u_{ik} ($i = \overline{1, N}$, $k = \overline{0, p_i}$, $N \leq \infty$, $p_i < \infty$), *соответствующих* $\lambda = \infty$, *такой, что*

$$[u_{ik}, u_{jl}]_0 = \varepsilon_i \delta_{ij} \delta_{k, p_i + 1 - l}, \quad k = \overline{1, p_i},\ l = \overline{1, p_j},\ i,j = \overline{1, N},$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$. *Набор* $\{I_0 u_{ik}\}$ ($i = \overline{1, N_1}$, $k = \overline{1, p_i}$, $N_1 \leq N$, $N_1 < \infty$) *является базисом в* L_∞ *и элементы* u_{ik} *при* $i > N_1$ *собственные. Набор* $\{u_{ik}\}$ ($k = \overline{0, p_i}$ *при* $i = \overline{1, N_2}$ *и* $i = \overline{N_1 + 1, N_3}$; $k = \overline{0, p_i - 1}$ *при* $i = \overline{N_2 + 1, N_1}$, $N_2 \leq N_1 \leq N_3 \leq N$) *является базисом Рисса в* $L_0(A)$. *Кроме того, для всех* $u_{ik}, u_{jl} \in H_1$

$$[u_{ik}, u_{jl}]_1 = \varepsilon_i \delta_{ij} \delta_{k, p_i - l}, \quad k = \overline{0, p_i},\ l = \overline{0, p_j},\ i,j = \overline{1, N}.$$

c) *в* L_λ *и* $L_{\overline{\lambda}}$ ($\lambda \notin \mathbb{R}$) *найдутся базисы, состоящие из элементов цепочек с.п.э.* u_{ik}^λ, v_{ik}^λ ($i = \overline{1, N_\lambda}$, $k = \overline{0, p_i^\lambda}$, $N_\lambda < \infty$, $p_i^\lambda < \infty$) *соответственно такие, что*

$$\delta_{k, p_i^\lambda - l}, \quad k = \overline{0, p_i^\lambda},\ l = \overline{0, p_j^\lambda},\ i,j = \overline{1, N_\lambda}.$$

Пусть P_λ — π-самосопряженные проекторы на корневые подпространства $L_{1/\lambda}(A) = L_\lambda$ при $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0, \infty$, или на $L_0(A)$ при $\lambda = \infty$, или на $L_\lambda + L_{\overline{\lambda}}$ при $\lambda \notin \mathbb{R}$. Справедлива следующая лемма [5, лемма 4.1.2].

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (A)–(E) *и равенство* (4). *Проекторы* $P_\lambda \in L(H_1)$ *допускают представление в виде*

$$P_\lambda u = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \sum_{k=0}^{p_i^\lambda} \varepsilon_i^\lambda \big[u, u^\lambda_{i,p_i^\lambda - k}\big]_0 u^\lambda_{ik}, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq \infty,$$

$$P_\infty u = \left(\sum_{i=1}^{N_2} \sum_{k=0}^{p_i} + \sum_{i=N_2+1}^{N_1} \sum_{k=0}^{p_i - 1} + \sum_{i=N_1+1}^{N_3} \sum_{k=0}^{p_i} \right) \varepsilon_i [u, u_{i,p_i-k}]_1 u_{ik},$$

$$P_\lambda u = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \sum_{k=0}^{p_i^\lambda} \big(\big[u, v^\lambda_{i,p_i^\lambda - k}\big]_0 u^\lambda_{ik} + \big[u, u^\lambda_{i,p_i^\lambda - k}\big]_0 v^\lambda_{ik} \big), \quad \lambda \notin \mathbb{R},$$

где $\{u_{ik}\}$ *— базисы в соответствующих корневых подпространствах, определенные в лемме* 1. *При этом операторы* $P^*_\lambda \in L(H_1')$ *представимы в виде*

$$P^*_\lambda u = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \sum_{k=0}^{p_i^\lambda} \varepsilon_i^\lambda \big(u, u^\lambda_{i,p_i^\lambda - k}\big) B u^\lambda_{ik}, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq \infty,$$

$$P^*_\infty u = \left(\sum_{i=1}^{N_2} \sum_{k=0}^{p_i} + \sum_{i=N_2+1}^{N_1} \sum_{k=0}^{p_i - 1} + \sum_{i=N_1+1}^{N_3} \sum_{k=0}^{p_i} \right) \varepsilon_i (u, u_{i,p_i-k}) L u_{ik},$$

$$P^*_\lambda u = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \sum_{k=0}^{p_i^\lambda} \big(\big(u, v^\lambda_{i,p_i^\lambda - k}\big) B u^\lambda_{ik} + \big(u, u^\lambda_{i,p_i^\lambda - k}\big) B v^\lambda_{ik} \big), \quad \lambda \notin \mathbb{R},$$

Для любого λ *справедливы равенства*

$$P^*_\lambda L = L P_\lambda \ \forall u \in H_1, \quad P^*_\lambda B = B P_\lambda \ \forall u \in \widetilde{H}_{-1}.$$

Согласно [5], если выполнены предположения (A)–(E) и равенство (4), то пространство H_1 допускает представление в виде π-ортогональной (ортогональной относительно π-метрики) прямой суммы

$$H_1 = F_1[+]L_0(A),$$

где F_1 инвариантно относительно оператора A.

Далее, пусть $\{u_{ik}\}$ $(i = \overline{1, N},\ k = \overline{0, p_i})$ — набор цепочек с.п.э., соответствующих $\lambda = \infty$, из леммы 1. Положим $N_\infty = \mathrm{Lin}\{u_{ik},\ k = \overline{0, p_i}$ при $i = \overline{1, N_2}$, $k = \overline{0, p_i - 1}$ при $i = \overline{N_2 + 1, N_1}\}$ и $M_\infty = \mathrm{Lin}\{u_{i0},\ i = \overline{N_1 + 1, N_3}\} \subset (\ker B \cap H_1)$. Тогда $L_0(A)$ разлагается в π-ортогональную сумму

$$L_0(A) = N_\infty[+]M_\infty$$

и определены π-самосопряженные проекторы P_{N_∞}, P_{M_∞} на эти подпространства, которые обладают теми же свойствами, что и проектор P_∞.

По лемме 2.3.2 из [5] пространство F_1 представимо в виде π-ортогональной прямой суммы

$$F_1 = N[+]M_1,$$

где N конечномерно и инвариантно относительно оператора A,

$$M_1 \subset \mathrm{Lin}\{\ker(A-\lambda I),$$

$\lambda \in \sigma(A)\cap\mathbb{R}\}$ — равномерно положительное подпространство F_1 (линеал K называется равномерно положительным, если $[u,u]_1 \geq \delta\|u\|^2_{F_1}$ для всех $u \in K$, $\delta > 0$). Обозначим через P_N и P_{M_1} проекторы на N и M_1 соответственно.

Уточним вид подпространства N. Прежде всего, $L_\lambda \subset N$, если $\lambda \notin \mathbb{R}$, обозначим эти невещественные $\lambda \in \sigma(L-\lambda B)$ через μ_j ($j=\overline{1,K}$, $K<\infty$). Далее, обозначим через $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ($j=\overline{1,M}$, $M<\infty$) те собственные значения, для которых $\widetilde{L}_{\lambda_j} = L_{\lambda_j}\cap N \neq \{0\}$. Тогда $\widetilde{L}_{\lambda_j} = \mathrm{Lin}\{u^{\lambda_j}_{ik},\ i=\overline{1,N^2_{\lambda_j}},\ k=\overline{0,p^{\lambda_j}_i}\}$. Таким образом,

$$N = \mathrm{Lin}\{L_\lambda,\ \lambda\notin\mathbb{R};\ \widetilde{L}_{\lambda_j},\ j=\overline{1,M}\}.$$

Введем еще некоторые пространства. Пусть M_0 — замыкание M_1 в F_0 и M_{-1} — пополнение M_0 по норме

$$\|u\|_{M_{-1}} = \sup_{v\in M_1}\frac{|(Bu,v)|}{\|v\|_{M_1}}.$$

Заметим, что в силу леммы 4.1.1 из [5] равенство (4) выполнено тогда и только тогда, когда

$$(M_1, M_{-1})_{\frac{1}{2},2} = M_0. \tag{5}$$

По теореме 2.3.3 из [5] при выполнении условий (A)–(E) и (4) пространство M_0 разлагается в J-ортогональную прямую сумму

$$M_0 = M_0^+[+]M_0^-,$$

где M_0^+ равномерно положительное и M_0^- равномерно отрицательное подпространства M_0. Обозначим через Q^+, Q^- проекторы на M_0^+, M_0^- соответственно.

Рассмотрим оператор A на M_0. Поскольку $\ker A=\{0\}$, можем определить оператор

$$S = A^{-1} = B^{-1}\widetilde{L} = B^{-1}L : M_0 \to M_0.$$

Очевидно, $S\in L(M_1,M_{-1})$. Пусть u_i^+ (u_i^-) — собственные элементы оператора S, соответствующие положительным (отрицательным) собственным значениям λ_i^+ (λ_i^-), пронумерованным с учетом кратности. Считаем, что элементы $u_i^\pm$ нормированы равенствами $[u_i^\pm,u_i^\pm]_0=\pm1$ и $\lambda_i^+,-\lambda_i^-$ образуют неубывающие последовательности. Элементы $\{u_i^\pm\}$ образуют базис Рисса в пространстве M_1 [5, лемма 2.3.1]. Кроме того, согласно теореме 2.3.1 из [5] они образуют базис Рисса в пространстве M_0 и безусловный базис Шаудера в пространстве M_{-1}. Любой элемент $v\in M_s$ ($s=-1,0,1$) представим в виде ряда

$$v = \sum_{i=i}^{\infty}[v,u_i^+]_0u_i^+ - \sum_{i=i}^{\infty}[v,u_i^-]_0u_i^-,$$

сходящегося в M_s, причем норма в пространстве M_s эквивалентна норме

$$\|v\|^2_{M_s} = \sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i^+|^s|[v,u_i^+]_0|^2 + |\lambda_i^-|^s|[v,u_i^-]_0|^2$$

[5, теорема 2.3.1, лемма 2.3.4]. Отметим, что

$$Q^{\pm}v = \pm\sum_{i=1}^{\infty}[v, u_i^{\pm}]_0 u_i^{\pm}.$$

Покажем, что выполнено равенство

$$P_{M_1}^{*}H_1' = \{Bu:\ u \in M_{-1}\}. \tag{6}$$

Очевидно, $P_{M_1}^{*}H_1' = K^{\perp}$, где $K = L_0(A)[+]N$. По построению пространства M_{-1} подпространство $G = \{Bu:\ u \in M_{-1}\}$ замкнуто в H_1'. Далее, для $u \in G^{\perp}$ имеем равенство $(P_{M_1}u, Bv) = 0\ \forall v \in M_1$. В то же время $(P_{M_1}u, Bv) = 0$ для любого $v \in K$. Используя самосопряженность оператора B, получаем, что $G^{\perp} \subset K$. Кроме того, легко получить вложение $K \subset G^{\perp}$.

3. Представление решения. Пусть выполнены условия (A)–(E) и равенство (4).

Будем искать решение $u(t,p)$, φ задачи (1), (2) из класса $u(t,p) \in L_2(0,T;H_1)$, $u_t(t,p) \in L_2(0,T;\widetilde{H}_{-1})$, $\varphi \in H_1'$ для всех $p \in D$. Тогда в силу равенства (4) определены следы $u(0,p)$, $u(T,p) \in F_0$ для всех $p \in D$.

Пусть $f(t,p) \in L_2(0,T;H_1')$ для всех $p \in D$. Из вышесказанного следует, что функция $u(t)$ представима в виде

$$u(t,p) = P_{N_\infty}u(t,p) + P_{M_\infty}u(t,p) + P_N u(t,p) + P_{M_1}u(t,p), \tag{7}$$

где $P_{N_\infty}u(t,p) \in L_2(0,T;N_\infty)$, $P_{M_\infty}u(t,p) \in L_2(0,T;M_\infty)$, $P_N u(t,p) \in L_2(0,T;N)$ и $P_{M_1}u(t,p) \in L_2(0,T;M_1)$ (во всех подпространствах рассматриваем топологию, индуцированную из H_1).

Пусть

$$P_{M_\infty}^{*}\varphi(t) = 0 \quad \text{и} \quad P_{N_\infty}^{*}\varphi(t) = 0. \tag{8}$$

Применяя проекторы $P_{N_\infty}^{*}$, $P_{M_\infty}^{*}$ к уравнению (1), получаем

$$P_{M_\infty}u(t,p) = \widetilde{L}^{-1}P_{M_\infty}^{*}f(t,p), \tag{9}$$

$$P_{N_\infty}u(t,p) = \left(\sum_{i=1}^{N_2}\sum_{k=0}^{p_i} + \sum_{i=N_2+1}^{N_1}\sum_{k=0}^{p_i-1}\right)c_{ik}(t,p)u_{ik}, \tag{10}$$

где коэффициенты c_{ik} удовлетворяют системе уравнений (см. [5, лемма 4.1.3])

$$c_{i,k+1}' + pc_{ik} = \varepsilon_i(f(t,p), u_{i,p_i-k}) \tag{11}$$

($k = \overline{0,p_i}$ и $c_{i,p_i+1} = 0$ при $i = \overline{1,N_2}$; $k = \overline{0,p_i-1}$ и $c_{i,p_i} = 0$ при $i = \overline{N_2+1,N_1}$) и краевым условиям

$$c_{ik}(0,p) = c_{ik}(T,p) = 0, \quad i = \overline{1,N_1} \tag{12}$$

($k = \overline{1,p_i}$ при $i = \overline{1,N_2}$, $k = \overline{1,p_i-1}$ при $i = \overline{N_2+1,N_1}$).

Если $P_{N_\infty}^{*}f \in W_2^1(0,T;H_1')$ и выполнено конечное число условий вида

$$(f(0,p), u_{ik}) = (f(T,p), u_{ik}) = 0 \tag{13}$$

(если $i=\overline{1,N_2}$, то $k=\overline{0,p_i-1}$; если $i=\overline{N_2+1,N_1}$, то $k=\overline{1,p_i-1}$), то из (11), (12) в силу (8) можем единственным образом найти компоненту решения $P_{N_\infty}u(t)$.

Из определения подпространства N вытекает, что

$$P_N u(t,p)=\sum_{j=1}^{K}P_{\mu_j}u(t,p)+\sum_{j=1}^{M}\widetilde{P}_{\lambda_j}u(t,p), \tag{14}$$

где P_λ $(\lambda=\mu_j\notin\mathbb{R})$ — проекторы из леммы 2, $\widetilde{P}_{\lambda_j}$ — π-самосопряженные проекторы на подпространства $\widetilde{L}_{\lambda_j}$.

Согласно лемме 4.1.3 из [5] для каждого $\lambda=\lambda_j$, $j=\overline{1,M}$,

$$\widetilde{P}_\lambda u=\sum_{i=1}^{N_\lambda^2}\sum_{k=0}^{p_i^\lambda}c_{ik}^\lambda(t,p)u_{ik}^\lambda \tag{15}$$

где $\{u_{ik}^\lambda\}$ $(i=\overline{1,N_\lambda},\ k=\overline{0,p_i^\lambda})$ — базис L_λ из леммы 1, а коэффициенты c_{ik}^λ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d}{dt}c_{ik}^\lambda+p\lambda c_{ik}^\lambda+pc_{i,k+1}^\lambda=\varepsilon_i^\lambda\big(\varphi(t)+f(t,p),u_{i,p_i^\lambda-k}^\lambda\big), \tag{16}$$

$$c_{i,p_i^\lambda+1}^\lambda=0,\quad i=\overline{1,N_\lambda^2},\quad k=\overline{0,p_i^\lambda},$$

и краевым условиям

$$c_{ik}^\lambda(0,p)=\varepsilon_i^\lambda\big[u_0,u_{i,p_i^\lambda-k}^\lambda\big]_0=0,\quad c_{ik}^\lambda(T,p)=\varepsilon_i^\lambda\big[u_T,u_{i,p_i^\lambda-k}^\lambda\big]_0=0, \tag{17}$$

$$i=\overline{1,N_\lambda^2},\ k=\overline{0,p_i^\lambda}.$$

При $k=p_i^\lambda$ из уравнения (16) и первого краевого условия (17) находим коэффициенты

$$c_{i,p_i^\lambda}^\lambda=\varepsilon_i^\lambda\int\limits_0^t e^{-p\lambda(t-s)}\big(\varphi(s),u_{i0}^\lambda\big)\,ds+\varepsilon_i^\lambda\int\limits_0^t e^{-p\lambda(t-s)}\big(f(s,p),u_{i0}^\lambda\big)\,ds. \tag{18}$$

Затем из второго краевого условия (17) получаем интегральное уравнение

$$\int\limits_0^T e^{p\lambda s}\varphi_{i0}^\lambda(s)\,ds=F_{i0}^\lambda(p), \tag{19}$$

где

$$\varphi_{i0}^\lambda(s)=\big(\varphi(s),u_{i0}^\lambda\big),\quad F_{i0}^\lambda(p)=-\int\limits_0^T e^{p\lambda s}\big(f(s,p),u_{i0}^\lambda\big)\,ds.$$

Далее при $k = p_i^\lambda - 1$ из уравнения (16) и первого краевого условия (17) находим коэффициенты

$$c^\lambda_{i,p_i^\lambda-1} = \varepsilon_i^\lambda \int\limits_0^t e^{-p\lambda(t-s)}\big(\varphi(s), u^\lambda_{i1}\big)\,ds + \varepsilon_i^\lambda \int\limits_0^t e^{-p\lambda(t-s)}\big(f(s,p), u^\lambda_{i1}\big)\,ds - p\int\limits_0^t e^{-p\lambda(t-s)} c^\lambda_{i,p_i^\lambda}(s,p)\,ds.$$

Из второго краевого условия (17) получаем интегральное уравнение

$$\int\limits_0^T e^{p\lambda s}\varphi^\lambda_{i1}(s)\,ds = F^\lambda_{i1}(p) + \varepsilon_i^\lambda p \int\limits_0^T e^{p\lambda s} c^\lambda_{i,p_i^\lambda}(s,p)\,ds,$$

где

$$\varphi^\lambda_{i1}(s) = \big(\varphi(s), u^\lambda_{i1}\big), \quad F^\lambda_{i1}(p) = -\int\limits_0^T \big(f(s,p), u^\lambda_{i1}\big)\,ds.$$

Из формулы (18) находим

$$\int\limits_0^T e^{p\lambda s} c^\lambda_{i,p_i^\lambda}(s,p)\,ds = \varepsilon_i^\lambda \int\limits_0^T \int\limits_0^s e^{p\lambda\tau}\big[\varphi^\lambda_{i0}(\tau) + \big(f(\tau,p), u^\lambda_{i0}\big)\big]\,d\tau ds = \varepsilon_i^\lambda \int\limits_0^T (T-\tau)e^{p\lambda\tau}\big[\varphi^\lambda_{i0}(\tau) + \big(f(\tau,p), u^\lambda_{i0}\big)\big]\,d\tau = 0,$$

последнее равенство получено из уравнения (19) с помощью дифференцирования по параметру p.

В итоге получим формулы для нахождения коэффициентов разложения компоненты $\widetilde{P}_\lambda u$ (для $\lambda = \lambda_j$, $j = \overline{1, M}$)

$$c^\lambda_{ik}(t,p) = \varepsilon_i^\lambda \int\limits_0^t e^{-p\lambda(t-s)}\big(\varphi(s), u^\lambda_{i,p_i^\lambda-k}\big)\,ds + \varepsilon_i^\lambda \int\limits_0^t e^{-p\lambda(t-s)}\big(f(s,p), u^\lambda_{i,p_i^\lambda-k}\big)\,ds - p\int\limits_0^t e^{-p\lambda(t-s)} c^\lambda_{i,k+1}(s,p)\,ds \tag{20}$$

и интегральные уравнения для функций $\varphi^\lambda_{ik}(s) = \big(\varphi(s), u^\lambda_{ik}\big)$

$$\int\limits_0^T e^{p\lambda s}\varphi^\lambda_{ik}(s)\,ds = F^\lambda_{ik}(p), \tag{21}$$

где

$$F^\lambda_{ik}(p) = -\int\limits_0^T e^{p\lambda s}\big(f(s,p), u^\lambda_{ik}\big)\,ds, \quad k = \overline{0, p_i^\lambda}. \tag{22}$$

По той же лемме 4.1.3 из [5] для $\lambda = \mu_j \notin \mathbb{R}$, $j = \overline{1, K}$, имеем

$$P_\lambda u = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \sum_{k=0}^{p_i^\lambda} \big(c_{ik}^\lambda(t,p) u_{ik}^\lambda + d_{ik}^\lambda(t,p) v_{ik}^\lambda \big), \tag{23}$$

где $\{u_{ik}^\lambda\}$, $\{v_{ik}^\lambda\}$ $(i = \overline{1, N_\lambda}, k = \overline{0, p_i^\lambda})$ — базисы L_λ, $L_{\bar\lambda}$ соответственно из леммы 1, и коэффициенты c_{ik}^λ, d_{ik}^λ находятся из систем уравнений

$$\frac{d}{dt} c_{ik}^\lambda + p\lambda c_{ik}^\lambda + p c_{i,k+1}^\lambda = \big(\varphi(t) + f(t,p), v_{i,p_i^\lambda - k}^\lambda\big),\ c_{i,p_i+1}^\lambda = 0, \quad i = \overline{1, N_\lambda},\ k = \overline{0, p_i^\lambda};$$

$$\frac{d}{dt} d_{ik}^\lambda + p\overline{\lambda} d_{ik}^\lambda + p d_{i,k+1}^\lambda = \big(\varphi(t) + f(t,p), u_{i,p_i^\lambda - k}^\lambda\big),\ d_{i,p_i^\lambda+1}^\lambda = 0, \quad i = \overline{1, N_\lambda},\ k = \overline{0, p_i^\lambda}.$$

и краевых условий

$$c_{ik}^\lambda(0,p) = \big[u_0, v_{i,p_i^\lambda - k}^\lambda\big]_0 = 0,\ c_{ik}^\lambda(T,p) = \big[u_T, v_{i,p_i^\lambda - k}^\lambda\big]_0 = 0, \quad i = \overline{1, N_\lambda}, \quad k = \overline{0, p_i^\lambda}.$$

$$d_{ik}^\lambda(0,p) = \big[u_0, u_{i,p_i^\lambda - k}^\lambda\big]_0 = 0,\ d_{ik}^\lambda(T,p) = \big[u_T, u_{i,p_i^\lambda - k}^\lambda\big]_0 = 0, \quad i = \overline{1, N_\lambda},\ k = \overline{0, p_i^\lambda}.$$

Из этих систем и краевых условий точно так же, как для задачи (16), (17), находим коэффициенты разложения компоненты $P_\lambda u$ при $\lambda = \mu_j \notin \mathbb{R}$, $j = \overline{1, K}$:

$$\begin{aligned} c_{ik}^\lambda(t,p) = &\int_0^t e^{-p\lambda(t-s)} \big(\varphi(s), v_{i,p_i^\lambda - k}^\lambda\big)\, ds \\ &+ \int_0^t e^{-p\lambda(t-s)} \big(f(s,p), v_{i,p_i^\lambda - k}^\lambda\big)\, ds - p \int_0^t e^{-p\lambda(t-s)} c_{i,k+1}^\lambda(s,p)\, ds, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} d_{ik}^\lambda(t,p) = &\int_0^t e^{-p\lambda(t-s)} \big(\varphi(s), u_{i,p_i^\lambda - k}^\lambda\big)\, ds \\ &+ \int_0^t e^{-p\lambda(t-s)} \big(f(s,p), u_{i,p_i^\lambda - k}^\lambda\big)\, ds - p \int_0^t e^{-p\lambda(t-s)} d_{i,k+1}^\lambda(s,p)\, ds, \end{aligned} \tag{25}$$

и интегральные уравнения для функций $\chi_{ik}^\lambda(s) = \big(\varphi(s), u_{ik}^\lambda\big)$, $\psi_{ik}^\lambda(s) = \big(\varphi(s), v_{ik}^\lambda\big)$:

$$\int_0^T e^{p\lambda s} \chi_{ik}^\lambda(s)\, ds = G_{ik}^\lambda(p), \tag{26}$$

$$\int_0^T e^{p\lambda s} \psi_{ik}^\lambda(s)\, ds = H_{ik}^\lambda(p), \tag{27}$$

где

$$G_{ik}^\lambda(p) = -\int_0^T e^{p\lambda s} \big(f(s,p), u_{ik}^\lambda\big)\, ds, \tag{28}$$

$$H_{ik}^{\lambda}(p) = -\int\limits_0^T e^{p\lambda s}\bigl(f(s,p), v_{ik}^{\lambda}\bigr)\,ds, \tag{29}$$

$k = \overline{0, p_i^{\lambda}}$.

Таким образом, решив интегральные уравнения (21), (26), (27), найдем компоненты решения $P_N u(t,p)$ и

$$P_N^*\varphi = \sum_{m=1}^{K} P_{\mu_m}^*\varphi + \sum_{m=1}^{M} \widetilde{P}_{\lambda_m}^*\varphi, \tag{30}$$

где в силу леммы 2

$$\widetilde{P}_{\lambda}^*\varphi = \sum_{j=1}^{N_{\lambda}^2}\sum_{k=0}^{p_j^{\lambda}} \varepsilon_j^{\lambda}\varphi_{j,p_j^{\lambda}-k}^{\lambda} B u_{jk}^{\lambda} \tag{31}$$

при $\lambda = \lambda_m$, $m = \overline{1, M}$,

$$P_{\lambda}^*\varphi = \sum_{j=1}^{N_{\lambda}}\sum_{k=0}^{p_j^{\lambda}} \bigl(\psi_{j,p_j^{\lambda}-k}^{\lambda} B u_{jk}^{\lambda} + \chi_{j,p_i^{\lambda}-k}^{\lambda} B v_{jk}^{\lambda}\bigr) \tag{32}$$

при $\lambda = \mu_m$, $m = \overline{1, K}$.

Осталось определить компоненты решения $P_{M_1}u(t,p)$ и $P_{M_1}^*\varphi(t)$. Поскольку $u(t,p) \in L_2(0,T;H_1)$, $u_t(t,p) \in L_2(0,T;\widetilde{H}_{-1})$, то

$$P_{M_1}u(t,p) \in W = \{v(t,p) \in L_2(0,T;M_1) : v_t(t,p) \in L_2(0,T;M_{-1})\}.$$

Считаем, что в пространстве W введена естественная норма

$$\|v\|_W^2 = \|v(t,p)\|_{L_2(0,T;M_1)}^2 + \|v_t(t,p)\|_{L_2(0,T;M_{-1})}^2.$$

Тогда в силу (5) (см. [6]) $v(t,p) = P_{M_1}u(t,p) \in C([0,T];M_0)$ и

$$v(t,p) = Q^+v(t,p) + Q^-v(t,p) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+(t,p)u_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^-(t,p)u_n^-, \tag{33}$$

причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\lambda_n^+|\int\limits_0^T |c_n^+(t)|^2\,dt + |\lambda_n^-|\int\limits_0^T |c_n^-(t)|^2\,dt\right) < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\lambda_n^+|^{-1}\int\limits_0^T \left|\frac{dc_n^+}{dt}(t)\right|^2\,dt + |\lambda_n^-|^{-1}\int\limits_0^T \left|\frac{dc_n^-}{dt}(t)\right|^2\,dt\right) < \infty.$$

Из равенства (6) получаем, что найдется (причем единственная) функция $\psi(t) \in M_{-1}$ такая, что

$$P_{M_1}^*\varphi(t) = B\psi(t), \quad \psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^+(t)u_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^-(t)u_n^-. \tag{34}$$

Также для функции $f(t,p) \in L_2(0,T;H_1')$ существует функция $g(t)$ такая, что $P_{M_1}^* f = Bg$ и $g \in L_2(0,T;M_{-1})$. Следовательно, функции $v(t,p) = P_{M_1} u(t,p)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют уравнению

$$v_t + pSv = \psi(t) + g(t,p).$$

Пусть

$$g(t,p) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^+(t,p) u_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^-(t,p) u_i^-.$$

Тогда из уравнения (1) и условий (2) получаем следующую систему дифференциальных уравнений для коэффициентов $c_i^{\pm}(t,p)$:

$$\frac{\partial c_n^{\pm}}{\partial t} = -p\lambda_i^{\pm} c_n^{\pm} + \psi_n^{\pm}(t) + g_n^{\pm}(t,p)\,ds, \quad c_n^{\pm}(0,p) = c_n^{\pm}(T,p) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

из которой находим

$$c_n^{\pm}(t,p) = \int_0^t e^{-p\lambda_n^{\pm}(t-s)} \big(\psi_n^{\pm}(s) + g_n^{\pm}(s,p)\big)\,ds, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

Для коэффициентов $\psi_n^{\pm}$ из второго краевого условия получаем систему интегральных уравнений

$$\int_0^T e^{p\lambda_n^{\pm} s} \psi_n^{\pm}(s) = G_n^{\pm}(p), \tag{36}$$

где

$$G_n^{\pm}(p) = -\int_0^T e^{p\lambda_n^{\pm} s} g_n^{\pm}(s,p)\,ds, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$\int_0^T e^{p\lambda t} f(t)\,dt = G(p).$$

Согласно лемме 2 из [3] для разрешимости этого уравнения в пространстве $L_2(0,T)$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:

(I) функция G аналитична в D и допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C}$ до целой функции;

(II) выполнены соотношения

$$\lim_{\xi \to \infty} [\min\{1, e^{\lambda T \xi}\} \sup_{\eta \in \mathbb{R}} |G(\xi + i\eta)|] = 0,$$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left[\min\{1, e^{2\lambda \xi T}\} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\xi + i\eta)|^2\,d\eta \right] < \infty;$$

(III) $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left| G\big(i\frac{2\pi k}{\lambda T}\big) \right|^2 < \infty.$

Теорема. *Пусть выполнены условия* (A)–(E) *и равенство* (4). *Пусть* $f \in C(\overline{D}; L_2(0,T;H_1'))$, $P^*_{N_\infty} f \in C\big(\overline{D}; W_2^1(0,T;H_1')\big)$, *выполнено конечное число условий вида* (13), $P^*_{M_1} f = Bg$, $g(t,p) \in C(\overline{D}; L_2(0,T;M_{-1}))$. *Пусть* $P^*_N f(t,p)$, $g(t,p)$ *— аналитические функции по переменной* p *на множестве* D, *допускающие продолжение до целых функций по переменной* p *таких, что* $g(t,ip) \in W_2^1(\mathbb{R}; L_2(0,T;M_{-2}))$ *и для каждой из функций* $F^\lambda_{jk}(p)$ *(где* $\lambda = \lambda_m$, $m = \overline{1,M}$, $j = 1, N^2_\lambda$, $k = 0, p^\lambda_j$), $G^\lambda_{jk}(p)$, $H^\lambda_{jk}(p)$ (где $\lambda = \mu_m$, $m = \overline{1,K}$, $j = 1, N_\lambda$, $k = 0, p^\lambda_j$), $G^\pm_n(p)$ $(n \in \mathbb{N})$, *которые определяются по формулам* (22), (28), (29) *и* (37), *выполнены условия* (II), (III).

Тогда существует единственное решение $\{u, \varphi\}$ *обратной задачи* (1), (2) *такое, что* $v = P_{M_1} u \in C(\overline{D}; L_2(0,T;M_1))$, $v_t \in C(\overline{D}; L_2(0,T;M_{-1}))$, $\varphi(t) \in L_2(0,T;H_1')$ *и выполнено* (8).

Доказательство. Согласно вышесказанному решение $u(t,p)$ обратной задачи (1), (2) имеет вид суммы четырех компонент (7), причем компонента $P_{M_\infty} u$ находится по формуле (9), компонента $P_{N_\infty} u$ — по формуле (10). Компонента $P_N u$ имеет вид суммы (14) конечного числа слагаемых вида (15) и (23) с коэффициентами, находящимися по формулам (20) и (24), (25). Последняя компонента $P_{M_1} u = v$ имеет вид ряда (33) с коэффициентами, находящимися по формулам (35).

Далее, в силу (8) решение $\varphi(t)$ обратной задачи (1), (2) имеет вид суммы $P^*_N \varphi(t)$ и $P^*_{M_1} \varphi(t)$. Компонента $P^*_N \varphi(t)$ имеет вид суммы (30) конечного числа слагаемых вида (31) и (32) с коэффициентами, являющимися решениями интегральных уравнений (21), (26) и (27). Компонента $P^*_{M_1} \varphi(t) = B\psi(t)$ имеет вид ряда (34) с коэффициентами, являющимися решениями интегральных уравнений (36).

Таким образом, вопрос о разрешимости рассматриваемой обратной задачи свелся к вопросу о разрешимости уравнений (21), (26), (27) и (36). Так как функция $f(t,p)$ аналитическая по переменной p на множестве D и допускает аналитическое продолжение до целой функции, очевидно, что условие (I) для всех функций F^λ_{jk} (для $\lambda = \lambda_m$, $m = \overline{1,M}$, $j = 1, N^2_\lambda$, $k = 0, p^\lambda_j$), G^λ_{jk}, H^λ_{jk} (для $\lambda = \mu_m$, $m = \overline{1,K}$, $j = 1, N_\lambda$, $k = 0, p^\lambda_j$), $G^\pm_n$ $(n \in \mathbb{N})$ выполнено. Кроме того, по условию для каждой из этих функций выполнены условия (II), (III).

Следовательно, согласно лемме 2 решения уравнений (21), (26), (27) из $L_2(0,T)$ существуют и имеют вид

$$\varphi^\lambda_{jk}(t) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F^\lambda_{jk}\left(i\frac{2\pi l}{\lambda T}\right) e^{i2\pi lt/T}, \quad j = 1, N^2_\lambda,\ k = 0, p^\lambda_j,$$

для $\lambda = \lambda_m$, $m = \overline{1,M}$,

$$\chi^\lambda_{jk}(t) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} G^\lambda_{jk}\left(i\frac{2\pi l}{\lambda T}\right) e^{i2\pi lt/T}, \quad j = 1, N_\lambda,\ k = 0, p^\lambda_j,$$

$$\psi^\lambda_{jk}(t) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} H^\lambda_{jk}\left(i\frac{2\pi k}{\lambda T}\right) e^{i2\pi lt/T}, \quad j = 1, N_\lambda,\ k = 0, p^\lambda_j,$$

для $\lambda = \mu_m$, $m = \overline{1, K}$.

Также согласно лемме 2 решение уравнения (36) из $L_2(0,T)$ существует и имеет вид

$$\psi_n^{\pm} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_n^{\pm} \left(i \frac{2\pi k}{\lambda_n^{\pm} T} \right) e^{i2\pi k t/T}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{38}$$

Поскольку $W_2^1(a,b)$ непрерывно вложено в $C[a,b]$, существует постоянная C, не зависящая от n, такая, что

$$\|\psi_n^{\pm}\|^2_{L_2(0,T)} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| G_n^{\pm} \left(i \frac{2\pi k}{\lambda_n^{\pm} T} \right) \right|^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_0^T e^{i \frac{2\pi k t}{T}} g_n^{\pm} \left(t, i \frac{2\pi k}{\lambda_n^{\pm} T} \right) dt \right|^2$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T \left| g_n^{\pm} \left(t, i \frac{2\pi k}{\lambda_n^{\pm} T} \right) \right|^2 dt \leq \frac{C}{|\lambda_n^{\pm}|} \|g_n^{\pm}(t, ip)\|^2_{L_2(0,T; W_2^1(\mathbb{R}))}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\|\psi\|^2_{L_2(0,T;M_{-1})} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda_n^+|} \|\psi_n^+\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{1}{|\lambda_n^-|} \|\psi_n^-\|^2_{L_2(0,T)} \right)$$

$$\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda_n^+|^2} \|g_n^+(t, ip)\|^2_{L_2(0,T; W_2^1(\mathbb{R}))} + \frac{1}{|\lambda_n^-|^2} \|g_n^{\pm}(t, ip)\|^2_{L_2(0,T; W_2^1(\mathbb{R}))} \right)$$

$$= C \|g(t, ip)\|^2_{W_2^1(\mathbb{R}; L_2(0,T;M_{-2}))}.$$

Кроме того, нашлась функция v, определяемая по формуле (33) с коэффициентами, которые находятся по формулам (35), (38). Оценим коэффициенты $c_n^{\pm}(t,p)$, используя неравенство Юнга и (39):

$$\max_{p \in \overline{D}} \|c_n^{\pm}(t,p)\|^2_{L_2(0,T)} \leq 2 \max_{p \in \overline{D}} \|e^{-\lambda_n^{\pm} pt} * \psi_n^{\pm}\|^2_{L_2(0,T)} + 2 \max_{p \in \overline{D}} \|e^{\lambda_n^{\pm} pt} * g_n^{\pm}\|^2_{L_2(0,T)}$$

$$\leq C_1 \left\{ \frac{1}{|\lambda_n^{\pm}|^2} \|\psi_n^{\pm}\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{1}{|\lambda_n^{\pm}|^2} \max_{p \in \overline{D}} \|g_n^{\pm}\|^2_{L_2(0,T)} \right\}$$

$$\leq C_2 \left\{ \frac{1}{|\lambda_n^{\pm}|^3} \|g_n^{\pm}(t, ip)\|^2_{L_2(0,T; W_2^1(\mathbb{R}))} + \frac{1}{|\lambda_n^{\pm}|^2} \max_{p \in \overline{D}} \|g_n^{\pm}(t,p)\|^2_{L_2(0,T)} \right\},$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от n. Тогда

$$\max_{p \in \overline{D}} \|v\|^2_{L_2(0,T);M_1)} = \max_{p \in \overline{D}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\lambda_n^+| \|c_n^+\|^2_{L_2(0,T)} + |\lambda_n^-| \|c_n^-\|^2_{L_2(0,T)} \right)$$

$$\leq C_2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda_n^+|^2} \|g_n^+(t, ip)\|^2_{L_2(0,T; W_2^1(\mathbb{R}))} + \frac{1}{|\lambda_n^-|^2} \|g_n^-(t, ip)\|^2_{L_2(0,T; W_2^1(\mathbb{R}))} \right) \right.$$

$$\left. + \max_{p \in \overline{D}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} \|g_n(t,p)\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{1}{|\lambda_n|} \|g_n(t,p)\|^2_{L_2(0,T)} \right) \right\}$$

$$= C_2 \left\{ \|g(t, ip)\|^2_{W_2^1(\mathbb{R}; L_2(0,T;M_{-2}))} + \max_{p \in \overline{D}} \|g(t,p)\|^2_{L_2(0,T;M_{-1})} \right\}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\max_{p\in\overline{D}} \|v_t\|^2_{L_2(0,T;M_{-1})} = \max_{p\in\overline{D}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda_n^+|} \left\| \frac{\partial c_n^+}{\partial t} \right\|^2_{L_2((0,T)\times D)} + \frac{1}{|\lambda_n^-|} \left\| \frac{\partial c_n^-}{\partial t} \right\|^2_{L_2((0,T)\times D)} \right) \le C_3 \bigl\{ \|g(t,ip)\|^2_{W_2^1(\mathbb{R};L_2(0,T;M_{-2}))} + \max_{p\in\overline{D}} \|g(t,p)\|^2_{L_2(0,T;M_{-1})} \bigr\}.$$

Единственность решения доказывается точно так же, как в работе [3] (см. теорему 1).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Abasheeva N. L.* Determination of a right-hand side term in operator-differential equation of mixed type // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2002. V. 10, N 6. P. 547–560.
2. *Fedorov V. E., Urazaeva A. V.* An inverse problem for linear Sobolev type equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. V. 12, N 4. P. 387–396.
3. *Абашеева Н. Л.* Линейная обратная задача для операторно-дифференциального уравнения с параметром // Неклассические уравнения математической физики. Тр. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2007. С. 5–14.
4. *Abasheeva N. L.* Identification of a source in parabolic and hyperbolic equations with a parameter // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2009. V. 17, N 6. P. 527–544.
5. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
6. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
7. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
8. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

Статья поступила 30 сентября 2016 г.

Абашеева Нина Леонидовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
anl@math.nsc.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

UDC 517.95

A LINEAR INVERSE PROBLEM FOR A MIXED TYPE OPERATOR–DIFFERENTIAL EQUATION WITH A PARAMETER

N. L. Abasheeva

Abstract: We study the inverse problem $Bu_t + pLu = \varphi(t) + f(t,p)$, $u(0,p) = u(T,p) = 0$. The operators B, L are selfadjoint in the Hilbert space E and the spectrum of the operator L is semibounded. The unique solvability of this problem is proved with using a series expansion in eigen and associated elements of the pencil $L - \lambda B$.
Keywords: inverse problem, mixed type equation.

REFERENCES

1. *Abasheeva N. L.* "Determination of a right-hand side term in operator-differential equation of mixed type," J. Inverse Ill-Posed Probl., **10**, No. 6, 547–560 (2002).
2. *Fedorov V. E. and Urazaeva A. V.* "An inverse problem for linear Sobolev type equations," J. Inverse Ill-Posed Probl., **12**, No. 4, 387–396 (2004).
3. *Abasheeva N. L.* "A linear inverse problem for operator-differential equation with a parameter," in: Nonclassical Equations of Mathematical Physics. Proc. Int. Conf. "Differential Equations, Theory, and Applications." Sobolev Inst. Math., Novosibirsk, 2007, pp. 5–14.
4. *Abasheeva N. L.* "Identification of a source in parabolic and hyperbolic equations with a parameter," J. Inverse Ill-Posed Probl., **17**, No. 6. 527–544 (2009).
5. *Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V.*, Nonclassical Operator-Differential Equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2000).
6. *Triebel H.*, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (1978).
7. *Azizov T. Ya. and Iokhvidov I. S.*, Foundations of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric [in Russian], Nauka, Moscow (1986).
8. *Gohberg I. C. and Krein M. G.*, Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space. Vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1969).

Submitted September 30, 2016

Nina Leonidovna Abasheeva
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 2, Novosibirsk 630090, Russia
anl@math.nsc.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

УДК 517.956

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВРАГОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

И. Е. Егоров

Аннотация. В цилиндрической области рассматривается краевая задача Врагова для уравнения смешанного типа четного порядка с эллиптическим оператором по пространственным переменным. При определенных условиях на коэффициенты уравнения доказаны обобщенная разрешимость, плотная разрешимость, единственность обобщенного решения и фредгольмова разрешимость краевой задачи Врагова в соответствующих пространствах Соболева.
Ключевые слова: уравнение смешанного типа, фредгольмова разрешимость, краевая задача, обобщенное решение, неравенство, оценка, операторное уравнение.

Постановке краевых задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков, исследованию обобщенной и фредгольмовой разрешимости их в различных пространствах посвящено довольно много работ [1–17]. Известно, что для развития спектральной теории для уравнения смешанного типа второго порядка значительный вклад внесли Т. Ш. Кальменов, Е. И. Моисеев, С. М. Пономарев, С. Г. Пятков и другие математики. При этом ряд работ [8, 13, 17] посвящен изучению разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа со спектральным параметром.

В данной работе исследуется фредгольмова разрешимость краевой задачи Врагова [7, 8] для уравнения смешанного типа четного порядка с помощью метода, разработанного в [14, 16].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей S, $S_T = S \times (0,T)$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ для $0 \le t \le T$.

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение четного порядка

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s} k_i(x,t) D_t^i u + Mu = f(x,t), \tag{1}$$

где

$$Mu = (-1)^m \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) + a_0(x)u,$$

$$D_t u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i;$$

α — мультииндекс; $s \geq 2$ и $m \geq 1$ — целые числа.

Будем считать, что коэффициенты уравнения (1) бесконечно дифференцируемы в $\overline{Q}$ и выполнены условия

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \geq \nu|\xi|^{2m} \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n, \ \nu > 0.$$

Отметим, что коэффициент $k_{2s}(x,t)$ может менять знак внутри области Q произвольным образом, т. е. уравнение (1) является уравнением смешанного типа.

Положим

$$P_0^{\pm} = \{(x,0) : (-1)^{s-1}k_{2s}(x,0) \gtrless 0, \ x \in \Omega\},$$
$$P_T^{\pm} = \{(x,T) : (-1)^{s-1}k_{2s}(x,T) \gtrless 0, \ x \in \Omega\}.$$

Через $n = (n_1, \ldots, n_n)$ обозначим вектор внутренней нормали к S.

Краевая задача Врагова. *Найти решение уравнения* (1) *в области* Q *такое, что*

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial n^i}\right|_{S_T} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} D_t^i u\big|_{t=0} = 0, \ i = \overline{0, s-1}; \quad D_t^s u\big|_{\overline{P_0^+}} = 0,\\ D_t^j u\big|_{t=T} = 0, \ j = \overline{1, s-1}; \quad D_t^s u\big|_{\overline{P_T^-}} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Краевая задача (1)–(3) впервые поставлена и исследована В. Н. Враговым в работах [6, 7] при $s = m$.

В анизотропном пространстве Соболева $W_2^{m,s}(Q)$ введем скалярное произведение

$$(u,v)_{m,s} = \int_Q \left[\sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha u D^\alpha v + \sum_{i=1}^s D_t^i u D_t^i v\right] dQ, \quad u,v \in W_2^{m,s}(Q),$$

причем $\|u\|_{m,s}^2 = (u,u)_{m,s}$ $\forall u \in W_2^{m,s}(Q)$ и $(u,v)_{0,0} = (u,v), \|u\|^2 = (u,u)$ для функций u, v из $L_2(Q)$.

Пусть C_L — класс функций $u(x,t)$ из $W_2^{2m,2s}(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3), $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ — замыкание C_L по норме $\|\cdot\|_{m,s}$. Пусть C_{L^*} — класс функций $v(x,t)$ из $W_2^{2m,2s}(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям (2) и

$$\begin{aligned} D_t^i v\big|_{t=0} = D_t^i v\big|_{t=T} = 0, \ j = \overline{0, s-2}; \quad D_t^{s-1} v\big|_{\overline{P_0^-}} = 0,\\ D_t^{s-1} v\big|_{\overline{P_T^+}} = 0; \quad l_{2s-1}v|_{t=T} = 0, \end{aligned} \tag{3*}$$

где

$$l_{2s-1}v \equiv \sum_{i=s-1}^{2s-1} (-1)^i D_t^i(k_{i+1}v).$$

Введем пространство $\widehat{W}_2^{m,s}(Q)$ как замыкание C_{L^*} по норме $\|\cdot\|_{m,s}$. Обозначим через $\widetilde{W}_2^{-m,-s}(Q)$ $(\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q))$ пространство линейных непрерывных функционалов над гильбертовым пространством $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ ($\widehat{W}_2^{m,s}(Q)$), причем $L_2(Q)$ отождествляется с его сопряженным.

Для функций $u \in C_L$, $v \in C_{L^*}$ рассмотрим билинейную форму

$$(Lu, v) = (u, L^* v) = a(u, v)$$
$$\equiv \int\limits_Q \Bigg\{ (-1)^s k_{2s} D_t^s u D_t^s v + (-1)^{s-1} [k_{2s-1} - s k_{2st}] D_t^s u D_t^{s-1} v$$
$$+ \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{s-2} b_{ij} D_t^i u D_t^j v + \sum_{|\alpha||\beta|=m} a_{\alpha\beta} D^\beta u D^\alpha v + a_0 uv \Bigg\} dQ.$$

Определение 1. Функция $u(x,t) \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ называется *обобщенным решением краевой задачи* (1)–(3), если выполнено интегральное тождество

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \widehat{W}_2^{m,s}(Q), \tag{4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — двойственное соотношение между $\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$ и $\widehat{W}_2^{m,s}(Q)$, $f \in \widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$.

Билинейная форма $a(u,v)$ в силу теоремы Рисса имеет представление

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall u \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q),\ v \in \widehat{W}_2^{m,s}(Q),$$

где A — линейный ограниченный оператор из $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ в $\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$. При этом справедливо равенство

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle \quad \forall u \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q), v \in \widehat{W}_2^{m,s}(Q), \tag{5}$$

Пусть $\widehat{H}_{m,s}(Q)$ — пополнение $\widehat{W}_2^{m,s}(Q)$ по норме

$$\|v\|^2_{\widehat{H}_{m,s}(Q)} = \left\| \int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} v(x,\tau) d\tau) \right\|^2_{m,s}, \quad \lambda > 0.$$

Лемма 1. *Пусть коэффициент* $a_0(x) > 0$ *достаточно большой и*

$$(-1)^{s-1} \left(k_{2s-1} + \frac{1-2s}{2} k_{2st} \right) \geq \delta > 0,$$

Тогда существует константа $\lambda > 0$ *такая, что*

$$C_1 \|v\|_{\widehat{H}_{m,s}(Q)} \leq \|A^* v\|_{\widetilde{W}_2^{-m,-s}(Q)}, \quad C_1 = C_1(\lambda) > 0,$$

для всех функций $v \in \widehat{W}_2^{m,s}(Q)$.

Доказательство. Для любой функции $v \in \widehat{W}_2^{m,s}(Q)$ положим

$$u(x,t) = \int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} v(x,\tau) d\tau.$$

Нетрудно видеть, что $u(x,t)$ принадлежит $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ и

$$D_t^s u\big|_{\overline{P_0^-}} = 0, \quad D_t^s u\big|_{\overline{P_T^+}} = 0.$$

Интегрируя по частям, получаем равенство

$$\begin{aligned}\langle u, A^*v\rangle &= a(u, e^{-2\lambda t}u_t)\\ &= \int\limits_Q e^{-2\lambda t}\Big\{(-1)^{s-1}\left[\left(k_{2s-1} + \frac{1-2s}{2}k_{2st}\right) + \lambda(2s-1)k_{2s}\right](D_t^s u)^2\\ &\qquad + \lambda \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}D^\alpha u D^\beta u + \lambda a_0 u^2\Big\}\,dQ + I + \ldots, \qquad (6)\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}I &= \frac{(-1)^s}{2}\int\limits_{P_T^-} k_{2s}e^{-2\lambda T}\big(D_t^s u\big)^2\,dx + \frac{(-1)^{s-1}}{2}\int\limits_{P_0^+} k_{2s}\big(D_t^s u\big)^2\,dx\\ &\qquad + \frac{1}{2}e^{-2\lambda T}\int\limits_{\Omega_T}\Big[\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}D^\alpha u D^\beta u + \lambda a_0 u^2\Big]\,dx \ge 0,\end{aligned}$$

а члены, обозначенные точками, играют подчиненную роль. Теперь выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$(-1)^{s-1}\left(k_{2s-1} + \frac{1-2s}{2}k_{2st}\right) + (-1)^{s-1}\lambda(2s-1)k_{2s} \ge \frac{\delta}{2}, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

На основании теорем вложения выполнены неравенства

$$\|D_t^j u\|^2 \le \varepsilon\|u\|_{m,s}^2 + C_\varepsilon\|u\|^2, \quad \varepsilon > 0,\ j = \overline{1, s-1},$$

которые вместе с неравенством Коши позволяют оценить подчиненные члены в (6). Тогда в силу неравенства Гординга при достаточном большом $a_0 > 0$ из (6) следует оценка леммы 1.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *существует обобщенное решение краевой задачи* (1)–(3) *из пространства* $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$.

Доказательство. Пусть число $\lambda > 0$ выбрано, как в доказательстве леммы 1. Тогда имеет место неравенство

$$\|v\| \le \|v\|_{\widehat{H}_{m,s}} \le C_1^{-1}\|A^*v\|_{\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)}, \quad v \in \widehat{W}_2^{-m,-s}(Q).$$

Далее в силу равенства (5) доказательство теоремы проводится стандартным образом [2].

Замечание 1. В работе [10] теорема 1 была доказана сведением обобщенной разрешимости краевой задачи (1)–(3) к обобщенной разрешимости соответствующей краевой задачи для интегродифференциального уравнения порядка $2s-1$ по времени.

Из леммы 1 непосредственно следует [18].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и* $f \in \widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$. *Тогда операторное уравнение*

$$Au = f$$

плотно разрешимо.

Пусть $G(t,\tau)$ — функция Грина оператора $ly \equiv (-1)^s y^{(2s-1)} + y$ с краевыми условиями

$$y^{(i)}|_{t=0} = y^{(i)}|_{t=T} = 0,\ i = \overline{0, s-2}; \quad y^{(s-1)}|_{t=T} = 0. \tag{7}$$

Обозначим через $\widetilde{H}_{m,s}(Q)$ пополнение $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ по норме

$$\|u\|_{\widetilde{H}_{m,s}} = \left\| \int\limits_0^T G(t,\tau)u(x,\tau)d\tau \right\|_{m,2s-1}.$$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что пространство $\widetilde{H}_{m,s}$ плотно и непрерывно вложено в $L_2(Q)$.

Лемма 2. *Пусть коэффициент* $a_0(x) > 0$ *достаточно большой и выполнены условия*

$$(-1)^{s-1}\left(k_{2s-1} + \frac{1-4s}{2}k_{2st}\right) \geq \delta > 0, \quad (x,t) \in \overline{Q},$$

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(x,0) \geq 0, \quad (-1)^{s-1}k_{2s}(x,T) > 0.$$

Тогда существует константа $C_2 > 0$ *такая, что справедливо неравенство*

$$C_2\|u\|_{\widetilde{H}_{m,s}} \leq \|Au\|_{\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)} \quad \forall u \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q).$$

Доказательство. Для любой функции $u(x,t)$ из $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$ положим

$$v(x,t) = \int\limits_0^T G(t,\tau)u(x,\tau)\,d\tau.$$

При этом имеем $v(x,t) \in \widehat{W}_2^{m,s}(Q)$, $lv = u$ и

$$D^\alpha D_t^k v \in L_2(Q),\ |\alpha| \leq m, k = \overline{0, 2s-1}; \quad D_t^{3s-1}v \in L_2(Q).$$

Поскольку функция $u(x,t)$ принадлежит $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$, интегрируя по частям, будем иметь

$$\langle Au, v\rangle = \int\limits_Q \Bigg\{ D_t u \Bigg[-D_t^{s-1}\big(k_{2s}D_t^s v\big) + D_t^{s-1}\big[(k_{2s-1} - sk_{2st})D_t^{s-1}v\big]$$

$$+ \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{s-2}(-1)^{i-1}D_t^{i-1}\big(b_{ij}D_t^j v\big)\Bigg] + \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}D^\beta u D^\alpha v + a_0 uv \Bigg\} dQ.$$

В силу того, что $D_t u = (-1)^s D_t^{2s} v + D_t v$, последнее равенство с учетом (7) примет вид

$$\langle Au, v\rangle = \int\limits_Q \Big[(-1)^{s-1}\Big(k_{2s-1} + \frac{1-4s}{2}k_{2st}\Big)\big(D_t^{2s-1}v\big)^2 + \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}D^\alpha v D^\beta v + a_0 v^2\Big]\,dQ + J + \dots, \quad (8)$$

где

$$J = \frac{(-1)^{s+1}}{2}\int\limits_{\Omega_T} k_{2s}\big(D_t^{2s-1}\big)^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\Big[\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}D_t^{s-1}D^\alpha v D_t^{s-1}D^\beta v + a_0(D_t^{s-1}v)^2\Big]\,dx,$$

а многоточием обозначены подчиненные члены. В силу условий леммы 2

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(x,T) \geq 2\delta_1 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Используя неравенство Коши, из (8) получаем неравенство

$$\langle Au, v\rangle \geq \int\limits_Q \Big[(\delta-\varepsilon_1)\big(D_t^{2s-1}v\big)^2 + \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}D^\alpha v D^\beta v + a_0 v^2\Big]\,dQ + (\delta_1-\varepsilon_2)\int\limits_{\Omega_T}\big(D_t^{2s-1}v\big)^2\,dx - C_{\varepsilon_2}\sum_{i=0}^{2s-2}\int\limits_{\Omega_T}\big(D_t^i v\big)^2\,dx - C_{\varepsilon_1}\sum_{i=0}^{2s-2}\int\limits_Q\big(D_t^i v\big)^2\,dQ,$$

где ε_i, C_{ε_i} — положительные константы. Выбирая ε_i достаточно малым и затем используя теоремы вложения, из последнего неравенства получаем оценку

$$\langle Au, v\rangle \geq C_2\|v\|^2_{m,2s-1}, \quad C_2 > 0.$$

Отсюда следует утверждение леммы 2.

Из леммы 2 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда краевая задача (1)–(3) может иметь не более одного обобщенного решения из пространства* $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$.

Далее рассмотрим оператор A как оператор из $\widetilde{H}_{m,s}(Q)$ в $\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$. При этом $D(A^*) \subseteq \widehat{W}_2^{m,s}(Q)$, а равенство (5) и априорная оценка леммы 1 справедливы для функций из $D(A^*)$.

Теорема 4. *Пусть* $a_0(x) \geq 0$ *и выполнены условия*

$$(-1)^{s-1}\Big(k_{2s-1} + \frac{1-2s}{2}k_{2st}\Big) \geq \delta > 0, \quad (x,t) \in \overline{Q};$$

Тогда для первого положительного собственного значения оператора A^* имеет место оценка

$$\mu_1 \geq \frac{\delta}{T^{2s-1}}$$

для достаточно малого $T \leq 1$.

Доказательство. Пусть для некоторой функции $v \in D(A^*)$ справедливо равенство $0 = \langle u, A^*v - \mu v\rangle$, $u \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$, $\mu > 0$. В данном равенстве положим

$$u = \int\limits_0^t v(x,\tau)\,d\tau \in \widetilde{W}_2^{m,s}(Q).$$

Интегрируя по частям с учетом условий теоремы, имеем

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_Q \Bigg[(-1)^{s-1}\left(k_{2s-1} + \frac{1-2s}{2}k_{2st}\right)\left(D_t^{s-1}v\right)^2 + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{s-2} b_{ij} D_t^{i-1} v D_t^j v\Bigg] dQ \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T}\left[\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\int\limits_0^T D^\alpha v d\tau \int\limits_0^T D^\beta v d\tau + a_0\left(\int\limits_0^T v d\tau\right)^2\right] dx \\ - \frac{1}{2}\mu\int\limits_\Omega\left(\int\limits_0^T v d\tau\right)^2 dx + \frac{(-1)^s}{2}\int\limits_{P_T^-} k_{2s}\big(D_t^{s-1}v\big)^2\,dx \\ + \frac{(-1)^s}{2}\int\limits_{P_0^+} k_{2s}\big(D_t^{s-1}v\big)^2\,dx. \quad (9) \end{aligned}$$

Справедливы неравенства

$$\big\|D_t^i v\big\|^2 \leq T^{2(s-1-i)}\big\|D_t^{s-1}v\big\|^2, \quad i = \overline{0, s-2};$$

$$\left|\int\limits_Q \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{s-2} D_t^{i-1} v D_t^j v\, dQ\right| \leq C_3 T\big\|D_t^{s-1}v\big\|^2, \quad C_3 > 0,\ T \leq 1.$$

Выбирая $T \leq 1$ так, что $\delta - C_3T \geq \frac{1}{2}\delta$, из равенства (9) получим

$$0 \geq \left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}\mu T^{2s-1}\right)\big\|D_t^{s-1}v\big\|^2.$$

Отсюда следует, что уравнение $A^*v - \mu v = 0$ имеет тривиальное решение при $\mu < \frac{\delta}{T^{2s-1}}$. Поэтому для μ_1 справедливо неравенство $\mu_1 \geq \frac{\delta}{T^{2s-1}}$.

Как в работе [17], устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 5. *Ограниченное в $\widetilde{H}_{m,s}(Q)$ множество компактно в $\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$.*

Лемма 3. *Оператор A допускает замыкание $\overline{A}$.*

Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда из равенства $R(\overline{A}) = \widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$ следует, что уравнение $\overline{A}u = f$ везде разрешимо и $(\overline{A})^{-1}$ — ограниченный оператор из $\widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$ в $\widetilde{H}_{m,s}(Q)$. При этом имеет место

$$\overline{A}^* = A^*, \quad A^* : \widehat{W}_2^{m,s}(Q) \to \widetilde{H}^*_{m,s}(Q),$$

где $\widetilde{H}^*_{m,s}(Q)$ — пространство, сопряженное к $\widetilde{H}_{m,s}(Q)$.

Рассмотрим теперь задачу

$$Lu - \lambda u = f \tag{10}$$

с краевыми условиями (2), (3), λ — комплексное число. Далее будем считать гильбертовы пространства $L_2(Q)$, $\widetilde{W}_2^{m,s}(Q)$, $\widehat{W}_2^{m,s}(Q)$, $\widetilde{H}_{m,s}(Q)$, $\widehat{H}_{m,s}(Q)$ комплексными и сохраним за скалярными произведениями и нормами в них старые обозначения. Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда обобщенная разрешимость краевой задачи (10), (2), (3) эквивалентна операторному уравнению

$$Au - \lambda u = f.$$

Рассмотрим операторные уравнения

$$\overline{A}u - \lambda u = f, \quad u \in \widetilde{H}_{m,s}(Q), \ f \in \widehat{W}_2^{-m,-s}(Q), \tag{11}$$

$$A^*v - \bar{\lambda}v = 0, \quad v \in \widehat{W}_2^{m,s}(Q). \tag{12}$$

Теорема 6. *Пусть коэффициент $a_0(x) \geq 0$ достаточно большой и выполнены условия*

$$(-1)^{s-1}\left(k_{2s-1} + \frac{1-2s}{2}k_{2st}\right) \geq \delta > 0, \quad (-1)^{s-1}\left(k_{2s-1} + \frac{1-4s}{2}k_{2st}\right) \geq \delta > 0,$$

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(x,0) \geq 0, \quad (-1)^{s-1}k_{2s}(x,T) > 0.$$

Тогда уравнение (11) имеет единственное решение из $\widetilde{H}_{m,s}(Q)$ при любом $f \in \widehat{W}_2^{-m,-s}(Q)$ для всех комплексных λ, кроме не более чем счетного множества $\lambda = \lambda_k$, которое может иметь в качестве предельной точки $\lambda = \infty$. Каждому $\lambda = \lambda_k$ соответствует конечное число n_k линейно независимых решений из $\widetilde{H}_{m,s}(Q)$ однородного уравнения (11).

При $\lambda = \lambda_k$ уравнение (11) имеет решение тогда и только, тогда когда выполнены условия

$$\langle f, v_{k_j}\rangle = 0, \quad j = \overline{1, n_k},$$

где v_{k_j} суть все линейно независимые решения из $\widehat{W}_2^{m,s}(Q)$ уравнения (12) при $\lambda = \lambda_k$.

Доказательство. Операторное уравнение (11) эквивалентно уравнению

$$u - \lambda\overline{A}^{-1}u = \overline{A}^{-1}f, \quad u \in \widetilde{H}_{m,s}(Q). \tag{13}$$

В силу теоремы 5 оператор $\overline{A}^{-1}$ вполне непрерывен и потому для уравнения (13) справедливы теоремы Фредгольма.

Условия разрешимости уравнения (11) при $\lambda \equiv \lambda_k$ имеют вид

$$0 = \langle \overline{A}^{-1} f, v_{k_j} \rangle, \quad j = \overline{1, n_k}, \tag{14}$$

где v_{k_j} решение уравнения (12) и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — двойственное соотношение между $\widetilde{H}_{m,s}(Q)$ и $\widetilde{H}^*_{m,s}(Q)$. Так как все λ_k отличны от нуля, условия (14) можно преобразовать к виду

$$0 = \langle \overline{A}^{-1} f, v_{k_j} \rangle = \langle f, (A^*)^{-1} v_{k_j} \rangle = \frac{1}{\bar{\lambda}_k} \langle f, v_{k_j} \rangle.$$

Отсюда следует последнее утверждение теоремы 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.
3. *Михайлов В. П.* Об обобщенной задаче Трикоми // Тр. МИАН. 1968. Т. 103. С.140–161.
4. *Каратопраклиев Г. Д.* О некоторых краевых задачах для уравнения смешанного типа в многомерных областях // Докл. Болг. акад. наук. 1970. Т. 23, № 10. С. 1183–1186.
5. *Диденко В. П.* Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми // Укр. мат. журн. 1973. Т. 25, № 1. С. 14–19.
6. *Врагов В. Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
7. *Врагов В. Н.* О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешано-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5–13.
8. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
9. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990.
10. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
11. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
12. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
13. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент: Изд-во «Mumtoz SO'Z», 2010.
14. *Егоров И. Е.* О фредгольмовой разрешимости одной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 55–64.
15. *Егоров И. Е., Захарова Т. И.* О фредгольмовости краевой задачи для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 1. С. 20–26.
16. *Егоров И. Е.* О фредгольмовой разрешимости первой краевой задачи для уравнения смешанного типа четного порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 2. С. 48–56.
17. *Егоров И. Е.* О краевой задаче для уравнения смешанного типа со спектральным параметром // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21. № 1. С. 11–17.

18. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1971.

Статья поступила 15 ноября 2016 г.

Егоров Иван Егорович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Научно-исследовательский институт математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
IvanEgorov51@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

UDC 517.956

ON FREDHOLM SOLVABILITY OF VRAGOV BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED EVEN–ORDER EQUATION

I. E. Egorov

Abstract. We consider the boundary value problem of V. N. Vragov for mixed type equations of even order with elliptic operator in space variables. We prove the generalized solvability, dense solvability, uniqueness of generalized solutions and Fredholm solvability of the boundary value problem in the corresponding Sobolev spaces.
Keywords: mixed type equation, Fredholm solvability, boundary value problem, generalized solution, inequality, evaluation, operator equation.

REFERENCES

1. *Bitsadze A. V.*, Equations of Mixed Type [in Russian], Akad. Nauk SSSR, Moscow (1959).
2. *Berezanskij J. M.*, Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators [in Russian], Nauk. dumka, Kiev (1965).
3. *Mikhailov V. P.* “The generalized Tricomi problem,” Tr. Mat. Inst. Steklova, **103**, 142–161 (1968).
4. *Karatoprakliev G. D.* “On some boundary value problems for mixed type equations in multidimensional domains,” Dokl. Bolgar. AN, **23**, No. 10, 1183–1186 (1970).
5. *Didenko V. P.* “On the generalized solvability of the Tricomi problem,” Ukr. Mat. Zh., **25**, No. 1, 14–24 (1973).
6. *Vragov V. N.* “On the theory of boundary-value problems for mixed-type equations in space,” Differ. Uravn., **13**, No. 6, 1098–1105 (1977).
7. *Vragov V. N.* “On the formulation and solvability of boundary value problems for mixed-composite type equations,” in: Matematicheskiy analiz i smezhnie voprosi matematiki, Nauka, Novosibirsk, 1978, pp. 5–13.
8. *Moiseev E. I.*, Mixed Type Equations with a Spectral Parameter [in Russian], MGU, Moscow (1988).
9. *Kuzmin A. G.*, Non-classical Mixed Type Equations and Their Application in Gas Dynamics [in Russian], LGU, Leningrad (1990).
10. *Egorov I. E. and Fedorov V. E.*, High-Order Non-classical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Vychisl. Tsentr SO RAN, Novosibirsk (1995).
11. *Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V.*, Nonclassical Differential-Operator Equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2000).
12. *Nakhushev A. M.*, Problems with Shift for Partial Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow (2006).
13. *Salakhitdinov M. S. and Urinov A. K.*, Spectral Theory for Mixed Type Equations [in Russian], Mumtoz SO’Z, Tashkent (2010).
14. *Egorov I. E.* “Fredholm solvability of a boundary value problem for a mixed type equation,” Mat. Zamet. YAGU, **18**, No. 1, 55–64 (2011).
15. *Egorov I. E. and Zakharova T. I.* “On the Fredholm property of a boundary value problem for a mixed type equation,” Mat. Zamet. YAGU, **20**, No. 1, 20–26 (2013).

16. *Egorov I. E.* “On the Fredholm solvability of the first boundary value problem for mixed type equations of even order,” Mat. Zamet. YAGU, **20**, No. 2, 48–56 (2013).
17. *Egorov I. E.* “A boundary value problem for a mixed type equation with a spectral parameter,” Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 1, 11–17 (2014).
18. *Krein S. G.*, Linear Differential Equations in Banach Space [in Russian], Nauka, Moscow (1971).

Submitted November 15, 2016

Ivan Egorovich Egorov
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Research Institute of Mathematics,
Kulakovskii Street, 48, Yakutsk 677000, Russia
IvanEgorov51@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

УДК 517.946

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

А. И. Кожанов

Аннотация. Изучается разрешимость новых обратных задач нахождения вместе с решением параболического уравнения также неизвестного внешнего воздействия (правой части) специального вида. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Рассматриваемые задачи можно трактовать как обобщения известных в теории параболических уравнений обратных задач с финальным или интегральным переопределением.
Ключевые слова: параболическое уравнение, линейная обратная задача, финальное или интегральное переопределение, неизвестный коэффициент специального вида, существование, единственность.

Введение

Пусть в параболическом уравнении

$$u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) + q(x,t)$$

неизвестными являются решение $u(x,t)$, а также компонента $q(x,t)$ правой части (внешнего воздействия). Хорошо известно, что для однозначной разрешимости подобных задач требуются дополнительные условия. Можно выделить два случая. В первом из них функция $q(x,t)$ определяется неизвестным множителем $q_0(x)$ и имеет вид $q(x,t) = q_0(x)h_0(x,t)$ с известной функцией $h_0(x,t)$ (в более общей ситуации функция $q(x,t)$ определяется неизвестными множителями $q_0(x), \dots, q_m(x)$ и имеет вид

$$q(x,t) = \sum_{k=0}^{m} q_k(x)h_k(x,t) \tag{0.1}$$

с известными функциями $h_0(x,t), \dots, h_m(x,t)$); в этом случае рассматриваемую задачу можно назвать *обратной задачей пространственного типа.* Помимо структурных условий о виде неизвестной функции $q(x,t)$ в обратных задачах пространственного типа задаются также некоторые дополнительные условия,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–06582).

называемые *условиями переопределения.* В обратных задачах пространственного типа искомые условия — это либо условия переопределения на временных слоях, а именно условия вида

$$u(x,t_i)=0, \quad i=\overline{0,m}, \tag{0.2}$$

либо условия интегрального переопределения по временной переменной вида

$$\int\limits_0^T N_i(t)u(x,t)\,dt=0, \quad i=\overline{0,m}, \tag{0.3}$$

либо условия, объединяющие условия указанных двух видов.

Во втором случае общей задачи нахождения вместе с решением $u(x,t)$ параболического уравнения также функции $q(x,t)$ искомая функция определяется неизвестным множителем $q_0(t)$ и имеет вид $q(x,t)=q_0(t)h_0(x,t)$ (в более общей ситуации функция $q(x,t)$ определяется неизвестными множителями $q_0(t)$, … , $q_m(t)$ и имеет вид

$$q(x,t)=\sum_{k=0}^m q_k(t)h_k(x,t));$$

в этом случае рассматриваемую задачу можно назвать *обратной задачей временного типа.* Для подобных обратных задач также требуется задавать некоторые условия переопределения — условия точечного, интегрального или граничного по пространственным переменным переопределения (уточнять вид этих условий не будем, поскольку основным объектом дальнейших исследований будут обратные задачи пространственного типа).

В настоящей работе будут исследованы обратные задачи пространственного типа с условиями переопределения (0.2) или (0.3) и с функцией $q(x,t)$, имеющей специальный, но в то же время более общий, чем (0.1), вид. Ранее подобные задачи не исследовались.

Заметим, что собственно обратные задачи пространственного типа для параболических уравнений с неизвестной функцией $q(x,t)$ вида (0.1) и с условиями переопределения (0.2) или (0.3) (или с условиями, являющимися их комбинацией) достаточно хорошо изучены (см. [1–5]).

Ниже в работе рассмотрены некоторые модельные ситуации (в частности, будет рассмотрен случай $m=0$). Возможные обобщения описаны в конце статьи.

1. Постановка задач

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega\times(0,T)$, $0<T<+\infty$, $S=\Gamma\times(0,T)$ — боковая граница Q. Далее, пусть $c(x,t)$, $f(x,t)$, $h^i(x,t)$, $i=1,\dots,n$, $h_0(x,t)$, $N(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $l(t)$ — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $w(x)$ определяется равенством

$$l(t)w = \sum_{i=1}^{n} h^i(x,t)w_{x_i} + h_0(x,t)w.$$

Обратная задача I. *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $q_0(x)$, *связанные в цилиндре* Q *уравнением*

$$u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) + l(t)q_0(x) \tag{1.1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ *условий*

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{1.2}$$

$$u(x,t)|_S = 0; \tag{1.3}$$

$$u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1.4}$$

Обратная задача II. *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $q_0(x)$, *связанные в цилиндре* Q *уравнением* (1.1) *при выполнении для функции* $u(x,t)$ *условий* (1.2) *и* (1.3), *а также условия*

$$\int_0^T N(t)u(x,t)\,dt = 0. \tag{1.5}$$

Обратные задачи I и II в случае $h^i(x,t) \equiv 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$, $i = 1,\dots,n$, совпадают с известными обратными задачами для параболических уравнений с финальным и соответственно с интегральным переопределением, в случае же не тождественно нулевых функций $h^i(x,t)$ эти задачи представляются новыми.

Целью работы является доказательство теорем существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений.

2. Разрешимость обратной задачи I

Доказательство разрешимости обратной задачи I во многом основано на свойствах решений некоторого дифференциального уравнения первого порядка. Поскольку подобные же свойства будут использоваться и при исследовании разрешимости обратной задачи II, приведем эти свойства в общем случае.

Пусть $\alpha^k(x)$, $k = 1,\dots,n$, $\alpha_0(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, l_0 — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $w(x)$ определяется равенством

$$l_0 w = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k(x)w_{x_i} + \alpha_0(x)w.$$

Следующий результат хорошо известен [6, 7].

Будем обозначать через $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке x.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\alpha^k(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad k = 1, \dots, n, \quad \alpha_0(x) \in C^1(\overline{\Omega});$$

$$\alpha_0(x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha^k_{x_k}(x) \geq \bar{\alpha}_0 > 0 \quad \text{при } x \in \overline{\Omega};$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_0(x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha^k_{x_k}(x)\right]\xi_i^2 + \sum_{k,i=1}^{n}\alpha^k_{x_i}(x)\xi_k\xi_i \geq \bar{\alpha}_1|\xi|^2,$$

$$\bar{\alpha}_1 > 0, \quad \xi \in R^n, \quad x \in \overline{\Omega};$$

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha^k(x)\nu_k \leq 0 \quad \text{при } x \in \Gamma.$$

Тогда для любой функции $g(x)$ из пространства $W_2^1(\Omega)$ уравнение

$$lw = g$$

имеет единственное решение $w(x)$, принадлежащее пространству $W_2^1(\Omega)$, и для этого решения выполняются оценки

$$\|w\|_{L_2(\Omega)} \leq m_0(l_0)\|g\|_{L_2(\Omega)}, \tag{2.1}$$

$$\|w\|_{W_2^1(\Omega)} \leq m_1(l_0)\|g\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{2.2}$$

постоянные $m_0 = m_0(l_0)$ и $m_1 = m_1(l_0)$ в которых определяются лишь функциями $\alpha^k(x)$, $k = 1, \dots, n$, $\alpha_0(x)$.

Эта теорема и собственно числа m_0 и m_1 будут существенно использоваться ниже.

Проведем некоторые формальные построения. Именно, положим в уравнении (1) $t = T$. Учитывая условие переопределения (1.4), получим равенство

$$l(T)q_0(x) = u_t(x, T) - f(x, T). \tag{2.3}$$

Пусть для оператора $l_0 = l(T)$ выполняются все условия теоремы 1, и пусть выполняется включение $f(x, T) \in W_2^1(\Omega)$. Тогда из равенства (2.3) можно определить функцию $q_0(x)$:

$$q_0(x) = f_0(x) + \Phi(u_t(x, T))$$

(через $f_0(x)$ обозначено решение уравнения $l(T)q = -f(x, t)$, через $\Phi(u_t(x, T))$ — решение уравнения $l(T)q = u_t(x, T)$).

Подставив полученную функцию $q_0(x)$ в уравнение (1.1), получим «нагруженное» [8, 9] уравнение

$$u_t - \Delta u + c(x, t)u = f_1(x, t) + l(t)\Phi(u_t(x, T)) \tag{2.4}$$

с функцией $f_1(x, t)$, равной $f(x, t) + l(t)f_0(x)$. Так же, как в [3], перейдем от данного уравнения к продифференцированному по t. Получим новое уравнение

$$u_{tt} - \Delta u_t + c(x, t)u_t + c_t(x, t)u = f_{1t}(x, t) + l'(t)\Phi(u_t(x, T)), \tag{2.5}$$

в котором через $l'(t)$ обозначен дифференциальный оператор первого порядка с коэффициентами, полученными дифференцированием коэффициентов оператора l по переменной t.

Именно с помощью уравнения (2.5) и будет построено искомое решение обратной задачи I.

Положим в уравнении (2.4) $t = 0$. Получим равенство

$$u_t(x,0) = f_1(x,0) + l(0)\Phi(u_t(x,T)). \tag{2.6}$$

Рассмотрим задачу: *найти функцию* $u(x,t)$ *такую, что для нее в цилиндре* Q *выполняется уравнение* (2.5), *при* $x \in \Omega$ *выполняются условия* (1.2), (2.6), *при* $(x,t) \in S$ *выполняется условие* (1.3).

Приведем три неравенства, которые, как и неравенства (2.1) и (2.2), понадобятся ниже.

Прежде всего заметим, что если функции $h^i(x,t)$, $i = 1,\ldots,n$, $h_0(x,t)$ принадлежат пространству $C^1(\overline{Q})$, то для любой функции $w(x)$ из пространства $W_2^1(\Omega)$ будет выполняться неравенство

$$\|l'(t)w(x)\|^2_{L_2(Q)} \le M_0 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} w^2_{x_i}(x)\,dx + M_1 \int\limits_{\Omega} w^2(x)\,dx \tag{2.7}$$

с постоянными M_0 и M_1, определяемыми коэффициентами оператора $l(t)$ и числом T.

Далее, для функций $w(x)$, принадлежащих пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega} w^2(x)\,dx \le d_0 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} w^2_{x_i}(x)\,dx, \tag{2.8}$$

постоянная d_0 в котором определяется лишь областью Ω.

Наконец, для функций $\varphi(t)$, принадлежащих пространству $W_2^1([0,T])$ и таких, что $\varphi(0) = 0$, имеет место неравенство

$$\int\limits_0^T \varphi^2(t)\,dt \le T^2 \int\limits_0^T \varphi'^2(t)\,dt. \tag{2.9}$$

Определим еще числа, которые понадобятся ниже. Именно, положим

$$\bar{h}_0 = \max_{\overline{\Omega}} |h_0(x,0)|, \quad \bar{h}_1 = \max_{i=1,\ldots,n} (\max_{\overline{\Omega}} |h_{0x_i}(x,0)|), \quad c_1 = \max_{\overline{Q}} |c_t(x,t)|.$$

Лемма 1. *Пусть для функций* $c(x,t)$, $f_1(x,t)$, $h^i(x,t)$, $i = 1,\ldots,n$, $h_0(x,t)$ *выполняются включения*

$$c(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \quad h^i(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad i = 1,\ldots,n,$$

$$h_0(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad f_1(x,t) \in L_2(Q), \quad f_{1t}(x,t) \in L_2(Q) \quad f_1(x,0) \in W_2^1(\Omega).$$

Далее, пусть для оператора $l_0 = l(T)$ выполняются все условия теоремы 1, и пусть также выполняются условия

$$c(x,t) \geq c_0 > 0, \quad \Delta c(x,t) \leq 0 \quad \text{при } (x,t) \in \overline{Q}, \tag{2.10}$$

$$c_1 < \min\left(1, \frac{2c_0}{d_0 T}\right), \tag{2.11}$$

$$2(1+d_0)m_1^2(l(T))\big(\bar{h}_0^2 + M_0\big) + d_0 m_0^2(l(T))\big(n\bar{h}_1^2 + M_1\big) < 1, \tag{2.12}$$

$$h^i(x,0) \equiv 0 \quad \text{при } x \in \overline{\Omega}. \tag{2.13}$$

Тогда для решений $u(x,t)$ задачи (1.5), (1.2), (1.3), (2.6) таких, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u_t(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u(x,T) \in W_2^1(\Omega)$, $u_t(x,T) \in W_2^1(\Omega)$, выполняется априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u_t\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u(x,T)\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_t(x,T)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq R_0, \tag{2.14}$$

постоянная R_0 в которой определяется лишь функциями $c(x,t)$, $f_1(x,t)$, $h^i(x,t)$, $i = 1,\dots,n$, $h_0(x,t)$, областью Ω и числом T.

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_Q [u_{tt} - \Delta u_t + c(x,t)u_t + c_t(x,t)u]\Delta u_t\,dxdt = -\int\limits_Q [f_{1t}(x,t) + l'(t)\Phi(u_t(x,T))]\Delta u_t\,dxdt.$$

С помощью интегрирования по частям это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i t}^2(x,T)\,dx + \int\limits_Q (\Delta u_t)^2\,dxdt + \sum_{i=1}^n \int\limits_Q c u_{x_i t}^2\,dxdt - \int\limits_Q \Delta c u_t^2\,dxdt$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i t}^2(x,0)\,dx + \int\limits_Q c_t u \Delta u_t\,dxdt - \int\limits_Q l'(t)\Phi(u_t(x,T))\Delta u_t\,dxdt$$
$$- \int\limits_Q f_{1t}\Delta u_t\,dxdt. \tag{2.15}$$

Условие (2.13) означает, что выполняются равенства

$$u_{x_i t}(x,0) = f_{1x_i}(x,0) + h_0(x,0)\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(u_t(x,T)) + h_{0x_i}(x,0)\Phi(u_t(x,T)), \ i = 1,\dots,n.$$

С помощью этих равенств, неравенства Юнга, неравенств (2.1), (2.2) и (2.8) нетрудно получить оценку первого слагаемого правой части (2.15):

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i t}^2(x,0)\,dx \le (2+\delta_1)\bar{h}_0^2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(u_t(x,T))\right]^2 dx$$

$$+ (2+\delta_1)n\bar{h}_1^2\int\limits_{\Omega}[\Phi(u_t(x,T))]^2\,dx + C(\delta_1)\|f_1(x,0)\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

$$\le (2+\delta_1)\bar{h}_0^2 m_1^2(l(T))\|u_t(x,T)\|^2_{W_2^1(\Omega)} + (2+\delta_1)n\bar{h}_1^2 m_0^2(l(T))\|u_t(x,T)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$+ C(\delta_1)\|f_1(x,0)\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le (2+\delta_1)[(1+d_0)\bar{h}_0^2 m_1^2(l(T))$$

$$+ nd_0\bar{h}_1^2 m_0^2(l(T))]\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i t}^2(x,T)\,dx, \quad (2.16)$$

где δ_1 — произвольное положительное число.

Оценим второе слагаемое правой части (2.15). Используя неравенство Юнга и неравенства (2.8) и (2.9), получим

$$\left|\int\limits_{Q} c_t u\Delta u_t\,dxdt\right| \le \frac{\delta_2^2 c_1}{2}\int\limits_{Q}(\Delta u_t)^2\,dxdt + \frac{c_1}{2\delta_2^2}\int\limits_{Q}u^2\,dxdt$$

$$\le \frac{\delta_2^2 c_1}{2}\int\limits_{Q}(\Delta u_t)^2\,dxdt + \frac{c_1 d_0 T^2}{2\delta_2^2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q}u_{x_i t}^2\,dxdt, \quad (2.17)$$

δ_2 здесь вновь произвольное положительное число.

Для третьего слагаемого правой части (2.15) выполняется

$$\left|\int\limits_{Q} l'(t)\Phi(u_t(x,T))\Delta u_t\,dxdt\right| \le \frac{\delta_3^2}{2}\int\limits_{Q}(\Delta u_t)^2\,dxdt$$

$$+ \frac{1}{2\delta_3^2}\int\limits_{Q}\left|l'(t)\Phi(u_t(x,T))\right|^2\,dxdt \le \frac{\delta_3^2}{2}\int\limits_{Q}(\Delta u_t)^2\,dxdt$$

$$+ \frac{M_0}{2\delta_3^2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(u_t(x,T))\right]^2 dx + \frac{M_1}{2\delta_3^2}\int\limits_{\Omega}[\Phi(u_t(x,T))]^2\,dx$$

$$\le \frac{\delta_3^2}{2}\int\limits_{Q}(\Delta u_t)^2\,dxdt + \frac{M_0 m_1^2(l(T))}{2\delta_3^2}\|u_t(x,T)\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

$$+ \frac{M_1 m_0^2(l(T))}{2\delta_3^2}\|u_t(x,T)\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{\delta_3^2}{2}\int\limits_{Q}(\Delta u_t)^2\,dxdt$$

$$+ \left(\frac{M_0 m_1^2(l(T))(1+d_0)}{2\delta_3^2} + \frac{M_1 m_0^2(l(T))d_0}{2\delta_3^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_i t}^2(x,T)\,dx, \quad (2.18)$$

δ_3 здесь произвольное положительное число; при получении (2.18) использовались неравенства (2.1), (2.2), (2.7) и (2.8).

Наконец, последнее слагаемое правой части (2.15) оценим с помощью неравенства Юнга:

$$\Big|\int\limits_Q f_{1t}\Delta u_t\,dxdt\Big| \le \frac{\delta_4^2}{2}\int\limits_Q (\Delta u_t)^2\,dxdt + \frac{1}{2\delta_4^2}\int\limits_Q f_{1t}^2\,dxdt. \tag{2.19}$$

Зафиксируем числа δ_2 и δ_3: $\delta_2 = \delta_3 = 1$. Далее, применяя оценки (2.16)–(2.19), используя условия (2.10)–(2.12) и подбирая числа δ_1 и δ_4 малыми, нетрудно получить, что следствием равенства (2.15) будет оценка

$$\int\limits_Q (\Delta u_t)^2\,dxdt + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_it}^2(x,T)\,dx \le K_0 \tag{2.20}$$

с постоянной K_0, определяемой лишь функциями $c(x,t)$, $f_1(x,t)$, $h^i(x,t)$, $i = 1,\dots,n$, $h_0(x,t)$, числом T и областью Ω.

Из оценки (2.20), второго основного неравенства для эллиптических операторов [10, гл. III, § 8] и неравенств (2.8), (2.9) вытекает требуемая оценка (2.14).

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются включения*

$$c(x,t)\in C^2(\overline{Q}),\quad h^i(x,t)\in C^1(\overline{Q}),\quad i=1,\dots,n,$$

$$h_0(x,t)\in C^1(\overline{Q}),\quad f(x,t)\in L_2(Q),\quad f_t(x,t)\in L_2(Q),$$

$$f(x,0)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\quad f(x,T)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Далее, пусть выполняются условия (2.10)–(2.13), *все условия теоремы* 1 *для оператора* $l_0 = l(T)$ *и одно из условий*

(а) $h^i(x,T)\equiv 0$ *при* $x\in\overline{\Omega}$, $i=1,\dots,n$;

(б) $h_0(x,0) = 0$ *при* $x\in\Gamma$.

Тогда обратная задача I *имеет решение* $\{u(x,t), q_0(x)\}$ *такое, что* $u(x,t)\in W_2^{2,1}(Q)$, $u_t(x,t)\in W_2^{2,1}(Q)$, $q_0(x)\in W_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$u_{tt} - \Delta u_t + c(x,t)u_t = f_{1t}(x,t) + \lambda[l'(t)\Phi(u_t(x,T)) - c_t(x,t)u] \tag{2.5_λ}$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.2), (1.3), *а также условие*

$$u_t(x,0) = f_1(x,0) + \lambda l(0)\Phi(u_t(x,T)),\quad x\in\Omega. \tag{2.6_λ}$$

При $\lambda = 0$ данная задача является обычной первой начально-краевой задачей для параболического относительно $u_t(x,t)$ уравнения; найдя функцию $u_t(x,t)$, нетрудно далее построить собственно функцию $u(x,t)$, при этом функции $u(x,t)$ и $u_t(x,t)$ будут принадлежать пространству $W_2^{2,1}(Q)$.

Поскольку из условий теоремы 2 следует, что выполняются все условия леммы 1, для решений $u(x,t)$ краевой задачи (2.5_λ), (1.2), (1.3), (2.6_λ) будет выполняться априорная оценка (2.14). Заметим также, что при выполнении условий а) или б) теоремы для задачи (2.5_λ), (1.2), (1.3), (2.6_λ) при всех λ выполняется необходимое условие согласования и при этом функция $f_1(x,0)+\lambda l(0)\Phi(u_t(x,T))$ равномерно по λ ограничена в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Следовательно, к семейству задач (2.5_λ), (1.2), (1.3), (2.6_λ) применима теорема о методе продолжения по параметру [11, гл. III, § 14]. Согласно этой теореме краевая задача (2.5), (1.2), (1.3), (2.6) имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u_t(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$.

Итак, пусть $u(x,t)$ — решение краевой задачи (2.5), (1.2), (1.3), (2.6) из указанного выше класса. Определим функцию $q_0(x)$ как решение уравнения (2.3). Очевидно, что эта функция принадлежит $W_2^1(\Omega)$. Далее, имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_t - \Delta u + c(x,t)u - f(x,t) - l(t)q_0(x)) = 0.$$

Из этого равенства очевидным образом следует, что функции $u(x,t)$ и $q_0(x)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1).

Положим в уравнении (1) $t = T$. Получим

$$-\Delta u(x,T) + c(x,T)u(x,T) = 0.$$

Краевое условие (1.3) и положительность функции $c(x,T)$ означают, что следствием (2.21) будет равенство

$$u(x,T) = 0.$$

которое выполняется при $x \in \Omega$. Другими словами, для решения $u(x,t)$ краевой задачи (2.5), (1.2), (1.3), (2.6) выполняется условие переопределения (1.4).

Все сказанное выше означает, что функции $u(x,t)$ и $q_0(x)$ определяют искомое решение обратной задачи I.

Теорема доказана.

3. Разрешимость обратной задачи II

Ввиду повторяемости некоторых выкладок проведем все рассуждения и вычисления в сокращенном виде.

Определим функции $\tilde{h}^i(x)$, $\tilde{h}_0(x)$:

$$\tilde{h}^i(x) = \int\limits_0^T N(t)h^i(x,t)\,dt,\ i = 1,\dots,n, \quad \tilde{h}_0(x) = \int\limits_0^T N(t)h_0(x,t)\,dt.$$

Далее через $\tilde{l}$ будем обозначать оператор, действие которого на заданной функции $w(x)$ определяется равенством

$$\tilde{l}w = \sum_{i=1}^n \tilde{h}^i(x)w_{x_i} + \tilde{h}_0(x)w.$$

Выполним некоторые формальные преобразования. Именно, умножим уравнение (1) на функцию $N(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Получим равенство

$$N(T)u(x,T)-\int\limits_0^T N'(t)u(x,t)\,dt+\int\limits_0^T N(t)c(x,t)u(x,t)\,dt=\int\limits_0^T N(t)f(x,t)\,dt+\tilde{l}q_0.$$

Введем обозначения:

$$\tilde{c}(x,t)=N(t)c(x,t)-N'(t),\quad \tilde{f}(x)=\int\limits_0^T N(t)f(x,t)\,dt.$$

Для заданной функции $w(x,t)$ обозначим через $z(x;w)$ функцию

$$z(x;w)=N(T)w(x,T)+\int\limits_0^T \tilde{c}(x,t)w(x,t)\,dt.$$

Пусть для оператора $l_0=\tilde{l}$ выполняются все условия теоремы 1. Рассмотрим уравнение

$$\tilde{l}q_0=z(x;u)-\tilde{f}(x).$$

Имеет место равенство

$$q_0(x)=\widetilde{\Phi}(z(x;u))+\tilde{f}_0(x)$$

с функцией $\widetilde{\Phi}(z(x;u))$, представляющей собой решение уравнения

$$\tilde{l}q=z(x;u),$$

и с функцией $\tilde{f}_0(x)$, представляющей собой решение уравнения уравнения

$$\tilde{l}q=-\tilde{f}(x).$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t-\Delta u+c(x,t)u=\tilde{f}_1(x,t)+l(t)\widetilde{\Phi}(z(x;u)) \tag{3.1}$$

($\tilde{f}_1(x,t)=f(x,t)+l(t)\tilde{f}_0(x)$) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2) *и* (1.3).

Пусть функции $h^i(x,t)$, $i=1,\ldots,n$, $h_0(x,t)$ принадлежат пространству $C(\overline{Q})$. Тогда для любой функции $w(x)$ из пространства $W_2^1(\Omega)$ будет выполняться неравенство

$$\int\limits_Q [l(t)w(x)]^2\,dxdt\le \widetilde{M}_0\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega w_{x_i}^2(x)\,dx+\widetilde{M}_1\int\limits_\Omega w^2(x)\,dx, \tag{3.2}$$

постоянные $\widetilde{M}_0$ и $\widetilde{M}_1$ в котором определяются коэффициентами оператора $l(t)$, числом T и областью Ω.

Пусть

$$c(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad N(t) \in C^1([0,T]).$$

Тогда для любой функции $v(x,t)$ такой, что $v(x,t) \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $v(x,T) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, справедливы оценки

$$\int\limits_{\Omega} z^2(x;v)\,dx \leq k_1 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q} v_{x_i}^2\,dxdt + k_2 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_{x_i}^2(x,T)\,dx, \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} z_{x_i}^2(x;v)\,dx \leq k_3 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q} v_{x_i}^2\,dxdt + k_4 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_{x_i}^2(x,T)\,dx, \tag{3.4}$$

постоянные k_1–k_4 в которых определяются функциями $c(x,t)$ и $N(t)$, а также областью Ω.

Лемма 2. *Пусть для функций $c(x,t)$, $h^i(x,t)$, $i = 1,\ldots,n$, $h_0(x,t)$, $N(t)$, $\tilde{f}_1(x,t)$ выполняются включения*

$$c(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \quad h^i(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad i = 1,\ldots,n,$$

$$h_0(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad N(t) \in C^1([0,T]), \quad \tilde{f}_1(x,t) \in L_2(Q).$$

Далее, пусть для оператора $l_0 = \tilde{l}$ выполняются все условия теоремы 1, и пусть также выполняются условия

$$c(x,t) \geq c_0 > 0, \quad \Delta c(x,t) \leq 0 \quad \text{при } (x,t) \in \overline{Q};$$

$$2c_0 - \big\{\big[\widetilde{M}_0 m_1^2(\tilde{l}) + \widetilde{M}_1 m_0^2(\tilde{l})\big]k_1 + \widetilde{M}_0 m_1^2(\tilde{l}) k_3\big\} \geq 0,$$

$$1 - \big[\widetilde{M}_0 m_1^2(\tilde{l}) + \widetilde{M}_1 m_0^2(\tilde{l})\big]k_2 - \widetilde{M}_0 m_1^2(\tilde{l}) k_4 > 0.$$

Тогда для решений $u(x,t)$ задачи (3.1), (1.2), (1.3) таких, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u(x,T) \in W_2^1(\Omega)$, выполняется априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u(x,T)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq R_1, \tag{3.5}$$

постоянная R_1 в которой определяется лишь функциями $c(x,t)$, $h^i(x,t)$, $i = 1,\ldots,n$, $h_0(x,t)$, $N(t)$, $\tilde{f}_1(x,t)$, областью Ω и числом T.

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{Q} [u_t - \Delta u + cu]\Delta u\,dxdt = -\int\limits_{Q} [\tilde{f}_1 + l(t)\widetilde{\Phi}]\Delta u\,dxdt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_{x_i}^2(x,T)\,dx + \int\limits_{Q} (\Delta u)^2\,dxdt + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q} c u_{x_i}^2\,dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q} \Delta c u^2\,dxdt$$
$$= -\int\limits_{Q} \tilde{f}_1 \Delta u\,dxdt - \int\limits_{Q} \Delta u l(t)\widetilde{\Phi}\,dxdt. \tag{3.6}$$

Используя неравенство Юнга, неравенства (3.2)–(3.4) и (2.8), оценим второе слагаемое правой части (3.6):

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_Q \Delta u l(t)\widetilde{\Phi}\,dxdt\Big| &\le \frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_Q (\Delta u)^2\,dxdt + \frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_Q [l(t)\widetilde{\Phi}]^2\,dxdt\\
&\le \frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_Q (\Delta u)^2\,dxdt + \frac{1}{2\delta_1^2}\left[\widetilde{M}_0\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega \widetilde{\Phi}_{x_i}^2\,dx + \widetilde{M}_1\int\limits_\Omega \widetilde{\Phi}^2\,dx\right]\\
&\le \frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_Q (\Delta u)^2\,dxdt + \frac{1}{2\delta_1^2}\big[\widetilde{M}_0 m_1^2(\tilde{l})\|z\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \widetilde{M}_1 m_0^2(\tilde{l})\|z\|_{L_2(\Omega)}\big]\\
&\le \frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_Q (\Delta u)^2\,dxdt + \frac{1}{2\delta_1^2}\big\{\big[\widetilde{M}_0 m_1^2(\tilde{l}) + \widetilde{M}_1 m_0^2(\tilde{l})\big]k_1 + \widetilde{M}_0 m_1^2(\tilde{l})k_3\big\}\sum_{i=1}^n\int\limits_Q u_{x_i}^2\,dxdt\\
&\quad + \frac{1}{2\delta_1^2}\big\{\big[\widetilde{M}_0 m_1^2(\tilde{l}) + \widetilde{M}_1 m_0^2(\tilde{l})\big]k_2 - \widetilde{M}_0 m_1^2(\tilde{l})k_4\big\}\sum_{i=1}^n\int\limits_Q u_{x_i}^2\,dxdt. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части (3.6) оценим с помощью неравенства Юнга:

$$\Big|\int\limits_Q \tilde{f}_1\Delta u\,dxdt\Big| \le \frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_Q (\Delta u)^2\,dxdt + \frac{1}{2\delta_2^2}\int\limits_Q \tilde{f}_1^2\,dxdt. \qquad (3.8)$$

Зафиксируем $\delta_1 = 1$. Используя условия леммы и подбирая число δ_2 малым, получим, что следствием равенства (3.6), неравенств (3.7) и (3.8) будет оценка

$$\int\limits_Q (\Delta u)^2\,dxdt + \sum_{i=1}^n\int\limits_Q u_{x_i}^2\,dxdt + \sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,T)\,dx \le K_1, \qquad (3.9)$$

постоянная K_1 в которой определяется лишь функциями $c(x,t)$, $\tilde{f}_1$, $h^i(x,t)$, $i = 1,\dots,n$, $h_0(x,t)$, $N(t)$, числом T и областью Ω.

Оценки (3.9) и второе основное неравенство для эллиптических операторов и дают теперь требуемую оценку (3.5).

Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть выполняются включения*

$$c(x,t)\in C^2(\overline{Q}),\quad h^i(x,t)\in C(\overline{Q}),\quad i=1,\dots,n,$$

$$h_0(x,t)\in C(\overline{Q}),\quad N(t)\in C^1([0,T]),\quad f(x,t)\in L_2\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big).$$

Далее, пусть выполняются все условия условия леммы 2 *и для оператора* $l_0 = \tilde{l}$ *выполняются все условия теоремы* 1. *Тогда обратная задача* II *имеет решение* $\{u(x,t), q_0(x)\}$ *такое, что* $u(x,t)\in W_2^{2,1}(Q)$, $u(x,T)\in W_2^1(\Omega)$, $q_0(x)\in W_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу (3.1), (1.2), (1.3). Заметим, что в этой задаче функция $\tilde{f}_1(x,t)$ принадлежит $L_2(Q)$. Поскольку выполняются все остальные условия леммы 2, из оценки (3.5) и теоремы о методе продолжения по параметру следует, что данная задача имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u(x,T) \in W_2^1(\Omega)$. Определим функцию $q_0(x)$:

$$q_0(x) = \widetilde{\Phi}(z(x;u)) + \tilde{f}_0(x).$$

Очевидно, что $q_0(x)$ принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$ и что $u(x,t)$ и $q_0(x)$ связаны в цилиндре Q уравнением (11). Далее, выполнение для $u(x,t)$ условия переопределения (1.5) доказывается аналогично [4, 5]. Следовательно, функции $u(x,t)$ и $q_0(x)$ дадут требуемое решение обратной задачи II.

Теорема доказана.

4. Комментарии и дополнения

1. Краевое условие (1.3) (условие Дирихле) в обратных задачах I и II можно заменить иным условием — например, условием третьей краевой задачи.

2. Аналогичные вышеприведенным результаты можно получить и для параболических уравнений вида

$$u_t + (-1)^m \Delta^m u + c(x,t)u = f(x,t) + q(x,t)$$

с неизвестной функцией $q(x,t)$ вида $q(x,t) = l(t)q_0(x)$, целым положительным числом m, естественными для оператора Δ^m краевыми условиями на S, начальным условием (1.2) и условиями переопределения (1.4) или (1.5). Более того, всюду оператор Δ или Δ^m можно заменить эллиптическим оператором второго порядка или же порядка $2m$. Соответствующее условие разрешимости (иногда весьма громоздкие) нетрудно получить, исходя из методов исследования разрешимости обратных задач I или II.

3. Условия теоремы 1 выполняются, если при $x \in \Omega$ имеет место неравенство $\alpha_0(x) \geq \bar{\alpha} > 0$ с достаточно большим положительным числом $\bar{\alpha}$. Числовые неравенства лемм 1 и 2 представляют собой некоторые условия малости. Очевидно, что множество исходных данных обратных задач I и II, для которых эти условия выполняются, непусто.

4. Числовые неравенства лемм 1 и 2 можно «пошевелить» — например, за счет иного, нежели вышеприведенный, выбора параметров в неравенстве Юнга, за счет применения к последнему слагаемому неравенства (2.17) оценки

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x)\,dx \leq d_1 \int\limits_{\Omega} (\Delta w)^2\,dx,$$

справедливой для функций $w(x)$ из пространства $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.
2. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2009.
3. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.

4. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном параболическом уравнении и связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853.
5. *Kozhanov A. I., Safiullova R. R.* Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2010. V. 18, N 1. P. 1–18.
6. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения с неотрицательной характеристической формой. М.: МГУ, 2010.
7. *Кожанов А. И.* Краевая задача с интегродифференциальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2009. Т. 16, № 2. С. 42–50.
8. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012.
9. *Дженалиев Н. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теорет. и прикл. математики, 1995.
10. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
11. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 15 июня 2016 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

UDC 517.946

INVERSE PROBLEMS OF RECOVERING THE RIGHT–HAND SIDE OF A SPECIAL TYPE OF PARABOLIC EQUATIONS

A. I. Kozhanov

Abstract. We study the solvability of new inverse problems of finding a solution of some parabolic equation along with the unknown external source (the right-hand side) of a special type. The existence and uniqueness theorems for regular solutions are proved. The considered problems can be treated as generalizations known in the theory of parabolic equations inverse problems with final and integral overdetermination.
Keywords: parabolic equation, linear inverse problem, final or integral overdetermination, unknown coefficient of a special type, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A.*, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York, Marcel Dekker (2000).
2. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations, Berlin, Springer-Verl. (2009).
3. *Kozhanov A. I.* "Nonlinear loaded equations and inverse problems," Comput. Math. Math. Phys., **44**, No. 4, 657–678 (2004).
4. *Kozhanov A. I.* "A nonlinear loaded parabolic equation and a related inverse problem," Math. Notes, **76**, No. 6, 784–795 (2004).
5. *Kozhanov A. I. and Safiullova R. R.* "Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations," J. Inverse Ill-Posed Probl., **18**, No. 1, 1–18 (2010).
6. *Oleynik O. A. and Radkevich E. V.*, Equations with Nonnegative Characteristic Form [in Russian], MGU, Moscow (2010).
7. *Kozhanov A. I.* "Boundary value problem with the integrodifferential boundary value condition for linear parabolic equations," Mat. Zamet. YAGU, **16**, No. 2, 42–50 (2009).
8. *Nakhushev A. M.*, Loaded Equations and their Applications [in Russian], Nauka, Moscow (2012).
9. *Dzhenaliev N. T.*, On the Theory of Linear Boundary Value Problems for Loaded Differential Equations [in Russian], Inst. Teor. Prikl. Mat., Almaty (1995).
10. *Ladyzhenskaya O. A. and Ural'tseva N. N.*, Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type [in Russian], Nauka, Moscow (1973).
11. *Trenogin V. A.*, Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

Submitted June 15, 2016

Akeksandr Ivanovich Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 2, Novosibirsk 630090, Russia
kozhanov@math.nsc.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

УДК 517.95

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ В ОДНОМЕРНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С УЧЕТОМ ЗАСТОЙНЫХ ЗОН

С. Г. Пятков, В. В. Ротко

Аннотация. Рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева обратной задачи определения функции источников в системе, состоящей из параболического уравнения и обыкновенного дифференциального уравнения. В качестве условия переопределения берется значение концентрации примеси в выделенных точках. Доказаны существование и единственность решений задачи.
Ключевые слова: параболическое уравнение, обратная задача, тепломассоперенос, краевая задача, функция источников.

Введение

Пусть $G = (a, b)$ и $Q = G \times (0, T_0)$. Мы рассматриваем вопрос об определении вместе с решением правой части специального вида (функции источника) в системе

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U(x,t)\frac{\partial C}{\partial x} - D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \varepsilon T^{-1}(C_s - C) - \lambda C + s(x,t), \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} = T^{-1}(C - C_s) - \lambda_s C_s, \tag{0.2}$$

где $U(x,t)$ — скорость потока, $D > 0$ — коэффициент дисперсии, ε — отношение объема застойной зоны к объему главного течения на единицу длины, T — среднее время пребывания частиц в застойной зоне, λ и λ_s — соответствующие коэффициенты разложения загрязняющих веществ. Для простоты формулировок считаем, что величины $D, T, \lambda, \lambda_s, \varepsilon$ постоянные. Все эти параметры считаются известными. Определению подлежат функции C, C_s — концентрации загрязняющих веществ в реке и в застойных зонах реки соответственно, и неизвестная правая часть $s(x,t)$ вида

$$s(x,t) = f_0(x,t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t) f_i(x,t)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Ханты-Мансийского автономного округа — Югры (код проекта 15–41–00063, р_урал_а).

(функции $q_i(t)$ считаются неизвестными). Уравнение (0.1) дополняется начальными и граничными условиями.

$$
\begin{gathered}
C|_{t=0} = c_0(x), \quad C_s|_{t=0} = c_1(x), \\
B_1C(a,t) = \alpha_1 C_x(a,t) + \beta_1(t)C(a,t) = \varphi_1(t), \\
B_2C(b,t) = \alpha_2 C_x(b,t) + \beta_2(t)C(b,t) = \varphi_2(t).
\end{gathered} \tag{0.3}
$$

Считаем, что $\alpha_i = 1$ или $\alpha_i = 0$, в последнем случае считаем, что $\beta_i \equiv 1$, $i = 1, 2$. В качестве условия переопределения берутся данные замеров концентрации C в некоторых фиксированных точках, т. е. условия вида

$$
C(x_i, t) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{0.4}
$$

где $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Результаты по исследованию прямых задач и численные алгоритмы решения задачи (0.1)–(0.3) имеются, например, в [1–7]. Большое число работ посвящено численному решению близких задач — задач о загрязнении подземных вод (см., например, [8]). Работа [9] посвящена численному алгоритму решения обратной задачи (0.1)–(0.5) в случаях, когда $s(x,t) = a(x)f(t)$, или

$$
s(x,t) = \sum_{i=1}^{r} f_i(t)\delta(x - x_r)
$$

(здесь δ — дельта-функция Дирака и $x_k \in G$, $k = 1, 2, \ldots, r$) и некоторым представлениям решений. Вопросы разрешимости близких обратных задач, когда система (0.1) сводится к одному уравнению и уравнение (0.2) отсутствует, в пространствах Гёльдера исследовалась в монографии [10], а в пространствах Соболева — в [11]. Среди монографий, посвященных обратным задачам для параболических и эллиптических уравнений и систем, отметим [12–14].

В данной работе при естественных условиях на данные задачи (0.1)–(0.5) показана ее корректность в пространствах С. Л. Соболева. Результаты обобщают результаты работы [11] на случай системы (0.1), (0.2).

В § 1 описаны условия на данные задачи, приведены вспомогательные утверждения и сформулированы основные результаты, в § 2 приведено их доказательство.

§ 1. Определения, обозначения и формулировка основных результатов

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определенных на G, со значениями в E и конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [15]. Также используем пространства Гёльдера $C^\alpha(\overline{G})$ и анизотропные пространства Гёльдера $C^{\lambda/2,\lambda}(\overline{Q})$ (см. определения в [15, 16]). Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G)$, $W_p^s(Q)$, $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p\big(J; W_p^r(G)\big)$, $J = (0, T_0)$ и т. д. стандартны (см., например, [15, 16]).

Прежде чем переходить к формулировке вспомогательных и затем наших главных результатов, приведем некоторые построения. Из уравнения (0.2) имеем

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} + C_s(T^{-1} + \lambda_s) = T^{-1}C.$$

Используя начальные условия (0.3), получим

$$C_s = c_1(x)e^{-(T^{-1}+\lambda_s)t} + \frac{1}{T}\int\limits_0^t e^{-(T^{-1}+\lambda_s)(t-\tau)}C(\tau)\,d\tau.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (0.1), придем к равенству

$$C_t + UC_x - DC_{xx} + (\varepsilon T^{-1} + \lambda)C$$
$$= \varepsilon T^{-1}\left(c_1(x)e^{-(T^{-1}+\lambda_s)t} + \int\limits_0^t \frac{e^{-(T^{-1}+\lambda_s)(t-\tau)}}{T}C(\tau)\,d\tau\right) + s(x,t).$$

Отсюда получим уравнение для функции C вида

$$L_0C = C_t + UC_x - DC_{xx} + (\varepsilon T^{-1} + \lambda)C - \frac{\varepsilon}{T^2}\int\limits_0^t e^{-(T^{-1}+\lambda_s)(t-\tau)}C(\tau)\,d\tau$$
$$= s(x,t) + \frac{\varepsilon}{T}c_1(x)e^{-(T^{-1}+\lambda_s)t} = \tilde{f}_0 + \sum_{i=1}^n f_i(t)q_i(x,t),$$
$$\tilde{f}_0 = f_0 + \frac{\varepsilon}{T}c_1(x)e^{-(T^{-1}+\lambda_s)t}.$$

Функция C удовлетворяет начальным и краевым условиям (0.3). Обозначим

$$L_1C = L_0C + \frac{\varepsilon}{T^2}\int\limits_0^t e^{-(T^{-1}+\lambda_s)(t-\tau)}C(\tau)\,d\tau.$$

Предположим, что мы нашли решение вспомогательной задачи

$$L_0C_0 = \tilde{f}_0, \quad C_0|_{t=0} = c_0(x), \quad B_1C_0(a,t) = \varphi_1(t), \quad B_2C_0(b,t) = \varphi_2(t). \tag{1.1}$$

Тогда после замены $C = C_0 + V$ получим, что функция V есть решение задачи

$$L_0V = \sum_{i=1}^n q_i(t)f_i(x,t), \quad V|_{t=0} = 0, \quad B_1V(a,t) = 0, \quad B_2V(b,t) = 0. \tag{1.2}$$

Условия переопределения (0.4) будут иметь вид

$$V(x_i,t) = C(x_i,t) - C_0(x_i,t) = \psi_i(t) - C_0(x_i,t) = \widetilde{\psi}_i(t), \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{1.3}$$

Таким образом, мы (по крайней мере формально) свели задачу (0.1)–(0.4) к задаче о нахождении набора функций $V, q_1, \dots, q_n$ таких, что выполнены равенства (1.2), (1.3). Далее, в доказательстве теоремы 1.3, обоснуем эти рассуждения.

Будем считать, что параметр $p > 3$ зафиксирован. Фиксируем также некоторое число $\delta > 0$ такое, что $\overline{B_\delta(x_i)} \cap \overline{B_\delta(x_j)} = \varnothing$ при $i \neq j$ ($B_\delta(x_i)$ — δ-окрестность точки x_i),

$$G_\delta = \bigcup_{i=1}^{n} B_\delta(x_i) \subset G.$$

Пусть $Q_\delta = G_\delta \times (0, T_0)$. Сформулируем необходимые условия на данные задачи.

Условия согласования и гладкости данных могут быть записаны в виде

$$c_0(x) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(a,b), \quad U \in L_p(Q), \quad \beta_j(t) \in C^{1/2}([0,T_0]), \tag{1.4}$$

$$\varphi_j(t) \in W_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(0,T_0) \text{ при } \alpha_j \neq 0, \quad \varphi_j(t) \in W_p^{1-\frac{1}{2p}}(0,T_0) \text{ при } \alpha_j = 0, \quad j = 1,2, \tag{1.5}$$

$$\alpha_1 c_{0x}(a) + \beta_1(0) c_0(a) = \varphi_1(0), \quad \alpha_2 c_{0x}(b) + \beta_2(0) c_0(b) = \varphi_2(0). \tag{1.6}$$

$$f_0(x,t) \in L_p(Q), \quad f_{0x}(x,t) \in L_p(Q_\delta), \tag{1.7}$$

$$c_{0x}(x) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G_\delta), \quad c_1(x) \in L_p(G) \cap W_p^1(G_\delta), \quad U_x \in L_p(Q_\delta), \tag{1.8}$$

$$f_i(x,t) \in L_\infty(0,T_0; L_p(a,b)), \quad f_{ix}(x,t) \in L_\infty(0,T_0; L_p(G_\delta)), \quad \psi_i \in W_p^1(0,T_0), \tag{1.9}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим матрицу $B(t)$ размера $n \times n$, элементы которой имеют вид $b_{ij}(t) = f_j(x_i, t)$. Можно показать, используя условия (1.9) и теоремы вложения (см. лемму 2.1 ниже), что функции $f_j(x,t)$ непрерывны (и даже удовлетворяют условию Гёльдера) как функции переменной x со значениями в $L_\infty(0,T_0)$. Тогда следы $f_j(x_i,t)$ определены и принадлежат пространству $L_\infty(0,T_0)$. Потребуем, чтобы существовала постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_0 > 0 \quad \text{для почти всех } t \in [0,T_0]. \tag{1.10}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$L_0 C_0 = f_0, \quad C_0|_{t=0} = c_0, \quad B_1 C_0(a) = \varphi_1, \quad B_2 C_0(b) = \varphi_2. \tag{1.11}$$

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* (1.4)–(1.6) *и* $f_0 \in L_p(Q)$. *Тогда существует единственное решение* $C_0 \in W_p^{1,2}(Q)$ *задачи* (1.11) *такое, что имеет место оценка*

$$\|C_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq c(\|c_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G)} + \|\varphi_1\|_{W_p^{s_1}(0,T_0)} + \|\varphi_2\|_{W_p^{s_2}(0,T_0)} + \|f_0\|_{L_p(Q)}), \tag{1.12}$$

где $s_i = 1 - 1/2p$ *в случае* $\alpha_i = 0$ *и* $s_i = 1/2 - 1/2p$ *в случае* $\alpha_i = 1$, $i = 1,2$. *Если дополнительно выполняются условия*

$$c_{0x} \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G_\delta), \quad f_{0x} \in L_p(Q_\delta), \tag{1.13}$$

то решение задачи (1.11) *обладает свойством*

$$C_{0x} \in W_p^{1,2}(Q_{\delta 1}) \quad \forall \delta_1 < \delta.$$

Доказательство основано на стандартных результатах о разрешимости параболических задач и свойств их решений. Рассмотрим параболическую задачу

$$L_1\Phi = f_0, \quad \Phi|_{t=0} = c_0(x), \quad B_1\Phi(a,t) = \varphi_1(t), \quad B_2\Phi(b,t) = \varphi_2(t).$$

Используя стандартные результаты (см. [16]), получим, что существует единственное решение этой задачи из пространства $W_p^{1,2}(Q)$. Обозначим через L_1^{-1} оператор, сопоставляющий правой части f_0 решение этой задачи с однородными начальными и краевыми условиями. Сделаем в (1.11) замену $C_0 = V_0 + \Phi$. Тогда функция V_0 есть решение задачи

$$\begin{gathered} L_0 V_0 = \frac{\varepsilon}{T^2}\int_0^t e^{-(T^{-1}+\lambda_s)(t-\tau)}\Phi(\tau)\,d\tau = g_0, \\ V_0|_{t=0} = 0, \quad B_1V_0(a,t) = 0, \quad B_2V_0(b,t) = 0. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Уравнение (1.14) можно переписать в виде

$$V_0 = L_1^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{T^2}\int_0^t e^{-(T^{-1}+\lambda_s)(t-\tau)}V_0(\tau)\,d\tau\right) + L_1^{-1}g_0.$$

Доказательство разрешимости этого уравнения проводится по той же схеме, что и доказательство разрешимости уравнения (2.6) в теореме 1.3 с использованием теоремы о неподвижной точке. Более того, необходимая оценка интегрального оператора в правой части значительно проще, чем в теореме 1.3, поэтому доказательство опускаем. Необходимая дополнительная гладкость функций V_0, Φ вытекает, например, из теоремы 3 в [17].

Введем еще две области вида $Q^\gamma = (a,b)\times(0,\gamma)$, $Q_\delta^\gamma = G_\delta \times (0,\gamma)$, $\gamma \le T_0$. Рассмотрим задачу

$$L_0C_0 = f_0, \quad C_0|_{t=0} = 0, \quad B_1C_0(a) = 0, \quad B_2C_0(b) = 0. \tag{1.15}$$

Теорема 1.2. *Пусть $f_0 \in L_p(Q^\gamma)$, $f_{0x} \in L_p(Q_\delta^\gamma)$, $\gamma \le T_0$, и выполнены условия (1.4) для функций U, β_j $(j = 1,2)$. Тогда существует единственное решение задачи (1.15) такое что*

$$C_0 \in W_p^{1,2}(Q^\gamma), \quad C_{0x} \in W_p^{1,2}(Q_{\delta_1}^\gamma) \quad \forall \delta_1 < \delta,$$

и при фиксированном $\delta_1 < \delta$ справедлива оценка

$$\|C_0\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} + \|C_{0x}\|_{W_p^{1,2}(Q_{\delta_1}^\gamma)} \le c(\|f_0\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|f_{0x}\|_{L_p(Q_\delta^\gamma)}),$$

где постоянная c не зависит от $\gamma \in (0, T_0]$.

Утверждение теоремы 1.2 легко вытекает из теоремы 1.1 и того факта, что функцию f_0, определенную на $(0,\gamma)$, можно продолжить нулем на весь временной интервал $(0,T_0)$ с сохранением класса.

Теоремы 1.1 и 1.2 — главные утверждения, используемые при доказательстве основного результата — теоремы 1.3.

Теорема 1.3. *Пусть условия* (1.4)–(1.10) *выполнены. Тогда существует единственное решение задачи* (0.1)–(0.4) *такое, что*

$$C \in W_p^{1,2}(Q), \quad C_s \in W_p^1(0,T_0;L_p(a,b)), \quad q_i(t) \in L_p(0,T_0), \quad i=1,2,\dots,n,$$

$$C_x \in W_p^{1,2}(Q_{\delta_1}), \quad C_{sx} \in L_p(0,T_0;L_p(G_{\delta_1})) \quad \forall \delta_1 < \delta.$$

Решение при фиксированном $\delta_1 < \delta$ *удовлетворяет оценке*

$$\begin{gathered}\|C\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \|C_x\|_{W_p^{1,2}(Q_\delta)} + \|C_s\|_{W_p^1(0,T_0;L_p(a,b))} + \|C_{sx}\|_{L_p(Q_{\delta_1})} \\ + \sum_{i=1}^n \|q_i(t)\|_{L_p(0,T_0)} \le c(\|c_0\|_{W_p^{2`-\frac{2}{p}}(G)} + \|c_{0x}\|_{W_p^{2`-\frac{2}{p}}(G_\delta)} + \|c_1\|_{L_p(G)} \\ + \|c_{1x}\|_{L_p(G_\delta)} + \|\varphi_1\|_{W_p^{s_1}(0,T_0)} + \|\varphi_2\|_{W_p^{s_2}(0,T_0)} + \|f_0\|_{L_p(Q)} + \|f_{0x}\|_{L_p(Q_\delta)}),\end{gathered}$$

где $s_i = 1 - 1/2p$ *в случае* $\alpha_i = 0$ *и* $s_i = 1/2 - 1/2p$ *в случае* $\alpha_i = 1$, $i = 1,2$, *и постоянная* c *на зависит от данных задачи и решения.*

Нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть* $u \in W_p^1(0,\gamma;L_p(G))$ *и* $u(x,0) = 0$. *Тогда справедлива оценка.*

$$\|u(x,\tau)\|_{L_p(Q^\gamma)} \le \gamma \|u_\tau(x,\tau)\|_{L_p(Q^\gamma)}.$$

Доказательство вытекает из формулы Ньютона — Лейбница

$$u(x,t) = \int_0^t u_\tau(x,\tau)\,d\tau$$

и неравенства Гёльдера.

§ 2. Доказательство теоремы 1.3

Используя теорему 1.1, найдем решение C_0 задачи (1.1) и сделаем замену $C = C_0 + V$ в уравнении (1.1). Придем к задаче

$$L_0 V = \sum_{i=1}^n q_i(t) f_i(x,t) = g, \quad V|_{t=0} = 0, \quad B_1 V(a,t) = 0, \quad B_2 V(b,t) = 0. \quad (2.1)$$

Условия переопределения (0.4) будут иметь вид

$$V(x_i,t) = \psi_i(t) - C_0(x_i,t) = \widetilde{\psi}_i(t) \in W_p^1(0,T_0), \quad i = 1,2,\dots,n. \quad (2.2)$$

Отметим, что в силу теоремы 1.1 $C_0 \in W_p^{1,2}(Q)$, $C_{0x} \in W_p^{1,2}(Q_{\delta_1})$ для всех $\delta_1 < \delta$ и тогда $C_0(x_i,t) \in W_p^1(0,T_0)$. Пусть $q_i(t) \in L_p(0,\gamma)$, $\gamma \le T_0$, $i = 1,2,\dots,n$. Из условий на функции f_i вытекает, что $g \in L_p(Q^\gamma)$, $g_x \in L_p(Q_\delta^\gamma)$ и, более того, имеем оценку

$$\|g\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|g_x\|_{L_p(Q_\delta^\gamma)} \le \alpha_1 \|\vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)}, \quad (2.3)$$

где постоянная α_1 не зависит от γ, а зависит от величин $\|f_i\|_{L_\infty(0,T_0;L_p(G))}$, $\|f_{ix}\|_{L_\infty(0,T_0;L_p(G_\delta))}$, $i = 1,2,\dots,n$. По определению $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, и под нормой вектора здесь и далее понимаем сумму норм координат. Обращая оператор L_0 в (2.1), что возможно по теоремам 1.1, 1.2, и используя оценку из теоремы 1.2 и оценку (2.3), получим, что функция V выражается через правую часть, $V = L_0^{-1}g$ и, более того, имеем оценку (при фиксированном $\delta_1 < \delta$)

$$\|V\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} + \|V_x\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma_{\delta_1})} \leq \alpha_2 \|\vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)}, \tag{2.4}$$

где постоянная α_2 не зависит от γ. Положим $x = x_i$ в (2.1). Используя условия переопределения (2.2), придем к равенству

$$\widetilde{\psi}_{it} + U(x_i,t)V_x(x_i,t) - DV_{xx}(x_i,t) + (\varepsilon T^{-1} + \lambda)\widetilde{\psi}_i - \frac{\varepsilon}{T^2}\int_0^t e^{-(T^{-1}+\lambda_s)(t-\tau)}\widetilde{\psi}_i(\tau)\,d\tau = g(x_i,t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) f_j(x_i,t). \tag{2.5}$$

Правая часть здесь — это в точности i-я координата вектора $B\vec{q}$, где матрица B определена перед теоремой 1.1. Тогда равенство (2.5) переписывается в виде

$$\vec{q} = \vec{g} + R(\vec{q}), \tag{2.6}$$

где $\vec{g} = B^{-1}F$, i-я координата вектора F есть функция

$$\widetilde{\psi}_{it} + (\varepsilon T^{-1} + \lambda)\widetilde{\psi}_i - \frac{\varepsilon}{T^2}\int_0^t e^{-(T^{-1}+\lambda_s)(t-\tau)}\widetilde{\psi}_i(\tau)\,d\tau,$$

соответственно $R(\vec{q}) = B^{-1}\vec{R}_0$ и i-я координата вектора $\vec{R}_0$ есть функция

$$U(x_i,t)V_x(x_i,t) - DV_{xx}(x_i,t),$$

где $V = L_0^{-1}g$. Уравнение (2.6) — основное уравнение, которое будем исследовать. Фиксируем $\gamma \leq T_0$ и получим некоторые оценки. В силу условия (1.10) имеем

$$\|R(\vec{q})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \alpha_3\|\vec{R}_0\| \leq \alpha_4 \sum_{i=1}^n (\|V_{xx}(x_i,t)\|_{L_p(0,\gamma)} + \|U(x_i,t)V_x(x_i,t)\|_{L_p(0,\gamma)}), \tag{2.7}$$

где постоянные α_3, α_4 не зависят от γ. Далее используем теоремы вложения и интерполяционные неравенства (см. [15]). В силу теорем вложения имеем

$$\|V_{xx}(x_i,t)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \alpha_5 \|V_{xx}\|_{L_p(0,\gamma;W_p^{1/p+\varepsilon}(G^\gamma_{\delta_1}))} \leq \alpha_6 \|V\|^\theta_{L_p(0,\gamma;W_p^3(G^\gamma_{\delta_1}))}\|V\|^{1-\theta}_{L_p(Q^\gamma)},$$

где $\varepsilon \in (0, 1-1/p)$ произвольно, $(2+1/p+\varepsilon) = 3\theta$ и постоянная α_6, как и ранее, не зависит от γ. Из (2.4) и леммы 1.1 получим оценку

$$\|V_{xx}(x_i,t)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \alpha_7 \|\vec{q}\|^\theta_{L_p(0,\gamma)}\|V_t\|^{1-\theta}_{L_p(Q^\gamma)}\gamma^{1-\theta} \leq \alpha_8\|\vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)}\gamma^{1-\theta}. \tag{2.8}$$

Оценим второе слагаемое в (2.7). В силу теорем вложения имеем

$$\|U(x_i,t)V_x(x_i,t)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \alpha_9 \|U\|_{L_p(0,\gamma;W_p^1(G_{\delta_1}))}\|V_x\|_{L_\infty(Q^\gamma_{\delta_1})}.$$

Используем одну оценку, вытекающую из леммы 3.3 в [16], где взято $\delta = \sqrt{\gamma}$:

$$\|\nabla u\|_{C^{\lambda/2,\lambda,}(\overline{Q^{\gamma}_{\delta_1}})} \le c\gamma^{\beta_0}\|u\|_{W^{2,1}_q(Q^{\gamma}_{\delta_1})}, \quad \beta_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2p} - \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda \in [0, 1-3/p].$$

Фиксируем $\lambda \in (0, 1-3/p)$ и применим это неравенство к функции V_x. Имеем

$$\|V_x\|_{L_\infty(Q^{\gamma}_{\delta_1})} \le \|V_x\|_{C^{\lambda/2,\lambda,}(\overline{Q^{\gamma}_{\delta_1}})} \le c\gamma^{\beta_0}\|V_x\|_{W^{2,1}_q(Q^{\gamma}_{\delta_1})},$$

где постоянная c не зависит от γ. Используя неравенство (2.4), придем к неравенству

$$\|V_x\|_{L_\infty(Q^{\gamma}_{\delta_1})} \le \alpha_{10}\|\vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)}\gamma^{\beta_0}. \tag{2.9}$$

Окончательно из неравенств (2.7)–(2.9) получим оценку

$$\|R(\vec{q})\|_{L_p(0,\gamma)} \le \alpha_{11}\|\vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)}\gamma^{\beta}, \quad \beta = \min(\beta_0, 1-\theta). \tag{2.10}$$

Из этой оценки вытекает, что оператор R сжимающий, если выберем $\gamma < \gamma_0 = 1/(\alpha_{11})^{1/\beta}$. Возьмем, например, $\gamma_1 = \gamma_0/2$. По теореме о неподвижной точке уравнение (2.6) имеет единственное решение $\vec{q} \in L_p(0,\gamma_1)$. Чтобы доказать глобальную разрешимость, повторяем рассуждения на промежутках $[\gamma_0, 2\gamma_0]$, $[2\gamma_0, 3\gamma_0]$ и т. д., заметив при этом, что интервал разрешимости не увеличивается в силу линейности задачи, поскольку на каждом из этапов используем постоянные, которые не зависят от параметра γ. Тем самым устанавливаем разрешимость уравнения (2.6) на всем промежутке $[0, T_0]$. Используя на каждом из этапов оценки, вытекающие из теоремы о неподвижной точке, получим глобальную оценку

$$\|\vec{q}\|_{L_p(0,T_0)} \le c\|\vec{g}\|_{L_p(0,T_0)}. \tag{2.11}$$

Построим решение обратной задачи. Найдем функцию $V = L_0^{-1}g$, где функция g выражается через вектор $\vec{q} \in L_p(0,T_0)$ и, как уже показывали, в этом случае $g \in L_p(0,T_0)$. Тогда функция V обладает свойствами, указанными в теоремах 1.1, 1.2. Полагая в (2.1) $x = x_i$, придем к равенству

$$\psi_{0it} + U(x_i,t)V_x(x_i,t) - DV_{xx}(x_i,t) + (\varepsilon T^{-1} + \lambda)\psi_{0i} - \frac{\varepsilon}{T^2}\int\limits_0^t e^{-(T^{-1}+\lambda_s)(t-\tau)}\psi_{0i}(\tau)\,d\tau = g(x_i,t) = \sum_{j=1}^n q_j(t)f_j(x_i,t), \tag{2.12}$$

где $\psi_{0i} = V(x_i,t)$. Вычитая равенства (2.5) и (2.12), получим

$$v_{it} + (\varepsilon T^{-1} + \lambda)v_i(t) - \frac{\varepsilon}{T^2}\int\limits_0^t e^{-(T^{-1}+\lambda_s)(t-\tau)}v_i(\tau)\,d\tau = 0, \quad v_i(t) = \psi_{0i}(t) - \widetilde{\psi}_i(t). \tag{2.13}$$

По построению и в силу условий согласования $v_i(0) = \psi_{0i}(0) - \widetilde{\psi}_i(0) = 0$. Интегрируя (2.13), придем к интегральному уравнению

$$v_i(t) + (\varepsilon T^{-1} + \lambda)\int\limits_0^t v_i(\tau)\,d\tau - \frac{\varepsilon}{T^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{-(T^{-1}+\lambda_s)(\tau-\xi)}v_i(\xi)\,d\xi = 0. \tag{2.14}$$

Единственное решение этого уравнения есть тождественный нуль. Действительно, используя только неравенство Гёльдера, легко получить оценку

$$\|v_i\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c\gamma \|v_i\|_{L_p(0,\gamma)}, \tag{2.15}$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от γ. Отсюда вытекает, что $v_i = 0$ на промежутке $t < 1/c$. Повторяя рассуждения на последующих промежутках, придем к тому, что $v_i \equiv 0$. Таким образом, $V(x_i, t) = \widetilde{\psi}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. функция V удовлетворяет условиям переопределения. Используя оценки из теоремы 1.2 и (2.11), получим оценку для функции V, которая в сочетании с определением этой функции гарантирует оценку из утверждения теоремы 1.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bencala K. E., Walters R. A.* Simulation of solute transport in a mountain pool-and-riffle stream: A transient storage model // Water Resour. Res. 1983. V. 19, N 3. P. 718–724.
2. *Czernuszenko W., Rowinski P. M.* Properties of the dead-zone model of longitudinal dispersion in rivers // J. Hydraul. Res. 1997. V. 35, N 4. P. 491–504.
3. *Schmid B. H.* Persistence of skewness in longitudinal dispersion data: Can the dead zone model explain after all // J. Hydraul. Eng. 2002. V. 128, N 9. P. 848–854.
4. *Jonsson K., Johansson H., Wörman A.* Hyporheic exchange of reactive and conservative solutes in streams-tracer methodology and model interpretation // J. Hydrol. 2003. V. 278, N 1-4. P. 151–169.
5. *Elliott A. H., Brooks N. H.* Transfer of nonsorbing solutes to a streambed with bed forms: Theory // Water Resour. Res. 1997. V. 33, N 1. P. 123–136.
6. *Wörman A.* Comparison of models for transient storage of solutes in small streams // Water Resour. Res. 2000. V. 36, N 2. P. 455–468.
7. *Wörman A., Packman A. I., Johansson H., Jonsson K.* Effect of flow-induced exchange in hyporheic zones on longitudinal transport of solutes in streams and rivers // Water Resour. Res. 2002. V. 38, N 1. P. 2-1–2-15.
8. *Michalak A. M., Kitanidis P. K.* Estimation of historical groundwater contaminant distribution using the adjoint state method applied to geostatistical inverse modeling // Water Resour. Res. 2004. V. 40. P. W08302.
9. *Boano F., Revelli R., Ridolfi L.* Source identification in river pollution problems: A geostatistical approach // Water Resour. Res. 2005. V. 41. P. W07023.
10. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: VNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).
11. *Пятков С. Г., Самков М. Л.* О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 1. С. 155–177.
12. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
13. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2006. (Appl. Math. Sci.; V. 127).
14. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
15. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
16. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
17. *Korotkova E. M., Pyatkov S. G.* On some inverse problems for a linearized system of heat

and mass transfer // Sib. Adv. Math. 2015. V. 25, N 2. P. 110–123.

Статья поступила 20 сентября 2016 г.

Пятков Сергей Григорьевич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
s-pyatkov@ugrasu.ru, pyatkov@math.nsc.ru

Ротко Валерий Витальевич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
alyona.petrova393@gmail.com

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

UDC 517.95

RECOVERING A SOURCE FUNCTION IN A ONE–DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION WITH DEAD ZONES TAKING INTO ACCOUNT

S. G. Pyatkov and V. V. Rotko

Abstract. We examine the question of well-posedness in the Sobolev spaces of an inverse problem of determining a source function in a system comprising a parabolic equation and an ordinary differential equation. The overdetermination conditions are the values of concentration of an admixture at separate points. We prove existence and uniqueness of solutions to the problem.
Keywords: parabolic equation, inverse problem, heat-and-mass transfer, boundary value problem, source function.

REFERENCES

1. *Bencala K. E. and Walters R. A.* “Simulation of solute transport in a mountain pool-and-riffle stream: A transient storage model,” Water Resour. Res., **19**, No. 3, 718–724 (1983).
2. *Czernuszenko W. and Rowinski P. M.* “Properties of the dead-zone model of longitudinal dispersion in rivers,” J. Hydraul. Res., **35**, No. 4, 491–504 (1997).
3. *Schmid B. H.* “Persistence of skewness in longitudinal dispersion data: Can the dead zone model explain after all” J. Hydraul. Eng., **128**, No. 9, 848–854 (2002).
4. *Jonsson K., Johansson H., and Wörman A.* “Hyporheic exchange of reactive and conservative solutes in streams – tracer methodology and model interpretation,” J. Hydrol., **278**, No. 1–4, 153–171 (2003).
5. *Elliott A. H. and Brooks N. H.* “Transfer of nonsorbing solutes to a streambed with bed forms: Theory,” Water Resour. Res., **33**, No. 1, 123–136 (1997).
6. *Wörman A.* “Comparison of models for transient storage of solutes in small streams,” Water Resour. Res., **36**, No. 2, 455–468 (2000).
7. *Wörman A., Packman A. I., Johansson H., and Jonsson K.* “Effect of flow-induced exchange in hyporheic zones on longitudinal transport of solutes in streams and rivers,” Water Resour. Res., **38**, No. 1, 2-1–2-15 (2002).
8. *Michalak A. M. and Kitanidis P. K.* “Estimation of historical groundwater contaminant distribution using the adjoint state method applied to geostatistical inverse modeling,” Water Resour. Res., **40**, W08302 (2004).
9. *Boano F., Revelli R., and Ridolfi L.* “Source identification in river pollution problems: A geostatistical approach,” Water Resour. Res., **41**, W07023 (2005).
10. *Ivanchov M.*, Inverse Problems for Equations of Parabolic Type, VNTL Publ., Lviv (2003). (Math. Studies. Monogr. Ser.; V. 10).
11. *Pyatkov S. G. and Samkov M. L.* “On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations,” Sib. Adv. Math., **22**, No. 4, 287–302 (2012).
12. *Kozhanov A. I.*, Composite Type Equations and Inverse Problems, VSP, Utrecht (1999).
13. *Isakov V.*, Inverse Problems for Partial Differential Equations, Springer-Verl., Berlin (2006). (Appl. Math. Sci.; V. 127)
14. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A.*, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, Inc., New York (1999).

15. *Triebel H.*, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, Elsevier Sci. Publ., Amsterdam; New York; Oxford (1978).
16. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'tseva N. N.*, Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1967). (Transl. Math. Monogr.; V. 23).
17. *Korotkova E. M. and Pyatkov S. G.* "On some inverse problems for a linearized system of heat and mass transfer," Sib. Adv. Math., **25**, No. 2, 110–123 (2015).

Submitted September 16, 2016

Sergey Grigorievich Pyatkov
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansyisk 628012, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
`s-pyatkov@ugrasu.ru`, `pyatkov@math.nsc.ru`

Valery Vitalievich Rotko
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansyisk 628012, Russia
`v_rotko@ugrasu.ru`

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

УДК 517.9

РАЗРЕШАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ ЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО. СЕКТОРИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Е. А. Романова, В. Е. Федоров

Аннотация. Исследуется однозначная разрешимость задачи Коши для уравнения в банаховом пространстве с вырожденным оператором при дробной производной Капуто. Используются найденные ранее условия существования аналитического в секторе семейства разрешающих операторов такого уравнения, вырождающихся на ядре оператора при производной, а также вид разрешающих операторов. При выполнении этих условий показано существование единственного решения задачи Коши для исследуемого уравнения при начальных данных из дополнения к ядру оператора при производной, решение представлено с использованием разрешающих операторов. Полученные результаты использованы при изучении линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля дробного порядка по времени.

Ключевые слова: вырожденное эволюционное уравнение, дробная производная Капуто, аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов, задача Коши, начально-краевая задача, система уравнений в частных производных.

§ 1. Введение

Пусть $L : D_L \to \mathfrak{V}$, $M : D_M \to \mathfrak{V}$ — линейные замкнутые плотно определенные в банаховом пространстве $\mathfrak{U}$ операторы, действующие в банахово пространство $\mathfrak{V}$. Рассмотрим эволюционное уравнение дробного порядка

$$D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$, D_t^α — дробная производная Капуто. Предполагается выполнение условия вырожденности уравнения $\ker L \neq \{0\}$. В работе исследуется задача Коши

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

для уравнения (1). Здесь m — наименьшее целое число, не превосходимое числом α.

В [1] получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (2) для разрешенного относительно производной уравнения

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

с линейным замкнутым плотно определенным в $\mathfrak{U}$ оператором A в терминах семейств разрешающих операторов, представляющих собой обобщение полугрупп операторов. В частности, на оператор A получены необходимые и достаточные условия существования аналитических в секторе $\Sigma_{\theta_0} \equiv \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2,\ t \neq 0\}$ семейств разрешающих операторов уравнения (3), экспоненциально ограниченных в каждом меньшем подсекторе. Для класса операторов A, удовлетворяющих таким условиям, используется обозначение $\mathscr{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$.

В [2] эти результаты в некотором смысле обобщены на случай уравнения (1): определен класс пар операторов $\mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, такой, что при $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ уравнение (1) имеет аналитическое в секторе семейство разрешающих операторов и задача Коши для него однозначно разрешима. При этом отметим, что рассмотренный класс уравнений является слабо вырожденным — его подпространство вырождения совпадает с ядром $\ker L$, при этом оператор L не имеет M-присоединенных векторов, которые, вообще говоря, тоже лежат в подпространстве вырождения (в более простом случае (L, p)-ограниченного оператора M см. [3, 4]).

В данной работе некоторые результаты статьи [2] получили свое развитие — уточняется оценка экспоненциальной ограниченности на операторы разрешающего семейства уравнения (1) при $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, решение задачи Коши для него строится в явном виде. Полученные результаты используются при исследовании однозначной разрешимости начально-краевой задачи для линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля.

Условия существования, вообще говоря, сильно вырожденных семейств разрешающих операторов уравнения (1), аналитических в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси, получены в [3]. Эти условия были использованы для исследования соответствующего неоднородного уравнения в [4], для изучения однозначной разрешимости начально-краевых задач для систем уравнения Соболева и Осколкова в [5]. Некоторые классы полулинейных уравнений дробного и высокого порядков, линейная часть которых имеет вид (1) с (L, p)-ограниченным оператором M, разрешимость начальных задач и задач оптимального управления для них исследованы в работах М. В. Плехановой [6–9]. Обобщение понятия (L, p)-ограниченного оператора на случай локально выпуклых пространств используется в [10] для вырожденного эволюционного уравнения первого порядка и в [11] для уравнения (1). Различные типы разрешающих операторов для некоторых дробных дифференциальных уравнений, в том числе вырожденных, в секвенциально полных локально выпуклых пространствах рассмотрены в работах М. Костича и его соавторов (см. [11–13] и библиографию в них). Во многих статьях [14–17] уравнения вида (1), не разрешенные относительно дробной производной, рассматриваются при условии существования обратного оператора $L^{-1} : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$, который предполагается непрерывным или даже компактным. В них получены интересные результаты, но они не касаются вырожденных эволюционных уравнений (при $\ker L \neq \{0\}$).

В § 2 приведены используемые далее результаты работы [1] об уравнении (3) и статьи [2] для (1). Кроме того, в этом параграфе проведено некоторое дополнительное исследование семейств операторов, построенных в [2]. Третий параграф содержит формулировки и доказательства двух теорем об однозначной разрешимости задачи (1), (2). В отличие от [2] решение этой задачи здесь построено в явном виде с использованием результатов предыдущего параграфа. В § 4 результаты о задаче Коши в банаховом пространстве использованы при исследовании начально-краевой задачи для одной системы уравнений в частных производных, не разрешимой относительно дробной производной по времени.

§ 2. Аналитические в секторе разрешающие операторы вырожденного дробного эволюционного уравнения

При $\beta > 0$ обозначим $g_\beta(t) = t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$ для $t > 0$,

$$J_t^\beta h(t) = (g_\beta * h)(t) = \int\limits_0^t g_\beta(t-s)h(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1}h(s)\,ds.$$

Пусть $\alpha > 0$, $m-1 < \alpha \le m$, D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Капуто [18], называемая часто также *производной Герасимова — Капуто* [19], т. е.

$$D_t^\alpha h(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(0)g_{k+1}(t)\right).$$

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, обозначим через $\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{V}$. Множество всех линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в $\mathfrak{U}$, действующих в пространство $\mathfrak{V}$, обозначим через $\mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Если $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}$, то соответствующие обозначения примут вид $\mathscr{L}(\mathfrak{U})$ и $\mathscr{C}l(\mathfrak{U})$. Обозначим также $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, D_A — область определения оператора A, снабженная нормой его графика.

Функция $u \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D_A) \cap C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$, для которой

$$g_{m-\alpha} * \left(u - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0)g_{k+1}\right) \in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}),$$

называется *решением уравнения* (3), если при всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ справедливо равенство (3).

Множество операторов $\{Z(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ называется *семейством разрешающих операторов уравнения* (3), если

(i) оператор-функция $Z(\cdot)$ сильно непрерывна на $\overline{\mathbb{R}}_+$, $Z(0) = I$;

(ii) $Z(t)[D_A] \subset D_A$, $Z(t)Au_0 = AZ(t)u_0$ при каждом $u_0 \in D_A$ для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(iii) для любого $u_0 \in D_A$ функция $Z(t)u_0$ является решением задачи Коши $u(0) = u_0$, $u^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, для уравнения (3).

Следуя [1], будем говорить, что линейный замкнутый плотно определенный в $\mathfrak{U}$ оператор A *принадлежит классу* $\mathscr{A}^{\alpha}(\theta_0, a_0)$ при $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, если существует разрешающее семейство операторов $\{Z(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ уравнения (3), аналитически продолжимое в сектор $\Sigma_{\theta_0} \equiv \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2,\ t \neq 0\}$, и при каждых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая константа $C(a, \theta)$, что $\|Z(t)\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} \leq C(a,\theta)e^{a\mathrm{Re}t}$ для всех $t \in \Sigma_\theta$. Согласно теореме 2.14 в [1] (см. также более общую теорему I.2.1 в [20] для эволюционных интегральных уравнений) $A \in \mathscr{A}^{\alpha}(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in (0, 2)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

(i) при всех $\lambda \in S_{a_0,\theta_0} \equiv \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) при любых $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такая константа $K = K(a,\theta) > 0$, что для всех $\mu \in S_{a,\theta}$

$$\|(\mu^\alpha I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} \leq \frac{K(a,\theta)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu - a)|}.$$

Показано также, что оператор $A \in \mathscr{A}^{\alpha}(\theta_0, a_0)$ при $\alpha > 2$ ограничен на пространстве $\mathscr{U}$.

Пусть операторы $L, M \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ имеют области определения $D_L, D_M \subset \mathfrak{U}$, $\ker L \neq \{0\}$. Множество точек $\mu \in \mathbb{C}$ таких, что оператор $\mu L - M : D_L \cap D_M \to \mathfrak{V}$ инъективен и $(\mu L - M)^{-1} L \in \mathscr{L}(\mathfrak{U})$, $L(\mu L - M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V})$, называется L-*резольвентным множеством* $\rho^L(M)$ *оператора* M. Обозначим

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}.$$

Определение 1. Пусть $\alpha > 0$. Будем говорить, что пара операторов (L, M) *принадлежит классу* $\mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если

(i) существуют $a_0 \geq 0$ и $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ такие, что для всех $\lambda \in S_{a_0,\theta_0}$ выполняется $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при любых $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такая константа $K = K(a,\theta) > 0$, что для всех $\mu \in S_{a,\theta}$

$$\max\left\{\left\|R^L_{\mu^\alpha}(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})}, \left\|L^L_{\mu^\alpha}(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V})}\right\} \leq \frac{K(a,\theta)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu - a)|}.$$

Замечание 1. Если при $\alpha \in (0, 2)$ существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})$, то $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ тогда и только тогда, когда $L^{-1}M \in \mathscr{A}^{\alpha}(\theta_0, a_0)$ и $ML^{-1} \in \mathscr{A}^{\alpha}(\theta_0, a_0)$.

Нетрудно показать, что $\ker R^L_\mu(M) = \ker L$, $\mathrm{im}\, R^L_\mu(M)$, $\ker L^L_\mu(M)$, $\mathrm{im}\, L^L_\mu(M)$ не зависят от $\mu \in \rho^L(M)$. Введем обозначения $\ker R^L_\mu(M) = \mathfrak{U}^0$, $\ker L^L_\mu(M) = \mathfrak{V}^0$. Через $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{V}^1$) обозначим замыкание линеала $\mathrm{im}\, R^L_\mu(M)$ ($\mathrm{im}\, L^L_\mu(M)$) в норме пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{V}$). Через L_k (M_k) будет обозначаться сужение оператора L (M) на $D_{L_k} \equiv D_L \cap \mathfrak{U}^k$ ($D_{M_k} \equiv D_M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1. *Пусть* $(L,M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$. *Тогда при* $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\Gamma = \partial S_{a_0,\theta_0} + 1$ *семейства операторов*

$$\left\{U_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \mu^{\alpha-\beta} R^L_{\mu^\alpha}(M) e^{\mu t}\, d\mu \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}) : t \in \mathbb{R}_+\right\},$$

$$\left\{V_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \mu^{\alpha-\beta} L^L_{\mu^\alpha}(M) e^{\mu t}\, d\mu \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}) : t \in \mathbb{R}_+\right\}$$

допускают аналитическое продолжение в сектор Σ_{θ_0}. *При любых* $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$ *существует такое* $C_{n,\beta} = C_{n,\beta}(a,\theta)$, *что для всех* $\tau \in \Sigma_\theta$

$$\left\|U^{(n)}_{\alpha,\beta}(\tau)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} \le \frac{C_{n,\beta}(a,\theta)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{|\tau|^{n+1-\beta}}, \quad \left\|V^{(n)}_{\alpha,\beta}(\tau)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V})} \le \frac{C_{n,\beta}(a,\theta)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{|\tau|^{n+1-\beta}}. \qquad (4)$$

При этом

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}U_{\alpha,\beta} = U_{\alpha+1,\beta}, \quad \frac{d}{dt}V_{\alpha,\beta} = V_{\alpha+1,\beta}, \\ J^k_t U_{\alpha,\beta} = U_{\alpha,\beta+k}, \quad J^k_t V_{\alpha,\beta} = V_{\alpha,\beta+k}, \quad k \in \mathbb{N},\ \beta > 0. \end{gathered} \qquad (5)$$

Доказательство. Основная часть теоремы доказана в [2]. Уточним лишь оценки (4), которые в [2] имеют несколько другой вид, и покажем выполнение равенств (5).

Возьмем контур

$$\Gamma = \Gamma_\varepsilon = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = \varepsilon - |x| - ix\,\mathrm{tg}\,\theta_0,\ x \in \mathbb{R}\}, \quad \varepsilon > a_0.$$

В [2] показано, что от выбора $\varepsilon > a$ значения рассматриваемых интегралов не меняются, поэтому можно выбрать $\varepsilon = a(1 + 2\sin^{-1}\theta_0)$. При $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\delta = \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta)$, $k \in \mathbb{N}_0$ выберем также контур

$$\Gamma_2 = \left\{\nu \in \mathbb{C} : \nu = \varepsilon - |x| - ix\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Для любого $\tau \in \Sigma_\theta$ построим контур $\Gamma_\tau = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \nu\tau^{-1},\ \nu \in \Gamma_2\}$. Легко увидеть, что $\Gamma_\tau \subset S_{a,\theta_1}$, где $\theta_1 = \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) \in (\pi/2, \theta_0)$. Действительно, при $\mu \in \Gamma_\tau$

$$|\arg(\mu - a)| = |\arg(\nu\tau^{-1})| = |\arg\nu - \arg\tau| \le |\arg\nu| + |\arg\tau| < \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta) + \theta = \theta_1.$$

Нетрудно непосредственно показать сходимость интегралов

$$\int\limits_{\Gamma_\tau} \mu^{k+\alpha-\beta} R^L_{\mu^\alpha}(M) e^{\mu\tau}\, d\mu = \int\limits_{\Gamma} \mu^{k+\alpha-\beta} R^L_{\mu^\alpha}(M) e^{\mu\tau}\, d\mu = 2\pi i U^{(k)}_{\alpha,\beta}(\tau),$$

так как $\mu\tau = a\tau + \nu$, $|\arg\nu| = \pi/2 + \delta \in (\pi/2, \pi)$. Равенство интегралов в этом случае следует из аналитичности подынтегральных выражений на множестве S_{a_0,θ_0}.

Для $\beta \le k+1$

$$\left\|U^{(k)}_{\alpha,\beta}(\tau)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} \le \frac{K(a,\theta_1)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\tau}|\mu|^{k+1-\beta}\frac{|e^{\mu\tau}|}{|\mu-a|}\,|d\mu|$$

$$\le \frac{K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\tau-a}(|\lambda|+a)^{k+1-\beta}\frac{|e^{\lambda\tau}|}{|\lambda|}\,|d\lambda|$$

$$\le \frac{K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\left(1+\frac{a}{(\varepsilon-a)\sin\theta_0}\right)^{k+1-\beta}\int\limits_{\Gamma_\tau-a}|\lambda|^{k-\beta}|e^{\lambda\tau}|\,|d\lambda|$$

$$= \frac{(3/2)^{k+1-\beta}K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\tau-a}|\lambda|^{k-\beta}|e^{\lambda\tau}|\,|d\lambda|.$$

В случае $\beta > k+1$ имеем

$$\left\|U^{(k)}_{\alpha,\beta}(\tau)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} \le \frac{K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\tau-a}(|\lambda|-a)^{k+1-\beta}\frac{|e^{\lambda\tau}|}{|\lambda|}\,|d\lambda|$$

$$\le \frac{K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\left(1-\frac{a}{(\varepsilon-a)\sin\theta_0}\right)^{k+1-\beta}\int\limits_{\Gamma_\tau-a}|\lambda|^{k-\beta}|e^{\lambda\tau}|\,|d\lambda|$$

$$= \frac{2^{\beta-k-1}K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\tau-a}|\lambda|^{k-\beta}|e^{\lambda\tau}|\,|d\lambda|.$$

Сделаем замену переменной $\lambda = \nu\tau^{-1}$, тогда правые части неравенств примут вид

$$\frac{b^{k+1-\beta}K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi|\tau|^{k+1-\beta}}\int\limits_{\Gamma_2}|\nu|^{k-\beta}|e^{\nu}|\,|d\nu| = \frac{C_{k,\beta}(a,\theta)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{|\tau|^{k+1-\beta}},$$

где

$$C_{k,\beta}(a,\theta) = \frac{b^{k+1-\beta}K(a,\theta_1)}{2\pi}\left(1-\frac{a}{\varepsilon\cos\theta_0}\right)^{k+1-\beta}\int\limits_{\Gamma_2}|\nu|^{k-\beta}|e^{\nu}|\,|d\nu|,$$

$b = 3/2$ при $\beta \le k+1$, $b = 1/2$ в противном случае.

Для доказательства равенств (5) запишем при $k \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}e^{\mu s}\,ds = -\frac{t^{k-1}}{(k-1)!\mu} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{k-2}}{(k-2)!\mu}e^{\mu s}\,ds$$

$$= \dots = -\sum_{l=1}^{k-1}\frac{t^{k-l}}{(k-l)!\mu^l} + \int\limits_0^t \frac{e^{\mu s}}{\mu^{k-1}}\,ds = -\sum_{l=1}^{k}\frac{t^{k-l}}{(k-l)!\mu^l} + \frac{e^{\mu t}}{\mu^k},$$

поэтому при $\beta > 0$

$$J^k_t U_{\alpha,\beta}(t) = U_{\alpha,\beta+k}(t) - \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{k}\frac{t^{k-l}}{(k-l)!}\int\limits_{\Gamma}\mu^{\alpha-\beta-l}R^L_{\mu^\alpha}(M)\,d\mu. \qquad (6)$$

Последние интегралы сходятся, ибо норма подынтегральных выражений ограничивается сверху функцией $|\mu|^{-\beta-1}$. Проинтегрируем функции $\mu^{\alpha-\beta-l}R^L_{\mu^\alpha}(M)$ по части Γ, лежащей внутри круга $B_R(\varepsilon) \equiv \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \varepsilon| < R\}$, дополненной правой частью Γ_R окружности $\partial B_R(\varepsilon)$ до замкнутого контура, и получим нуль по теореме Коши. При этом интеграл по части Γ, лежащей вне круга $\partial B_R(\varepsilon)$, стремится к нулю при $R \to \infty$ в силу сходимости интегралов из (6) и

$$\left\| \int\limits_{\Gamma_R} \mu^{\alpha-\beta-l} R_{\mu^\alpha}(A)\, d\mu \right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} \leq \frac{2\pi Rc}{R^{\beta+l}} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

В результате

$$\int\limits_{\Gamma} \mu^{\alpha-\beta-l} R^L_{\mu^\alpha}(M)\, d\mu = 0, \quad l \in \mathbb{N},\ \beta > 0,$$

и равенства (5) доказаны.

Аналогичные утверждения для операторов $V_{\alpha,\beta}(t)$ доказываются таким же образом. $\square$

Теорема 2 [2]. *Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ рефлексивны, пара операторов (L, M) принадлежит $\mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Тогда*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$;

(ii) *проектор P (Q) на подпространство $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{V}^1)$ вдоль подпространства $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{V}^0)$ имеет вид $P = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nR^L_n(M)$ $(Q = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nL^L_n(M))$;*

(iii) $L_0 = 0$, $M_0 \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{V}^0)$, $L_1, M_1 \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{V}^1)$;

(iv) *существуют обратные операторы $L_1^{-1} \in \mathscr{C}l(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{V}^0)$;*

(v) *при всех $t > 0$*

$$U_{\alpha,\beta}(t) = U^1_{\alpha,\beta}(t)P, \quad \mathfrak{U}^0 \subset \ker U_{\alpha,\beta}(t), \quad \operatorname{im} U_{\alpha,\beta}(t) \subset \mathfrak{U}^1,$$

$$V_{\alpha,\beta}(t) = V^1_{\alpha,\beta}(t)Q, \quad \mathfrak{V}^0 \subset \ker V_{\alpha,\beta}(t), \quad \operatorname{im} V_{\alpha,\beta}(t) \subset \mathfrak{V}^1,$$

где $U^1_{\alpha,\beta}(t) = U_{\alpha,\beta}(t)|_{\mathfrak{U}^1}$, $V^1_{\alpha,\beta}(t) = V_{\alpha,\beta}(t)|_{\mathfrak{V}^1}$.

Введем обозначения $S = L_1^{-1}M_1 : D_S \to \mathfrak{U}^1$, $D_S = \{u \in D_{M_1} : M_1 u \in \operatorname{im} L_1\}$; $T = M_1 L_1^{-1} : D_T \to \mathfrak{V}^1$, $D_T = \{v \in \operatorname{im} L_1 : L_1^{-1} v \in D_{M_1}\}$.

Теорема 3 [2]. *Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ рефлексивны, $\alpha \in (0, 2)$, $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$.*

(i) *Если $L_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{V}^1)$ или $M_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{V}^1)$, то $S \in \mathscr{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ и семейство операторов $\{U^1_{\alpha,1}(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ разрешающее для уравнения $D^\alpha_t u(t) = Su(t)$.*

(ii) *Если $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$, то $T \in \mathscr{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ и семейство операторов $\{V^1_{\alpha,1}(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ разрешающее для уравнения $D^\alpha_t v(t) = Tv(t)$.*

Следствие 1. *Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ рефлексивны, $\alpha \in (0, 2)$, $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$.*

(i) *Если* $L_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$ *или* $M_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$, *то существуют пределы*

$$s\text{-}\lim_{t\to 0+} D_t^k U_{\alpha,k+1}(t) = P, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) *Если* $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$, *то существуют пределы*

$$s\text{-}\lim_{t\to 0+} D_t^k V_{\alpha,k+1}(t) = Q, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Доказательство. (i) Существование предела $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} U_{\alpha,1}(t) = P$ доказано в [2]. Возьмем $k \in \mathbb{N}$, тогда в силу формул (5)

$$s\text{-}\lim_{t\to 0+} D_t^k U_{\alpha,k+1}(t) = s\text{-}\lim_{t\to 0+} D_t^k J_t^k U_{\alpha,1}(t) = s\text{-}\lim_{t\to 0+} U_{\alpha,1}(t) = P.$$

Утверждение (ii) доказывается аналогично. □

Следствие 2. *Пусть банаховы пространства* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$ *рефлексивны,* $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\alpha\theta_0 > \pi$, $L_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$. *Тогда оператор* M $(L, 0)$*-ограничен* [3, 4].

Доказательство. Условие $L_1 \in (\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$ с необходимостью используется для определения (L, σ)-ограниченности оператора M [3, 4]. Поэтому из теоремы 2 и условия $\alpha\theta_0 > \pi$ вытекает, что для всех $\mu \neq a_0$ оператор

$$(\mu L - M)^{-1} = (\mu L_1 - M_1)^{-1}Q - M_0^{-1}(I - Q) = L_1^{-1}L_\mu^{L_1}(M_1)Q - M_0^{-1}(I - Q)$$

непрерывен как разность двух непрерывных операторов. □

Замечание 2. Таким образом, случай $\alpha\theta_0 > \pi$, в частности $\alpha \geq 2$, может представлять интерес только если $L_1 : \mathfrak{U}^1 \to \mathfrak{V}^1$ не является гомеоморфизмом, поскольку уравнение (1) с (L, p)-ограниченным оператором M исследовано в [3, 4].

§ 3. Задача Коши для вырожденного дробного эволюционного уравнения в банаховом пространстве

При $\alpha \in (0, 2)$ рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t), \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Его *решением* назовем функцию $u \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D_L \cap D_M)$, для которой

$$Lu \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{V}), \quad g_{m-\alpha} * \left(Lu - \sum_{k=0}^{m-1}(Lu)^{(k)}(0)g_{k+1}\right) \in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{V})$$

и для всех $t \geq 0$ справедливо равенство (7). *Решением задачи Коши*

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, \ldots, m-1, \tag{8}$$

для уравнения (7) называется решение уравнения $u \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$, для которого выполняются условия (8).

Замечание 3. Очевидно, что $m = 1$ при $\alpha \in (0, 1]$, $m = 2$ для $\alpha \in (1, 2)$.

Теорема 4. *Пусть банаховы пространства* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$ *рефлексивны,* $\alpha \in (0,2)$, $(L,M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$ *или* $M_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$, $u_k \in D_{L_1^{-1}M_1}$, $k = 0,\ldots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (7), (8), *при этом оно имеет вид*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} U_{\alpha,k+1}(t)u_k. \tag{9}$$

Доказательство. Положим $u^0(t) \equiv (I-P)u(t)$, $u^1(t) \equiv Pu(t)$. В силу теоремы 2 уравнение (7) может быть редуцировано к системе двух уравнений: $0 = u^0(t)$ и

$$D_t^\alpha u^1(t) = Su^1(t). \tag{10}$$

В силу первого из уравнений u_k должны принадлежать $\mathfrak{U}^1$, $k = 0,\ldots,m-1$. Если $L_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$ или $M_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$, то по теореме 3 $S \in \mathscr{A}^\alpha(\theta_0,a_0)$, поэтому существует единственное решение задачи Коши $u^{1(k)}(0) = u_k \in D_S$, $k = 0,\ldots,m-1$, для уравнения (10), и оно имеет вид

$$u^1(t) = \sum_{k=0}^{m-1} J_t^k U_{\alpha,1}(t)u_k = \sum_{k=0}^{m-1} U_{\alpha,k+1}(t)u_k. \quad \square$$

Теорема 5. *Пусть банаховы пространства* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$ *рефлексивны,* $\alpha \in (0,2)$, $(L,M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$, $u_k \in D_{M_1}$, $k = 0,\ldots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (7), (8), *при этом оно имеет вид* (9).

Доказательство. Если $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$, вместо уравнения (10) будет получено уравнение

$$D_t^\alpha v^1(t) = Tv^1(t), \tag{11}$$

где $v(t) = L_1u^1(t)$. По теореме 3 $T \in \mathscr{A}^\alpha(\theta_0,a_0)$, поэтому существует единственное решение задачи Коши $v^{(k)}(0) = L_1u_k \in D_T$, $k = 0,\ldots,m-1$, для уравнения (11). Ее решение имеет вид

$$v(t) = \sum_{k=0}^{m-1} J_t^k V_{\alpha,1}L_1u_k = \sum_{k=0}^{m-1} V_{\alpha,k+1}L_1u_k = L_1\sum_{k=0}^{m-1} U_{\alpha,k+1}u_k$$

в силу очевидного равенства $LU_{\alpha,\beta}(t) = V_{\alpha,\beta}(t)L$. Следовательно,

$$u(t) = u^1(t) = L_1^{-1}v(t) = \sum_{k=0}^{m-1} U_{\alpha,k+1}u_k. \quad \square$$

§ 4. Линеаризованная система уравнений фазового поля дробного порядка по времени

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x,0) = v_k(x), \quad \frac{\partial^k w}{\partial t^k}(x,0) = w_k(x), \quad x \in \Omega,\ k = 0,\ldots,m-1, \tag{12}$$

$$\theta v(x,t)+(1-\theta)\frac{\partial v}{\partial n}(x,t)=\theta w(x,t)+(1-\theta)\frac{\partial w}{\partial n}(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{13}$$

$$D_t^\alpha v(x,t)+\nu D_t^\alpha w(x,t)=\kappa\Delta v(x,t),\quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{14}$$

$$\Delta w(x,t)+\beta w(x,t)+\gamma v(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+. \tag{15}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\kappa>0$, $\beta,\gamma,\nu\in\mathbb{R}$, $v=v(x,t)$, $w=w(x,t)$ — неизвестные функции.

Замечание 4. В случае $\alpha=1$ система уравнений (14), (15) представляет собой линеаризацию квазистационарной системы уравнений фазового поля, описывающей в линейном приближении фазовые переходы первого рода в рамках мезоскопической теории [21, 22].

Пусть оператор $A:D_A\to L_2(\Omega)$ имеет область определения $D_A=H_0^2(\Omega)\equiv\{z\in H^2(\Omega):z(x)=0,\ x\in\partial\Omega\}\subset L_2(\Omega)$, $Az=\Delta z$ при $z\in H_0^2(\Omega)$. Через $\{\lambda_k\}$ обозначим собственные значения оператора A, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности. Ортонормированная система соответствующих собственных функций $\{\varphi_k\}$, как известно, образует базис в $L_2(\Omega)$.

Положим $\mathfrak{U}=\mathfrak{V}=(L_2(\Omega))^2$, $D_M=\left(H_0^2(\Omega)\right)^2$,

$$L=\begin{pmatrix} I & \nu I\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}),\quad M=\begin{pmatrix}\kappa A & \mathbb{O}\\ \gamma I & \beta I+A\end{pmatrix}\in\mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V}). \tag{16}$$

Лемма 1 [2]. *Пусть* $\alpha>1$,

$$\exists\theta_1\in(\pi/2,\pi)\ \exists a_1\geq 0\ \forall\mu\in S_{a_1,\theta_1}\quad \mu^\alpha\in\rho^L(M),$$

$$\exists C_1>0\ \forall\mu\in S_{a_1,\theta_1}\quad \max\left\{\left\|R^L_{\mu^\alpha}(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})},\left\|L^L_{\mu^\alpha}(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V})}\right\}\leq\frac{C_1}{|\mu^\alpha-a_1|}.$$

Тогда $(L,M)\in\mathscr{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$ *при некоторых* $\theta_0\in(\pi/2,\theta_1)$, $a_0\geq a_1$, $a_0>1$.

Лемма 2 [2]. *Пусть* $\alpha\in(0,1)$,

$$\exists\theta_1\in(\pi/2,\pi)\ \exists a_0\in[0,1)\ \forall\mu\in S_{a_0,\theta_1}\quad \mu^\alpha\in\rho^L(M),$$

$$\exists C_1>0\ \forall\mu\in S_{a_0,\theta_1}\quad \max\left\{\left\|R^L_{\mu^\alpha}(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})},\left\|L^L_{\mu^\alpha}(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V})}\right\}\leq\frac{C_1}{|\mu^\alpha-a_0|}.$$

Тогда $(L,M)\in\mathscr{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$ *для некоторого* $\theta_0\in(\pi/2,\theta_1)$.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha\in(0,2)$, $\kappa>0$, $\beta,\gamma,\nu,\theta\in\mathbb{R}$, $\gamma\nu-\beta\notin\sigma(A)$, *при* $\alpha\in(0,1)$

$$\max\left\{\frac{\kappa\lambda_k(\beta+\lambda_k)}{\beta-\gamma\nu+\lambda_k}:k\in\mathbb{N}\right\}<1, \tag{17}$$

операторы L *и* M *определены формулами* (16). *Тогда* $(L,M)\in\mathscr{H}_\alpha(a_0,\theta_0)$ *при некоторых* $a_0\geq 0$, $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$, *проекторы имеют вид*

$$P=\begin{pmatrix}(\beta+\Delta)(\beta-\gamma\nu+\Delta)^{-1} & \nu(\beta+\Delta)(\beta-\gamma\nu+\Delta)^{-1}\\ -\gamma(\beta-\gamma\nu+\Delta)^{-1} & -\gamma\nu(\beta-\gamma\nu+\Delta)^{-1}\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} I & \kappa\nu\Delta(\beta-\gamma\nu+\Delta)^{-1}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пространства $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = (L_2(\Omega))^2$ гильбертовы, а значит, рефлексивны. Возьмем $\alpha \in [1,2)$, $\delta \in (0, \pi(1/\alpha - 1/2))$, $\theta_1 = \pi/2 + \delta$, $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\mu^\alpha L - M = \begin{pmatrix} \mu^\alpha I - \kappa A & \mu^\alpha \nu I \\ -\gamma I & -\beta I - A \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\delta_k = \frac{\kappa\lambda_k(\beta+\lambda_k)}{\beta - \gamma\nu + \lambda_k} \in \mathbb{R},$$

тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = -\infty$, так как $\kappa > 0$. Пусть $a_1 = \max\{\delta_k : k \in \mathbb{N}\}$, тогда при $\mu \in S_{a_1,\theta_1}$ непрерывны операторы

$$(\mu^\alpha L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\beta+\lambda_k}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} & \frac{\mu^\alpha\nu}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} \\ \frac{-\gamma}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} & \frac{-\mu^\alpha+\kappa\lambda_k}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} \end{pmatrix} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

$$R^L_{\mu^\alpha}(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\beta+\lambda_k}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} & \frac{(\beta+\lambda_k)\nu}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} \\ \frac{-\gamma}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} & \frac{-\gamma\nu}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} \end{pmatrix} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

$$L^L_{\mu^\alpha}(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu^\alpha-\delta_k} & \frac{\kappa\nu\lambda_k}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, при этом

$$\max\left\{\left\|R^L_{\mu^\alpha}(M)\right\|_{\mathscr{L}((L_2(\Omega))^2)}, \left\|L^L_{\mu^\alpha}(M)\right\|_{\mathscr{L}((L_2(\Omega))^2)}\right\} \le \frac{C_1}{|\mu^\alpha - a_1|},$$

где можно взять

$$C_1 = \max\left\{1, \max\{1,|\nu|\}\max_{k\in\mathbb{N}}\left\{\left|\frac{\beta+\lambda_k}{\beta-\gamma\nu+\lambda_k}\right|, \left|\frac{\gamma}{\beta-\gamma\nu+\lambda_k}\right|, \left|\frac{\kappa\nu\lambda_k}{\beta-\gamma\nu+\lambda_k}\right|\right\}\right\}.$$

Если $\alpha = 1$, то $(L,M) \in \mathscr{H}_1(a_1,\theta_1)$. В случае $\alpha \in (1,2)$ будет $(L,M) \in \mathscr{H}_\alpha(a_0,\theta_0)$ при некоторых $a_0 \ge a_1$, $a_0 > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$ в силу леммы 1.

Для $\alpha \in (0,1)$ предыдущие рассуждения справедливы для любого $\theta_1 \in (\pi/2,\pi)$ и $(L,M) \in \mathscr{H}_\alpha(0,\theta_0)$ при некотором $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$ согласно лемме 2 при выполнении дополнительного условия (17).

Формулы для проекторов могут быть легко найдены с использованием теоремы 2(ii). $\square$

Замечание 5. Нетрудно показать, что предыдущая теорема справедлива и при $\kappa, \beta, \gamma, \nu \in \mathbb{C}$, если $\operatorname{Re}\kappa > 0$.

Из вида проекторов P, Q следует, что при $\gamma \ne 0$

$$\mathfrak{U}^0 = \ker P = \{(-\nu z, z) : z \in L_2(\Omega)\},$$

$$\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P = \{(-\gamma^{-1}(\beta+\Delta)z, z) : z \in H_0^2(\Omega)\},$$

$$\mathfrak{V}^0 = \ker Q = \{(-\kappa\nu\Delta(\beta-\gamma\nu+\Delta)^{-1}z, z) : z \in L_2(\Omega)\},$$

$$\mathfrak{V}^1 = \operatorname{im} Q = L_2(\Omega) \times \{0\}.$$

При $\gamma = 0$
$$\mathfrak{U}^1 = L_2(\Omega) \times \{0\}.$$

При $\gamma \neq 0$ очевидно, что
$$L_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{V}^1), \quad M_1 \notin \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{V}^1), \quad L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1),$$
поскольку ему соответствует оператор $-\gamma(\beta - \gamma\nu + A)^{-1}$. Только при $\kappa \neq 0$, $0, -\beta \notin \sigma(A)$ существует оператор $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$ и ему соответствует оператор $-\kappa^{-1}\gamma A^{-1}(\beta + A)^{-1}$. При $\gamma = 0$ отличие в том, что $L_1^{-1} = I \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$, а $M_1^{-1} = \kappa^{-1}A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$ при $\kappa \neq 0$, $0 \notin \sigma(A)$.

Теорема 6. *Пусть $\kappa > 0$, $\beta, \nu \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\gamma\nu - \beta \notin \sigma(A)$, $w_k \in H_0^2(\Omega)$, $v_k = -\gamma^{-1}(\beta + \Delta)w_k \in H_0^2(\Omega)$, $k = 0, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи* (12)–(15).

Доказательство. Как отмечено выше, в условиях данной теоремы оператор L_1^{-1} принадлежит $\mathscr{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$, при этом $(v_k, w_k) \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$. По теореме 5 получим требуемое. $\square$

Теорема 7. *Пусть $\kappa > 0$, $\beta, \nu \in \mathbb{R}$, $\gamma = 0$, $-\beta \notin \sigma(A)$, $v_k \in H_0^2(\Omega)$, $w_k = 0$, $k = 0, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи* (12)–(15).

Доказательство. В данной ситуации также $(v_k, w_k) \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$ и из теоремы 5 следует существование единственного решения. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces. PhD thesis. Eindhoven Univ. Technology: Univ. Press Facilities, 2001.
2. *Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А.* Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2016. Т. 16, №2. С. 93–107.
3. *Федоров В. Е., Гордиевских Д. М.* Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени // Изв. вузов. Математика. 2015. №1. С. 71–83.
4. *Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Плеханова М. В.* Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, №10. С. 1367–1375.
5. *Гордиевских Д. М., Федоров В. Е.* Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2015. Т. 12. С. 12–22.
6. *Плеханова М. В.* Квазилинейные уравнения, не разрешимые относительно старшей производной по времени // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, №4. С. 909–921.
7. *Plekhanova M. V.* Optimal control for quasilinear degenerate systems of higher order // J. Math. Sci. 2016. V. 219, N 2. P. 236–244.
8. *Plekhanova M. V.* Strong solutions of quasilinear equations in Banach spaces not solvable with respect to the highest-order derivative // Discrete Continuous Dyn. Syst. Ser. S. 2016. V. 9, N 3. P. 833–847.
9. *Plekhanova M. V.* Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations // J. Comput. Appl. Math. 2017. V. 312. P. 39–46.
10. *Федоров В. Е.* Сильно голоморфные группы линейных уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, №5. С. 702–712.

11. *Костич М., Федоров В. Е.* Вырожденные дробные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах с σ-регулярной парой операторов // Уфим. мат. журн. 2016. Т. 8, №4. С. 100–113.

12. *Kostić M.* Abstract time-fractional equations: existence and growth of solutions // Fract. Calc. Appl. Anal. 2014. V. 14, N 2. P. 301–316.

13. *Kostić M., Li C.-G., Li M.* Abstract multi-term fractional differential equations // Kragujevac J. Math. 2014. V. 38, N 1. P. 51–71.

14. *Li F., Liang J., Xu H. K.* Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 391, N 2. P. 510–525.

15. *Wang J., Fečkan M., Zhou Y.* Controllability of Sobolev type fractional evolution systems // Dyn. Partial Differ. Equ. 2014. V. 11. P. 71–87.

16. *Debbouche A., Nieto J. J.* Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls // Appl. Math. Comput. 2014. V. 245, N C. P. 74–85.

17. *Debbouche A., Torres Delfim F. M.* Sobolev type fractional dynamic equations and optimal multi-integral controls with fractional nonlocal conditions // Fract. Calc. Appl. Anal. 2015. V. 18, N 1. P. 95–121.

18. *Caputo M.* Linear Model of Dissipation Whose Q is Almost Frequancy Independent. II // Geophys. J. R. Astronom. Soc. 1967. V. 13. P. 529–539.

19. *Герасимов А. Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12, вып. 3. С. 251–259.

20. *Prüss J.* Evolutionary integral equations and applications. Basel: Springer-Verl., 1993.

21. *Плотников П. И., Клепачева А. В.* Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, №3. С. 651–669.

22. *Плотников П. И., Старовойтов В. Н.* Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, №3. С. 461–471.

Статья поступила 18 сентября 2016 г.

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский гос. университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Шадринский гос. педагогический университет,
ул. Карла Либкнехта, 3, Шадринск 641870, Курганской обл.
kar@csu.ru

Романова Елена Анатольевна
Челябинский гос. университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001
linux_21@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

UDC 517.95

RESOLVING OPERATORS OF A LINEAR DEGENERATE EVOLUTION EQUATION WITH CAPUTO DERIVATIVE. THE SECTORIAL CASE

E. A. Romanova and V. E. Fedorov

Abstract. Unique solvability of the Cauchy problem for an equation in a Banach space with degenerate operator at the fractional Caputo derivative is studied. Previously found conditions of the existence of analytic in a sector resolving operators family for the equation with the degeneration on the kernel of the operator at the derivative is used. The form of the resolving operators is established. Under the satisfied conditions, the existence is shown for the unique solution of the Cauchy problem to the researched equation with initial data from the complement of the kernel of the operator at the derivative and the solution is presented using the resolving operators. The obtained results are applied to studying the linearized quasistationary time-fractional order system of the phase field equations.
Keywords: degenerate evolution equation, fractional Caputo derivative, analytic in a sector resolving operators family, Cauchy problem, initial boundary value problem, system of partial differential equations.

REFERENCES

1. *Bajlekova E. G.* Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis. Univ. Press Facilities, Eindhoven Univ. Technology (2001).
2. *Fedorov V. E., Romanova E. A., and Debbouche A.* “Analytic in a sector resolving operators families of degenerate evolution equations of fractional order,” Sib. J. Pure Appl. Math., **16**, No. 2, 93–107 (2016).
3. *Fedorov V. E. and Gordievskikh D. M.* “Resolving operators of degenerate evolution equations with fractional derivative with respect to time,” Russ. Math., **59**, No. 1, 60–70 (2015).
4. *Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., and Plekhanova M. V.* “Equations in Banach spaces with a degenerate operator under a fractional derivative,” Differ. Equ., **51**, No. 10, 1360–1368 (2015).
5. *Gordievskikh D. M. and Fedorov V. E.* “Solutions of initial boundary value problems for some degenerate equations of systems of time-fractional order,” Izv. Irkutsk State Univ., Ser. Mat., **12**, 12–22 (2015).
6. *Plekhanova M. V.* “Quasilinear equations that are not solved for the higher-order time derivative,” Sib. Math. J., **56**, No. 4, 725–735 (2015).
7. *Plekhanova M. V.* “Optimal control for quasilinear degenerate systems of higher order,” J. Math. Sci., **219**, No. 2, 236–244 (2016).
8. *Plekhanova M. V.* “Strong solutions of quasilinear equations in Banach spaces not solvable with respect to the highest-order derivative,” Discrete Continuous Dyn. Syst., Ser. S., **9**, No. 3, 833–847 (2016).
9. *Plekhanova M. V.* “Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations,” J. Comput. Appl. Math., **312**, 39–46 (2017).

10. *Fedorov V. E.* "Strongly holomorphic groups of linear equations of Sobolev type in locally convex spaces," Differ. Equ., **40**, No. 5, 753–765 (2004).
11. *Kostić M. and Fedorov V. E.* "Degenerate fractional differential equations in locally convex spaces with σ-regular pair of operators," Ufa Math. J., **8**, No. 4, 100–113 (2016).
12. *Kostić M.* "Abstract time-fractional equations: existence and growth of solutions," Fract. Calc. Appl. Anal., **14**, No. 2, 301–316 (2014).
13. *Kostić M., Li C.-G., and Li M.* "Abstract multi-term fractional differential equations," Kragujevac J. Math., **38**, No. 1, 51–71 (2014).
14. *Li F., Liang J., and Xu H. K.* "Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions," J. Math. Anal. Appl., **391**, No. 2, 510–525 (2012).
15. *Wang J., Fečkan M., and Zhou Y.* "Controllability of Sobolev type fractional evolution systems," Dyn. Partial Differ. Equations, **11**, 71–87 (2014).
16. *Debbouche A. and Nieto J. J.* "Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls," Appl. Math. Comput., **245**, 74–85 (2014).
17. *Debbouche A. and Torres Delfim F. M.* "Sobolev type fractional dynamic equations and optimal multi-integral controls with fractional nonlocal conditions," Fract. Calc. Appl. Anal., **18**, No. 1, 95–121 (2015).
18. *Caputo M.* "Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II," Geophys. J. R. Astronom. Soc., **13**, 529–539 (1967).
19. *Gerasimov A. N.* "Generalization of linear deformation laws and their applications to problems of internal friction," Prikl. Mat. Mekh., **12**, No. 3, 529–539 (1948).
20. *Prüss J.*, Evolutionary Integral Equations and Applications, Springer, Basel (1993).
21. *Plotnikov P. I. and Klepacheva A. V.* "The phase field equations and gradient flows of marginal functions," Sib. Math. J., **42**, No. 3, 551–567 (2001).
22. *Plotnikov P. I. and Starovoytov V. N.* "Stefan problem with the surface tension as the limit of the phase field model," Differ. Equ., **29**, No. 3, 394–404 (1993).

Submitted September 18, 2016

Vladimir Evgen′evich Fedorov
Mathematical Analysis Department,
Chelyabinsk State University,
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk 454001, Russia;
Shadrinsk State Pedagogical University,
3 Karl Liebknecht st7, Shadrinsk 641870, Kurgan reg.
kar@csu.ru

Elena Anatol′evna Romanova
Mathematical Analysis Department,
Chelyabinsk State University,
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk 454001, Russia
linux_21@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

УДК 517.95

ПРИМЕНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА К ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

И. М. Тихонова

Аннотация. Рассматривается первая краевая задача для уравнения смешанного типа четного порядка. Доказано, что при определенных условиях на коэффициенты уравнения единственное регулярное решение краевой задачи находится как предел приближенных решений, вычисляемых по методу Галёркина. Также получена оценка погрешности стационарного метода Галёркина для этой задачи.

Ключевые слова: метод Галёркина, уравнение смешанного типа, краевая задача, регулярное решение, оценка погрешности.

Исследования краевых задач для неклассических уравнений математической физики начались с работ Трикоми , Геллерстеда [1, 2] в 20–30 гг. прошлого века. Далее теорию краевых задач для таких уравнений развивали М. А. Лаврентьев, А. В. Бицадзе, И. Н. Векуа, С. А. Чаплыгин, К. Г. Гудерлей и др. [3, 4]. В 1970-х гг. В. Н. Врагов [5] и др. [6, 7] начали построение общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков с произвольным многообразием изменения типа. К исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа применялись теория сингулярных интегральных уравнений [1–4, 8, 9], функциональные методы, метод регуляризации, нестационарный метод Галёркина [5–7, 10, 11]. Метод Галёркина широко применяется к решению краевых задач для уравнений математической физики в [12–14] и др. В [13, 14] получены оценки погрешности метода Галёркина для эллиптических и параболических уравнений. В данной работе с помощью стационарного метода Галёркина исследуется краевая задача для уравнения смешанного типа четного порядка, которая впервые была изучена А. Н. Тереховым для уравнения второго порядка [10]. Случай уравнения смешанного типа второго порядка был рассмотрен в [15].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей S. Положим

$$Q = \Omega \times (0, T), \quad S_T = S \times (0, T),\ T > 0; \quad \Omega_t = \Omega \times \{t\},\ t \in [0, T].$$

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение

$$Lu = \sum_{i=1}^{2s} k_i(x,t) D_t^i u - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + a(x)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $D_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Отметим, что коэффициент $k_{2s}(x,t)$ может менять знак внутри области Q произвольным образом. Поэтому в класс уравнений вида (1) входят эллиптико-параболические, гиперболо-параболические, эллиптико-гиперболические и другие уравнения. Предполагается, что коэффициенты уравнения — гладкие функции.

Введем множества

$$P_0^{\pm} = \{(x,0) : x \in \Omega,\ (-1)^{s-1} k_{2s}(x,0) {}^{>0}_{<0}\},$$
$$P_T^{\pm} = \{(x,T) : x \in \Omega,\ (-1)^{s-1} k_{2s}(x,T) {}^{>0}_{<0}\}.$$

Введем в рассмотрение пространство Соболева $W_2^{m,s}(Q)$ со скалярным произведением

$$(u,v)_{m,s} = \int\limits_Q \Big[D_t^s u D_t^s v + \sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha u D^\alpha v \Big]\, dQ$$

и нормой

$$\|u\|_{m,s}^2 = (u,u)_{m,s},$$

а также $L_2(Q)$ с

$$(u,v) = \int\limits_Q uv\, dQ, \quad \|u\|^2 = (u,u).$$

Краевая задача. *Найти решение уравнения* (1) *в области* Q *такое, что*

$$u\big|_{S_T} = 0, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} D_t^i u\big|_{t=0} = 0,\ i = \overline{0, s-1}; \quad D_t^s u\big|_{\overline{P_0^+}} = 0; \\ D_t^j u\big|_{t=T} = 0,\ j = \overline{0, s-2}; \quad D_t^{s-1} u\big|_{\overline{P_T^-}} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Пусть C_L — класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (2), (3), а $\widetilde{W}_2^{1,s}(Q)$ — замыкание C_L по норме $\|u\|_{1,s}$. Через $\widehat{W}_2^{1,s}(Q)$ обозначим подпространство $W_2^{1,s}(Q)$, выделенное условиями (2) и

$$D_t^i u\big|_{\substack{t=0\\t=T}} = 0,\ i = \overline{0, s-2}; \quad D_t^{s-1} u\big|_{\overline{P_0^-}} = 0; \quad D_t^{s-1} u\big|_{t=T} = 0.$$

Лемма 1. *Пусть коэффициент* $a(x) > 0$ *достаточно большой и*

$$(-1)^{s-1} k_{2s}(x,T) < 0, \quad (-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + (1-2s)k_{2s,t}] \ge \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t), \eta(t) \in C^\infty[0,T]$ *такие, что для всех функций* $u \in C_L$ *имеет место неравенство*

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) \ge C_1 \|u\|_{1,s}^2, \quad C_1 = \text{const} > 0. \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку $(-1)^s k_{2s}(x,T)<0$, существуют числа T_0, δ_1 такие, что $0<T_0<T$ и выполнено неравенство

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(x,t)\le -\delta_1<0,\quad T_0\le t\le T.$$

Функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t)\ge 0,\quad \xi(T)=0,$$

$$\xi(t)=\mu,\ 0\le t\le T_0;\quad \xi_t\le 0,\ T_0\le t\le T;$$

$$\eta(t)=-\frac{2s-1}{2}\xi_t+1,\quad 0\le t\le T.$$

Для $u\in C_L$ после интегрирования по частям с учетом условий (2), (3) получаем соотношение

$$(Lu,\xi u_t+\eta u)=-\frac{(-1)^{s-1}\mu}{2}\int\limits_{P_0^-}k_{2s}\big(D_t^s u\big)^2\,dx$$
$$+\int\limits_Q\bigg\{\frac{(-1)^{s-1}}{2}[2k_{2s-1}+(1-2s)k_{2s,t}]\xi$$
$$+(-1)^s k_{2s}\left[\frac{2s-1}{2}\xi_t+\eta\right]\bigg\}\big(D_t^s u\big)^2\,dQ+\int\limits_Q\left(\eta-\frac{1}{2}\xi_t\right)\left[\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+au^2\right]dQ+\ldots,\tag{5}$$

где члены, обозначенные многоточием, играют подчиненную роль.

Выберем $\mu\ge 2\delta^{-1}(\delta_1+\max|k_{2s}|)$. Тогда

$$\frac{(-1)^{s-1}}{2}[2k_{2s-1}+(1-2s)k_{2s,t}]\xi+(-1)^s k_{2s}\left[\frac{(2s-1)}{2}\xi_t+\eta\right]\ge\delta_1>0,\ \eta-\frac{1}{2}\xi_t\ge 1.$$

В силу выбора $\xi(t),\eta(t)$ и условий леммы из (5) получаем априорную оценку (4). При этом для оценки подчиненных членов использованы неравенства [16] $\|D_t^j u\|^2\le\varepsilon\|u\|_{1,s}^2+C_\varepsilon\|u\|^2,\ \varepsilon>0,\ j=\overline{0,s-1}$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены все условия леммы* 1. *Тогда краевая задача* (1)–(3) *может иметь не более одного решения из пространства* $W_2^{2,2s}(Q)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия*

$$k_{2s}(x,t)=k_{2s}(t),\quad (-1)^{s-1}k_{2s}(0)<0,\quad (-1)^{s-1}k_{2s}(T)<0$$

и

$$(-1)^{s-1}[2k_{2s-1}+(1-2s)k_{2s,t}]\ge\delta>0,\quad (-1)^{s-1}[2k_{2s-1}+k_{2st}]\ge\delta>0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t),\eta(t)\in C^\infty[0,T]$ *такие, что для любой* $u\in C_L$ *имеет место неравенство*

$$(Lu,\xi\widetilde{\Delta}u_t+\eta\widetilde{\Delta}u)\ge C_3\int\limits_Q\left[\big(D_t^{2s}u\big)^2+\sum_{i=1}^n\big(D_t^s u_{x_i}\big)^2+(\Delta u)^2\right]dQ$$
$$-C_4\|u\|_{1,s}^2,\quad C_3,C_4>0,\tag{6}$$

где
$$\widetilde{\Delta} u = (-1)^s D_t^{2s} u - \Delta u.$$

Доказательство. Поскольку
$$(-1)^{s-1} k_{2s}(0) < 0, \quad (-1)^{s-1} k_{2s}(T) < 0,$$
существуют положительные числа $t_0 < T_0$, δ_1 такие, что
$$(-1)^{s-1} k_{2s}(t) \le -\delta_1 < 0 \text{ при } 0 \le t \le t_0,$$
$$(-1)^{s-1} k_{2s}(t) \le -\delta_1 < 0 \text{ при } T_0 \le t \le T.$$
Функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ выбираем следующим образом:
$$\xi(t) \ge 0, \quad \xi(0) = \xi(T) = 0, \quad \xi(t) = \mu,\ t_0 \le t \le T_0,$$
$$\xi_t \ge 0,\ 0 \le t \le t_0; \quad \xi_t \le 0,\ T_0 \le t \le T,$$
$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{2s+1}{2}\xi_t + 1, & 0 \le t \le t_0; \\ 1, & t_0 \le t \le T_0; \\ -\frac{2s-1}{2}\xi_t + 1, & T_0 \le t \le T. \end{cases}$$
При этом число μ удовлетворяет условию $\mu \ge 2\delta^{-1}(\max |k_{2s}| + \delta_1)$.

В силу такого выбора функций $\xi(t)$, $\eta(t)$ получаем
$$(-1)^{s-1}\left(k_{2s-1} + \frac{1-2s}{2} k_{2s,t}\right)\xi + (-1)^s k_{2s}\left(\eta + \frac{2s-1}{2}\xi_t\right) + \left(\eta - \frac{2s+1}{2}\xi_t\right) \ge \delta_1,$$
$$(-1)^{s-1}\left(k_{2s-1} + \frac{1}{2} k_{2s,t}\right)\xi + (-1)^s k_{2s}\left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t\right) \ge \delta_1,$$
$$\eta - \frac{1}{2}\xi_t \ge 1, \quad \eta - \frac{2s+1}{2}\xi_t \ge 1, \quad \eta + \frac{2s-1}{2}\xi_t \ge 1.$$

Для $u \in C_L$ после интегрирования по частям с учетом условий (2), (3) получаем
$$\begin{aligned}(Lu, \xi\widetilde{\Delta} u_t + \eta\widetilde{\Delta} u) = \int\limits_Q \Bigg\{ \Bigg[(-1)^{s-1}\left(k_{2s-1} + \frac{1}{2} k_{2s,t}\right)\xi \\ + (-1)^s k_{2s}\left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t\right)\Bigg] \left(D_t^{2s} u\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t\right)(\Delta u)^2 \\ + \Bigg[(-1)^{s-1}\left(k_{2s-1} + \frac{1-2s}{2} k_{2s,t}\right)\xi \\ + (-1)^s k_{2s}\left(\eta + \frac{2s-1}{2}\xi_t\right) + \left(\eta - \frac{2s+1}{2}\xi_t\right)\Bigg] \sum_{i=1}^n \left(D_t^s u_{x_i}\right)^2 \Bigg\} dQ + \ldots, \end{aligned} \tag{7}$$
где многоточием обозначены подчиненные члены.

Используя неравенство Коши, из равенства (7) получаем априорную оценку (6). Лемма доказана.

Отметим, что априорная оценка (4) остается справедливой для новых функций $\xi(t)$, $\eta(t)$ при выполнении условий леммы 1 и дополнительного условия $(-1)^{s-1}k_{2s}(0,x) < 0$.

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решением спектральной задачи

$$\widetilde{\Delta} v \equiv (-1)^s D_t^{2s} v - \Delta v = \lambda v, \quad (x,t) \in Q,$$

$$v|_{S_T} = 0, \quad D_t^i v\big|_{\substack{t=0\\t=T}} = 0, \quad i = \overline{0, s-1}.$$

В дальнейшем будем считать, что собственные числа данной спектральной задачи пронумерованы следующим образом: $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$, $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Положим

$$\psi_k(x,t) = \xi(t)\varphi_{kt} + \eta(t)\varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ из леммы 2.

Теорема 1. *Функции $\{\psi_k(x,t)\}$ линейно независимы, и множество их линейных комбинаций плотно в $L_2(Q)$.*

Доказательство теоремы совпадает с доказательством теоремы 1 из [15].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2. *Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ такой, что $f_t \in L_2(Q)$, существует единственное регулярное решение краевой задачи* (1)–(3) *из пространства $W_2^{2,2s}(Q)$.*

Доказательство. Приближенное решение краевой задачи (1)–(3) ищется в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k.$$

Коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \psi_k) = (f, \psi_k), \quad k = \overline{1, N}. \tag{8}$$

Из равенств (8) нетрудно получить соотношения

$$\big(Lu^N, \xi u_t^N + \eta u^N\big) = \big(f, \xi u_t^N + \eta u^N\big),$$

$$\big(Lu^N, \xi \widetilde{\Delta} u_t^N + \eta \widetilde{\Delta} u^N\big) = \big(f, \xi \widetilde{\Delta} u_t^N + \eta \widetilde{\Delta} u^N\big).$$

Отсюда ввиду гладкости функций $\varphi_k(x,t)$ и лемм 1, 2 для приближенных решений u^N справедливы априорные оценки (4), (6). Следовательно, существуют подпоследовательность $u^{N_k}(x,t)$ и функция $u(x,t) \in W_2^{2,2s}(Q) \cap \mathring{W}_2^{1,s}(Q)$ такие, что $u^{N_k} \to u$ слабо в $W_2^{2,2s}(Q)$. При этом справедлива оценка

$$\|u\|_{2,2s} \le C_5(\|f\| + \|f_t\|), \quad C_5 > 0.$$

Переходя к пределу при $N_k \to \infty$ в равенстве (8), получаем

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^{2s} k_i(x,t) D_t^i u - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + a(x) u \right] \psi_k \, dQ = \int\limits_Q f(x,t) \psi_k \, dQ, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда в силу теоремы 1 уравнение $Lu = f(x,t)$ выполняется для почти всех $(x,t) \in Q$ и краевые условия (2), (3) удовлетворяются в среднем. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда для погрешности стационарного метода Галёркина справедлива оценка*

$$\|u - u^N\|_{1,s} \le C_6(\|f\| + \|f_t\|) \lambda_{N+1}^{-1/4}, \quad C_6 > 0,$$

где постоянная C_6 *не зависит от* N.

Доказательство. В силу теоремы 2 краевая задача (1)–(3) имеет единственное решение $u(x,t)$ такое, что $u \in W_2^{2,2s}(Q)$. Имеем разложение функции $u(x,t)$ в ряд Фурье:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \quad c_k = (u, \varphi_k). \tag{9}$$

При этом ряд (9) сходится сильно в $\mathring{W}_2^{1,s}(Q)$ и $L_2(Q)$. Из уравнения (1) получаем равенства

$$(Lu, \psi_k) = (f, \psi_k), \quad k = \overline{1, N}. \tag{10}$$

С другой стороны, в силу равенства Парсеваля имеет место неравенство

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \lambda_l^2 = \|\widetilde{\Delta} u\|^2 \le C_7(\|f\|^2 + \|f_t\|^2), \quad C_7 > 0. \tag{11}$$

Пусть H_N — линейное подпространство $\mathring{W}_2^{1,s}(Q)$, натянутое на $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$, и P_N — оператор проектирования на H_N. Из равенств (8), (10) нетрудно получить равенство

$$(L(u - u^N), \xi v_t + \eta v) = 0 \quad \forall v \in H_N.$$

Полагая в последнем равенстве $v = w - u^N$ с произвольной функцией w из H_N, имеем

$$(L(u - u^N), \xi(u_t - u_t^N) + \eta(u - u^N)) = (L(u - u^N), \xi(u_t - w_t) + \eta(u - w)).$$

Отсюда в силу леммы 1 получаем оценку

$$\|u - u^N\|_{1,s}^2 \le C_8(\|f\| + \|f_t\|) \|u - w\|_{1,s}, \quad C_8 > 0. \tag{12}$$

С другой стороны,

$$\|u - P_N u\|_{1,s}^2 \le C_9 \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \le C_9 \lambda_{N+1}^{-1} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2, \quad C_9 > 0. \tag{13}$$

Из неравенства ?12(11), (13), получаем оценку скорости сходимости стационарного метода Галёркина. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.
2. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
3. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
4. *Гудерлей К. Г.* Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
5. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.
6. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Введение в теорию уравнений смешанного типа второго порядка. Якутск: Изд-во Якутск. ун-та, 1998.
7. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
8. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
9. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1974.
10. *Терехов А. Н.* Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1979. С. 128–136.
11. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
12. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
13. *Джишкариани А. В.* О быстроте сходимости метода Бубнова — Галёркина // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 2. С. 343–348.
14. *Виноградова П. В., Зарубин А. Г.* Оценка погрешности метода Галёркина для нестационарных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 9. С. 1643–1651.
15. *Егоров И. Е., Тихонова И. М.* О стационарном методе Галёркина для уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 2. С. 41–47.
16. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

Статья поступила 20 ноября 2016 г.

Тихонова Ирина Михайловна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Научно-исследовательский институт математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
Irinamikh3007@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

UDC 517.95

APPLICATION OF THE STATIONARY GALЁRKIN METHOD TO THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED HIGH–ORDER EQUATION

I. M. Tikhonova

Abstract. We consider the first boundary value problem for a mixed even-order equation and construct an approximate solution using the stationary Galërkin method. The existence of a regular solution for the boundary value problem is proved under certain conditions on coefficients of the equation. We obtain the error estimate of the Galërkin method.

Keywords: Galërkin method, mixed type equation, regular solution, a priori estimate.

REFERENCES

1. *Tricomi F. C.*, Linear Equations of Mixed Type [in Russian], Gostekhizdat, Moscow (1947).
2. *Tricomi F. C.*, Lectures on Partial Differential Equations [in Russian], Izdat. Inostr. Lit., Moscow (1957).
3. *Bitsadze A. V.*, Equations of Mixed Type [in Russian], Akad. Nauk SSSR, Moscow (1959).
4. *Guderley K. G.*, The Theory of Transonic Flows [in Russian], Izd. Inost. Lit., Moscow (1962).
5. *Vragov V. N.*, Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics, Novosibirsk Univ., Novosibirsk (1983).
6. *Egorov I. E. and Fedorov V. E.*, Introduction to the Theory of Mixed Type Equations of Second Order, Yakutsk Univ., Yakutsk (1998).
7. *Egorov I. E. and Fedorov V. E.*, High-Order Nonclassical Equations of Mathematical Physics, Vychisl. Tsentr SO RAN, Novosibirsk (1995).
8. *Smirnov M. M.*, Equations of Mixed Type [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
9. *Salakhitdinov M. S.*, Equations of Mixed-Composite Type [in Russian], Fan, Tashkent (1974).
10. *Terekhov A. N.* "A boundary value problem for a mixed type equation," in: Primenenie Metodov Funkstional'nogo Analiza k Zadacham Matematicheskoi Fiziki i Vyshislitel'noi Matematiki, IM SO AN SSSR, Novosibirsk, 1979, pp. 128–136.
11. *Moiseev E. I.*, Mixed Type Equations with a Spectral Parameter [in Russian], MGU, Moscow (1988).
12. *Ladyzhenskaya O. A.*, Boundary Value Problems of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1985).
13. *Dzhishkariani A. V.* "On the rate of convergence of the Bubnov–Galerkin method," USSR Comput. Math. Math. Phys., **4**, No. 2, 183–189 (1964).
14. *Vinogradova P. V. and Zarubin A. G.* "Error estimates for the Galerkin method as applied to time-dependent equations," Comput. Math. Math. Phys., **49**, No. 9, 1567–1575 (2009).
15. *Egorov I. E. and Tikhonova I. M.* "Stationary Galerkin method for a mixed-type second-order equation," Mat. Zamet. YAGU, **17**, No. 2, 41–47 (2010).

16. *Besov O. V. and Ilyin V. P.*, Integral Representations of Functions and Embedding Theorems [in Russian], Nauka, Moscow (1975).

Submitted November 20, 2016

Tikhonova Irina Mikhailovna
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Research Institute of Mathematics,
Kulakovskii Street, 48, Yakutsk 677000, Russia
Irinamikh3007@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

УДК 517.633

О СТАЦИОНАРНОМ МЕТОДЕ ГАЛЁРКИНА В ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Е. Федоров, И. М. Тихонова

Аннотация. Доказана однозначная регулярная разрешимость в пространстве Соболева краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка, которая ранее была изучена авторами с помощью нестационарного метода Галёркина в сочетании с методом ε-регуляризации. В настоящей работе для этой краевой задачи применяется стационарный метод Галёркина, при этом существенно упрощается методика исследования. Кроме того, получена оценка погрешности стационарного метода Галёркина через собственные значения оператора Лапласа по переменным $x \in \mathbb{R}^n$ и t.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, краевая задача, априорная оценка, стационарный метод Галёркина, погрешность.

1. Введение. Начало исследованиям уравнений смешанного типа было положено в работах Геллерстедта и Трикоми [1–3]. Далее модельные уравнения смешанного типа изучались в работах многих авторов [4–7].

Построение общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа было начато в 70-е гг. прошлого века В. Н. Враговым и рядом других авторов [8–12]. В дальнейшем эта теория развивалась во многих направлениях [13–20]. При исследовании краевых задач для уравнений смешанного типа общего вида применялись функциональные методы [21], метод регуляризации [17], метод Галёркина.

В работах [22–25] стационарный метод Галёркина применяется к решению первой краевой задачи и краевой задачи Врагова для уравнения смешанного типа, а также для этих задач получена оценка погрешности стационарного метода Галёркина через собственные числа оператора Лапласа по переменным $x \in \mathbb{R}^n$ и t. В [26] к решению краевой задачи для уравнения смешанного типа в постановке В. Н. Врагова применен модифицированный метод Галёркина и получена оценка его погрешности. В [27] аналогичные результаты получены для первой краевой задачи. Вопросам оценки погрешности метода Галёркина для других классов уравнений посвящены, например, [28–30].

Работа выполнена в рамках Государственного задания Минобрнауки России на 2014-2016 годы (проект №3047).

2. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей S. Положим

$$Q = \Omega \times (0,T),\ S_T = S \times (0,T),\ T = \mathrm{const} > 0;\ \Omega_t = \Omega \times \{t\},\ t \in [0,T].$$

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv k(x,t)u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t). \tag{1}$$

Коэффициент $k(x,t)$ может менять знак внутри области Q произвольным образом, поэтому уравнение (1) является уравнением смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) — гладкие функции. Введем множества

$$P_0^{\pm} = \{(x,0) : x \in \Omega,\ k(x,0)^{>0}_{<0}\}, \quad P_T^{\pm} = \{(x,T) : x \in \Omega,\ k(x,T)^{>0}_{<0}\}.$$

Краевая задача. *Найти в области Q решение уравнения* (1) *такое, что*

$$u\,|_{S_T} = 0, \tag{2}$$

$$u_t|_{\overline{P_0^-}} = 0, \quad u\,|_{\overline{P_T^+}} = 0, \quad u_t|_{t=T} = 0. \tag{3}$$

Впервые постановка краевой задачи (1)–(3) рассмотрена авторами в [31], где была использована другая методика — нестационарный метод Галёркина с привлечением метода ε-регуляризации. В настоящей работе используется стационарный метод Галёркина, а также получена оценка его погрешности через собственные значения спектральной задачи для $(n+1)$-мерного уравнения Лапласа по $x \in \mathbb{R}^n$ и t.

3. Априорные оценки. Через C_L обозначим класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (2), (3). В работе [31] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой и выполнены условия:*

$$k(x,0) < 0, \quad k(x,T) < 0, \quad a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t), \eta(t) \in C^\infty[0,T]$ такие, что для любой $u \in C_L$ имеет место неравенство

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) \geq C_1 \|u\|_1^2, \quad C_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{4}$$

Следствие 1. *Пусть выполнены все условия леммы* 1. *Тогда краевая задача* (1)–(3) *может иметь не более одного решения из пространства $W_2^2(Q)$.*

Лемма 2. *Пусть выполнены условия*

$$k(x,t) \equiv k(t), \quad k(0) < 0, \quad k(T) < 0, \quad a \pm \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t), \eta(t) \in C^\infty[0,T]$ *такие, что для всех функций* $u \in C_L$ *имеет место неравенство*

$$(Lu, \xi\widetilde{\Delta}u_t + \eta\widetilde{\Delta}u) \geq C_2 \int\limits_Q \left[u_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 + (\Delta u)^2\right] dQ - C_3\|u\|_1^2, \; C_2, C_3 > 0, \quad (5)$$

где $\widetilde{\Delta}u = -u_{tt} - \Delta u$.

Доказательство. Поскольку $k(0) < 0$, $k(T) < 0$, существуют положительные числа $t_0 < T_0 < T$, δ_1 такие, что

$$k(t) \leq -\delta_1 < 0, \; 0 \leq t \leq t_0; \quad k(t) \leq -\delta_1 < 0, \; T_0 \leq t \leq T.$$

Функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \geq 0, \quad \xi(0) = \xi(T) = 0, \quad \xi(t) = \mu, \quad t_0 \leq t \leq T_0,$$

$$\xi_t \geq 0, \; 0 \leq t \leq t_0; \quad \xi_t \leq 0, \quad T_0 \leq t \leq T,$$

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\xi_t + 1, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 1, & t_0 \leq t \leq T_0, \\ -\frac{1}{2}\xi_t + 1, & T_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

При этом число μ удовлетворяет условию $\mu \geq 2\delta^{-1}(\max\limits_{\overline{Q}} |k| + \delta_1)$. В силу такого выбора функций $\xi(t), \eta(t)$ получаем

$$\left(a - \frac{1}{2}k_t\right)\xi - k\left(\eta + \frac{1}{2}\xi_t\right) + \left(\eta - \frac{3}{2}\xi_t\right) \geq \delta_1 + 1,$$

$$\left(a + \frac{1}{2}k_t\right)\xi - k\left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t\right) \geq \delta_1,$$

$$\eta - \frac{1}{2}\xi_t \geq 1, \; \eta - \frac{3}{2}\xi_t \geq 1, \; \eta + \frac{1}{2}\xi_t \geq 1.$$

Для $u \in C_L$ после интегрирования по частям с учетом условий (2), (3) получаем

$$(Lu, \xi\widetilde{\Delta}u_t + \eta\widetilde{\Delta}u) = \int\limits_Q \left\{ \left[\left(a + \frac{1}{2}k_t\right)\xi - k\left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t\right)\right] u_{tt}^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t\right)(\Delta u)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\left(a - \frac{1}{2}k_t\right)\xi - k\left(\eta + \frac{1}{2}\xi_t\right) + \left(\eta - \frac{3}{2}\xi_t\right)\right] \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 \right\} dQ + \ldots, \quad (6)$$

где многоточием обозначены подчиненные члены. Используя неравенство Коши и теоремы вложения [17], из равенства (6) получаем априорную оценку (5).

Замечание 1. Априорная оценка (4) остается справедливой и для новых функций $\xi(t), \eta(t)$ из доказательства леммы 2.

4. Разрешимость задачи. Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решением спектральной задачи

$$\begin{gathered} \widetilde{\Delta} v \equiv -v_{tt} - \Delta v = \lambda v, \quad (x,t) \in Q, \\ v|_{S_T} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=T} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

В дальнейшем будем считать, что собственные числа задачи (7) пронумерованы следующим образом: $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$, и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Положим

$$\psi_k(x,t) = \xi(t)\varphi_{kt}(x,t) + \eta(t)\varphi_k(x,t),$$

где $\xi(t), \eta(t)$ из леммы 2.

Теорема 1. *Функции $\{\psi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независимы, и множество их линейных комбинаций плотно в $L_2(Q)$.*

Доказательство теоремы 1 полностью совпадает с доказательством теоремы 1 в [22].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2. *Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ такой, что $f_t \in L_2(Q)$, существует единственное регулярное решение краевой задачи* (1)–(3) *из пространства $W_2^2(Q)$.*

Доказательство. Приближенное решение краевой задачи (1)–(3) ищется в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t).$$

Коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \psi_k) = (f, \psi_k), \quad k = \overline{1, N}. \tag{8}$$

Из равенств (8) нетрудно получить соотношения

$$\begin{gathered} \big(Lu^N, \xi u_t^N + \eta u^N\big) = \big(f, \xi u_t^N + \eta u^N\big), \\ \big(Lu^N, \xi\widetilde{\Delta} u_t^N + \eta\widetilde{\Delta} u^N\big) = \big(f, \xi\widetilde{\Delta} u_t^N + \eta\widetilde{\Delta} u^N\big). \end{gathered}$$

Отсюда с учетом гладкости функций $\varphi_k(x,t)$ и лемм 1 и 2 вытекает, что для приближенных решений u^N справедливы априорные оценки (4), (5). Следовательно, существуют подпоследовательность $u^{N_k}(x,t)$ и функция $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ такие, что $u^{N_k} \to u$ слабо в $W_2^2(Q)$. При этом справедлива оценка

$$\|u\|_2 \le C_4(\|f\| + \|f_t\|), \quad C_4 > 0.$$

Переходя к пределу при $N_k \to \infty$ в равенстве (8), получаем

$$\int\limits_Q \left[ku_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + a(x,t)u_t + c(x)u\right] \psi_k dQ = \int\limits_Q f(x,t)\psi_k dQ, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тем самым в силу теоремы 1 уравнение $Lu = f(x,t)$ выполняется для почти всех $(x,t) \in Q$ и краевые условия (2), (3) удовлетворяются в среднем. Теорема 2 доказана.

5. Оценка погрешности.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда для погрешности стационарного метода Галёркина справедлива оценка*

$$\|u - u^N\|_1 \leq C_5(\|f\| + \|f_t\|)\lambda_{N+1}^{-1/4}, \quad C_5 > 0,$$

где постоянная C_5 *не зависит от* N.

Доказательство. В силу теоремы 2 краевая задача (1)–(3) имеет единственное решение $u \in W_2^2(Q)$. Имеем разложение функции $u(x,t)$ в ряд Фурье:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \quad c_k = (u, \varphi_k). \tag{9}$$

При этом ряд (9) сходится в $W_2^1(Q)$ и $L_2(Q)$. Из уравнений (8) получаем равенства

$$(Lu, \psi_k) = (f, \psi_k), \quad k = \overline{1, N}. \tag{10}$$

С другой стороны, в силу равенства Парсеваля имеет место неравенство

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \lambda_l^2 = \|\widetilde{\Delta} u\|^2 \leq C_6(\|f\|^2 + \|f_t\|^2), \quad C_6 > 0. \tag{11}$$

Пусть H_N — линейное подпространство $\mathring{W}_2^1(Q)$, натянутое на $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$, и P_N — оператор проектирования на H_N. Из равенств (8), (10) нетрудно получить равенство

$$(L(u - u^N), \xi v_t + \eta v) = 0 \quad \forall v \in H_N.$$

Полагая в последнем равенстве $v = \omega - u^N$ с произвольной функцией ω из H_N, имеем

$$(L(u - u^N), \xi(u_t - u_t^N)) + \eta(u - u^N) = (L(u - u^N), \xi(u_t - \omega_t)) + \eta(u - \omega).$$

Отсюда в силу леммы 1 получаем оценку

$$\|u - u^N\|_1^2 \leq C_7(\|f\| + \|f_t\|)\|u - \omega\|_{1,1}, \quad C_7 > 0. \tag{12}$$

С другой стороны,

$$\|u - P_N u\|_1^2 \leq C_8 \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \leq C_8 \lambda_{N+1}^{-1} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2, \quad C_9 > 0. \tag{13}$$

Из неравенства (12), полагая в нем $\omega = P_N u$ и используя (11), (13), получаем оценку погрешности стационарного метода Галёркина.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gellerstedt S.* Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte. Uppsala: These, 1935.

2. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.

3. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит, 1957.

4. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

5. *Гудерлей К. Г.* Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

6. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.

7. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1974.

8. *Каратопраклиев Г. Д.* Об одном классе уравнений смешанного типа в многомерных областях // Докл. АН СССР, 1976. Т. 230, № 4. С. 769–772.

9. *Ларькин Н. А.* Об одном классе нелинейных уравнений смешанного типа // Сиб. мат. журн, 1978. Т. 19, № 6. С. 343–348.

10. *Врагов В. Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.

11. *Врагов В. Н.* О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5–13.

12. *Терехов А. Н.* Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1979. С.128–136.

13. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979.

14. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.

15. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

16. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложение к газодинамике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990.

17. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.

18. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Введение в теорию уравнения смешанного типа второго порядка. Якутск: Изд-во Якутск. ун-та, 1998.

19. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа высокого порядка // Мат. заметки ЯГУ. 1999. Т. 6, вып. 1. С. 26–35.

20. *Чуешев А. В.* Разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка / Дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: НГУ, 2001.

21. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

22. *Егоров И. Е., Тихонова И. М.* О стационарном методе Галёркина для уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. заметки ЯГУ, 2010. Т. 17, вып. 2. С. 41–47.

23. *Егоров И. Е., Тихонова И. М.* Применение стационарного метода Галёркина для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ, 2012. Т. 19, вып. 2. С. 20–28.

24. *Егоров И. Е., Тихонова И. М.* О скорости сходимости стационарного метода Галёркина для уравнения смешанного типа // Вестн. Южно-Уральск. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2012, № 14, С. 53–58.

25. *Тихонова И. М.* Оценка погрешности стационарного метода Галёркина для задачи А. Н. Терехова // XVII и XVIII Лаврентьевские чтения: Сб. статей науч. конф. школьников, студентов, аспирантов и молодых ученых Республики Саха (Якутия). 2015. С. 69–72.

26. *Егоров И. Е., Тихонова И. М.* Применение модифицированного метода Галёркина к уравнению смешанного типа // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 14–19.

27. *Егоров И. Е.* Применение модифицированного метода Галёркина к первой краевой задаче для уравнения смешанного типа // Мат. заметки СВФУ, 2015. Т. 22, № 3. С. 3–10.

28. *Джишкариани А. В.* О быстроте сходимости метода Бубнова — Галёркина // Журн. вычисл. математики и мат. физики 1964. Т. 4, № 2. С. 343–348.

29. *Виноградова П. В., Зарубин А. Г.* Оценка погрешности метода Галёркина для нестационарных уравнений// Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 9, С. 1643–1651.

30. *Виноградова П. В., Королева Т. Э.* О равномерной оценке скорости сходимости метода Галёркина для нелинейного уравнения третьего порядка // Мат. заметки СВФУ, 2014. Т. 21, № 2. С. 3–7.

31. *Тихонова И. М., Федоров В. Е.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. заметки ЯГУ, 2010. Т. 17, вып. 2. С. 109–117.

Статья поступила 12 ноября 2016 г.

Федоров Валерий Евстафьевич, Тихонова Ирина Михайловна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Научно-исследовательский институт математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
FedorovVE58@mail.ru, Irinamikh3007@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

UDC 517.633

THE STATIONARY GALËRKIN METHOD FOR A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED SECOND–ORDER EQUATION

V. E. Fedorov and I. M. Tikhonova

Abstract: We prove the existence of the unique regular solution for the boundary value problem for the mixed type second-order equation in the Sobolev space. The stationary Galërkin method is applied, for which the error estimate is obtained using eigenvalues of the spectral problem for the Laplace equation in the variables $x \in \mathbb{R}^n$ and t.
Keywords: mixed type equation, boundary value problem, a priori estimate, stationary Galërkin method, error.

REFERENCES

1. *Gellerstedt S.*, Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte, These, Uppsala (1935).
2. *Tricomi F. C.*, Linear Equations of Mixed Type [in Russian], Gostekhizdat, Moscow (1947).
3. *Tricomi F. C.*, Lectures on Partial Differential Equations [in Russian], Izdat. Inostr. Lit., Moscow (1957).
4. *Bitsadze A. V.*, Equations of Mixed Type [in Russian], Akad. Nauk SSSR, Moscow (1959).
5. *Guderley K. G.*, The Theory of Transonic Flows [in Russian], Izdat. Inostr. Lit., Moscow (1962).
6. *Smirnov M. M.*, Equations of Mixed Type [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
7. *Salakhitdinov M. S.*, Equations of Mixed-Composite Type [in Russian], Fan, Tashkent (1974).
8. *Karatoprakliev G. D.*, “A class of mixed-type equations in multidimensional domains,” Dokl. AN SSSR, **230**, No. 4, 769–772 (1976).
9. *Lar'kin N. A.* “One class of nonlinear equations of mixed type,” Sib. Math. J., **19**, No. 6, 919–924 (1978).
10. *Vragov V. N.* “On the theory of boundary-value problems for mixed-type equations in space,” Differ. Uravn., **13**, No. 6, 1098–1105 (1977).
11. *Vragov V. N.* “On the formulation and the solvability of boundary value problems for mixed-composite type equations,” in: Matematicheskiy Aanaliz i Smejnie Voprosi Matematiki, Nauka, Novosibirsk, 1978, pp. 5–13.
12. *Terekhov A. N.* “A boundary value problem for mixed type equation,” in: Primenenie Metodov Funkstional'nogo Analiza k Zadacham Matematicheskoi Fiziki i Vyshislitel'noi Matematiki, IM SO AN SSSR, Novosibirsk, 1979, pp. 128–136.
13. *Djuraev T. D.*, Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types [in Russian], FAN, Tashkent (1979).
14. *Vragov V. N.*, Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Novosibirsk Univ., Novosibirsk (1983).
15. *Moiseev E. I.*, Equations of Mixed Type with a Spectral Parameter, MGU, Moscow (1988).
16. *Kuzmin A. G.*, Non-classical Mixed Type Equations and Their Application in Gas Dynamics [in Russian], LGU, Leningrad (1990).
17. *Egorov I. E. and Fedorov V. E.*, High-Order Nonclassical Equations of Mathematical Physics, Vychisl. Tsentr SO RAN, Novosibirsk (1995).

18. *Egorov I. E. and Fedorov V. E.*, Introduction to the Theory of Mixed Type Equations of Second Order, Yakutsk Univ., Yakutsk (1998).
19. *Egorov I. E. and Fedorov V. E.* "About a boundary value problem for mixed type equation of high order," Mat. Zamet. YAGU, **6**, No. 1, 26–35 (1999).
20. *Chueshev A. B.* The solvability of boundary value problems for mixed type equations of high order, Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk, Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (2001).
21. *Ladyzhenskaya O. A.*, Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Nauka, Moscow (1985).
22. *Egorov I. E. and Tikhonova I. M.* "Stationary Galerkin method for a mixed second-order equation," Mat. Zamet. YAGU, **17**, No. 2, 41–47 (2010).
23. *Egorov I. E. and Tikhonova I. M.* "Application of the stationary Galerkin method to an equation of mixed type," Mat. Zamet. YAGU, **19**, No. 2, 20–28 (2012).
24. *Egorov I. E. and Tikhonova I. M.* "About convergence speed of the stationary Galerkin method for a mixed type equation," Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program., **40**, No. 14, 53–58 (2012).
25. *Tikhonova I. M.* "Error estimates for the stationary Galerkin method for the Terekhov problem," in: Sbornik statei nauchn. konf. "XVII i XVIII Lavrentievskie Chteniya", Izdat. MCNIP, Kirov, 2015, pp. 69–72.
26. *Egorov I. E. and Tikhonova I. M.* "Application of the modified Galerkin method for a mixed-type equation," Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 3, 14–19 (2014).
27. *Egorov I. E.* "Application of the modified Galerkin method for the first boundary problem for a mixed type equation," Mat. Zamet. SVFU, **22**, No. 3, 14–19 (2015).
28. *Dzhishkariani A. V.* "On the rate of convergence of the Bubnov–Galerkin method," USSR Comput. Math. Math. Phys., **4**, No. 2, 183–189 (1964).
29. *Vinogradova P. V. and Zarubin A. G.* "Error estimates for the Galerkin method as applied to time-dependent equations," Comput. Math. Math. Phys., **49**, No. 9, 1567–1575 (2009).
30. *Vinogradova P. V. and Koroleva T. E.* "Uniform estimation of the convergence rate of the Galerkin method for a third-order nonlinear equation," Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 2, 3–7 (2014).
31. *Tikhonova I. M. and Fedorov V. E.* "On one boundary value problem for a mixed second-order equation," Mat. Zamet. YAGU, **17**, No. 2, 109–117 (2010).

Submitted November 12, 2016

Fedorov Valery Evstafievich, Tikhonova Irina Mikhailovna
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Research Institute of Mathematics,
Kulakovskii Street, 48, Yakutsk 677000, Russia
FedorovVE58@mail.ru, Irinamikh3007@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

УДК 517.95

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛО–ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

К. У. Хубиев

Аннотация. Для модельного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа с характеристической нагрузкой доказана теорема существования и единственности решения нелокальной задачи с интегральным условием в гиперболической части. Единственность решения доказывается методом Трикоми, существование — методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение, нелокальная задача, интегральное условие.

Введение

Рассмотрим характеристически нагруженное уравнение гиперболо-параболического типа

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda(x,y)u(x,0) = 0, \quad y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \mu_1(x-y)u(x-y,0) + \mu_2(x+y)u(x+y,0) = 0, \quad y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = h > 0$ соответственно и характеристиками волнового уравнения $AC : x+y = 0$, $BC : x - y = 1$, где $\lambda = \lambda(x,y)$, $\mu_i(t)$, $i = 1, 2,$ — заданные функции. Через Ω^+ и Ω^- обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно, а через J — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

В настоящее время задачи для уравнений в частных производных основных и смешанных типов с нелокальными условиями, в том числе и интегральными, активно изучаются. Различные краевые задачи для уравнений гиперболического и параболического типов с интегральными условиями рассматривались в работах многих авторов (см., например, работы [1–5] и библиографию в них). В некоторых случаях для исследования разрешимости нелокальных краевых задач весьма эффективен метод, основанный на сведении их к локальным задачам для нагруженного уравнения [6–9].

В данной работе рассматривается задача с интегральным условием в гиперболической части для уравнения гиперболо-параболического типа с характеристической нагрузкой, в [10] была исследована задача с интегральным условием в гиперболической части для уравнения (1) при $\mu_1(t) \equiv \mu_2(t) = 0$.

1. Постановка задачи

Регулярным в области Ω *решением уравнения* (1) назовем функцию $u(x,y)$ из класса $C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega^-)\cap C^2_x(\Omega^+)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega^+\cup\Omega^-$, такую, что $u_y(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на концах интервала J.

Функция $\rho(x)$ *удовлетворяет условию монотонности* **M** [11, с. 42], если для любых x и y из $]0,1[$

$$\rho(x)\in C^1]0,1],\quad \rho(x)\geq 0,\quad \int\limits_0^1\rho(x)\,dx<\infty,$$

$$\rho(x)\geq\rho(y),\quad \rho'(x)<\rho'(y)\quad \forall x<y.$$

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение* $u(x,y)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям:*

$$u(0,y)=\varphi_0(y),\quad u(1,y)=\varphi_1(y),\quad 0\leq y\leq h, \tag{2}$$

$$u(x/2,-x/2)+\int\limits_0^1 K(x,\xi)u(\xi,0)\,d\xi=\psi(x),\quad 0\leq x\leq 1, \tag{3}$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $\psi(x)$, $K(x,\xi)$ — *заданные функции.*

Для задачи (1)–(3) справедлива

Теорема. *Пусть* $\varphi_0(y),\varphi_1(y)\in C[0,h]$, $\psi(x)\in C^1[0,1]\cap C^2]0,1[$, $\lambda(x,y)\in C(\overline{\Omega}^+)$ *удовлетворяет условию Гёльдера по* x, $\mu_1(x)\in C[0,1]$, $\mu_2(x)\in C[0,1]\cap C^1]0,1[$ *и выполняются условия*

$$\lambda(x,0)\leq 0,\quad \mu_1(x)\geq 0,\quad \mu_2(x)\geq 0,\quad \mu_2'(x)\geq 0,$$

функция $K(x,\xi)$ *представима в виде*

$$K(x,\xi)=p(\xi)+\operatorname{sgn}(x-\xi)\rho(|x-\xi|),$$

где $\rho'(t)$ *удовлетворяет условию* **M**, $p(t),\rho''(t)\in L[0,1]$. *Тогда задача* (1)–(3) *имеет решение и притом единственное.*

2. Функциональные соотношения между $u(x,0)$ и $u_y(x,0)$

Пусть существует решение $u(x,y)$ задачи (1)–(3). Положим $\tau(x)=u(x,0)$, $x\in\overline{J}$, $\nu(x)=u_y(x,0)$, $x\in J$, тогда $\tau(x)\in C(\overline{J})\cap C^1(J)$, $\nu(x)\in C(J)\cap L(J)$, а из условий (2) получим

$$\tau(0)=\varphi_0(0),\quad \tau(1)=\varphi_1(0). \tag{4}$$

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y\to+0$, получим функциональное соотношение, принесенное из параболической части Ω^+ смешанной области Ω на AB:

$$\tau''(x)+\lambda(x,0)\tau(x)-\nu(x)=0. \tag{5}$$

Если $\mu_1(x), \mu_2(x) \in C[0,1]$, то, учитывая гладкость функций $\tau(x), \nu(x)$, решение задачи Коши для уравнения (1) в Ω^- можно представить в виде [12, с. 59]

$$u(x,y) = \frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(\xi)\,d\xi$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{y}^{0}\int\limits_{x+y-\eta}^{x-y+\eta} [\mu_1(\xi-\eta)\tau(\xi-\eta) + \mu_2(\xi+\eta)\tau(\xi+\eta)]\,d\xi d\eta. \quad (6)$$

Учитывая в (6) условие (3) задачи и дифференцируя, после несложных преобразований получим функциональное соотношение, принесенное из гиперболической части Ω^- смешанной области Ω:

$$\tau'(x) + \frac{x}{2}\mu_1(x)\tau(x) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \mu_2(\xi)\tau(\xi)\,d\xi - \nu(x) = 2\psi_0'(x). \quad (7)$$

где

$$\psi_0(x) = \psi(x) - \int\limits_0^1 K(x,\xi)\tau(\xi)\,d\xi.$$

3. Единственность решения задачи

Пусть $\varphi_0(y) = \varphi_1(y) = 0$. Умножая тождество (5) на функцию $\tau(x)$ и интегрируя от 0 до 1, с учетом того, что $\tau(0) = \varphi_0(0) = 0$, $\tau(1) = \varphi_1(0) = 0$, получим

$$\int\limits_0^1 \tau(\xi)[\tau''(\xi) + \lambda(\xi,0)\tau(\xi) - \nu(\xi)]\,d\xi$$

$$= -\int\limits_0^1 \tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^1 \left(\left[\frac{1}{2}\tau^2(\xi)\right]'' - [\tau'(\xi)]^2 + \lambda(\xi,0)\tau^2(\xi)\right)d\xi$$

$$= -\int\limits_0^1 \tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^1 ([\tau'(\xi)]^2 - \lambda(\xi,0)\tau^2(\xi))\,d\xi = 0,$$

откуда непосредственно следует

$$\int\limits_0^1 \tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi = -\int\limits_0^1 ([\tau'(\xi)]^2 - \lambda(\xi,0)\tau^2(\xi))\,d\xi.$$

По условию теоремы $\lambda(x,0) \le 0$, следовательно,

$$\int\limits_0^1 \tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi \le 0. \quad (8)$$

С другой стороны, выражая $\nu(x)$ из (7) при $\psi(x)=0$, получим

$$\int\limits_0^1 \tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi = \int\limits_0^1 \tau(\xi)\left[\tau'(\xi)+\frac{\xi}{2}\mu_1(\xi)\tau(\xi)+\frac{1}{2}\int\limits_0^\xi \mu_2(s)\tau(s)ds - 2\psi_0'(\xi)\right]d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 [\tau^2(\xi)]'\,d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \xi\mu_1(\xi)\tau^2(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^\xi \mu_2(s)\tau(s)\tau(\xi)\,dsd\xi$$

$$+ 2\int\limits_0^1 \tau(\xi)\int\limits_0^1 K_\xi(\xi,t)\tau(t)\,dtd\xi = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \xi\mu_1(\xi)\tau^2(\xi)\,d\xi + \frac{1}{4}\mu_2(0)\left[\int\limits_0^1 \tau(\xi)\,d\xi\right]^2$$

$$+ \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \mu_2'(\xi)\left[\int\limits_\xi^1 \tau(s)\,ds\right]^2 d\xi + 2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K_\xi(\xi,t)\tau(\xi)\tau(t)\,dtd\xi. \qquad (9)$$

Учитывая, что $K_x(x,\xi)=\rho'(|x-\xi|)$, а функция $\rho'(|x-\xi|)$ удовлетворяет условию монотонности **M** и, следовательно [11, с. 43],

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K_\xi(\xi,t)\tau(\xi)\tau(t)\,dtd\xi = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \rho'(|\xi-t|)\tau(\xi)\tau(t)\,dtd\xi \geq 0,$$

при выполнении условий теоремы $\mu_1(x)\geq 0$, $\mu_2(x)\geq 0$, $\mu_2'(x)\geq 0$ имеем

$$\int\limits_0^1 \tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi \geq 0.$$

Отсюда и из (8) получим, что

$$\int\limits_0^1 \tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi = 0.$$

Поскольку левая часть (9) равна нулю, а слагаемые справа неотрицательны, то

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \rho'(|\xi-t|)\tau(\xi)\tau(t)\,dtd\xi = 0$$

и, следовательно, $\tau(x)=0$ [11, с. 43], из чего нетрудно заключить единственность решения задачи (1)–(3).

4. Существование решения задачи

Подставляя $\nu(x)$ из (7) в (5), получим уравнение вида

$$\tau''(x) - \tau'(x) = g(x), \qquad (10)$$

где

$$g(x) = -2\psi_0'(x) - \left[\lambda(x,0) - \frac{x}{2}\mu_1(x)\right]\tau(x) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \mu_2(\xi)\tau(\xi)\,d\xi.$$

Решение задачи Дирихле (4) для уравнения (10) имеет вид

$$\tau(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi)g(\xi)\,d\xi + G_\xi(x,1)\varphi_1(0) - G_\xi(x,0)\varphi_0(0), \tag{11}$$

где $G(x,\xi)$ — функция Грина

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{(e^x-e)(1-e^{-\xi})}{e-1}, & 0 \le \xi \le x, \\ \frac{(e^x-1)(1-e^{1-\xi})}{e-1}, & x \le \xi \le 1, \end{cases} \quad G_\xi(x,0) = \frac{e^x - e}{e-1}, \quad G_\xi(x,1) = \frac{e^x-1}{e-1}.$$

Подставляя $g(x)$ в (11), получим уравнение

$$\tau(x) + \int\limits_0^1 Q(x,\xi)\tau(\xi)\,d\xi = f(x), \tag{12}$$

где

$$f(x) = G_\xi(x,1)\varphi_1(0) - G_\xi(x,0)\varphi_0(0) - 2\int\limits_0^1 G(x,\xi)\psi'(\xi)\,d\xi,$$

$$Q(x,\xi) = \left[\lambda(\xi,0) - \frac{\xi}{2}\mu_1(\xi)\right]G(x,\xi) - \frac{\mu_2(\xi)}{2}\int\limits_\xi^1 G(x,t)\,dt - 2\int\limits_0^1 G(x,t)K_t(t,\xi)\,dt$$

$$= \left[\lambda(\xi,0) - \frac{\xi}{2}\mu_1(\xi)\right]G(x,\xi) - \frac{\mu_2(\xi)}{2}\int\limits_\xi^1 G(x,t)\,dt - 2\int\limits_0^1 G(x,t)\rho'(|t-\xi|)\,dt.$$

Учитывая свойства функций $\lambda(x,0)$, $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\psi(x)$, $\rho(x)$ и $G(x,\xi)$, заключаем, что уравнение (12) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи (1)–(3), причем его решение $\tau(x)$ принадлежит $C[0,1] \cap C^2]0,1[$. Далее $\nu(x)$ находим из (7), откуда видно, что $\nu(x) \in C^1]0,1[$.

После нахождения функции $\tau(x)$ регулярное решение задачи (1)–(3) в Ω^- находится по формуле (6), а в Ω^+ — как решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности (см., например, [13, с. 267]) с правой частью $f(x,y) = -\lambda(x,y)\tau(x)$, причем $f(x,y)$ принадлежит $C(\overline{\Omega}^+)$ и удовлетворяет условию Гёльдера по x, откуда следует, что решение $u(x,y)$ задачи (1)–(3) регулярно и в Ω^+.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
2. *Пулькина Л. С.* Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1-го и 2-го рода // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 32–44.
3. *Кожанов А. И.* Разрешимость краевых задач для линейных параболических уравнений в случае задания интегрального по временной переменной условия // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 20-30.
4. *Мамчуев М. О.* Необходимые нелокальные условия для диффузионно-волнового уравнения // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2014. № 7. С. 45–59.
5. *Моисеев Е. И., Корзюк В. И., Козловская И. С.* Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1373–1385.
6. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.
7. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012.
8. *Кожанов А. И.* О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Докл. АН. 2009. Т. 427, № 6. С. 747–749.
9. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для одномерного гиперболического уравнения и ее связь с нагруженным дифференциальным уравнением // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. Академии Наук. 2013. Т. 15, № 2. С. 68–72.
10. *Хубиев К. У.* Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения гиперболо-параболического типа // Тр. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, 24–27 июня 2008 г.). Стерлитамак, 2008. Т. 2. С. 180–184.
11. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
12. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
13. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995.

Статья поступила 18 октября 2016 г.

Хубиев Казбек Узеирович
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ул. Шортанова, 89А, Нальчик 360000
khubiev_math@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

UDC 517.95

A PROBLEM WITH AN INTEGRAL CONDITION IN THE HYPERBOLIC PART FOR A CHARACTERISTICALLY LOADED HYPERBOLIC–PARABOLIC EQUATION

K. U. Khubiev

Abstract. We prove the uniqueness and existence of solutions of a model characteristically loaded mixed hyperbolic-parabolic equation. The Tricomi method is applied for establishing the solution uniqueness and the existence is proved with the use of the integral equation method.
Keywords: loaded equation, mixed type equation, hyperbolic-parabolic equation, nonlocal problem, integral condition.

REFERENCES

1. *Kozhanov A. I. and Pul'kina L. S.* "On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations," Differ. Equ., **42**, No. 9, 1166–1179 (2006).
2. *Pul'kina L. S.* "A nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-dependent kernels," Russ. Math., **56**, No. 10, 26–37 (2012).
3. *Kozhanov A. I.* "Solvability of boundary value problems for linear parabolic equations with a boundary condition of integral form in time variables," Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 4, 20–30 (2014).
4. *Mamchuev M. O.* "Necessary non-local conditions for a diffusion-wave equation," Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser., No. 7, 45–59 (2014).
5. *Moiseev E. I., Korzyuk V. I., and Kozlovskaya I. S.* "Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional wave equation," Differ. Equ., **50**, No. 10, 1364–1377 (2014).
6. *Nakhushev A. M.* "Approximate method of solving boundary-value problems for differential equations and its application to the dynamics of ground moisture and ground water," Differ. Equations, **18**, 60–67 (1982).
7. *Nakhushev A. M.*, Loaded Equations and their Applications [in Russian], Nauka, Moscow (2012).
8. *Kozhanov A. I.* "Solvability of some spatially nonlocal boundary value problems for second-order linear hyperbolic equations," Dokl. Math., **80**, No. 1, 599–601 (2009).
9. *Pul'kina L. S.* "A nonlocal problem with conditions of integral form for the first-order hyperbolic equation and its connection with the loaded differential equation," Dokl. Adygsk. (Cherkess.) Mezhdunar. Akad. Nauk, **15**, No. 2, 68–72 (2013).
10. *Khubiev K. U.* "On some nonlocal boundary value problem for the hyperbolic-parabolic equations," Proc. Int. Conf. "Differential Equations and Related Problems" (Sterlitamak, June 24–27, 2008), **2**, 180–184 (2008).
11. *Nakhushev A. M.*, Fractional Calculus and its Applications [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2003).

12. *Tikhonov A. N. and Samarskii A. A.*, Equations of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1977).

13. *Nakhushev A. M.*, Equations of Mathematical Biology [in Russian], Vysshaya Shkola, Moscow (1995).

Submitted October 18, 2016

Khubiev Kazbek Uzeirovich
Applied Mathematics and Automation Institute,
89A Shortanov Street, Nal'chik 360000, Russia
khubiev_math@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

УДК 519.853

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОДНОСТОРОННЕМ КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ С ОГРАНИЧЕННОЙ ЗОНОЙ КОНТАКТА

А. В. Жильцов

Аннотация. Рассматривается задача об одностороннем контакте двух упругих тел. Это статическая задача в перемещениях. Тела находятся под воздействием объемных и поверхностных сил, силы трения отсутствуют. Дано обоснование использования метода модифицированных функционалов Лагранжа. Приведены результаты численных расчетов.
Ключевые слова: контакт упругих тел, функционалы Лагранжа, метод конечных элементов, методы двойственности.

Введение

Важным приложением теории вариационных неравенств является задача об одностороннем контакте упругих тел. Один из простейших случаев этой задачи — контакт двух тел при отсутствии сил трения с ограниченной зоной контакта.

В статье рассматривается модель, в которой на границе контакта тел задано условие взаимного непроникновения берегов. Использование функционалов Лагранжа позволяет снять подобное ограничение. Однако в полукоэрцитивных задачах использование классического функционала Лагранжа не гарантирует сходимость известных методов поиска седловых точек. В данной работе исследуется модифицированный функционал Лагранжа, позволяющий построить алгоритм, сходящийся к седловой точке как по прямой, так и по двойственной переменной.

1. Описание модели

Пусть $\Omega', \Omega'' \subset \mathbb{R}^2$ — два плоских упругих тела с липшицевыми границами $\partial\Omega', \partial\Omega''$ (в дальнейшем один и два штриха соответствуют телам Ω' и Ω''). Границы тел разбиты на участки:

$$\partial\Omega' = \overline{\Gamma_u} \cup \overline{\Gamma'_\tau} \cup \Gamma_K, \quad \partial\Omega'' = \overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma''_\tau} \cup \Gamma_K,$$

причем Γ_u и Γ_K имеют положительную меру.

На тела действуют объемные силы F и поверхностные силы P, силы трения отсутствуют. Обозначим через $u^M = \left(u_1^M, u_2^M\right)$ вектор перемещений $(M = ', '')$. Введем элементы тензора деформации

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

и тензора напряжений $\sigma_{ij} = c_{ijkm}\varepsilon_{km}$ [1]. Для компонент тензора упругости c_{ijkm} выполняется свойство симметрии $c_{ijkm} = c_{jikm} = c_{kmij}$ и существует константа $c_0 > 0$ такая, что всюду в $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$ справедлива оценка $c_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \geq c_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$ для любых ε_{ij}.

Формулы (1)–(7) представляют краевую постановку задачи [2, 3]:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij}n_j = P_i \text{ на } \Gamma_\tau = \Gamma'_\tau \cup \Gamma''_\tau, \tag{2}$$

$$u' = 0 \text{ на } \Gamma_u \subset \partial\Omega', \tag{3}$$

$$u''_n = u''_i n''_i = 0 \text{ на } \Gamma_0 \subset \partial\Omega'', \tag{4}$$

в зоне контакта Γ_K выполняется условие взаимного непроникновения

$$u'_n + u''_n \leq 0, \quad \sigma'_n = \sigma''_n \leq 0, \tag{5}$$

$$(u'_n + u''_n)\sigma'_n = 0, \tag{6}$$

$$\sigma'_\tau = \sigma''_\tau = 0. \tag{7}$$

Для записи вариационной формы задачи определяются пространства функций перемещений

$$\mathscr{H}^k(\Omega) = \{v : v = (v', v'') \in [H^k(\Omega')]^2 \times [H^k(\Omega'')]^2\},$$

возможных перемещений

$$V = \{v \in \mathscr{H}^1(\Omega) : v' = 0 \text{ на } \Gamma_u, v''_n = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

и допустимых перемещений

$$K = \{v \in V : v'_n + v''_n \leq 0 \text{ на } \Gamma_K\}.$$

На множестве K необходимо найти минимум функционала энергии:

$$\mathscr{L}(v) = \frac{1}{2}A(v, v) - FP(v) \to \min_{v \in K}, \tag{8}$$

где

$$A(u, v) = \int\limits_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, d\Omega, \quad FP(v) = \int\limits_\Omega F_i v_i\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_\tau} P_i v_i\, ds.$$

Решение задачи (8) называется *слабым решением* (1)–(7). Каждое классическое решение является слабым решением. А если слабое решение достаточно гладкое, то оно и классическое [2].

2. Рассматриваемый случай и существование решения

Если одно из тел зафиксировано (условие (3)), то пространство жестких перемещений трехмерное:

$$R = \{z \in \mathscr{H}^1(\Omega) : z = (z', z''),\ z' = 0, z_1'' = a_1'' - b'' x_2,\ z_2'' = a_2'' + b'' x_2\}, \qquad (9)$$

где $a_1'', a_2'', b'' \in \mathbb{R}^1$. Оно является ядром билинейной формы $A(\cdot, \cdot)$.

В работе рассматривается случай, когда тела представляют собой прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям, Γ_0 — часть границы тела Ω'', параллельная Ox_2.

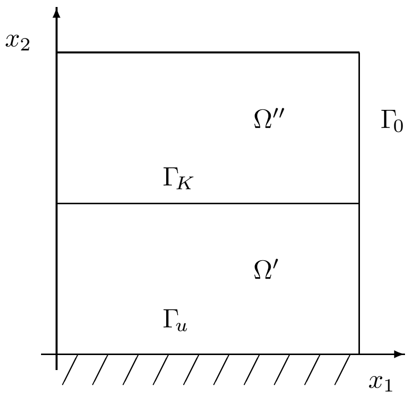

Рис. 1. Расположение тел и их границ.

Для верхнего тела на Γ_0 вектор нормали $n'' = (1, 0)$, так что $z_n'' = 0$ при любых $x_1, x_2 \in \Gamma_0$ только в случае, когда $a_1'' = b'' = 0$. Таким образом,

$$R \cap V = \{z \in \mathscr{H}^1(\Omega) : z = (z', z''),\ z' = (0, 0),\ z'' = (0, a)\}.$$

На Γ_K вектор нормали $n_2'' = (0, -1)$, так что для $y \in K \cap R \subset V \cap R$

$$y_n' + y_n'' = a n_2'' \le 0 \text{ на } \Gamma_K \iff a > 0.$$

В таком случае при выполнении условия

$$V_2'' = \int\limits_{\Omega} F_2''\, dx + \int\limits_{\Gamma_\tau''} P_2''\, ds < 0 \qquad (10)$$

будет справедливо следующее:

$$\forall y \in K \cap R \quad FP(y) \le 0, \quad \forall y \in (K \cap R) \setminus \{0\} \quad FP(y) < 0.$$

Таким образом, согласно теореме 2.4 из [2, с. 127] функционал $\mathscr{L}(\cdot)$ коэрцитивен на K и существует единственное слабое решение задачи. В дальнейшем предполагаем, что условие разрешимости (10) выполняется и решение принадлежит пространству $\mathscr{H}^2(\Omega)$.

3. Модифицированная схема двойственности

Для решения задачи (8) мы применяем модифицированные функционалы Лагранжа. Этот метод двойственности позволяет снять ограничение $v'_n + v''_n \leq 0$, и вместо минимизации функционала $\mathscr{L}(\cdot)$ на K в задаче (8) проводить минимизацию на более широком пространстве V.

Обозначим $K_m = \{v \in V : (v'_n + v''_n) \leq m \text{ на } \Gamma_K\}$. Если функция $m \in L_2(\Gamma_K)$ ограничена снизу на Γ_K, то соответствующее ей множество K_m непустое. Множество K_m может быть пустым, если m принадлежит $L_2(\Gamma_K) \setminus \mathscr{H}^{1/2}(\Gamma_K)$ и не ограничена снизу на Γ_K [4].

Определим вспомогательный функционал $K_L(\cdot, \cdot, \cdot)$ соотношением

$$K_L(v, l, m) = \begin{cases} \mathscr{L}(v) + \int\limits_{\Gamma_K} lm\, ds, & \text{если } K_m \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } K_m = \varnothing. \end{cases}$$

Тогда для $l \in (L_2(\Gamma_K))^+$ классический функционал Лагранжа можно сформировать следующим образом:

$$L(v, l) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} K_L(v, l, m) = \mathscr{L}(v) + \int\limits_{\Gamma_K} l(v'_n + v''_n)\, ds.$$

Теорема 1. *Если решение u задачи (8) принадлежит $\mathscr{H}^2(\Omega)$, то классический функционал Лагранжа $L(\cdot, \cdot)$ обладает седловой точкой $(u, -\sigma'_n)$ на $V \times (L_2(\Gamma_K))^+$, т. е.*

$$L(u, l) \leq L(u, -\sigma'_n) \leq L(v, -\sigma'_n) \quad \forall (v, l) \in V \times (L_2(\Gamma_K))^+.$$

Доказательство. Так как $(u'_n + u''_n) \leq 0$, $\sigma'_n \leq 0$, $(u'_n + u''_n)\sigma_n = 0$, получаем левую часть неравенства седловой точки:

$$L(u, l) = \frac{1}{2}A(u, u) - FP(u) + \int\limits_{\Gamma_K} l(u'_n + u''_n)\, ds \leq \frac{1}{2}A(u, u) - FP(u)$$
$$= \frac{1}{2}A(u, u) - FP(u) + \int\limits_{\Gamma_K} (-\sigma'_n)(u'_n + u''_n)\, ds = L(u, -\sigma'_n).$$

Чтобы показать выполнение правой части неравенства седловой точки, покажем неотрицательность разности

$$L(v, -\sigma'_n) - L(u, -\sigma'_n) = \mathscr{L}(v) - \mathscr{L}(u) + \int\limits_{\Gamma_K} (-\sigma'_n)((v'_n + v''_n) - (u'_n + u''_n))\, ds$$
$$= \int\limits_{\Omega} c_{ijkm}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{km}(v - u)\, d\Omega - \int\limits_{\Omega} F_i(v_i - u_i)\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_K} P_i(v_i - u_i)\, ds$$
$$- \int\limits_{\Gamma_K} \sigma'_n((v'_n + v''_n) - (u'_n + u''_n))\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} c_{ijkm}\varepsilon_{ij}(v - u)\varepsilon_{km}(v - u)\, d\Omega.$$

Здесь первые четыре слагаемых в сумме дают нуль, а пятое слагаемое неотрицательно. Таким образом, $(u, -\sigma_n')$ — седловая точка классического функционала Лагранжа. $\square$

Теперь определим функционал $K_M(\cdot,\cdot,\cdot)$:

$$K_M(v,l,m) = \begin{cases} \mathscr{L}(v) + \int\limits_{\Gamma_K} lm\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2\,ds, & \text{если } K_m \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } K_m = \varnothing, \end{cases}$$

и построим модифицированный функционал Лагранжа

$$M(v,l) = \inf_{m\in L_2(\Gamma_K)} K(v,l,m) = \inf_{\substack{m\in L_2(\Gamma_K):\\ (v_n'+v_n'')\le m}} \left\{\mathscr{L}(v) + \int\limits_{\Gamma_K}\left(lm + \frac{r}{2}m^2\right)ds\right\}$$

$$= \mathscr{L}(v) + \frac{1}{2r}\inf_{\substack{m\in L_2(\Gamma_K):\\ (v_n'+v_n'')\le m}} \int\limits_{\Gamma_K}((l+rm)^2 - l^2)\,ds$$

$$= \mathscr{L}(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_{\Gamma_K}(((l + r(v_n'+v_n''))^+)^2 - l^2)\,ds,$$

где $r = \mathrm{const} > 0$, $(l + r(v_n'+v_n''))^+ = \max\{0, l + r(v_n'+v_n'')\}$.

Определение 1. Пара $(v^*, l^*) \in V \times L_2(\Gamma_K)$ называется *седловой точкой функционала* $M(\cdot,\cdot)$, если выполняется двустороннее неравенство

$$M(v^*, l) \le M(v^*, l^*) \le M(v, l^*) \quad \forall (v,l) \in V \times L_2(\Gamma_K).$$

Введем функционалы

$$\underline{M}(l) = \inf_{v\in V} M(v,l), \quad \overline{M}(v) = \sup_{l\in L_2(\Gamma_K)} M(v,l).$$

Если $v \in K$, то выполняется условие $(v_n'+v_n'') \le 0$ на Γ_K. Тогда $K_M(v,l,0) = \mathscr{L}(v)$ для всех $l \in L_2(\Gamma_K)$ и, следовательно, можно точно сказать, что

$$M(v,l) = \inf_{m\in L_2(\Gamma_K)} K_M(v,l,m) \le \mathscr{L}(v) \quad \forall v \in K.$$

Тем самым

$$\overline{M}(v) = \sup_{l\in L_2(\Gamma_K)} M(v,l) \le \mathscr{L}(v) \quad \forall v \in K. \tag{11}$$

Если $(v_n' + v_n'') \le m$, то

$$K_M(v,0,m) = \mathscr{L}(v) + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2\,ds.$$

Поэтому для всех $v \in V$ будет верно следующее:

$$M(v,0) = \inf_{m\in L_2(\Gamma_K)} K_M(v,0,m) = \inf_{\substack{m\in L_2(\Gamma_K):\\ (v_n'+v_n'')\le m}} \left\{\mathscr{L}(v) + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2\,ds\right\}$$

$$= \mathscr{L}(v) + \frac{r}{2}\inf_{\substack{m\in L_2(\Gamma_K):\\ (v_n'+v_n'')\le m}} \int\limits_{\Gamma_K} m^2\,ds \ge \mathscr{L}(v),$$

так что
$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(v,l) \geq M(v,0) \geq \mathscr{L}(v) \quad \forall v \in V. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что
$$\overline{M}(v) = \mathscr{L}(v) \quad \forall v \in K. \tag{13}$$

Очевидно, что $K_M(v,l,m) \geq K_L(v,l,m)$, и тем самым
$$M(v,l) \geq L(v,l) \quad \forall l \in (L_2(\Gamma_K))^+.$$
Тогда $\overline{M}(v) \geq \overline{L}(v)$, где $\overline{L}(v) = \sup\limits_{l \in (L_2(\Gamma_K))^+} L(v,l)$.

Если $v \notin K$, то
$$\overline{L}(v) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma_K))^+} L(v,l) = +\infty. \tag{14}$$
Из (13) и (14) следует, что
$$\overline{M}(v) = \begin{cases} \mathscr{L}(v), & \text{если } v \in K, \\ +\infty, & \text{если } v \notin K. \end{cases} \tag{15}$$
Поэтому, используя модифицированный функционал Лагранжа, можно исходную задачу представить в виде
$$\overline{M}(v) \to \min_{v \in V}, \tag{16}$$
а двойственную задачу — в виде
$$\underline{M}(l) \to \max_{l \in L_2(\Gamma_K)}. \tag{17}$$

На $L_2(\Gamma_K)$ определим функционал чувствительности
$$\chi(m) = \begin{cases} \inf\limits_{v \in K_m} \mathscr{L}(v), & \text{если } K_m \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } K_m = \varnothing. \end{cases}$$

Этот функционал является выпуклым на $\operatorname{dom}\chi$. По определению $\chi(0) = \inf\limits_{v \in K} \mathscr{L}(v)$.

Теорема 2. *Функционал чувствительности $\chi(\cdot)$ является слабо полунепрерывным снизу функционалом на $L_2(\Gamma_K)$.*

Доказательство. По аналогии с [4, 5]. □

Функционал для $\underline{M}(\cdot)$ имеет два представления [7]
$$\underline{M}(l) = \inf_{v \in V} \left\{ \mathscr{L}(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_K} (((l + r(v'_n + v''_n))^+)^2 - l^2)\, ds \right\}, \tag{18}$$
$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} \left\{ \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} lm\, ds + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_K} m^2\, ds \right\}. \tag{19}$$
Первое используется непосредственно в алгоритме поиска седловой точки, а второе необходимо для доказательства представленных далее теорем.

Теорема 3. *Точка (v^*, l^*) тогда и только тогда является седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа $M(\cdot,\cdot)$, когда v^* — решение исходной задачи* (8) *и для всех $m \in L_2(\Gamma_K)$ выполняется неравенство*

$$\chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} l^* m\, ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2\, ds \geq \chi(0).$$

Доказательство. Предположим, что (v^*, l^*) — седловая точка $M(\cdot,\cdot)$. Это значит, что выполняется двустороннее неравенство

$$M(v^*, l) \leq M(v^*, l^*) \leq M(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in V \times L_2(\Gamma_K).$$

Тогда

$$\sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(v^*, l) = M(v^*, l^*) = \inf_{v \in V} M(v, l^*),$$

$$\overline{M}(v^*) = \underline{M}(l^*). \tag{20}$$

Кроме того, из определения $\overline{M}(\cdot)$ и $\underline{M}(\cdot)$ ясно, что

$$\inf_{v \in V} \overline{M}(v) \geq \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} \underline{M}(l). \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что v^* — решение (16), а l^* — решение (17). Из (15) теперь следует, что v^* — решение задачи (8). Можно записать такую цепочку равенств:

$$\underline{M}(l^*) = \overline{M}(v^*) = \chi(0),$$

которая означает, что

$$\underline{M}(l^*) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} \left\{ \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} l^* m\, ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2\, ds \right\} = \chi(0),$$

$$\chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} l^* m\, ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2\, ds \geq \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\Gamma_K).$$

Теперь предположим, что $v^* = u$ есть решение задачи (8) и выполняется неравенство

$$\chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} l^* m\, ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2\, ds \geq \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\Gamma_K). \tag{22}$$

Согласно (19)

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} \left\{ \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} l m\, ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2\, ds \right\}.$$

Вместе с (22) это дает

$$\underline{M}(l^*) \geq \chi(0) = \overline{M}(u).$$

Так как $\overline{M}(v) \geq \underline{M}(l)$ $\forall v \in V$, $\forall l \in L_2(\Gamma_K)$, получаем $\underline{M}(l^*) = \overline{M}(u)$, или

$$\inf_{v \in V} M(v, l^*) = \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(u, l).$$

Очевидно, что для $M(u, l^*)$ выполняется двойное неравенство

$$\inf_{v \in V} M(v, l^*) \leq M(u, l^*) \leq \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(u, l),$$

тем самым (по предположению $v^* = u$)

$$\inf_{v \in V} M(v, l^*) = M(u, l^*) = \sup_{l \in L_2(\Gamma_K)} M(v^*, l),$$

Это приводит нас к неравенству седловой точки

$$M(v^*, l) \leq M(u, l^*) \leq M(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in V \times L_2(\Gamma_K). \quad \square$$

Теорема 4. *Пусть $u \in \mathscr{H}^2(\Omega)$. Тогда $(u, -\sigma'_n)$ — седловая точка модифицированного функционала Лагранжа $M(\cdot, \cdot)$.*

Доказательство. По теореме 1

$$L(u, l) \leq L(u, -\sigma'_n) \leq L(v, -\sigma'_n) \quad \forall (v, l) \in V \times (L_2(\Gamma_K))^+.$$

Это означает, что

$$\sup_{l \in (L_2(\Gamma_K))^+} L(u, l) = L(u, -\sigma'_n) = \inf_{v \in V} L(v, -\sigma'_n) \quad \forall (v, l) \in V \times (L_2(\Gamma_K))^+.$$

$$\overline{L}(u) = L(u, -\sigma'_n) = \underline{L}(-\sigma'_n).$$

Имеем

$$\overline{L}(u) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma_K))^+} \left\{ \mathscr{L}(u) + \int\limits_{\Gamma_K} l(u'_n + u''_n)\, ds \right\} = \mathscr{L}(u) = \chi(0),$$

$$\begin{aligned} L(u, -\sigma'_n) &= \inf_{v \in V} L(v, -\sigma'_n) = \inf_{v \in V} \inf_{m \in L_2(\Gamma_K)} K_L(v, -\sigma'_n, m) \\ &= \inf_m \inf_v K_L(v, -\sigma'_n, m) = \inf_m \inf_{\substack{v \in V: \\ (v'_n + v''_n) \leq m}} \left\{ \mathscr{L}(v) + \int\limits_{\Gamma_K} (-\sigma'_n) m\, ds \right\} \\ &= \inf_m \left\{ \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} (-\sigma'_n) m\, ds \right\}. \end{aligned}$$

Из написанного следует, что

$$\chi(0) = \inf_m \left\{ \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} (-\sigma'_n) m\, ds \right\},$$

или

$$\chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} (-\sigma'_n) m\, ds \geq \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\Gamma_K).$$

На основании того, что

$$\chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} (-\sigma_n')m\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2 \geq \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} (-\sigma_n')m\,ds \geq \chi(0),$$

и теоремы 3 делаем вывод, что $(u, -\sigma_n')$ — седловая точка модифицированного функционала Лагранжа $M(\cdot,\cdot)$. $\square$

Рассмотрим функционал, построенный при фиксированном $l \in L_2(\Gamma_K)$

$$F_l(m) = \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} lm\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2\,ds, \quad r > 0 - \text{ const}.$$

Благодаря третьему слагаемому этот функционал сильно выпуклый, а с учетом теоремы 2 он еще и слабо полунепрерывный в $L_2(\Gamma_K)$.

Так как $\chi(\cdot)$ слабо полунепрерывный снизу в $L_2(\Gamma_K)$, его надграфик epiχ есть выпуклое замкнутое множество в $L_2(\Gamma_K)\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. По теореме отделимости существуют такие $\alpha \in L_2(\gamma)$ и $a \in \mathbb{R}$, что

$$\int\limits_{\Gamma_K} \alpha m\,ds + \chi(m) + a \geq 0 \quad \forall m \in \operatorname{dom}\chi.$$

Следовательно, для функционала $F_l(\cdot)$ справедлива оценка

$$F_l(m) \geq -\int\limits_{\Gamma_K} \alpha m\,ds + \int\limits_{\Gamma_K} lm\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2\,ds - a \quad \forall m \in L_2(\Gamma_K).$$

Поэтому $F_l(m) \longrightarrow +\infty$ при $\|m\|_{0,\Gamma_K} \longrightarrow \infty$, т. е. $F_l(\cdot)$ коэрцитивен в $L_2(\Gamma_K)$.

Из слабой полунепрерывности снизу и коэрцитивности $F_l(\cdot)$ следует существование элемента $m(l) = \underset{m\in L_2(\Gamma_K)}{\arg\min}\ F_l(m)$. Сильная выпуклость $F_l(\cdot)$ на $\operatorname{dom}\chi$ обеспечивает единственность элемента $m(l)$ для любого $l \in L_2(\Gamma_K)$.

Теорема 5. *Двойственный функционал* $\underline{M}(\cdot)$ *непрерывен в* $L_2(\Gamma_K)$.

Доказательство. Для любого $m \in \operatorname{dom}\chi$ сильная выпуклость $F_l(\cdot)$ дает

$$\chi(m(l)) + \int\limits_{\Gamma_K} lm(l)\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2(l)\,ds + \frac{r}{2}\|m - m(l)\|^2_{0,\Gamma_K}$$
$$\leq \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} lm\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m^2\,ds.$$

Возьмем два произвольных элемента $l_1, l_2 \in L_2(\Gamma_K)$, и пусть $m_1 = m(l_1)$,

$m_2 = m(l_2)$. Из последнего неравенства следует, что

$$\begin{aligned}\chi(m_1) + \int\limits_{\Gamma_K} l_1 m_1\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m_1^2\,ds + \frac{r}{2}\|m_2 - m_1\|^2_{0,\Gamma_K} \\ \le \chi(m_2) + \int\limits_{\Gamma_K} l_1 m_2\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m_2^2\,ds, \\ \chi(m_2) + \int\limits_{\Gamma_K} l_2 m_2\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m_2^2\,ds + \frac{r}{2}\|m_1 - m_2\|^2_{0,\Gamma_K} \\ \le \chi(m_1) + \int\limits_{\Gamma_K} l_2 m_1\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K} m_1^2\,ds.\end{aligned} \tag{23}$$

Складывая неравенства (23), получаем неравенство

$$r\|m_1 - m_2\|^2_{0,\Gamma_K} \le \int\limits_{\Gamma_K} (l_1 - l_2)(m_2 - m_1)\,ds,$$

которое дает оценку

$$\|m_1 - m_2\|_{0,\Gamma_K} \le \frac{1}{r}\|l_1 - l_2\|_{0,\Gamma_K}. \tag{24}$$

Из неравенств (23) также получается соотношение

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_K} l_2(m_2 - m_1)\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K}\left(m_2^2 - m_1^2\right)ds \le \chi(m_1) - \chi(m_2) \\ \le \int\limits_{\Gamma_K} l_1(m_2 - m_1)\,ds + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_K}\left(m_2^2 - m_1^2\right)ds.\end{aligned}$$

Перейдем в этом соотношении к пределу при $l_2 \longrightarrow l_1$ в $L_2(\Gamma_K)$. С учетом (24) получаем

$$\lim_{l_2 \to l_1} \chi(m_2) = \chi(m_1).$$

Отсюда делаем вывод о том, что функционал $\underline{M}(\cdot)$ непрерывен в $L_2(\Gamma_K)$. $\square$

Теорема 6. *Двойственный функционал $\underline{M}(\cdot)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\Gamma_K)$ и его производная $\nabla\underline{M}(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/r$, т. е.*

$$\|\nabla\underline{M}(l_1) - \nabla\underline{M}(l_2)\|_{0,\Gamma_K} \le \frac{1}{r}\|l_1 - l_2\|_{0,\Gamma_K} \quad \forall l_1, l_2 \in L_2(\Gamma_K).$$

Доказательство. Из непрерывности вогнутого функционала $\underline{M}(\cdot)$ следует его субдифференцируемость. Пусть $t \in \partial\underline{M}(l)$ — некоторый субдифференциал для $l \in L_2(\Gamma_K)$. Тогда для любого $\xi \in L_2(\Gamma_K)$ справедливо соотношение

$$\underline{M}(\xi) \le \underline{M}(l) + (t, \xi - l)_{0,\Gamma_K},$$

из которого получаем неравенство

$$\chi(m(\xi)) + \int\limits_{\Gamma_K} \xi m(\xi)\, ds + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_K} m^2(\xi)\, ds$$
$$\le \chi(m(l)) + \int\limits_{\Gamma_K} l m(l)\, ds + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_K} m^2(l)\, ds + (t, \xi - l)_{0,\Gamma_K}$$
$$\le \chi(m(\xi)) + \int\limits_{\Gamma_K} l m(\xi)\, ds + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_K} m^2(\xi)\, ds + (t, \xi - l)_{0,\Gamma_K}.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\int\limits_{\Gamma_K} m(\xi)(\xi - l)\, ds \le (t, \xi - l)_{0,\Gamma_K} \quad \forall \xi \in L_2(\Gamma_K).$$

Для произвольных $h \in L_2(\Gamma_K)$ и $\beta > 0$ положим $\xi = l + \beta h$. Тогда последнее неравенство запишется в виде

$$\int\limits_{\Gamma_K} m(l + \beta h) h\, ds \le (t, h)_{0,\Gamma_K} \quad \forall h \in L_2(\Gamma_K).$$

Устремляя β к нулю и учитывая (24), получаем

$$\int\limits_{\Gamma_K} m(l) h\, ds \le (t, h)_{0,\Gamma_K} \quad \forall h \in L_2(\Gamma_K),$$

следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma_K} m(l) h\, ds = (t, h)_{0,\Gamma_K} \quad \forall h \in L_2(\Gamma_K).$$

В силу единственности элемента $m(l)$ для любого $l \in L_2(\Gamma_K)$ из полученного равенства следует, что функционал $\underline{M}(\cdot)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\Gamma_K)$, причем $\nabla \underline{M}(l) = t = m(l)$. Неравенство (24) дает константу Липшица, завершая доказательство теоремы. $\square$

Вычисление $\underline{M}(l)$ само по себе требует решения экстремальной задачи. Но поскольку градиент функционала $\underline{M}(\cdot)$ липшиц-непрерывен, для решения двойственной задачи (17) можно использовать градиентный метод

$$l^{k+1} = l^k + \theta_k \nabla \underline{M}(l^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

с любым начальным $l^0 \in L_2(\Gamma_K)$, шагом $\theta_k \in [\beta, 2r - \beta]$ при $\beta \in (0, r]$ и градиентом

$$\nabla \underline{M}(l^k) = \operatorname*{arg\,min}_{m \in L_2(\Gamma_K)} \Big\{ \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} l^k m\, ds + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_K} m^2\, ds \Big\}.$$

Теорема 7. *Для алгоритма* (25) *выполняется предельное равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla \underline{M}(l^k)\|_{L_2(\Gamma_K)} = 0.$$

Доказательство аналогично [8, с. 31]. □

Алгоритм (25) можно переписать следующим образом [5, 7]:

$$\begin{aligned} &(i) \qquad u^{k+1} = \arg\min_{v\in V} \left\{ \mathscr{L}(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_K} (((l^k + r(v_n' + v_n''))^+)^2 - (l^k)^2)\, ds \right\} \\ &(ii) \qquad l^{k+1} = l^k + r \max\left\{ (u_n' + u_n'')^{k+1}, -\frac{l^k}{r} \right\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Алгоритм (26) сходится по функционалу, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{L}(u^k) = \min_{v\in K} \mathscr{L}(v).$$

С одной стороны, слабая полунепрерывность $\chi(\cdot)$ обеспечивает выполнение неравенства

$$\varliminf_{k\to\infty} \left\{ \chi(m(l^k)) + \int\limits_{\Gamma_K} l^k m(l^k)\, ds + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_K} m^2(l^k)\, ds \right\} = \varliminf_{k\to\infty} \chi(m(l^k)) \geq \chi(0) = \mathscr{L}(u^*).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \underline{M}(l^k) &= \chi(m(l^k)) + \int\limits_{\Gamma_K} l^k m(l^k) ds + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_K} m^2(l^k)\, ds \\ &= \inf_{m\in L_2(\Gamma_K)} \left\{ \chi(m) + \int\limits_{\Gamma_K} l^k m\, ds + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_K} m^2\, ds \right\} \leq \chi(0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Отсюда получается неравенство

$$\varlimsup_{k\to\infty} \left\{ \chi(m(l^k)) + \int\limits_{\Gamma_K} l^k m(l^k)\, ds + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_K} m^2(l^k)\, ds \right\} \leq \chi(0).$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \chi(m(l^k)) + \int\limits_{\Gamma_K} l^k m(l^k)\, ds + \frac{r}{2} \int\limits_{\Gamma_K} m^2(l^k)\, ds \right\} = \chi(0) = \mathscr{L}(u^*).$$

Из теоремы 7 теперь следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{L}(u^k) = \lim_{k\to\infty} \chi(m(l^k)) = \chi(0) = \mathscr{L}(u^*).$$

В предположении, что решение u^* задачи (8) обладает $H^2(\Omega)$-гладкостью, можно доказать [4], что метод (26) сходится к единственной седловой точке $(u^*, -\sigma_n)$ функционала Лагранжа.

4. Численный эксперимент

В проведенных расчетах Ω является единичным квадратом, состоящим из двух одинаковых прямоугольников (рис. 2). Правая стенка Ω'' может перемещаться только в вертикальном направлении ($\Gamma_0 = \{(x, y) : x = 1, 0.5 \leq y \leq 1\}$). На левую треть верхней стороны тела Ω'' воздействует сила $P_2'' = -60$. Объемные силы отсутствуют. Модуль упругости $E = 73 \cdot 10^3$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,34$.

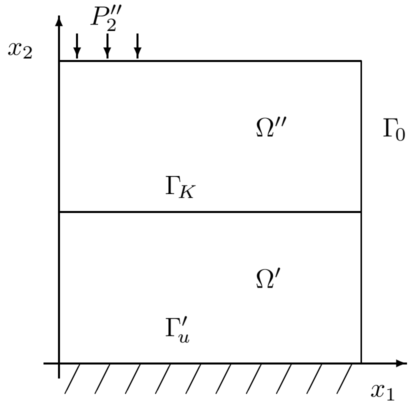

Рис. 2. Распределение поверхностной силы P_2''.

В таком случае условие разрешимости (10) выполняется.

Алгоритм поиска седловой точки (26) реализуется в виде двух циклов. Во внутреннем осуществляется шаг (i), на котором ищется минимум функционала Лагранжа на всем множестве V при фиксированном l^k. В данной работе для этого используется метод покоординатного спуска. Во внешнем цикле осуществляется шаг (ii), где происходит уточнение двойственной переменной.

repeat
    repeat
        $u^{k+1} = \operatorname*{argmin}_{v \in V} \big\{ \mathscr{L}(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_K} \big(((l^k + r(v_n' + v_n''))^+)^2 - (l^k)^2 \big)\, ds \big\};$
    until $\max\limits_i |u_i^{k+1} - u_i^k| \leq 10^{-6} \cdot \varepsilon \cdot h;$
    $l^{k+1} = l^k + r \max \big\{ (u_n' + u_n'')^{k+1}, -\frac{l^k}{r} \big\};$
until $\max\limits_i |l_i^{k+1} - l_i^k| \leq \varepsilon;$

Для моделирования используется метод конечных элементов. Для конечномерного случая можно доказать теоремы, аналогичные приведенным выше [9]. В этом алгоритме u_i и l_i — вектор перемещения и двойственная переменная в i-м узле триангуляции.

При $\varepsilon = 10^{-5}$ и шаге триангуляции $h = 1/50$ была проведена серия расчетов для разных значений параметра метода r. Результаты представлены в табл. 1. Как видно, при больших значениях r метод позволяет уменьшить число итераций по двойственной переменной.

Таблица 1. Зависимость числа итераций от параметра r

Параметр r	Внутренние итерации	Внешние итерации	Время (сек.)
10^8	66534	4	104
10^9	56891	3	93
10^{10}	52201	3	81
10^{11}	48466	3	75
10^{12}	48042	3	74

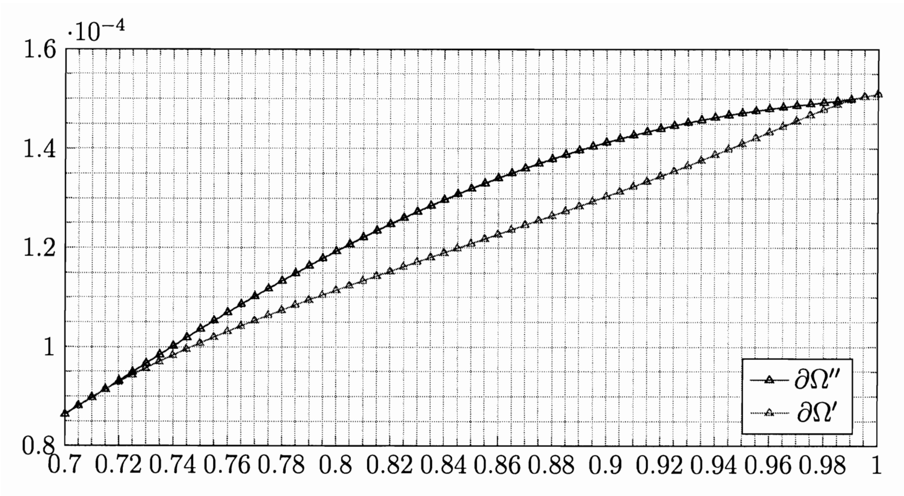

Рис. 3. Вид зоны контакта Γ_K в месте расхождения тел (при $h = \frac{1}{200}$).

На небольшом участке $[0.715, 0.990] \subset \Gamma_K$ тела разошлись. Вид зоны контакта в месте расхождения показан на рис. 3, сделанном для шага триангуляции $h = \frac{1}{200}$.

Для решения задачи о контакте двух упругих тел можно использовать метод Зейделя с проектированием. При таких же параметрах (критерии остановки счета, шаге триангуляции h, точности ε) этот метод решает задачу за 48000 итераций (76 секунд).

Заключение

Известные итерационные методы поиска седловой точки, основанные на классическом функционале Лагранжа, не гарантируют сходимость, если ядро билинейной формы функционала энергии не является тривиальным. В статье дано обоснование использования метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа для решения задачи о контакте двух тел и доказана сходимость по прямой и по двойственной переменной.

Численные расчеты показали, что рассмотренный метод дает решение за то же время, что и метод точечной релаксации с проектированием. Преимуществом метода Удзавы является то, что одновременно находится и значение двойственной переменной, что можно использовать в аналогичных задачах, учитывающих трение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике М.: Наука, 1980.

2. *Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И.* Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986.

3. *Кустова В. И.* Метод решения контактной задачи теории упругости с ограниченной зоной контакта // Оптимизация. 1985. Т. 53, № 36. С. 31–48.

4. *Вихтенко Э. М., Ву Г. С. Намм Р. В.* Методы решения полукоэрцитивных вариационных неравенств механики на основе модифицированных функционалов Лагранжа // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 14, № 1. С. 6–17.

5. *Жильцов А. В., Намм Р. В.* Метод множителей Лагранжа для решения модельной задачи с трещиной // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 1. С. 93–103.

6. *Вихтенко Э. М., Намм Р. В.* Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 12. С. 2023–2036.

7. *Вихтенко Э. М., Ву Г. С., Намм Р. В.* О сходимости метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа в вариационных неравенствах механики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 10, № 8. С. 1357–1366.

8. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизация. М.: Наука, 1983.

9. *Жильцов А. В., Намм Р. В.* Метод множителей Лагранжа в задаче конечномерного выпуклого программирования // Дальневост. мат. журн. 2015. Т. 15, № 1. С. 53–60.

Статья поступила 18 августа 2016 г.

Жильцов Александр Владимирович
Дальневосточный гос. университет путей сообщения,
ул. Серышева, 47, Хабаровск 680021
egrevid@gmail.com

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

UDC 519.853

MODIFIED DUALITY SCHEME FOR NUMERICAL SIMULATION OF THE CONTACT BETWEEN ELASTIC BODIES

A. V. Zhiltsov

Abstract. We consider the problem of unilateral contact of two elastic bodies, a static problem in displacements. Bodies are influenced by volume and surface forces, while frictional forces are absent. Justification of use of the modified Lagrangian functionals method is given. We provide the results of numerical calculations.
Keywords: Lagrangian functional, finite element method, duality scheme, elastic contact.

REFERENCES

1. *Duvaut G. and Lions J. L.*, Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verl., Berlin, Heidelberg (1976). (Grundlehren Math. Wiss.; V. 219).
2. *Hlávaček I., Haslinger J., Nečas J., and Lovišek J.* Solution of Variational Inequalities in Mechanics, Springer-Verl., New York (1988). (Appl. Math. Sci.; V. 66).
3. *Kustova V. I.* "A method for the solution of the contact problem with weakly coercive operator," Optimizatsiya, **36**, No. 53, 31–48 (1985).
4. *Vikhtenko E. M., Woo G. S., and Namm R. V.* "The methods for solution semi-coercive variational inequalities of mechanics on the basis of modified Lagrangian functionals," Dal'nevost. Mat. Zh., **14**, No. 1, 6–17 (2014).
5. *Zhiltsov A. V. and Namm R. V.* "Lagrange multiplier method for solving a model problem with a crack," Mat. Zamet. SVFU, **22**, No. 1, 93–103 (2015).
6. *Vikhtenko E. M. and Namm R. V.* "Duality scheme for solving the semicoercive Signorini problem with friction," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **47**, No. 12, 2023–2036 (2007).
7. *Vikhtenko E. M., Woo G. S., and Namm R. V.* "On the convergence of the Uzawa method with a modified Lagrangian functional for variational inequalities in mechanics," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **10**, No. 8, 1357–1366 (2010).
8. *Polyak B. T.*, Introduction to Optimization [in Russian], Nauka, Moscow (1983).
9. *Zhiltsov A. V. and Namm R. V.* "The Lagrange multiplier method in the finite convex programming problem," Dal'nevost. Mat. Zh., **15**, No. 1, 53–60 (2015).

Submitted August 18, 2016

Zhiltsov Alexander Vladimirovich
Far Eastern State Transport University,
47 Seryshev Street, Khabarovsk 680021, Russia
egrevid@gmail.com

УКАЗАТЕЛЬ

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья может быть представлена в виде файла в формате pdf или распечатки, подготовленной с использованием какой-либо компьютерной системы подготовки математических текстов.

5. В начале статьи указывается индекс УДК. Статья сопровождается краткой аннотацией, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках. Подготовленная с использованием компьютера графика должна быть высококачественной, не ниже 600 DPI, и не использующей шрифты Adobe, отсутствующие в пакете MikTeX.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках.

Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних трех лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в издательстве и в редакции издания в течение пяти лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство образования и науки Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. Если статья принимается к опубликованию после доработки, то автор направляет в редакцию файл ее последней версии. При подготовке файла следует использовать, как правило, макропакет AMS-TEX со стилевым файлом amsppt.

11. Предоставление файлов в форматах TEX или LaTeX возможно только при согласовании с редакцией. Автор не должен использовать необязательные авторские командные последовательности, введенные для облегчения набора. Запрещается переопределять греческие буквы, стандартные команды и т. п.

12. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

13. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

14. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.