ЯКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМ. М. К. АММОСОВА

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ЯГУ

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1994 ГОДА ВЫХОДИТ 2 РАЗА В ГОД

Том 13, вып. 2 **Июль-Декабрь, 2006**

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Аносов В. П. *К разрешимости задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения в банаховом пространстве* **3**

Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К. *(p, q)-Раскраска разреженных плоских графов* **13**

Валитов И. Р. *Обратные задачи для гиперболических уравнений с неизвестными младшими коэффициентами* **20**

Егоров Р. И., Кайгородов С. П. *О стратегии квазипараллельного преследования в полуплоскости* **30**

Кожанов А. И., Кулешова И. И. *О разрешимости первой краевой задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа* **33**

Матвеева Н. Н. *Численное решение задачи Дирихле для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения с меняющимся направлением эволюции* **42**

Местников С. В., Эверстова Г. В. *Оценки времени обнаружения в задаче поиска неподвижного объекта в прямоугольнике* **47**

Монастырева З. В. *Метод фиктивных областей в краевой задаче с нелинейными краевыми условиями Синьорини* **62**

Павлов А. Р., Ларионова И. Г., Михайлова М. В. *Итерационная разностная схема для задачи тепломассопереноса с фазовыми переходами в пористой среде* **68**

Сафиуллова Р. Р. *Обратная задача с неизвестным составным внешним воздействием при составном переопределении* **79**

Сафонова Т. А. *О краевой задаче с периодическими условиями по времени для уравнения смешанного типа второго порядка* . **95**

Софронов Е. Т. *Исследование устойчивости одной системы дифференциальных уравнений с четырьмя параметрами* **102**

Федоров Ф. М. *О связях бесконечных систем линейных алгебраических уравнений с некоторыми математическими структурами. I* **110**

Шамаев Э. И. *Существование полного минимального тора с пятью плоскими концами с одной особой точкой* **124**

Математическое моделирование

Бондарь И. М., Бондарь А. И. *Модели первого приближения и устойчивость сферического движения твердых тел* **132**

Чистяков М. Г., Кылатчанов Р. М., Никифорова А. А., Семенова А. А. *Постановка задачи гидрологического районирования методами непараметрической идентификации* **143**

Аннотации **147**

УДК 517.956

К РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. П. Аносов

1. Постановка задачи. Рассматривается следующая краевая задача:

$$L(x,D)u(x) - A(x)u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1}$$

$$u(x) = \varphi(x) \quad (x \in S), \tag{2}$$

где u — искомая, а f и φ — заданные функции со значениями в некотором банаховом пространстве E с нормой $\|\cdot\|$. Функция f определена в ограниченной открытой области Ω n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, φ — на границе S области Ω, а u — на $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$. Далее, выражение

$$L(x,D)u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u \tag{3}$$

— дифференциальный оператор второго порядка со скалярными коэффициентами $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$. Производные функции u здесь понимаются как пределы по норме E соответствующих конечно разностных отношений. Предполагается, что оператор (3) равномерно эллиптичен, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$, и что для любых вещественных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и некоторых $0 < \mu \leqslant \nu < \infty$ справедливо неравенство

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2. \tag{4}$$

© 2006 Аносов В. П.

Наконец, $A(x)$ при каждом $x \in \overline{\Omega}$ есть слабо позитивный оператор, имеющий не зависящую от x область определения $D(A)$ $(A = A(0))$.

Оператор A, действующий в банаховом пространстве E и имеющий в нем плотную область определения $D(A)$, называется *слабо позитивным* (см. [1]), если для любого $\lambda \geqslant 0$ оператор $\lambda I + A$ имеет ограниченный обратный $R(\lambda, -A) = (\lambda I + A)^{-1}$ и справедливо неравенство

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant \widetilde{C}(1 + \lambda)^{-1}. \tag{5}$$

Задача (1), (2) при $n = 1$ рассматривалась в [2], а при $n \geqslant 2$ изучалась в работах [3–5], где установлена коэрцитивная разрешимость этой задачи в некоторых пространствах Гёльдера с весом. Исследование основано на построении решения с помощью функции Грина для уравнения с постоянным оператором в пространстве и полупространстве, для которого установлены соответствующие оценки. Однако построение функции Грина для пространства и полупространства носило частный характер. В данной статье описывается новый подход к построению функции Грина для решения задачи (1), (2) в полупространстве, а также уточняются результаты, касающиеся решения задачи (1), (2).

2. Функциональные пространства. Введем несколько пространств абстрактных функций. Через $C_{l+\alpha}(\Omega, E)$ обозначим пространство Гёльдера с естественной нормой $\|\cdot\|_{C_{l+\alpha}(\Omega,E)}$, состоящее из l раз непрерывно дифференцируемых функций, производные порядка l которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α. Пусть d_x обозначает расстояние от точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ до границы S, и пусть $d_{x^1x^2} = \min\{d_{x^1}, d_{x^2}\}$. Обозначим через $\widehat{C}_{\alpha,\beta}(\Omega, E) = \widehat{C}_{\alpha,\beta}$, $0 < \alpha < \alpha + \beta < 1$, банахово пространство, состоящее из непрерывных функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\widehat{C}_{\alpha,\beta}(\Omega,E)} = \sup_{x\in\Omega} d_x^{\beta}\|f(x)\| + \sup_{x^1\neq x^2\in\Omega} d_{x^1x^2}^{\alpha+\beta}\frac{\|f(x^1) - f(x^2)\|}{|x^1 - x^2|^{\alpha}}.$$

Введем также банахово пространство $\widehat{C}_{2+\alpha,\beta}(\Omega, A) = \widehat{C}_{2+\alpha,\beta}$, элементами которого являются дважды непрерывно дифференцируемые в

Ω функции, значения которых принадлежат области определения слабо позитивного оператора A и которые имеют конечную норму

$$\|u\|_{\widehat{C}_{2+\alpha,\beta}} = \|u\|_{C(\overline{\Omega},E)} + \|u\|_{C(\overline{\Omega},E)} + \|u_{x_ix_j}\|_{\widehat{C}_{\alpha,\beta}} + \|Au\|_{\widehat{C}_{\alpha,\beta}}.$$

Известно, что по оператору A можно построить дробные степени (см. [1]), причем оператор $B = -A^{\frac{1}{2}}$ является производящим оператором аналитической полугруппы (см. [7, 8]).

Оператор B является производящим оператором аналитической полугруппы $T(z) = \exp\{Bz\}$ (см. [1]) тогда и только тогда, когда резольвентное множество $\lambda(-B)$ этого оператора содержит некоторую полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ и когда при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ выполняется неравенство

$$\|R(\lambda,-B)\| \leqslant \frac{C}{1+|\lambda|}. \tag{6}$$

Из (6) (см. [1]) следует, что резольвента $R(\lambda,-B)$ оператора $-B$ определена не только при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, но и при всех значениях $\lambda = \sigma_0 + \rho e^{i\varphi}$, где $0 \leqslant \rho < \infty$,

$$\left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{c}$$

и

$$\|R(\lambda,-B)\| \leqslant \frac{c(\alpha)}{1+|\lambda|} \quad (\lambda = \sigma_0 + \rho e^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha)$$

и где α — какое угодно фиксированное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{c}\right)$. В этом случае (см. [1]) полугруппа $T(z)$ определена и аналитична в открытом секторе $Q_\alpha = \{z \mid |\arg z| < \alpha,\ 0 < |z| < \infty\}$, где $0 < \alpha \leqslant \arcsin\frac{1}{c}$, и является сильно непрерывной на замыкании $\overline{Q}_\alpha$ этого сектора, и для полугруппы справедлива оценка

$$\|B^m T(z)\| \leqslant K(\alpha)\frac{e^{\sigma_0 \operatorname{Re} z}}{(\operatorname{Re} z)^m} \quad (z \in Q_\alpha). \tag{7}$$

Далее, обозначим через $\widetilde{C}_{2+\alpha,\beta}(\Omega, A) = \widetilde{C}_{2+\alpha,\beta}$ банахово пространство, состоящее из функций u таких, что $u \in \widehat{C}_{2+\alpha,\beta}$, $A^{\frac{1}{2}}u_{x_i} \in \widehat{C}_{\alpha,\beta}$, $A^{\frac{1}{2}}u \in C(\overline{\Omega}, E)$, норма в котором определяется как сумма соответствующих норм.

Говорят, что область Ω *принадлежит классу* $C^{k,\alpha}$, k — целое положительное число, $0 < \alpha < 1$ (см. [9]), если в каждой точке $x \in S$ существует касательная плоскость, и имеется такое число ρ_0, что пересечение S с шаром K_{ρ_0} радиуса ρ_0 с ценром в произвольной точке x есть связная поверхность, уравнение которой в местной системе координат $y = (y_1, \dots, y_n)$ с центром в точке x и осью y_n, направленной по внутренней нормали, имеет вид $y_n = g_x(y_1, \dots, y_{n-1})$, где $g_x(y_1, \dots, y_{n-1})$ — функция класса $C_{k+\alpha}$ в области F_{ρ_0}, являющейся проекцией $K_{\rho_0} \cap S$ на плоскость $y_n = 0$. Нормы функций $g_x(y_1, \dots, y_{n-1})$ в норме пространства $C_{k+\alpha}$ ограничены числом, не зависящим от точки x. Из сказанного следует, что для любой точки $x_0 \in S$ существует вектор-функция $q(x) = (q_1(x), \dots, q_n(x))$ с компонентами из класса $C_{k+\alpha}(K_{\rho_0})$ такая, что $y = q(x)$ — взаимно однозначное отображение шара K_{ρ_0} на некоторую область в $\mathbb{R}^n_y$, причем образ $S \cap K_{\rho_0}$ является частью гиперплоскости $\{y \mid y \in \mathbb{R}^n,\ y_n = 0\}$, а образ $\Omega \cap K_{\rho_0}$ — односвязной областью в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ $(y_n \geqslant 0)$.

Пространство $C_{l,\alpha}(S)$ $(l \geqslant 0)$ функций, заданных на гладкой поверхности S, определяется локально. Будем говорить, что $\varphi(x)$ — *функция класса* $C_{l,\alpha}$, если функция $\psi(y) = \varphi \circ q^{-1}(y)$ — элемент пространства $C_{l+\alpha}(F_{\frac{\rho_0}{4}})$. Наибольшую из норм $\|\psi\|_{C_{l+\alpha}(F_{\frac{\rho_0}{4}})}$, посчитанных для всех точек поверхности S, берем в качестве нормы $|\varphi|_{C_{l,\alpha}(S)}$.

Обозначим через $\Pi(\beta, S, A)$ банахово пространство, состоящее из функций $\varphi \in C_1(S)$, для которых конечна норма

$$|\varphi|_{\Pi} = \sup_{x \in S, b>0} b^{\beta} \|A \exp\{-A^{\frac{1}{2}} b\} \varphi(x)\| + \|A^{\frac{1}{2}} \varphi\|_{C_{1-\beta}(S)} + \sup_{x \in S} \Big(\sup_{y' \in F_{\frac{\rho_0}{4}}} \Big(\sup_{b>0} b^{\beta} \|A^{\frac{1}{2}} \exp\{-A^{\frac{1}{2}} b\} \psi_{y_i}\| \Big) \Big).$$

Наконец, рассмотрим банахово пространство

$$C_{1,1-\beta}(S, A) = \Pi(\beta, S, A) \cap C_{1,1-\beta}(S)$$

с нормой

$$|\varphi|_{C_{1,1-\beta}(S,A)} = |\varphi|_{\Pi} + |\varphi|_{C_{1,1-\beta}(S)}.$$

Перейдем к определению решения.

Определение 1. Функция u называется *решением задачи* (1), (2), если

1) она один раз непрерывно дифференцируема в $\overline{\Omega}$ и имеет непрерывные вторые производные в Ω,

2) ее значения $u(x)$, $x \in \Omega$, принадлежат $D(A)$,

3) она удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (2).

Рассмотрим теперь в пп. 3, 4 частные случаи задачи (1), (2).

3. Эллиптическое уравнение в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим уравнение

$$\Delta u - Au = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{8}$$

где A — слабо позитивный оператор, имеющий зависящую от x область определения $D(A)$. Используя преобразование Фурье, найдем решение уравнения (8) в виде

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n_y} \left(\int\limits_{R^n_\xi} \exp\{i(x-y),\xi\} \left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + A\right)^{-1} d\xi \right) f(y)\, dy. \tag{9}$$

Рассуждая, как в работе [6], приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть для $R(\lambda, A)$ справедливо неравенство* (5). *Если финитная функция f принадлежит пространству $C_\alpha(\mathbb{R}^n, E)$, то функция u, определенная формулой* (9), *является единственным решением уравнения* (8) *и для него справедлива оценка*

$$\|u_{x_i x_j}\|_{C_\alpha(R^n,E)} + \|A^{\frac{1}{2}} u_{x_i}\|_{C_\alpha(\mathbb{R}^n,E)} + \|Au\|_{C_\alpha(\mathbb{R}^n,E)} \leqslant C' \|f\|_{C_\alpha(\mathbb{R}^n,E)}.$$

4. Краевая задача в полупространстве. Рассмотрим в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$, $x_n \geqslant 0$, задачу

$$\Delta u - Au = 0 \quad (x_n > 0), \tag{10}$$

$$u(x)|_{x_n=0} = \varphi(x') \quad (x' \in \mathbb{R}^{n-1}). \tag{11}$$

Здесь $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, а A — слабо позитивный оператор.

Решение задачи (10), (11) для достаточно гладкой финитной функции φ попытаемся найти, используя метод Фурье. Применив его и сделав несложные преобразования, приходим к формуле

$$u(x) = \int\limits_{y_n=0} \int G(x'-y', x_n, A)\varphi(y')\,dy', \tag{12}$$

где

$$G(z, x_n, A) = \left(\frac{B}{2\pi}\right)^{n-1} \int\limits_{\Gamma_u} \exp\left\{\left(-i(z,u) + \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 + 1}\, x_n\right) B\right\} du, \tag{13}$$

$$z = (z_1, \ldots, z_{n-1}), \quad u = (u_1, \ldots, u_{n-1}), \quad (z,u) = \sum_{i=1}^{n-1} z_i u_i,$$

и где $\Gamma_u = \Gamma_{u_1} \times \cdots \times \Gamma_{u_{n-1}}$, Γ_{u_j} — контур, состоящий из двух лучей $u_j = \rho_j \exp\{i\gamma_j \operatorname{sgn}\gamma_j\}$ $(0 \leqslant \rho_j < \infty)$, $u_j = \rho_j \exp\{i(\pi - \gamma_j \operatorname{sgn} z_j)\}$ $(0 \leqslant \rho_j < \infty)$. Значения $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ выбираются так, чтобы

$$\left(-i(z,u) + \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 + 1} x_n\right) \in Q_{\arcsin \frac{1}{c}}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть финитная функция φ принадлежит классу $C_{1,1-\beta}(\mathbb{R}^{n-1}, A)$. Тогда функция u, определенная формулами* (12), (13), *является единственным решением задачи* (10), (11), *для которого справедлива оценка*

$$\|u\|_{\widetilde{C}_{2+\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n_+, A)} \leqslant C \|\varphi\|_{C_{1,1-\beta}(\mathbb{R}^{n-1}, A)} \tag{14}$$

с константой C, не зависящей от φ.

Доказательство теоремы опирается на оценку (7).

Перейдем теперь к общему случаю задачи, сформулированной в п. 1.

5. Задача в ограниченной области. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

1) *оператор-функция* $A(x)A^{-1}(0)$ *принадлежит* $C_\alpha(\overline{\Omega}, L(E))$;

2) *оператор* $\lambda I + A(x)$ *при* $\lambda \geqslant 0$ *имеет ограниченный обратный, причем*

$$\|(A(x) + \lambda I)^{-1}\| \leqslant \theta(1 + \lambda)^{-1},$$

где θ *не зависит от* x *и* λ;

3) *коэффициенты оператора* L *принадлежат* $C_\alpha(\overline{\Omega}, R)$;

4) *граница* S *области* Ω *принадлежит* $C^{2,\alpha}$;

5) *функция* f *принадлежит* $\widehat{C}_{\alpha,\beta}(\Omega, E)$, *а* $\varphi \in C_{1,1-\beta}(S, A(0))$.

Тогда любое решение задачи (1), (2) *принадлежит классу* $\widehat{C}_{2+\alpha,\beta}(\Omega, A(0))$ *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{\widehat{C}_{2+\alpha,\beta}}(\Omega, A(0)) \leqslant N(\|f\|_{\widehat{C}_{\alpha,\beta}} + |\varphi|_{C_{1,1-\beta}(S,A(0))} + \|u\|_{C(\overline{\Omega},E)}).$$

Доказательство теоремы можно провести двумя способами. Первый способ состоит в сведении задачи (1), (2) с помощью теоремы 2 работы [5] к задаче с нулевыми граничными условиями и применении теоремы 1 работы [4]. Второй способ доказательства сводится к использованию метода разбиения единицы и применению теорем 1 и 2. При этом используется лемма 1 работы [4].

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда задача*

$$L(x, D)u - A(x)u - tu = f(x) \quad (x \in \Omega),$$

$$u(x) = \varphi(x) \quad (x \in S),$$

при достаточно большом t_0 *и всех* $t \geqslant t_0$ *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$\|u\|_{\widehat{C}_{2+\alpha,\beta}(\Omega,A(0))} \leqslant N'(\|f\|_{\widehat{C}_{\alpha,\beta}} + |\varphi|_{C_{1,1-\beta}(S,A(0))}),$$

где N' *не зависит ни от* f *и* φ, *ни от* t_0.

Доказательство теоремы использует метод разложения единицы, который хорошо изложен в ряде работ (см. [4, 10]).

Теорема 5. *Пусть оператор $A^{-1}(0)$ вполне непрерывен в E, и пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда задача (1)–(2) фредгольмова, т. е. ядро и коядро задачи имеют конечную и одинаковую размерность и множество значений оператора $L(x,D)u - A(x)u$ замкнуто в $\widehat{C}_{\alpha,\beta}(\Omega, E)$.*

Для доказательства теоремы задача (1), (2) сводится с помощью теоремы 4 к уравнению с вполне непрерывным оператором (см. [4]), и утверждения теоремы вытекают из теории Рисса — Шаудера (см. [11, 12]).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Пусть норма в E дифференцируема по Фреше, и пусть для любого $x \in \Omega$ выполняется неравенство*

$$(A(x)u, \Gamma u) \geqslant \eta \|u\|^2, \quad \eta > 0,$$

где Γu — градиент нормы u, а через $(\psi, \Gamma u)$ обозначено значение функционала Γu на элементе ψ.

Тогда если $\eta > a_0 \geqslant a(x)$, то для любой функции $f \in \widehat{C}_{\alpha,\beta}(\Omega, E)$ и $\varphi \in C_{1,1-\beta}(S, A(0))$ задача (1), (2) имеет единственное решение из класса $\widehat{C}_{2+\alpha,\beta}(\Omega, A(0))$.

Для доказательства теоремы достаточно установить единственность решения задачи (1), (2). Для этого задача сводится к задаче с нулевыми граничными условиями, для которой единственность доказана в [4].

Следующие теоремы позволяют получить более точные результаты.

Теорема 7. *Пусть в теореме 3 условие 5 заменено условием*

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|A^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}(x)\| < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in \widehat{C}_{\alpha,\beta}(\Omega, E)$ и любой функции $\varphi \in C_{1,1-\beta}(S, A(0))$ решение u задачи (1), (2) принадлежит $\widetilde{C}_{2+\alpha}(\Omega, A(0))$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{\widetilde{C}_{2+\alpha,\beta}(\Omega, A(0))} \leqslant N_1 (\|f\|_{\widetilde{C}_{\alpha,\beta}} + |\varphi|_{C_{1,1-\beta}(S, A(0))} + \|u\|_{C(\overline{\Omega}, E)})$$

с константой N_1, не зависящей от f и φ.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 7. *Тогда для любой $f \in \widehat{C}_{\alpha,\beta}$ и любой функции $\varphi \in C_{1,1-\beta}(S, A(0))$ задача*

$$L(x,D)u - A(x)u - tu = f(x) \quad (x \in \Omega),$$

$$u(x) = \varphi(x) \quad (x \in S)$$

при достаточно большом t и всех $t \geqslant t_0$ имеет единственное решение, для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{\widetilde{C}_{2+\alpha,\beta}(\Omega,A(0))} \leqslant N_2(\|f\|_{\widehat{C}_{\alpha,\beta}} + |\varphi|_{C_{1,1-\beta}(S,A(0))}),$$

где константа N_2 не зависит от f, φ.

Теорема 9. *Пусть оператор $A^{-1}(0)$ вполне непрерывен в E, и пусть выполнены условия теоремы* 7. *Тогда оператор*

$$\tau u = \{L(x,D)u - A(x)u;\ u|_S\},$$

действующий из $\widetilde{C}_{2+\alpha,\beta}(\Omega, A(0))$ в $\widehat{C}_{\alpha,\beta}(\Omega, E) \times C_{1,1-\beta}(S, A(0))$, фредгольмов.

Теорема 10. *При замене в теореме* 6 *выполнимости условия теоремы* 4 *условиями теоремы* 7 *и при выполнении остальных условий теоремы* 6 *задача* (1), (2) *имеет единственное решение из $\widetilde{C}_{2+\alpha,\beta}(\Omega, A(0))$.*

Следует отметить, что приведенные здесь результаты новы для скалярного случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А. и др.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
2. *Соболевский П. Е.* Об эллиптических уравнениях в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 7. С. 1346–1348.
3. *Аносов В. П., Соболевский П. Е.* Коэрцитивная разрешимость краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в банаховом пространстве. I // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 11. С. 2030–2044.
4. *Аносов В. П., Соболевский П. Е.* Коэрцитивная разрешимость краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в банаховом пространстве. II // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 12. С. 2132–2198.

5. *Аносов В. П., Соболевский П. Е.* О первой краевой задаче для эллиптических уравнений в банаховом пространстве // Тр. мат. ф-та ВГУ. 1971. Вып. 3. С. 13–21.
6. *Аносов В. П.* Оценки решений эллиптических уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в пространстве Гёльдера // Мат. заметки. 1991. Т. 49, вып. 1. С. 144–146.
7. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
8. *Balakrishnan A. V.* An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 91, N 2. P. 330–353.
9. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
10. *Агранович М. С., Вишик М. Н.* Эллиптические уравнения с параметрами и параболические уравнения общего вида // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 3. С. 53–161.
11. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

г. Новосибирск *1 ноября 2006 г.*

УДК 519.17

(p,q)-РАСКРАСКА РАЗРЕЖЕННЫХ ПЛОСКИХ ГРАФОВ*)

О. В. Бородин, А. О. Иванова,
Т. К. Неустроева

Введение

Ниже под графом всюду понимается обыкновенный граф без петель и кратных ребер. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаются множества вершин и ребер графа G соответственно.

Раскраска $\varphi : V(G) \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ графа $G = (V, E)$ называется (p,q)-*раскраской*, где p и q — целые числа такие, что $p \geqslant q \geqslant 1$, если для любых вершин v и w графа G выполняются условия:

1) $|\varphi(v) - \varphi(w)| \geqslant p$ при $d(v,w) = 1$,

2) $|\varphi(v) - \varphi(w)| \geqslant q$ при $d(v,w) = 2$,

где $d(v,w)$ — расстояние между вершинами v и w (длина кратчайшей цепи, соединяющей данные вершины).

Наименьшее число k, при котором существует (p,q)-раскраска вершин графа G в k цветов, называется (p,q)-*хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi_{p,q}(G)$.

Задача (p,q)-раскраски плоских графов является одной из основных моделей в проблеме распределения радиочастот в сетях мобильного телефонирования, когда источники (вершины плоского графа) должны получить целочисленные частоты (быть раскрашены) так, чтобы цвета вершин на расстоянии 1 различались не менее чем на P, а на

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 06–01–00694, 05–01–00816).

© 2006 Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.

расстоянии 2 — не менее чем на q. Здесь $p \geqslant q$, так как частоты близко расположенных источников должны различаться сильнее ввиду интерференции волн.

В [1, 2] показано, что если плоский граф G разрежен, т. е. его обхват (длина минимального цикла) g при фиксированном Δ достаточно велик, то $\chi_{1,1}(G) = \Delta + 1$. Число $\chi_{1,1}(G)$ не может быть меньше чем $\Delta + 1$, поскольку в любом графе есть звезда $K_{1,\Delta}$. Легко видеть, что существуют графы с $\chi_{1,1} > \Delta+1$ и произвольно большим обхватом (например, C_{3k+1}). Таким образом, в [1, 2] полностью решен вопрос, для сколь малых g число $\chi_{1,1}(G)$ достигает своего наименьшего значения лишь путем наложения ограничения на Δ.

Для (p, p)-хроматического числа произвольного графа G имеем следующую оценку $\chi_{p,p}(G) \geqslant \Delta p+1$, поскольку для раскраски вершин звезды $K_{1,\Delta}$ (существующей в любом графе) в цвета, отличающиеся друг от друга не менее чем на p, требуется не менее $\Delta p + 1$ цветов. Заметим, что всегда $\chi_{p,p}(G) \leqslant p \cdot \chi_{1,1} - p + 1$, так как минимальную (1,1)-раскраску цветами $0, \ldots, \chi_{1,1} - 1$ можно преобразовать умножением всех ее цветов на p в (p, p)-раскраску цветами $0, p, \ldots, (\chi_{1,1} - 1)p$. Отсюда естественным следствием результатов из [1, 2] будет

Теорема 1. *Пусть G — планарный граф, тогда $\chi_{p,p}(G) = \Delta p + 1$ в каждом из следующих случаев:*

(i) $\Delta = 3$ *и* $g \geqslant 24$;

(ii) $\Delta = 4$ *и* $g \geqslant 15$;

(iii) $\Delta = 5$ *и* $g \geqslant 13$;

(iv) $\Delta = 6$ *и* $g \geqslant 12$;

(v) $\Delta = 7$ *и* $g \geqslant 11$;

(vi) $\Delta \geqslant 9$ *и* $g = 10$;

(vii) $\Delta \geqslant 16$ *и* $g = 9$;

(viii) $\Delta \geqslant 15$ *и* $g = 8$;

(ix) $\Delta \geqslant 30$ *и* $g = 7$,

однако существуют графы с $g \leqslant 6$, для которых $\chi_{p,p}(G) > \Delta p + 1$ при произвольно большом Δ.

Действительно, графы, построенные в [2] для $g \leqslant 6$, обладают тем свойством, что в них каждая вершина принадлежит Δ-звезде. Но нетрудно видеть, что при любой (p,p)-раскраске Δ-звезды в $\Delta p + 1$ цветов $0, 1, \ldots, \Delta p$ могут быть использованы лишь цвета, кратные p. Отсюда следует, что если бы графы из [2] были (p,p)-раскрашены в цвета $0, 1, \ldots, \Delta p$, то они были бы фактически раскрашены лишь в цвета, кратные p, а тогда делением всех цветов на p можно было бы получить их 2-дистанционную раскраску в $\Delta + 1$ цвет вопреки доказанному в [2].

Для (p,q)-хроматического числа при $p > q$ справедлива

Теорема 2. *Пусть G — планарный граф обхвата не менее 31, тогда*

$$\chi_{p,q}(G) \leqslant 2p + (\Delta - 1)(2q - 1) \quad \textit{при } \Delta \geqslant 5.$$

Ясно, что при $p \gg q$ данная оценка лучше той, что дана в теореме 1. Что касается нижней оценки (p,q)-хроматического числа, то верно

Предложение 3. *Существуют плоские графы G произвольного обхвата со сколь угодно большим Δ, для которых $\chi_{p,q}(G) \geqslant 2p + 1 + (\Delta - 2)q$.*

Замечание. Если Δ невелико, то верхняя оценка в теореме 2 лишь незначительно отличается от приведенной в предложении 3 нижней оценки. Возникает вопрос о поведении $\chi_{p,q}$ при достаточно больших Δ. В данное время нами ведется работа над доказательством того, что в этом случае $\chi_{p,q}$ отличается от упомянутой нижней оценки не более чем на аддитивную константу.

Доказательство теоремы 2

Под *k-цепью* далее будем понимать цепь, состоящую из в точности k вершин степени 2.

Пусть G — наименьший по числу ребер граф со свойствами: $\Delta(G) \leqslant \Delta$, где $\Delta \geqslant 5$, $g(G) \geqslant 31$ и $\chi_{p,q}(G) > 2p + (\Delta - 1)(2q - 1)$. Покажем, что тогда G имеет либо висячую вершину, либо $\geqslant$6-цепь.

Допустим противное, т. е. в G нет $\geqslant$6-цепей и минимальная степень графа не меньше 2. Стягивая каждую k-цепь графа G в ребро, мы получаем планарный граф G^* с минимальной степенью не менее 3. Тогда в G^* есть грань ранга $r \leqslant 5$. Следовательно, в графе G должна быть грань ранга не более $6 \times r \leqslant 30$, что противоречит условию $g \geqslant 31$.

Предположим сначала, что в G есть висячая вершина v. Тогда в силу минимальности G граф, полученный в результате удаления ребра, инцидентного v, имеет (p,q)-раскраску вершин в $2p + (\Delta - 1)(2q - 1)$ цветов. Обесцветим v и продолжим данную раскраску на G. На цвет вершины v имеется $2p - 1$ ограничений от смежной вершины и $2q - 1$ ограничений от каждой вершины на расстоянии 2. Поэтому всегда найдется хотя бы один свободный цвет, в который можно окрасить v.

Пусть теперь в G нет висячих вершин. Тогда в G существует 6-цепь $uvv_1v_2v_3v_4wx$, где $d(v) = d(v_i) = d(w) = 2$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. Удалим из графа G ребро v_2v_3. В силу минимальности G граф $G - v_2v_3$ имеет (p,q)-раскраску, использующую цвета из множества $\{0, \ldots, \chi - 1\}$, где $\chi = 2p + (\Delta - 1)(2q - 1)$, причем $\varphi(u) = \alpha$ и $\varphi(v) = \beta$. Обесцветим вершины v_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ и продолжим φ на граф G следующим образом.

Сначала красим v_1. Если $\beta \leqslant \lfloor \frac{\chi-1}{2} \rfloor$, то при $\alpha \leqslant \chi - q - 1$ окрасим v_1 в цвет $\chi - 1$, в противном случае — в цвет $\chi - 2q$. Очевидно, что $|\alpha - \varphi(v_1)| \geqslant q$. Легко проверить, что цвета v и v_1 отличаются не менее чем на p:

$$\varphi(v_1) - \beta \geqslant \chi - 2q - \left\lceil \frac{\chi - 1}{2} \right\rceil \geqslant \chi - 2q - \frac{\chi - 1}{2} \geqslant \frac{2p + (\Delta - 1)(2q - 1) + 1}{2} - 2q \geqslant \frac{2p + (5 - 1)(2q - 1) + 1}{2} - 2q \geqslant p + 2q - \frac{3}{2} > p.$$

Пусть теперь $\beta > \lfloor \frac{\chi-1}{2} \rfloor$, тогда окрасим v_1 в цвет $2q - 1$, если $\alpha \leqslant q - 1$, и в 0, если $\alpha \geqslant q$. Ясно, что $|\varphi(v_1) - \alpha| \geqslant q$, а для v и v_1 справедливо следующее неравенство:

$$\beta - \varphi(v_1) \geqslant \left\lceil \frac{\chi - 1}{2} \right\rceil + 1 - (2q - 1) \geqslant \frac{2p + (5 - 1)(2q - 1) - 1}{2} - 2q + 1 \geqslant p + 2q - \frac{3}{2} > p.$$

Таким образом, каковы бы ни были α и β, вершину v_1 можно покрасить в один из четырех крайних или близких к крайним цветов заданного диапазона: 0, $2q-1$, $\chi-2q$ $\chi-1$. Используем те же рассуждения для окрашивания v_4. Следовательно, вершину v_4 также можно окрасить в один из этих четырех цветов.

Осталось окрасить v_2 и v_3. На выбор цвета для каждой из этих вершин имеется не более $p+2q-1$ ограничений от смежной вершины (от v_1 для v_2, от v_4 для v_3) и не более чем по $2q-1$ ограничений от двух вершин, находящихся от соответствующей вершины на расстоянии 2. Итого, каждая из вершин v_2 и v_3 имеет не более чем по $p+6q-3$ ограничений. Поскольку в раскраске φ используется $2p+(\Delta-1)(2q-1)$ цветов, количество цветов, разрешенных для каждой из вершин v_2 и v_3, не меньше чем

$$2p+(\Delta-1)(2q-1)-(p+6q-3)$$
$$\geqslant 2p+(5-1)(2q-1)-p-6q+3=p+2q-1>p.$$

Следовательно, в списках допустимых цветов для каждой из двух вершин найдутся по два цвета, отличающиеся не менее чем на p. Обозначим эти списки через $L(v_2)$ и $L(v_3)$ соответственно. Если $L(v_2)=L(v_3)$, то понятно, что v_2 и v_3 нужно красить в разные крайние цвета списка.

Пусть $L(v_2)\neq L(v_3)$. Обозначим наименьший цвет в $L(v_2)$ через α_2, а наибольший — в цвет β_2. Аналогично определяем α_3 и β_3 в $L(v_3)$. Не теряя общности, можно считать, что $\alpha_2\leqslant\alpha_3$, поэтому красим v_2 в цвет α_2, а v_3 — в цвет β_3, так как $\beta_3-\alpha_2\geqslant\beta_3-\alpha_3\geqslant p$. Значит, раскраска φ может быть продолжена на G.

Теорема 2 доказана.

Доказательство предложения 3

Пусть C — произвольный цикл нечетной длины. Навесим на каждую вершину C по $\Delta-2$ вершин степени 1 и обозначим построенный граф через G. Рассмотрим произвольную (p,q)-раскраску вершин графа G в $\chi_{p,q}$ цветов $0,\ldots,\chi_{p,q}-1$. Предположим, что среди всех вершин

цикла C нет вершины, цвет которой отстоял бы от концов заданного диапазона не менее чем на p. Тогда все вершины C окрашены в цвета либо не больше $p-1$ (назовем их *младшими*), либо не меньше $\chi_{p,q}-p$ (назовем их *старшими*). Поскольку две смежные вершины цикла C не могут быть одновременно окрашены в младшие или старшие цвета, то на вершинах C происходит чередование младших и старших цветов. Это противоречит нечетности цикла C.

Допустим теперь, что v — вершина на C, цвет α_0 которой отстоит от обоих концов рассматриваемого диапазона цветов не менее чем на p, т. е. $p \leqslant \alpha_0 \leqslant \chi_{p,q}-p-1$. Рассмотрим множество цветов, использованных на v и смежных с ней вершинах. Пусть цвета, использованные при раскраске вершин, смежных с v, суть $\alpha_{-t},\ldots,\alpha_{-2},\alpha_{-1},\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{\Delta-t}$, где $\alpha_{-t}<\ldots<\alpha_{-1}<\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_{\Delta-t}$.

Сначала предположим, что $0<t<\Delta$, т. е. цвета висячих вершин лежат по обе стороны от α_0. Тогда выполняются следующие неравенства:

1) $\alpha_0-\alpha_{-1}\geqslant p$ и $\alpha_1-\alpha_0\geqslant p$;

2) $\alpha_{i+1}-\alpha_i\geqslant q$ при $1\leqslant i\leqslant\Delta-t-1$ и $-t\leqslant i\leqslant -2$.

Отсюда следует, что $\alpha_{-1}-\alpha_{-t}\geqslant(t-1)q$ и $\alpha_{\Delta-t}-\alpha_1\geqslant(\Delta-t-1)q$. Легко увидеть, что

$$\alpha_{\Delta-t}-\alpha_{-t}\geqslant(\Delta-t-1)q+(t-1)q+2p\geqslant 2p+(\Delta-2)q,$$

т. е. количество использованных цветов на v и ее соседях не меньше $2p+1+(\Delta-2)q$.

Пусть теперь $t=0$ либо $t=\Delta$, например $t=0$. Тогда $\alpha_0\geqslant p$, $\alpha_1-\alpha_0\geqslant p$ и $\alpha_{i+1}-\alpha_i\geqslant q$ при $1\leqslant i\leqslant\Delta-1$. Отсюда

$$\alpha_\Delta\geqslant 2p+(\Delta-1)q\geqslant 2p+1+(\Delta-2)q.$$

Таким образом, в обоих случаях $\chi_{p,q}(G)\geqslant 2p+1+(\Delta-2)q$.

Утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* 2-дистанционная раскраска разреженных плоских графов // Сибирские электронные математические известия. 2004. Т. 1. С. 76–90.

2. *Бородин О. В., Глебов А. Н., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* Ташкинов В. А. Достаточные условия 2-дистанционной $\Delta+1$-раскрашиваемости плоских графов // Сибирские электронные математические известия. 2004. Т. 1. С. 129–141.

г. Якутск, г. Новосибирск *28 сентября 2006 г.*

УДК 517.946

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМИ МЛАДШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*)

И. Р. Валитов

Работа является логическим продолжением работы [1], но отличается заданием граничного условия. В нижеприведенной постановке подобные задачи ранее не изучались.

Пусть D — интервал $(0,1)$, Q — прямоугольник $\{(x,t) : x \in D,\ t \in (0,T),\ 0 < T < +\infty\}$.

Обратная задача I. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением*

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(t)a(x,t)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in D, \tag{3}$$

$$\int_0^1 K(x,t)u(x,t)\,dx = \mu(t), \quad 0 < t < T. \tag{4}$$

Обратная задача II. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением*

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(t)a(x,t)u_t(x,t) = f(x,t),$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00439) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект N 48).

© **2006 Валитов И. Р.**

при выполнении для функции $u(x,t)$ *условий* (2)–(4).

Пусть V_0 и V_1 — следующие пространства:

$$V_0 = \big\{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty\big(0,T;W_2^2(D)\big),$$
$$v_t(x,t) \in L_\infty\big(0,T;W_2^1(D)\big),\ v_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(D))\big\};$$

$$V_1 = \big\{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty\big(0,T;W_2^2(D)\big),$$
$$v_t(x,t) \in L_\infty\big(0,T;W_2^2(D)\big),\ v_{tt}(x,t) \in L_2(Q), v_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)\big\}.$$

Нормы в этих пространствах определим равенствами

$$\|v\|_{V_0} = \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(D))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(D))} + \|v_{tt}\|_{L_\infty(0,T;L_2(D))},$$

$$\|v\|_{V_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(D))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(D))} + \|v_{tt}\|_{L_\infty(0,T;L_2(D))}.$$

Для сокращения формулировок и выкладок введем некоторые обозначения. Именно, положим

$$F(t) = \int_0^1 K(x,t)f(x,t)\,dx, \quad N_0 = \max_{[0,T]} \int_0^1 K^2(x,t)\,dx,$$

$$N_1 = \max_{[0,T]} \int_0^1 K_t^2(x,t)\,dx, \quad N_2 = \max_{[0,T]} \int_0^1 K_{tt}^2(x,t)\,dx,$$

$$N_3 = \max_{[0,T]} \int_0^1 K_x^2(x,t)\,dx, \quad N_4 = \max_{[0,T]} \int_0^1 |a_x(x,t)| \left(\int_0^x K^2(y,t)dy\right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$N_5 = \operatorname*{vrai\,max}_D |u_0(x)|, \quad N_6 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_0} \operatorname*{vrai\,max}_{[0,T]} |F(t) - \mu''(t)|,$$

$$N_7 = N_1^{\frac{1}{2}} \max_{[0,T]} |a(1,t)|, \quad N_8 = N_6 + \frac{\sqrt{2}N_2^{\frac{1}{2}}}{\mu_1 - \mu_0} \left(\int_0^1 u_0^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$N_9 = \frac{2N_1^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2T}N_2^{\frac{1}{2}} + N_7^{\frac{1}{2}}}{\mu_1 - \mu_0},$$

$$B_0 = \int\limits_0^1 u_1^2(x)\,dx + \int\limits_0^1 u_0'^2(x)\,dx + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 f^2(x,t)\,dxdt + 4k_0^2 N_8^2 T,$$

$$B_1 = \left[12N_5^2N_9^2 + 4N_8^2T^2 + 3\right], \quad B_2 = 4N_9^2,$$

$$C_0 = B_0 + \frac{B_1}{2}, \quad C_1 = \frac{B_1}{2} + B_2 T,$$

$$M_0 = \frac{C_0}{1 - C_1C_0T}, \quad M_1 = \sqrt{2TM_0} + \sqrt{2}\left(\int\limits_0^1 u_0^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$m_1 = 2N_1^{\frac{1}{2}}M_0^{\frac{1}{2}} + N_2^{\frac{1}{2}}M_1 + N_3^{\frac{1}{2}}M_0^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь μ_0 и μ_1 суть заданные числа такие, что $0 \leqslant \mu_0 < \mu_1$; роль этих чисел будет объяснена ниже.

Теорема 1. *Пусть для функций* $a(x,t)$, $K(x,t)$, $\mu(t)$, $u_0(x)$ *и* $u_1(x)$ *выполняются следующие условия:* $a(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $K(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $a(1,t)\mu(t) \geqslant \mu_1 > 0$, $N_4M_1 \leqslant \mu_0$, $u_0(x) \in W_2^2(D)$, $u_1(x) \in W_2^2(D)$, $u_0'(0) = u_0'(1) = 0$, $u_1'(0) = u_1'(1) = 0$,

$$N_{10} = \left[\int\limits_0^T \int\limits_0^1 f^2\,dxdt + \int\limits_0^1 u_0'^2\,dx + \int\limits_0^1 u_1^2(x)\,dx\right]\exp(T),$$

$$N_{11} = (2N_{10})^{\frac{1}{2}}T + \sqrt{2}\left(\int\limits_0^1 u_0^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$N_{12} = \left(2N_1^{\frac{1}{2}} + N_3^{\frac{1}{2}}\right)N_{10}^{\frac{1}{2}} + N_2^{\frac{1}{2}}N_{11}, \quad \overline{m}_1 = N_7N_{11} + N_4N_{10}^{\frac{1}{2}},$$

$$\int\limits_0^1 K(x,0)u_0(x)dx = \mu(0), \quad \mu(t) \in C^2([0,T]),$$

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q).$$

Кроме того, пусть выполняется условие $C_0C_1T < 1$. *Тогда обратная задача* I *имеет решение* $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in V_0$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Доказательство. Для заданной функции $v(x,t)$ определим функции $\varphi(t,v)$, $\psi_1(t,v)$ и $q_1(t,v)$:

$$\varphi(t,v) = 2\int_0^1 K_t(x,t)v_t(x,t)\,dx + \int_0^1 K_{tt}(x,t)v(x,t)\,dx - \int_0^1 K_x(x,t)v_x(x,t)\,dx,$$

$$\psi_1(t,v) = \int_0^1 a_x(x,t)\left[\int_0^x K(y,t)u(y,t)\,dy\right]dx,$$

$$q_1(t,v) = \frac{F(t)-\mu''(t)+\varphi(t,v)}{a(1,t)\mu(t)-\psi_1(t,v)}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt} - u_{xx} + q_1(t,u)u = f(x,t) \tag{5}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Для доказательства разрешимости этой краевой задачи воспользуемся методом срезок, методом регуляризации и методом неподвижной точки. Определим срезающие функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ с помощью чисел μ_0 и m_1:

$$G_1(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leqslant m_1, \\ m_1, & \text{если } \xi > m_1, \\ -m_1, & \text{если } \xi < -m_1; \end{cases} \qquad G_2(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leqslant \mu_0, \\ \mu_0, & \text{если } \xi > \mu_0, \\ -\mu_0, & \text{если } \xi < -\mu_0. \end{cases}$$

Определим функцию

$$\tilde{q}_1(t,v) = \frac{F(t)-\mu''(t)+G_1(\varphi(t,v))}{a(1,t)\mu(t)-G_2(\psi_1(t,v))}.$$

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \tilde{q}_1(t,u)u(x,t) - \varepsilon u_{xxt}(x,t) = f(x,t) \tag{5_ε}$$

с параметром ε, принадлежащим полуинтервалу $(0,\varepsilon_0]$ с фиксированным числом ε_0. Рассмотрим также краевую задачу: *найти функцию*

$u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (5_ε) *и такую, что для нее выполняются условия* (2) *и* (3).

Используя метод неподвижной точки и теорему Шаудера, нетрудно установить, что краевая задача (5_ε), (2), (3) имеет при фиксированном ε и при выполнении условий теоремы решение $u^\varepsilon(x,t)$, принадлежащее пространству V_1 (подробное доказательство в аналогичной ситуации проведено в работе [1]).

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_0^1 [u_{\tau\tau}(x,\tau) - u_{xx}(x,\tau) + \tilde{q}_1(\tau,u)u(x,\tau) - \varepsilon u_{xx\tau}(x,\tau)]u_\tau\,dxd\tau = \int_0^t\int_0^1 f(x,\tau)u_\tau(x,\tau)\,dxd\tau. \quad (6)$$

Заметим, что имеет место неравенство

$$|\tilde{q}_1(t,u)| \leqslant N_8 + N_9\left[\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx + \int_0^t\int_0^1 u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau + \int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Интегрируя в (6) по частям и используя неравенство Юнга и неравенство (7), нетрудно от равенства (6) перейти к неравенству

$$\alpha(t) \leqslant B_0 + B_1\int_0^1 \alpha(\tau)\,d\tau + B_2T\int_0^t \alpha^2(\tau)\,d\tau,$$

где

$$\alpha(t) = \int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx + \int_0^t\int_0^1 u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau + \int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx.$$

Тогда в силу свойства решений интегральных неравенств [2, гл. III, § 4] для функции $\alpha(t)$ имеет место оценка

$$\alpha(t) \leqslant \frac{C_0}{1 - C_1C_0T} = M_0. \quad (8)$$

С помощью данной оценки получаем оценку для $|\varphi(t,u)|$:

$$|\varphi(t,u)| \leqslant 2N_1^{\frac{1}{2}} M_0^{\frac{1}{2}} + N_2^{\frac{1}{2}} M_1 + N_3^{\frac{1}{2}} M_0^{\frac{1}{2}} = m_1, \tag{9}$$

где $M_1 = \sqrt{2TM_0} + \sqrt{2}\left(\int\limits_0^1 u_0(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Аналогично оценим $|\psi_1(t,u)|$:

$$|\psi_1(t,u)| \leqslant N_4 \left[\int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant N_4 M_1, \tag{10}$$

Из оценок (9), (10) и из условий теоремы вытекают равенства $G_1(\varphi(t,u)) = \varphi(t,u)$, $G_2(\psi_1(t,u)) = \psi_1(t,u)$, а также $\widetilde{q}_1(t,u) = q_1(t,u)$. Используя оценку (8) на функцию $\alpha(t)$, придем к оценке

$$\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_{xx\tau}^2\,dxd\tau \leqslant M_2 \tag{11}$$

с постоянной M_2, определяющейся входными данными задачи и не зависящей от ε. Далее, помимо оценок (8) и (11) имеет место оценка

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau \leqslant M_3 \tag{12}$$

с постоянной M_3, определяющейся входными данными задачи и не зависящей от ε. Из оценок (8), (11), (12) следует, что из семейства решений $u^\varepsilon(x,t)$ краевой задачи (5_ε), (2), (3) можно извлечь последовательность, сходящуюся к решению $u(x,t)$ краевой задачи (5), (2), (3). Имея решение $u(x,t)$, определим функцию $q(t) = q_1(t,u)$. Очевидно, что функции $u(x,t)$, $q(t)$ связаны уравнением (1) и принадлежат требуемым классам и для них выполнены условия (4).

Теорема доказана.

Пусть

$$W_1 = \{\{u(x,t), q(t)\} : u(x,t) \in V_0,\ q(t) \in L_\infty([0,T]),\\ a(1,t)\mu(t) - \psi_1(t,u) \geqslant k_0 > 0\ t \in [0,T]\}.$$

Теорема 2. *Пусть для функций $a(x,t)$, $f(x,t)$, $K(x,t)$, $\mu(t)$ выполняются включения теоремы* 1. *Тогда в множестве W_1 обратная задача* I *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), q_1(t)\}$ и $\{v(x,t), q_2(t)\}$ — два решения обратной задачи I, принадлежащие множеству W_1. Положим

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x,t), \quad f_1(x,t) = [q_2(t) - q_1(t)]v(x,t).$$

Имеют место равенства

$$w_{tt}(x,t) - w_{xx}(x,t) + q_1(t)w(x,t) = f_1(x,t),$$
$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0, \quad x \in D,$$
$$w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T.$$

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_0^1 [w_{\tau\tau}(x,\tau) - w_{xx}(x,\tau)]w_\tau(x,\tau)\,dxd\tau = \int_0^t \int_0^1 [a(q_2 - q_1)u(x,\tau) - aq_1 w(x,\tau)]w_\tau\,dxd\tau.$$

Интегрируя в нем по частям и применяя неравенство Юнга, а также учитывая представление функций q_1 и q_2 и принадлежность решений $\{u(x,t), q_1(t)\}$ и $\{v(x,t), q_2(t)\}$ множеству W_1, придем к неравенству

$$\int_0^1 \left[w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t)\right] dx \leqslant N \int_0^t \int_0^1 \left(w_\tau^2 + w_x^2\right) dxd\tau$$

с постоянной N, зависящей лишь от функций $a(x,t)$, $f(x,t)$, $K(x,t)$, $\mu(t)$. Из этого неравенства и леммы Гронуолла следует тождество $w(x,t) \equiv \text{const}$. Очевидно, что на самом деле выполняется тождество $w(x,t) = 0$. Последнее означает, что функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ совпадают в прямоугольнике Q. Из совпадения функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ вытекает совпадение функций $q_1(t)$ и $q_2(t)$ на отрезке $[0,T]$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть для функций* $a(x,t)$, $K(x,t)$, $\mu(t)$ *выполняются следующие соотношения:*

$$a(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad K(x,t) \in C^2(\overline{Q}),$$

$$\mu(t) \in C^2([0,T]), \quad F(t) - \mu''(t) \leqslant -m_0 < 0, \quad a(1,t)\mu'(t) \leqslant -m_1 < 0,$$

$$\overline{m}_1 < m_1, \quad N_{12} \leqslant m_0, \quad u_0(x) \in W_2^2(D), \quad u_1(x) \in W_2^1(D),$$

$$u_0'(0) = u_0'(1) = 0, \quad u_1'(0) = u_1'(1) = 0, \quad \int_0^1 K(x,0)u_0(x)\,dx = \mu(0),$$

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q).$$

Тогда обратная задача II *имеет решение* $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что*

$$u(x,t) \in V_1, \quad q(t) \in L_\infty([0,T]).$$

Доказательство. Для заданной функции $v(x,t)$ определим функции $\psi_2(t,v)$ и $q_2(t,v)$:

$$\psi_2(t,v) = a(1,t)\int_0^1 K_t(x,t)v(x,t)\,dx + \int_0^1 a_x(x,t)\left[\int_0^x K(y,t)u_t(y,t)\,dy\right]dx,$$

$$q_2(t,v) = \frac{F(t) - \mu''(t) + \varphi(t,v)}{a(1,t)\mu'(t) - \psi_2(t,v)}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения*

$$u_{tt} - u_{xx} + q_2(t,u)u_t = f(x,t) \tag{13}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3). Для доказательства разрешимости этой краевой задачи мы вновь воспользуемся методом срезок, методом регуляризации и методом неподвижной точки.

Определим срезающие функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ аналогично вышеприведенному, но с числами m_0 и $\overline{m}_1$ соответственно:

$$G_1(\xi)=\begin{cases}\xi, & \text{если } |\xi|\leqslant m_0,\\ m_0, & \text{если } \xi>m_0,\\ -m_0, & \text{если } \xi<-m_0;\end{cases}\qquad G_2(\xi)=\begin{cases}\xi, & \text{если } |\xi|\leqslant \overline{m}_1,\\ \overline{m}_1, & \text{если } \xi>\overline{m}_1,\\ -\overline{m}_1, & \text{если } \xi<-\overline{m}_1.\end{cases}$$

Определим теперь функцию

$$\tilde{q}_2(t,v)=\frac{F(t)-\mu''(t)+G_1(\varphi(t,v))}{a(1,t)\mu'(t)-G_2(\psi_2(t,v))}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}-u_{xx}+\tilde{q}_2(t,u)u_t-\varepsilon u_{xxt}=f(x,t)$$

и такую, что для нее выполнены условия (2) *и* (3).

Дальнейшие рассуждения в целом аналогичны первой части статьи. Опираясь на априорные оценки и теорему Шаудера, показываем решение вспомогательной задачи. Далее показывается возможность предельного перехода и разрешимость исходной обратной задачи.

Вопрос о единственности задачи II рассматривается так же, как и в задаче I. Итак, пусть

$$W_2=\{\{u(x,t),q(t)\}: u(x,t)\in V_1,\ q(t)\in L_\infty([0,T]),\\ a(1,t)\mu'(t)-\psi_1(t,u)\geqslant k_0>0,\ t\in[0,T]\}.$$

Теорема 4. *Пусть для функций $a(x,t)$, $f(x,t)$, $K(x,t)$ и $\mu(t)$ выполняются включения теоремы* 3. *Тогда в множестве W_2 обратная задача* II *не может иметь более одного решения.*

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание 1. Все условия теорем 1 и 3, использующие неравенства, выполняются, например, в случае, если числа T и $\|K(x,t)\|_{C^2(\overline{Q})}$ малы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Валитов И. Р., Кожанов А. И.* Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, вып. 1. С. 3–18.

2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

г. Стерлитамак *1 ноября 2006 г.*

УДК 518.9

О СТРАТЕГИИ КВАЗИПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов

Рассмотрим игру простого преследования $\Gamma(\mathscr{P}, \mathscr{E}, L)$ на быстродействие с одним преследователем и одним убегающим в полуплоскости S с границей L. Преследователь движется со скоростью α, убегающий — со скоростью β $(\alpha > \beta)$. Начальные местоположения преследователя P_0 и убегающего E_0 определяют окружность Аполлония $A(P_0, E_0)$ [1,2]. Пусть прямая L пересекает $A(P_0, E_0)$ в точках D_1 и D_2 ($|P_0D_1| < |P_0D_2|$), причем расстояние от точки P_0 до L меньше, чем расстояние от точки E_0 до L.

Назовем *стратегией квазипараллельного преследования* способ действия преследователя $\mathscr{P}$, при котором он поступает следующим образом. Если вектор скорости убегающего $\mathscr{E}$ направлен на точку $D \in [D_1, D_2]$, то игрок $\mathscr{P}$ использует стратегию параллельного сближения, как при игре простого преследования без ограничений, до достижения игроком $\mathscr{P}$ прямой L. После этого преследователь движется по прямой L в направлении точки D. В других случаях, когда вектор скорости игрока $\mathscr{E}$ не направлен на отрезок $[D_1, D_2]$, игрок $\mathscr{P}$ использует стратегию параллельного сближения.

Для простоты изложения предположим, что убегающий движется по траекториям, описываемым функциями, непрерывно дифференцируемыми по времени, быть может, за исключением конечного числа точек.

Лемма 1. *Рассмотрим игру простого преследования* $\Gamma(\mathscr{P}, \mathscr{E}, L)$. *Пусть* $P_0 \in L$, $E_0 \in L$. *Пусть игрок* $\mathscr{E}$ *на протяжении некоторого про-*

© 2006 Егоров Р. И., Кайгородов С. П.

межутка времени Δt движется так, что вектор скорости в каждый момент времени $t \in [0, \Delta t]$ направлен на отрезок $[D_1(t), D_2(t)]$, где $D_1(t)$, $D_2(t)$ — точки пересечения прямой L с окружностью $A(P(t), E(t))$, $E(t)$ — местоположение игрока $\mathscr{E}$ в момент времени t, $P(t)$ — местоположение игрока $\mathscr{P}$ в момент времени t при использовании им квазипараллельного преследования. Тогда игрок $\mathscr{E}$ не сможет достигнуть прямой L вне отрезка $[D_1(t), D_2(t)]$.

Доказательство. Пусть выполняются условия леммы. Предположим противное. Существует траектория игрока $\mathscr{E}$, при которой он в момент времени T достигает некоторой точки $D(T) \in (P(T), D_1(T))$. Из определения стратегии квазипараллельного преследования и построения окружности $A(P_0, E_0)$ вытекает, что длина отрезка $[E(0), D_1(0)]$ не меньше длины траектории игрока $\mathscr{E}$, при которой он достигает точки $D(T)$ не будучи пойманным. Получили противоречие. Остальные случаи доказываются аналогичным образом или являются очевидными. Лемма доказана.

Теорема. *Рассмотрим игру простого преследования $\Gamma(\mathscr{P}, \mathscr{E}, L)$. Если игрок $\mathscr{P}$ использует стратегию квазипараллельного преследования, то игрок $\mathscr{E}$ будет пойман в множестве $\widehat{A}(P_0, E_0) \bigcap S$, где $\widehat{A}(P_0, E_0)$ — круг Аполлония.*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Рассмотрим любую траекторию игрока $\mathscr{E}$ до поимки его игроком $\mathscr{P}$, использующим стратегию квазипараллельного преследования на отрезке $[0, T]$. Тогда существует разбиение $\Delta = \{0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n = T\}$ $(n \in \mathbb{N})$ отрезка $[0, T]$ такое, что для любого $i \in [0, n-1]$ на (t_i, t_{i+1}) вектор скорости игрока $\mathscr{E}$ либо направлен на отрезок $[D_1(t_i), D_2(t_i)]$, либо — нет. Если вектор скорости игрока $\mathscr{E}$ не направлен на отрезок $[D_1(t_i), D_2(t_i)]$, то игрок $\mathscr{P}$ использует стратегию параллельного преследования и $\widehat{A}(P(t_{i+1}), E(t_{i+1})) \in \widehat{A}(P(t_i), E(t_i))$. Если же вектор скорости игрока $\mathscr{E}$ направлен на отрезок $[D_1(t_i), D_2(t_i]$, то из леммы 1 следует $\widehat{A}(P(t_{i+1}), E(t_{i+1})) \in \widehat{A}(P(t_i), E(t_i))$, что и дока-

зывает утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петросян Л. А., Томский Г. В.* Геометрия простого преследования. Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Петросян Л. А., Томский Г. В.* Элементарные задачи преследования и убегания. Якутск: Изд-во Якутского ун-та, 1989.

г. Якутск *31 мая 2006 г.*

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

А. И. Кожанов, И. И. Кулешова

Работа является продолжением работы [1] (в свою очередь, являющейся продолжением работ [2–4]).

Пусть D — интервал $(0,1)$ оси Ox, Q — прямоугольник $D\times(0,T)$, $0<T<+\infty$, $a(x)$, $a_0(x)$, $b(x)$, $b_0(x)$ и $f(x,t)$ — заданные при $x\in\overline{D}$, $t\in[0,T]$ функции, A и B — операторы, задаваемые равенствами

$$Au=\frac{\partial}{\partial x}\,(a(x)u_x)+a_0(x)u,$$

$$Bu=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(b(x)u_{xx})+b_0(x)u.$$

Краевая задача: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$Au_t+Bu=f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0)=0,\quad x\in D, \tag{2}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,\quad 0<t<T. \tag{3}$$

Уточним, что в работе [1] рассматривалась краевая задача для уравнения (1) с заданием условия (2), а также условий

$$u(0,t)=u(1,t)=u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t)=0,\quad 0<t<T.$$

© 2006 Кожанов А. И., Кулешова И. И.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$a(x) \in C^1(\overline{D}), \quad b(x) \in C^3(\overline{D}), \quad a_0(x) \in C(\overline{D}), \quad b_0(x) \in C(\overline{D});$$
$$a(x) \geqslant 0, \quad b(x) \leqslant 0, \quad a(x) - b(x) \geqslant k_0 > 0, \quad a_0(x) \leqslant -\bar{a}_0 < 0,$$
$$b_0(x) \leqslant 0 \quad \text{при } x \in \overline{D};$$
$$|b^{(i)}(x)| \leqslant C_0\sqrt{|b(x)|}, \quad i = 1, 2, \ x \in \overline{D}; \quad b(0)b(1) > 0.$$

Тогда если функция $f(x,t)$ такова, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f(x,0) \equiv 0$ при $x \in \overline{D}$, то краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x,t)$ такое, что

$$u(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^2(D)\big),$$
$$u_t(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^2(D)\big), \quad b(x)u_{xxxx}(x,t) \in L_2(Q),$$

и это решение единственно.

Доказательство. Пусть ε — положительное число. Положим

$$a_\varepsilon(x) = a(x) + \varepsilon, \quad A_\varepsilon u = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_\varepsilon(x)u_x\right) + a_0(x)u,$$
$$L_\varepsilon u = A_\varepsilon u_t + Bu + \varepsilon u_{xxxxxx}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$L_\varepsilon u = f(x,t) \tag{1_ε}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), *а также условия*

$$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{3_ε}$$

Краевая задача (1_ε), (2), (3), (3_ε) для фиксированного положительного числа ε при выполнении условий теоремы имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$ такое, что

$$u^\varepsilon(x,t) \in L_\infty\big(0,T;W_2^6(D)\big), \quad u_t^\varepsilon(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^6(D)\big),$$
$$u_{tt}^\varepsilon(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^2(D)\big)$$

(см. [5]). Покажем, что для семейства решений $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ имеют место нужные априорные оценки.

Анализируя равенства

$$\int\limits_0^t \int\limits_D L_\varepsilon u^\varepsilon u^\varepsilon \, dx\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_D f u^\varepsilon \, dx d\tau,$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_D L_\varepsilon u^\varepsilon u^\varepsilon_\tau \, dx d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_D f u^\varepsilon_\tau \, dx d\tau,$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_D (L_\varepsilon u^\varepsilon)_\tau u^\varepsilon_\tau \, dx d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_D f_\tau u^\varepsilon_\tau \, dx d\tau,$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_D (L_\varepsilon u^\varepsilon)_\tau u^\varepsilon_{\tau\tau} \, dx d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_D f_\tau u^\varepsilon_{\tau\tau} \, dx d\tau$$

и используя условия теоремы, нетрудно показать, что имеет место оценка

$$\int\limits_D \big[[u^\varepsilon(x,t)]^2 + \big[u^\varepsilon_t(x,t)\big]^2 + \big[u^\varepsilon_x(x,t)\big]^2 + \big[u^\varepsilon_{xt}(x,t)\big]^2 + |b(x)|\big[u^\varepsilon_{xxt}(x,t)\big]^2 + \varepsilon\big[u^\varepsilon_{xxxt}(x,t)\big]^2\big]\, dx \leqslant N_1 \quad (4)$$

с постоянной N_1, определяющейся лишь функцией $f(x,t)$, коэффициентами уравнения (1) и числом T (подробное доказательство см. в [1]).

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_D L_\varepsilon u^\varepsilon_{xx} \, dx\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_D f u^\varepsilon_{xx} \, dx d\tau.$$

Интегрируя по частям, применяя неравенство Юнга, используя усло-

вия теоремы и оценку (4), получаем неравенство

$$\int\limits_D a_\varepsilon(x)\left[u^\varepsilon_{xx}(x,t)\right]^2 dx + \int\limits_0^t\int\limits_D |b|\left[u^\varepsilon_{xxx}\right]^2 dxd\tau$$
$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_D \left[u^\varepsilon_{xxxx}\right]^2 dxd\tau \leqslant \delta\int\limits_0^t\int\limits_D \left[u^\varepsilon_{xx}\right]^2 dxd\tau + N_2 + N_3\varepsilon\left\{\int\limits_0^t\left[\left[u^\varepsilon_{xxxx}(1,\tau)\right]^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left[u^\varepsilon_{xxx}(1,\tau)\right]^2 + \left[u^\varepsilon_{xxxx}(0,\tau)\right]^2 + \left[u^\varepsilon_{xxx}(0,\tau)\right]^2\right] d\tau\right\} \quad (5)$$

с произвольным положительным числом δ, числом N_2, определяющимся числами δ и T, функцией $f(x,t)$, коэффициентами уравнения (1), и числом N_3, определяющимся числом T, функцией $f(x,t)$ и коэффициентами уравнения (1). Повторяя далее соответствующие выкладки [1], нетрудно вывести неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_D \left[u^\varepsilon_{xx}\right]^2 dxd\tau + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_D \left[u^\varepsilon_{xxxx}\right]^2 dx\,d\tau \leqslant N_4 + N_5\varepsilon\left\{\int\limits_0^t\left[\left[u^\varepsilon_{xxxx}(0,\tau)\right]^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left[u^\varepsilon_{xxx}(0,\tau)\right]^2 + \left[u^\varepsilon_{xxxx}(1,\tau)\right]^2 + \left[u^\varepsilon_{xxx}(1,\tau)\right]^2\right] d\tau\right\} \quad (6)$$

с числами N_4 и N_5, определяющимися лишь функцией $f(x,t)$, коэффициентами уравнения (1) и числом T.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^x z^3 L_\varepsilon u^\varepsilon(z,t)\,dzdx = \int\limits_0^1\int\limits_0^x z^3 f(z,t)\,dzdx.$$

Это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\varepsilon u^{\varepsilon}_{xxxx}(1,t) = 6\varepsilon u^{\varepsilon}_{xxx}(1,t) + 6\int\limits_0^1 x^2 b(x) u^{\varepsilon}_{xx}(x,t)\,dx$$
$$- 6\int\limits_0^1\int\limits_0^x zb(z)u^{\varepsilon}_{zz}(z,t)\,dzdx - \int\limits_0^1 x^3 a_\varepsilon(x)u^{\varepsilon}_{xt}(x,t)\,dx$$
$$+ 3\int\limits_0^1\int\limits_0^x z^2 a_\varepsilon(z)u^{\varepsilon}_{zt}(z,t)\,dzdx + \int\limits_0^1\int\limits_0^x z^3 f(z,t)\,dzdx. \quad (7)$$

Умножим равенство (7) на функцию $u^{\varepsilon}_{xxxx}(1,t)$ и результат проинтегрируем по временной переменной от 0 до текущей точки. Используя неравенство Юнга и оценку (4), получим, что выполняется неравенство

$$\varepsilon\int\limits_0^t \left[u^{\varepsilon}_{xxxx}(1,\tau)\right]^2 d\tau \leqslant N_6\varepsilon\int\limits_0^t \left[u^{\varepsilon}_{xxx}(1,\tau)\right]^2 d\tau + N_7 \quad (8)$$

с постоянными N_6 и N_7, определяющимися лишь коэффициентами уравнения (1), функцией $f(x,t)$ и числом T.

Для функций $u^{\varepsilon}(x,t)$ вследствие граничного условия (3_ε) выполняется неравенство

$$\left[u^{\varepsilon}_{xxx}(1,t)\right]^2 \leqslant \delta\int\limits_0^1 \left[u^{\varepsilon}_{xxxx}(x,t)\right]^2 dx + C(\delta)\int\limits_0^1 \left[u^{\varepsilon}_{xx}(x,t)\right]^2 dx \quad (9)$$

с произвольным положительным числом δ. Следствием данного неравенства, неравенства (8) и оценки (4) является неравенство

$$\varepsilon\int\limits_0^t u^{\varepsilon}_{xxxx}(1,\tau)\,d\tau \leqslant \delta\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \left[u^{\varepsilon}_{xxxx}\right]^2 dxd\tau + N_8, \quad (10)$$

в котором δ — произвольное положительное число, число же N_8 определяется, как и числа N_1–N_7, коэффициентами уравнения (1), функцией $f(x,t)$ и числом T. Суммируя неравенства (8) и (9), получим, что

имеет место неравенство

$$\varepsilon\int\limits_0^t\left[\left[u^\varepsilon_{xxxx}(1,\tau)\right]^2+\left[u^\varepsilon_{xxx}(1,\tau)\right]^2\right]d\tau\leqslant\delta\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left[u^\varepsilon_{xxxx}\right]^2dxd\tau+N_9,\quad(11)$$

в котором вновь δ — произвольное положительное число, число же N_9 определяется вновь функцией $f(x,t)$, коэффициентами уравнения (1) и числом T.

Анализируя аналогичным образом равенство

$$\int\limits_0^1\int\limits_x^1(1-z)^3L_\varepsilon u^\varepsilon(z,t)\,dzdx=\int\limits_0^1\int\limits_x^1(1-z)^3f(z,t)\,dzdx$$

(точнее говоря, полученное из него равенство вида (7)), используя неравенство (9), но для точки $x=0$, придем к неравенству

$$\varepsilon\int\limits_0^1\left[\left[u^\varepsilon_{xxxx}(0,\tau)\right]^2+\left[u^\varepsilon_{xxx}(0,\tau)\right]^2\right]d\tau\leqslant\delta\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left[u^\varepsilon_{xxxx}\right]^2dxd\tau+N_{10}.\quad(12)$$

Вернемся к неравенству (5). Неравенства (11) и (12) вместе с (5) дают неравенство

$$\int\limits_D a_\varepsilon(x)\left[u^\varepsilon_{xx}(x,t)\right]^2dx+\int\limits_0^t\int\limits_D|b|\left[u^\varepsilon_{xxx}\right]^2dxd\tau$$
$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_D\left[u^\varepsilon_{xxxx}\right]^2dxd\tau\leqslant\delta\int\limits_0^t\int\limits_D\left[u^\varepsilon_{xx}\right]^2dxd\tau+N_{11}.$$

Из него и условий теоремы следует априорная оценка решений краевой задачи (1_ε), (2), (3), (3_ε):

$$\int\limits_0^t\int\limits_D\left[u^\varepsilon_{xx}\right]^2dxd\tau+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_D\left[u^\varepsilon_{xxxx}\right]^2dxd\tau\leqslant N_{12}\qquad(13)$$

с постоянной N_{12}, определяющейся лишь коэффициентами уравнения (1), функцией $f(x,t)$ и числом T.

Действуя аналогично, но для продифференцированного по переменной t уравнения (1_ε), нетрудно получить следующую оценку:

$$\int\limits_0^t \int\limits_D \left[u^\varepsilon_{xx\tau}\right]^2 dxd\tau + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_D \left[u^\varepsilon_{xxxx\tau}\right]^2 dxd\tau \leqslant N_{13} \tag{14}$$

с постоянной N_{13}, вновь определяющейся лишь коэффициентами уравнения (1), функцией $f(x,t)$ и числом T.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_D L_\varepsilon u^\varepsilon b u^\varepsilon_{xxxx}\, dx\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_D f b u^\varepsilon_{xxxx}\, dxd\tau.$$

Интегрируя по частям и используя оценки (4), (13) и (14), нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_D b^2 \left[u^\varepsilon_{xxxx}\right]^2 dxd\tau + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_D |b| \left[u^\varepsilon_{xxxxx}\right]^2 dxd\tau$$
$$\leqslant N_{14}\varepsilon \int\limits_0^t \left[\left[u^\varepsilon_{xxxxx}(1,\tau)\right]^2 + \left[u^\varepsilon_{xxxxx}(0,\tau)\right]^2\right] d\tau + N_{15}$$

с постоянными N_{14} и N_{15}, орпределяющимися лишь коэффициентами уравнения (1), функцией $f(x,t)$ и числом T. Далее, рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^1 x^3 L_\varepsilon u^\varepsilon(x,t)\, dx = \int\limits_0^1 x^3 f(x,t)\, dx.$$

Из него подобно тому, как мы получили оценку (11), но с использованием уже самой оценки (11), нетрудно получить оценку

$$\varepsilon \int\limits_0^t \left[u^\varepsilon_{xxxxx}(1,\tau)\right]^2 d\tau \leqslant N_{16}.$$

Оценка (16), аналогичная оценка для функции $u^{\varepsilon}_{xxxxx}(0,t)$ и неравенство (15) дают априорную оценку

$$\int\limits_0^t \int\limits_D b^2 \left[u^{\varepsilon}_{xxxx}\right]^2 dxd\tau + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_D |b| \left[u^{\varepsilon}_{xxxxx}\right]^2 dxd\tau$$

$$\leqslant N_{17}\varepsilon \int\limits_0^t \left[\left[u^{\varepsilon}_{xxxxx}(1,\tau)\right]^2 + \left[u^{\varepsilon}_{xxxxx}(0,\tau)\right]^2\right] d\tau + N_{18} \quad (15)$$

с постоянными N_{14} и N_{15}, определяющимися лишь коэффициентами уравнения (1), функцией $f(x,t)$ и числом T. Далее, рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^1 x^3 L_{\varepsilon} u^{\varepsilon}(x,t)\, dx = \int\limits_0^1 x^3 f(x,t)\, dx.$$

Из него подобно тому, как мы получили оценку (11), но с использованием уже самой оценки (11), нетрудно получить оценку

$$\varepsilon \int\limits_0^t \left[u^{\varepsilon}_{xxxxx}(1,\tau)\right]^2 d\tau \leqslant N_{19}. \quad (16)$$

Оценка (16), аналогичная оценка для функции $u^{\varepsilon}_{xxxxx}(0,t)$, и неравенство (15) дают априорную оценку

$$\int\limits_0^t \int\limits_D b^2 \left[u^{\varepsilon}_{xxxx}\right]^2 dxd\tau + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_D |b| \left[u^{\varepsilon}_{xxxxx}\right]^2 dxd\tau \leqslant N_{20}. \quad (17)$$

Последняя требуемая оценка

$$\varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_D \left[u^{\varepsilon}_{xxxxxx}\right]^2 dxd\tau \leqslant N_{21} \quad (18)$$

очевидна; постоянные N_{20} и N_{21} в оценках (17) и (18) определяются лишь коэффициентами уравнения (1), функцией $f(x,t)$ и числом T.

Из доказанных оценок (4), (13), (14), (17), (18) и следует утверждение теоремы (подробные рассуждения см. [1]).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1. *Кроме того, пусть дополнительно выполняются условия*

$$a(x) \in C^2(\overline{D}), \quad a_0(x) \in C^1(\overline{D}), \quad b_0(x) \in C^1(\overline{D}),$$
$$k_0 - 4C_0^2 T > 0, \quad f_x(x,t) \in L_2(Q),$$
$$f(0,t) = f(1,t) = 0 \quad \textit{при } t \in [0,T].$$

Тогда краевая задача (1)–(3) *имеет решение* $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^4(D)\big)$, $u_t(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^2(D)\big)$.

Доказательство теоремы проводится вполне аналогично доказательству соответствующей теоремы работы [1].

Замечание. Уравнение (1) как в работе [1], так и в настоящей работе вполне можно заменить уравнением

$$Au_t + \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(b(x)\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right) = f(x,t), \quad m \geqslant 0\text{целое}, \tag{1'}$$

с оператором A указанного выше вида и с функцией $b(x)$, для которой выполняется условие $(-1)^m b(x) \geqslant 0$ при $x \in \overline{D}$. Более того, как уравнение (1), так и уравнение (1′) можно заменить общим уравнением того же типа с младшими членами и с коэффициентами, зависящими, помимо переменной x, также от переменной t. Суть представленных в [1] и в настоящей работе результатов не изменится.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кулешова И. И.* О разрешимости начально-краевой задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, вып. 1. С. 87–97.
2. *Кожанов А. И.* О свойствах решений для одного класса псевдопараболических уравнений // Докл. РАН. 1992. Т. 236, № 5. С. 781–786.
3. *Kozhanov A. I.* Certain classes of degenerate Sobolev — Galpern equations // Sib. Adv. Math. 1994. V. 4, N 1. P. 65–94.
4. *Кожанов А. И.* Вырождающиеся уравнения соболевского типа // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1998. С. 4–13.
5. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

г. Новосибирск, г. Рубцовск *1 ноября 2006 г.*

УДК 517.956.4

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ*)

Н. Н. Матвеева

Задачи с меняющимся направлением эволюции являются предметом многих математических исследований. В настоящей работе рассматривается краевая задача о встречных потоках для уравнения Хопфа. Разрешимость этой задачи установлена в работе [1]. Для уравнения пограничного слоя Прандтля — Мизеса доказана теорема существования обобщенного решения задачи о встречных потоках [2].

Данная статья продолжает исследования, начатые в [3], где рассматриваются вопросы численного решения указанной задачи. Итерационный метод строится на решении отдельных задач для параболического уравнения по разным направлениям переменной t. Здесь предложен вычислительный алгоритм, основанный на эллиптической регуляризации исходного уравнения. Точность численного решения проверяется на тестовых примерах.

1. Постановка задачи. Регуляризация

В области $\Omega = \{(x,t) \mid 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ для уравнения

$$uu_t - u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T), \tag{1}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке научной программы «Проведение научных исследований молодыми учеными» Федерального агентства по науке и инновациям Министерства образования и науки РФ (грант 2006–РИ–19.0/001/711).

© 2006 Матвеева Н. Н.

рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} u(x,0)=\varphi_0(x)\geqslant 0, \quad u(x,T)=-\varphi_1(x)\leqslant 0, \quad x\in[0,l]; \\ u(0,t)=u(l,t)=0, \quad t\in(0,T). \end{gathered} \tag{2}$$

Произведем эллиптическую регуляризацию уравнения (1):

$$uu_t-u_{xx}-\varepsilon u_{tt}=0, \quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T). \tag{3}$$

2. Автомодельное решение

Построим частное решение задачи (1), (2), полагая [2]

$$u=(t_0-t)\Phi(x), \quad t\in[0,t_0],\ t_0\in(0,T). \tag{4}$$

Тогда для функции $\Phi(x)$ получаем задачу

$$\Phi''=-\Phi^2, \quad \Phi|_{x=0,l}=0. \tag{5}$$

Сначала введем равномерную сетку $\overline{\omega}_h=\{\Phi_i=ih, i=\overline{0,n}; h=1/n\}$ по переменной x.

Задаче (5) поставим в соответствие разностную схему

$$\Phi_{i-1}-2\Phi_i+\Phi_i^2h_i^2+\Phi_{i+1}=0, \quad i=\overline{1,n-1}, \quad \Phi_0=\Phi_n=0.$$

Применяя итерационный метод Ньютона, находим функцию $\Phi(x)$:

$$\overset{s+1}{\Phi}_{i-1}-2\overset{s+1}{\Phi}_i+(\overset{s}{\Phi}_i^2+2(\overset{s+1}{\Phi}_i-\overset{s}{\Phi}_i)\overset{s}{\Phi}_i)h_i^2+\overset{s+1}{\Phi}_{i+1}=0, \quad i=\overline{1,n-1},$$

$$\overset{s+1}{\Phi}_0=\overset{s+1}{\Phi}_n=0.$$

Далее вычисляем

$$u_{ij}=(t_0-t_j)\Phi_i, \quad i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,N}.$$

3. Тестовые решения

В области Ω возьмем произвольную функцию $\varphi(x,t)$ ($\varphi_{tt}=0$), удовлетворяющую граничным данным задачи (1), (2):

$$\varphi(x,0)=\varphi_0(x), \quad \varphi(x,T)=-\varphi_1(x).$$

В левую часть уравнения (1) подставим вместо u функцию $\varphi(x,t)$, полученную функцию обозначим через $f(x,t)$:

$$L\varphi \equiv \varphi\varphi_t - \varphi_{xx} \equiv f(x,t).$$

Запишем уравнение (1) с правой частью $f(x,t)$:

$$uu_t - u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T). \tag{6}$$

Поскольку $\varphi_{tt} = 0$, то и (3) можем записать в виде

$$uu_t - u_{xx} - \varepsilon u_{tt} = f(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T). \tag{7}$$

Таким образом, функция $\varphi(x,t)$ является точным решением задач (6), (2) и (7), (2).

4. Вычислительный алгоритм

В области $\Omega = [0,l] \times [0,T]$ введем равномерную пространственно-временную сетку $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, где

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0,n}; h = l/n\}, \quad \overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{0,N}; \tau = T/N\}.$$

Краевой задаче (3), (2) поставим в соответствие разностную схему:

$$\varepsilon \frac{y_{i,j-1} - 2y_{ij} + y_{i,j+1}}{\tau^2} + \frac{y_{i-1,j} - 2y_{ij} + y_{i+1,j}}{h^2} - y_{ij}\sigma_i = 0,$$
$$i = \overline{0,n-1}, \quad j = \overline{1,N-1},$$
$$y_{0j} = y_{nj} = 0, \quad j = \overline{1,N-1},$$
$$y_{i0} = \varphi_0(x_i), \quad i = \overline{0,n},$$
$$y_{iN} = -\varphi_1(x_i), \quad i = \overline{0,n},$$

где

$$\sigma_i = \begin{cases} \frac{y_{ij} - y_{i,j-1}}{\tau} & \text{при } y_{ij} > 0, \\ \frac{y_{i,j+1} - y_{ij}}{\tau} & \text{при } y_{ij} \leqslant 0. \end{cases}$$

Разностная схема является нелинейной, поэтому для ее реализации используем итерационный метод Зейделя.

Итерационный процесс:

а) полагаем $s = 0$ и задаем начальное приближение $\overset{0}{y}_{ij}$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\overset{0}{y}_{i0} = \varphi_0(x_i), \quad \overset{0}{y}_{iN} = -\varphi_1(x_i), \quad i = \overline{0,n},$$
$$\overset{0}{y}_{0j} = \overset{0}{y}_{nj} = 0, \quad j = \overline{1,N-1};$$

б) решаем систему уравнений при $i = \overline{1,n-1}$, $j = \overline{1,N-1}$:

$$\overset{s+1}{y}_{ij} = \frac{\frac{\varepsilon}{\tau^2}\overset{s}{y}_{i,j+1} + \frac{1}{h^2}\overset{s}{y}_{i+1,j} + \left(\frac{\varepsilon}{\tau^2} + \frac{1}{\tau}\overset{s}{y}_{ij}\right)\overset{s+1}{y}_{i,j-1} + \frac{1}{h^2}\overset{s+1}{y}_{i-1,j}}{2\left(\frac{\varepsilon}{\tau^2} + \frac{1}{h^2}\right) + \frac{1}{\tau}\overset{s}{y}_{ij}}$$

при $\overset{s}{y}_{ij} > 0$,

$$\overset{s+1}{y}_{ij} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\tau^2} - \frac{1}{\tau}\overset{s}{y}_{ij}\right)\overset{s}{y}_{i,j+1} + \frac{1}{h^2}\overset{s}{y}_{i+1,j} + \frac{\varepsilon}{\tau^2}\overset{s+1}{y}_{i,j-1} + \frac{1}{h^2}\overset{s+1}{y}_{i-1,j}}{2\left(\frac{\varepsilon}{\tau^2} + \frac{1}{h^2}\right) - \frac{1}{\tau}\overset{s}{y}_{ij}}$$

при $\overset{s}{y}_{ij} \leqslant 0$,

$$\overset{s+1}{y}_{0j} = \overset{s}{y}_{nj} = 0, \quad j = \overline{1,N-1},$$
$$\overset{s+1}{y}_{i0} = \varphi_0(x_i), \quad i = \overline{0,n},$$
$$\overset{s+1}{y}_{iN} = -\varphi_1(x_i), \quad i = \overline{0,n};$$

в) далее решаем систему уравнений при $i = \overline{n-1,1}$, $j = \overline{N-1,1}$:

$$\overset{s+1}{z}_{ij} = \frac{\frac{\varepsilon}{\tau^2}\overset{s+1}{z}_{i,j+1} + \frac{1}{h^2}\overset{s+1}{z}_{i+1,j} + (\frac{\varepsilon}{\tau^2} + \frac{1}{\tau}\overset{s}{z}_{ij})\overset{s}{z}_{i,j-1} + \frac{1}{h^2}\overset{s}{z}_{i-1,j}}{2(\frac{\varepsilon}{\tau^2} + \frac{1}{h^2}) + \frac{1}{\tau}\overset{s}{z}_{ij}}$$

при $\overset{s}{z}_{ij} > 0$,

$$\overset{s+1}{z}_{ij} = \frac{(\frac{\varepsilon}{\tau^2} - \frac{1}{\tau}\overset{s}{z}_{ij})\overset{s+1}{z}_{i,j+1} + \frac{1}{h^2}\overset{s+1}{z}_{i+1,j} + \frac{\varepsilon}{\tau^2}\overset{s}{z}_{i,j-1} + \frac{1}{h^2}\overset{s}{z}_{i-1,j}}{2(\frac{\varepsilon}{\tau^2} + \frac{1}{h^2}) - \frac{1}{\tau}\overset{s}{z}_{ij}}$$

при $\overset{s}{z}_{ij} \leqslant 0$,

$$\overset{s+1}{z}_{0j} = \overset{s}{z}_{nj} = 0, \quad j = \overline{N-1,1},$$
$$\overset{s+1}{z}_{i0} = \varphi_0(x_i), \quad i = \overline{n,0},$$
$$\overset{s+1}{z}_{iN} = -\varphi_1(x_i), \quad i = \overline{n,0};$$

г) находим

$$\overset{s+1}{y}_{ij} = (\overset{s+1}{y}_{ij} + \overset{s+1}{z}_{ij})/2 \quad (i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, N-1});$$

д) повторяем пункты б)–г), до тех пор пока $|\overset{s+1}{y}_{ij} - \overset{s}{y}_{ij}| < a$, где a — заданная малая величина.

5. Примеры расчетов

Сравним результаты расчетов с автомодельным решением. Расчеты проведены при $l = 1$, $T = 1$, $t_0 = 0,5$ на сетке с $n = 100$, $N = 100$. Краевые условия (2) взяты в виде

$$u(x,0) = t_0\Phi(x) \geqslant 0, \quad u(x,T) = (t_0 - T)\Phi(x) \leqslant 0, \quad x \in [0,l];$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

Квадратичная погрешность при сравнении составила величину порядка 10^{-3}.

Для сравнения численного решения задачи (7), (2) с тестовым точным решением возьмем функцию $\varphi(x,t)$ (точное решение) в виде

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(x)(T-t)/T - \varphi_1(x)t/T.$$

Расчеты проведены при $\varphi_0(x) = \alpha x(l-x), \varphi_1(x) = \beta x(l-x)$, $l = 1$, $T = 1$, $\alpha = 18$, $\beta = 18$ на сетке с $n = 100$, $N = 100$. Квадратичная погрешность составила величину порядка 10^{-4}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бочаров О. Б.* О первой краевой задаче для уравнения теплопроводности со знакопеременным коэффициентом // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / СО АН СССР. Ин-т гидродинамики. 1978. Вып. 37. С. 27–39.

2. *Монахов В. Н.* Встречные потоки решений вырождающихся параболических уравнений // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 11. С. 77–90.

3. *Васильев В. И., Матвеева Н. Н.* Численное решение задачи для нелинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Наука и образование. Якутск. 2002. № 4. С. 63–65.

г. Якутск *2 июня 2006 г.*

УДК 518.9

ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ОБНАРУЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА НЕПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

С. В. Местников, Г. В. Эверстова

В работе рассматривается игра поиска неподвижного объекта в замкнутом ограниченном множестве на плоскости, являющемся прямоугольником [1–3]. Целью ищущего игрока является гарантированное обнаружение прячущегося игрока за минимальное время. Динамика движения ищущего игрока простая. Прячущийся игрок неподвижен, находится в прямоугольнике и считается обнаруженным, если попадает в круг обнаружения ищущего игрока.

1. Постановка задачи. Предположим, что динамика движения ищущего PЗ описывается уравнением

$$\dot{x} = u, \quad \|u\| \leqslant 1, \quad x, u \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

допустимые управления $u = u(t)$, $t \geqslant 0$, игрока P — кусочно-непрерывные функции. Под чистой стратегией a игрока P будем понимать пары $a = (x_0, u(\cdot))$, где $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $u = u(\cdot)$ — допустимое управление. Множество всех допустимых управлений обозначим через D_P. Под чистой стратегией игрока E будем понимать выбор точки y_0 из множества G. Игра происходит следующим образом: игрок E выбирает точку y_0 из множества G и остается там до конца игры, игрок P, не зная выбора игрока E, выбирает стратегию $a = (x_0, u)$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $u = u(t)$, $t \geqslant 0$, т. е. у него реализуется траектория $x = x(\cdot)$. Прячущийся игрок считается обнаруженным (пойманным) в момент t, если расстояние между точками $x(t)$ и y_0 меньше или равно l ($\rho(y_0, x(t)) \leqslant l$), где l — положитель-

© 2006 Местников С. В., Эверстова Г. В.

ное число, т. е. областью обнаружения игрока P является замкнутый круг с центром в точке $x = x(t)$. Выбор чистой стратегии определяет траекторию $x(\cdot) = x(\cdot, 0, x_0, u)$, где график функции $x(t)$ при $t \geqslant 0$ определяет некоторую непрерывную кривую, лежащую на плоскости $\mathbb{R}^2$. Зафиксируем конечный момент T, $0 \leqslant T < \infty$, и определим

$$x^T(\cdot) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t, 0, x_0, u), 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

Через $|x^T(\cdot)|$ обозначим длину кривой $x^T(\cdot)$. Тогда в силу ограничений на динамику игры (1) длина кривой $x^T(\cdot)$ всегда не больше числа T, или $|x^T(\cdot)| \leqslant T$. Введем множество X всевозможных траекторий движения игрока P следующим образом:

$$X = \{x(\cdot) \mid x(\cdot, 0, x_0, u),\ x_0 \in \mathbb{R}^2,\ u \in D_P\}.$$

Пусть

$$X^T = \{x^T(\cdot) \mid x^T(\cdot, 0, x_0, u),\ x_0 \in \mathbb{R}^2,\ u \in D_P\}.$$

Элементами множества X являются всевозможные кривые λ, удовлетворяющие следующим условиям: существуют точка $x_0 \in \mathbb{R}^2$ и допустимое управление $u \in D_P$ такие, что траектория $x(\cdot) = x(\cdot, 0, x_0, u)$, порожденная стратегией $a = (x_0, u(\cdot))$ при $t \geqslant 0$, совпадает с кривой λ.

Обозначим через Λ множество всевозможных кривых λ ограниченной длины, удовлетворяющих условиям: если кривая λ принадлежит Λ, тогда существует конечный момент $T < \infty$ такой, что $\lambda \in X^T$. Понятно, что

$$\Lambda = \bigcup_{T \geqslant 0} X^T.$$

Далее, до конца этого параграфа будем работать с кривыми $\lambda \in \Lambda$.

Определение 1. Будем говорить, что кривая λ *покрывает* (*заметает*) ограниченную область G, если выполняется включение $G \subset S_\lambda$, где

$$S_\lambda = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(y, x) \leqslant l,\ x \in \lambda\}.$$

Замечание 1. Если кривая $\lambda \in \Lambda$ заметает ограниченную область G, то у игрока P существует стратегия, гарантирующая обнаружение за конечное время.

Действительно, пусть $\lambda \in \Lambda$ заметает ограниченную область G. Тогда по определению множества Λ существует конечный момент $T < \infty$ такой, что $\lambda \in X^T$. Это означает, что существует такая стратегия $a = (x_0, u(\cdot))$, $x_0 \in D_P$, игрока P, что $\lambda = x(\cdot, 0, x_0, u)$. При этом стратегия $a = (x_0, u(\cdot))$ игрока P является гарантирующей обнаружение за время T.

Задача 1. *Найти кривую $\lambda \in \Lambda$ минимальной длины, покрывающую множество G.*

Если кривая $\lambda \in \Lambda$ является решением задачи 1 и если у игрока P существует стратегия $a = (x_0, u(\cdot))$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $u \in D_P$, $\|u(t)\| = 1$, такая, что $\lambda = x(t, 0, x_0, u)$ при $t \in [0, T]$ и $|\lambda| = T$, то стратегия $a = (x_0, u(\cdot))$ является гарантирующей обнаружение за минимальное время, а время T является решением задачи на быстродействие.

Для определенности предположим, что радиус обнаружения l равен 1 и множество G является квадратом со стороной a, кратной 2.

2. Множество G является квадратом со стороной $a = 2$. Требуется найти непрерывную кривую минимальной длины, двигаясь по которой со скоростью 1 игрок P заметает весь квадрат или, другими словами, для этого квадрата необходимо найти покрывающую $\lambda \in \Lambda$ кривую минимальной длины.

Пусть точка x_0, где в начальный момент находится игрок P, не фиксирована. Игрок P может выбрать произвольную точку $x_0 \in G$. В этом случае имеется покрывающая кривая x_0E длины 2 (рис. 1a)).

Покажем, что эта кривая не является покрывающей минимальной длины. Рассмотрим ломаную $\lambda_1 = HEFG$ (рис. 1b)), где $|AH| = |CF| = |DG| = |AH| = 1$. Ясно, что кривая λ_1 является покрывающей и $|\lambda_1| = 3|HE| = 6 - 3\sqrt{2} < 2$. Оказывается, и кривая λ_1 не является решением задачи 1 для этого квадрата. Действительно, проведем с

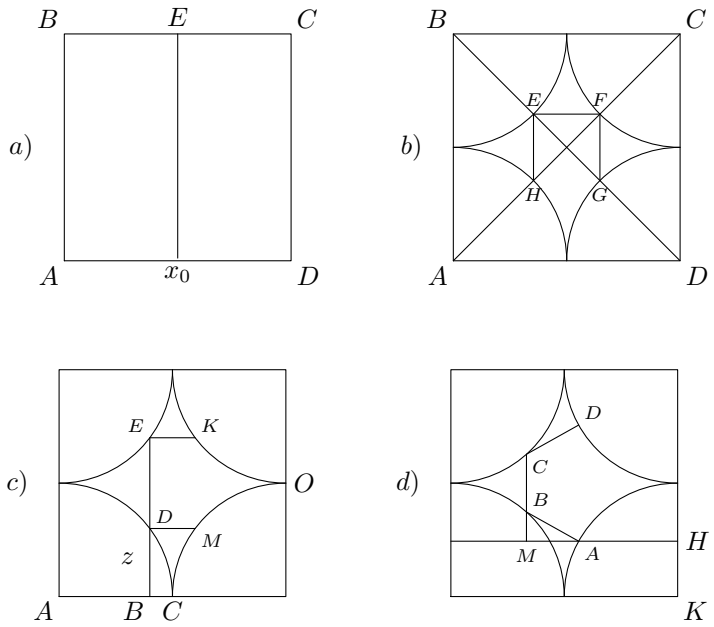

Рис 1.

вершин квадрата дуги окружностей радиуса 1 (рис. 1c)) и решим следующую задачу на экстремум: *найти ломаную минимальной длины, касающуюся всех четырех окружностей.*

Пусть наша ломаная имеет вид $\lambda_2 = MDEK$, где $|EK| = |DM|$ и EK параллельна DM.

Обозначим через z длину отрезка DB. Тогда

$$|BC| = 1 - \sqrt{1 - z^2}, \quad |DE| = 2 - 2z,$$

а длина кривой λ_2 равна

$$|\lambda_2(z)| = 4|BC| + |DE| = 6 - 2z - 4\sqrt{1 - z^2}.$$

Отсюда найдем точку минимума z_*. Заметим, что при $z = \sqrt{2}/2$ получаем кривую λ_1. Легко показать, что $z_* = 1/\sqrt{5}$. Однако, двигаясь по ломаной $MDEK$ при $z = 1/\sqrt{5}$, игрок P не заметает полностью весь

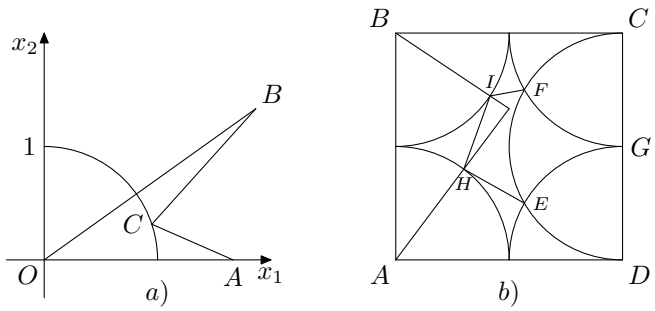

Рис. 2.

квадрат G, так как $|KO| = |MO| > 1$, и остается незаметенной хотя бы точка 0. С другой стороны, длина ломаной $\lambda_2(z)$ при $z \in [0, 1/\sqrt{5})$ убывает, а при $z \in (1/\sqrt{5}, 1]$ возрастает. Найдем на дуге окружности OC такую точку M, что $|OM| = 1$. Из теоремы Пифагора имеем

$$|OM| = \sqrt{(1-z)^2 + 1 - z^2}.$$

Решая это уравнение при $|OM|$, равной 1, получаем $z = 1/2$. Длина $|\lambda_2(1/2)|$ меньше $|\lambda_2(\sqrt{2}/2)|$. Следовательно, при $z = 1/2$ кривая $\lambda_2(1/2)$ является покрывающей и имеет длину меньше, чем у кривой λ_1.

Если обозначить через $\lambda_{\text{опт}}$ решение задачи 1 для рассматриваемого квадрата, то получим следующую оценку:

$$|\lambda_{\text{опт}}| \leqslant |\lambda_2(1/2)| = 5 - 2 \cdot \sqrt{3}. \tag{2}$$

Покажем, что и оценку (2) можно улучшить. Действительно, если обозначить через λ_3 ломаную $ABCD$ (рис. 1*d*)), где $|AB| = |CD|$, $|HA| = \sqrt{3/2}$ ($|HK| = 1/2$), $|MB| = z$, $0 \leqslant z \leqslant 1/2$, то тогда ломаная λ_3 является покрывающей и ее длина равна

$$|\lambda_3(z)| = 2(z^2 + (2 - \sqrt{3/2} - \sqrt{1 - (z + 1/2)^2})^2)^{1/2} + 1 - 2z, \tag{3}$$

Отсюда легко показать, что производная функции (3) при $z = 0$ меньше 0 и $\lambda_3(0) = \lambda_2(1/2)$. Это означает, что функция (3) при $z = 0$ ($0 \leqslant z \leqslant 1/2$) не достигает своего минимума.

Пусть $\bar{z}$ — точка минимума функции (3) при $0 \leqslant z \leqslant 1/2$. Тогда решение задачи 1 для заданного квадрата при произвольном положении z_0 удовлетворяет следующей оценке:

$$|\lambda_{\text{опт}}| \leqslant |\lambda_3(\bar{z})| < |\lambda_2(1/2)| = 5 - 2\sqrt{3}.$$

Численный расчет показал, что с точностью 0.0001 искомое значение z равно 0.0985, а $\lambda_3(z) = 1.4972$.

Попытаемся улучшить эту оценку. Для этого нам понадобится следующий вспомогательный результат.

Задача 2. *Пусть на положительном октанте декартовой системы координат даны четверть окружности радиуса* 1 *и две точки* A *и* B, *лежащие вне круга радиуса* 1, *точка* A *лежит на оси* Ox_1, B *лежит выше оси* Ox_1, $|AO| = r_1$, $|BO| = r_2$, $|AB| = r$ (*рис.* 2*a*)). *Здесь* $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r > 0$ — *положительные числа, являющиеся параметрами задачи. Найти на дуге окружности* $S(O,1)$ *такую точку* $C^* \in S(O,1)$, *что ломаная* AC^*B *имеет минимальную длину среди всех ломаных* ACB, $C \in S(O,1)$.

Попытаемся решить задачу 2. Угол между лучом OC и осью Ox_1 обозначим через φ. Тогда длина ломаной ABC зависит от угла $\varphi \in [0, 2\pi]$. Введем функцию $\lambda(\varphi) = |ACB|$. Имеем

$$|CA| = \sqrt{(|AO| - \cos\varphi)^2 + \sin\varphi^2},$$

или

$$|CA| = \sqrt{r_1^2 - 2r_1\cos\varphi + 1}.$$

Угол между лучом OB и осью Ox_1 обозначим через φ_1. Тогда

$$|CB| = \sqrt{r_2^2 - 2r_2\cos(\varphi_1 - \varphi) + 1}.$$

Из вида этих функций следует, что оптимальное решение задачи 2 (точка φ^*) должно лежать на отрезке $0, \varphi_1$. Отсюда имеем

$$|\lambda(\varphi)| = \sqrt{r_1^2 - 2r_1\cos\varphi + 1} + \sqrt{r_2^2 - 2r_2\cos(\varphi_1 - \varphi) + 1}.$$

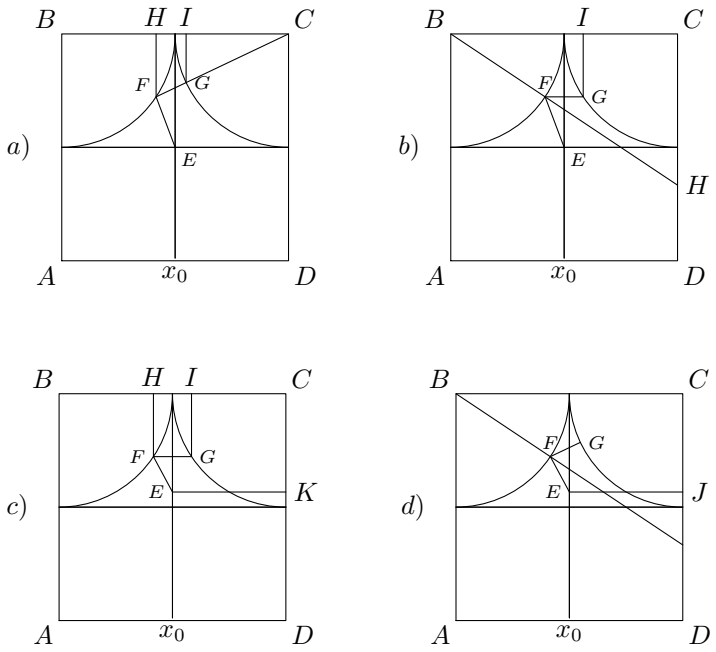

Рис. 3.

Несложный анализ показывает, что функция $|\lambda(\varphi)|$ при $\varphi \in [0, \varphi_1]$ имеет единственный минимум $\varphi^* \in [0, \varphi_1]$ и в точке минимума φ^* должно выполняться равенство

$$\frac{r_1 \sin \varphi^*}{|AC|} - \frac{r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi^*)}{|BC|} = 0.$$

Геометрический смысл последнего равенства такой: точка C, соответствующая оптимальному углу $\varphi^* \in [0, \varphi_1]$, является решением задачи 2 и луч OC, делящий угол ACB пополам, является биссектрисой угла ACB. В общем случае аналитически найти оптимальный угол $\varphi^* \in [0, \varphi_1]$ нам не удается. В дальнейшем, если понадобится, для конкретных значений параметров r_1, r_2, r приближенное значение угла φ^* будем находить численно. В частном случае, когда $r_1 = r_2$, имеем

$$\varphi^* = 1/2\varphi_1, \quad \lambda(\varphi^*) = 2\sqrt{r_1^2 - 2r_1 \cos(\varphi_1/2) + 1}.$$

Возвратимся к нашему примеру. Зафиксируем точки E и F, лежащие на пересечении окружностей радиуса 1 с центрами в точках C и D с окружностью радиуса 1 с центром в точке G (рис. 2b)). Возьмем любую точку $H \in S(A,1)$, ордината которй не меньше ординаты точки E. Пусть разность высот по оси Ox_2 между этими числами равна z, $z \geqslant 0$. После этого решим задачу: *найти точку $I \in S(B,1)$ такую, что ломаная HIF имеет минимальную длину среди всех ломаных, начинающихся в точке H, кончающихся в точке F и имеющих общую точку с окружностью $S(B,1)$.*

Обозначим через K точку пересечения лучей AH и BI. Тогда из свойства решения задачи 2 имеем условие:

1) углы HIK и KIF должны быть равны.

Решая аналогичную задачу о нахождении точки H при фиксированной точке I, получим следующее условие:

2) углы IHK и KHE должны быть равны.

Из условий 1 и 2 вытекает, что все углы FIK, KIH, IHK и KHE должны быть равны или, другими словами, решения этой задачи и предыдущей совпадают.

3. Случай, когда точка z фиксирована. Пусть точка z фиксирована и лежит на середине стороны квадрата G. Ясно, что для этого квадрата кривая λ_1 (рис. 3a)) является покрывающей и имеет длину, равную 2. Попробуем найти покрывающую кривую, длина которой меньше 2.

Рассмотрим следующий класс ломаных λ_2, зависящих от z и имеющих вид $\lambda_2(z)$ (рис 3a)), где

$$\lambda_2(z) = x_0EFG, \quad |x_0E| = 1, \quad |HF| = z,$$
$$F \in S(B,1), \quad G \in S(C,1), \quad G \in [FG].$$

Условие $G \in [FC]$ взято из того, что если мы зафиксируем любое число, лежащее на окружности $S(B,1)$, то минимальное расстояние $|FG|$ для точек $G \in S(C,1)$ достигается в такой точке G, лежащей на отрезке

$[FC]$. Иначе говоря, если мы ищем ломаную минимальной длины со свободным концом G, лежащим на окружности $S(C,1)$, то точка G обязательно должна лежать на отрезке $[FC]$.

Опустим из точки G перпендикуляр на отрезок BC и полученную точку обозначим через I. Тогда если $|IG| \geqslant 1/2$, то ломаная $\lambda_2(z)$ является покрывающей, если же $|IG| < 1/2$, то ломаная $\lambda_2(z)$ не является покрывающей, так как $|GI| > 1$ и поэтому существует число $\epsilon > 0$ такое, что точка K, $|KJ| = \epsilon$, останется необнаруженной. Несложный анализ показывает, что

$$|\lambda_2(z)| = \sqrt{3 - 2z - 2\sqrt{1-z^2}} + \sqrt{5 - 4\sqrt{1-z^2}} - 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

При этом длина отрезка $|IG|$ как функция от z, $0 \geqslant z \geqslant 1$, имеет вид

$$|IG| = \frac{z}{\sqrt{5 - 4\sqrt{1-z^2}} - 1}.$$

Отсюда видно, что длина отрезка $|IG|$ увеличивается при увеличении z, $0 \leqslant z \leqslant 1$. При $z = 1$ имеем

$$|IG| = \frac{1}{\sqrt{5}-1} < \frac{1}{2}.$$

Другими словами, в классе ломаных $\lambda_2(z)$ со свободным концом G, лежащей на окружности $S(C,1)$, мы не можем улучшить оценку 2, так как $\lambda_2(1) > 2$.

Перейдем к следующему классу ломаных $\lambda_3(z)$, зависящих от числа z, $0 \leqslant z \leqslant 1$, у которых второй конец G закреплен. Пусть ломаная $\lambda_3(z)$ имеет вид x_0EFG, $|x_0E| = 1$, $|IG| = 1/2$ (рис. 3*b*)). Пусть H — любая точка, лежащая на прямой BF, $|BH| > |BF|$. Тогда из свойства решений задачи 2 мы имеем, что в этом классе ломаных минимальную длину имеет такая ломаная, у которой углы HFG и HFE равны.

Численно решая задачу 2 с точностью 0.001 при $r_1 = |BE|$, $r_2 = |BG|$, $r = |EG|$б получим $r_{\min} = 0.221$ (в радианах), а $\lambda_3 z_{\min} = 1.7814$.

Продолжим исследование случая с фиксированной точкой x_0. Определим класс ломаных $\lambda_4(z)$, $1 \leqslant z \leqslant 2$б с закрепленным концом G

следующим образом (рис. 3*c*)). Пусть $\lambda_4(z) = x_0EFG$, где $|x_0E| = z$, $F \in S(C,1)$, FG параллельна BC, $|GK| = 1$. Из условия $|GK| = 1$ вытекает, что все ломаные $\lambda_4(z)$, $1 \leqslant z \leqslant 2$, являются покрывающими и $\lambda_4(2) = 2$. Длина кривой $\lambda_4(z)$, которая зависит от z, $1 \leqslant z \leqslant 2$, равна

$$|\lambda_4(z)| = z + (2 - \sqrt{4z - z^2})^{1/2} + 2 - \sqrt{4z - z^2}, \tag{4}$$

откуда

$$(|\lambda_4(1)|)' < 0. \tag{5}$$

Отсюда следует, что эта функция при $z = 1$ ($1 \leqslant z \leqslant 2$) не достигает своего минимума. В частности, при $z = 25/16$ имеем $|\lambda_4(z)| < 2$. Численный расчет показал, что в классе ломаных $\lambda_4(z)$ с точностью 0.001 оптимальная точка z равна 1.1611, а $|\lambda_4(z)| = 1.775$.

Рассмотрим для этого случая последний класс ломаных $\lambda_5(z)$, $1 \leqslant z \leqslant 2$, $\lambda_5(z) = x_0EFG$ (рис. 3 г), где $|x_0E| = z$, $G \in S(C,1)$, $|GJ| = 1$, а точка F принадлежит $S(B,1)$ и является решением задачи 2 для точек G, E и окружности $S(B,1)$: если точка K лежит на луче BF и $|BK| > |BF|$, то тогда углы KFG и EFK равны. Ясно, что длина оптимальной ломаной в классе $\lambda_4(z)$ не больше длины таковой в классе $\lambda_5(z)$. При этом длины этих оптимальных ломаных могут быть равны только в том случае, если они обе являются решениями задачи 2.

Численные расчеты показали, что при $z = 1.1611$ имеем $|\lambda_5(z)| = 1.7636$.

4. Множество G является квадратом со стороной $a = 4$. Пусть теперь $a = 4$, z не фиксирована. Для этого случая существует покрывающая кривая λ_1 (рис. 4*a*)).

Ломаная λ_1 построена следующим образом: ломаные AB и HG соответствуют кривой λ_3 из уже рассмотренного случая при $a = 2$ (для кривой λ_3 случая $a = 2$ введем обозначение λ_3^2). Из решения задачи 2 при $r_1 = r_2$ имеем

$$|BCD| = 2\sqrt{6 - 3\sqrt{2}}.$$

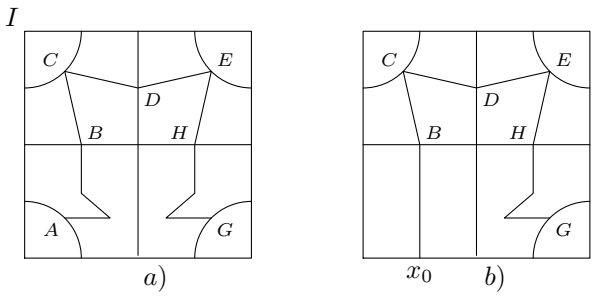

Рис. 4.

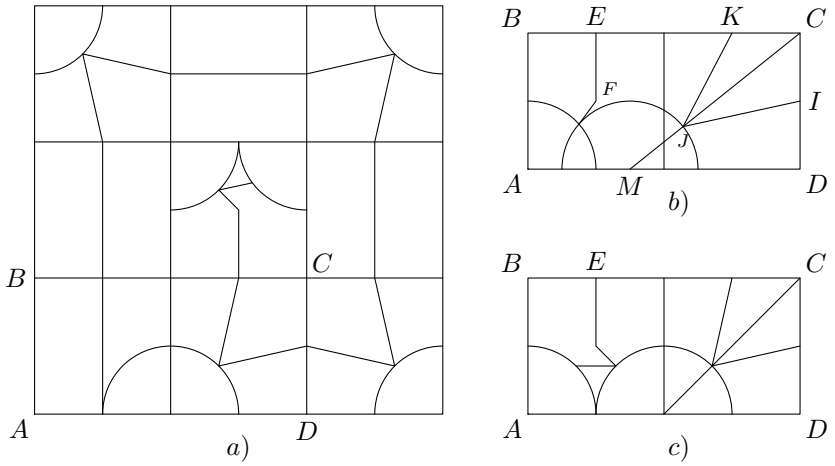

Рис. 5.

Отсюда

$$|\lambda_{\text{опт}}| \leqslant 2|\lambda^2_{\text{опт}}| + 4\sqrt{6-3\sqrt{2}}.$$

Тогда из оценки кривой $\lambda^2_{\text{опт}}$ (здесь $\lambda^2_{\text{опт}}$ есть $\lambda_{\text{опт}}$ при $a=2$) имеем

$$|\lambda_{\text{опт}}| \leqslant 8.830.$$

Если x_0 фиксирована и лежит на одной из сторон квадрата на расстоянии 1 от угловой точки, то получим следующую оценку для кривой λ^4_2 (рис. 4*b*)):

$$\left|\lambda^4_{\text{опт}}\right| \leqslant 2 + 4\sqrt{6-3\sqrt{2}} + \left|\lambda^2_{\text{опт}}\right|,$$

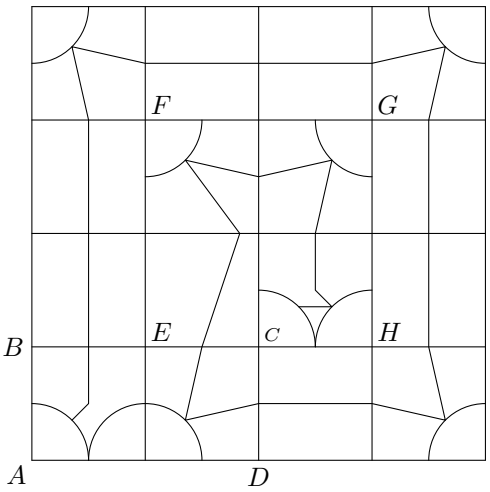

Рис. 6.

или

$$\left|\lambda^4_{\text{опт}}\right| \leqslant 9.066.$$

Здесь $\lambda^4_{\text{опт}}$ есть $\lambda_{\text{опт}}$ при $a = 4$.

5. Множество G является квадратом со стороной $a = 6$. Для случая: $a = 6$ и x_0 фиксирована, можно получить следующую оценку (рис. $5a$))

$$\left|\lambda^6_{\text{опт}}\right| \leqslant 8 + 8\sqrt{6 - 3\sqrt{2}} + \left|\lambda^2_{\text{опт}}\right|$$

или

$$\left|\lambda^6_{\text{опт}}\right| \leqslant 20.369.$$

Если x_0 произвольна, то в квадрате со стороной $a = 6$ (рис. $5a$)) надо отдельно рассмотреть прямоугольник $ABCD$. При этом, заменяя выделенный четырехугольник $ABCD$ четырехугольником $ABCD$ (рис. $4b$)), мы получим оценку

$$\left|\lambda^6_{\text{опт.фик}}\right| \leqslant 20.132.$$

Попытаемся ее улучшить. Для этого отдельно рассмотрим четырехугольник $ABCD$ и две ломаные EFG и KGI, где $|BE| = 1$, FE параллельна AB, $|CK| = |CI| = 1$, точка C лежит на пересечении окружностей $S(A,1)$ и $S(M,1)$, точка J лежит на пересечении окружности $S(M,1)$ и отрезка $[MC]$. Длина отрезка AM, которую обозначим через z, является параметром, $z = |AM|$, $z \in [1,2]$. Решим следующую вспомогательную задачу: *найти точку* $z \in [1,2]$, *для которой сумма длин ломаных* EFG *и* KJI *минимальна*. Введем функцию

$$\lambda(z) = |EFG| + |KJI|.$$

Так как

$$|FG| = 3 - z - 2\sqrt{1 - \frac{z^2}{4}}$$

и

$$|KJ| = \sqrt{\left(3 - z - \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{20 - 8z + z^2}}}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{\sqrt{20 - 8z + z^2}}\right)^2},$$

имеем

$$\lambda(z) = 4 - z - 2\sqrt{1 - \frac{z^2}{4}} + 2\sqrt{\left(3 - z - \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{20 - 8z + z^2}}}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{\sqrt{20 - 8z + z^2}}\right)^2}$$

или, другими словами, надо найти такое $z^* \in [1,2]$, что

$$z^* = \{z^* \in [1,2] \mid \lambda(z^*) = \min_{z \in [1,2]} \lambda(z)\}.$$

Численный расчет показал, что $z^* = 1.7689$, $\lambda(z^*) = 4.1349$.

6. Множество G является квадратом со стороной $a = 2n$, $n \geqslant 4$. Аналогично можно получить оценки для квадратов со сторонами $a = 8, 10, \ldots$ (рис. 6). Например, для квадрата со стороной $a = 8$ (см. рис. 6) четырехугольник $ABCD$ соответствует рассмотренному выше четырехугольнику $ABCD$ для случая, когда сторона квадрата

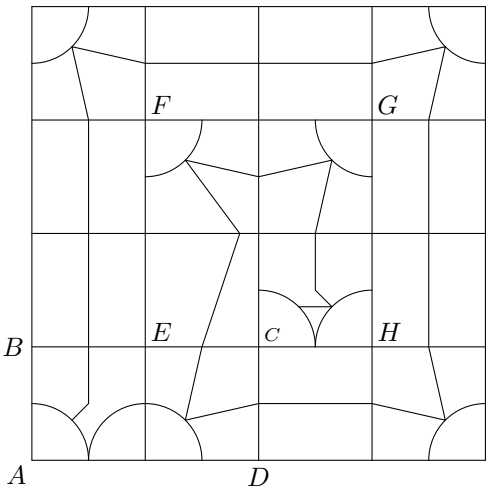

Рис. 7.

равна $a = 6$, а квадрат $EFGH$ — случаю, когда сторона квадрата равна $a = 4$ и точка x_0 фиксирована.

Замечание 2. Если бы нам удалось найти покрывающие кривые минимальной длины, соответствующие квадрату со стороной $a = 2$ и четырехугольнику $ABCD$ (рис. 5*b*)), то мы получили бы более точные оценки решения задачи 1 для любого квадрата со стороной $a = 2n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Случай, когда фазовое ограничение игрока E является четырехугольником, длины сторон которого кратны 2, не отличается от случая, когда область поиска является квадратом со сторонами, кратным 2. Например, в четырехугольнике со сторонами 6 и 8 можно получить следующую покрывающую кривую $x_0 I$ (рис. 7). Здесь четырехугольник $ABCD$ соответствует квадрату со стороной $a = 6$, а квадрат $EFGH$ — квадрату со стороной $a = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петросян Л. А., Зенкевич Н. А.* Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.

2. *Петросян Л. А., Гарнаев А. Ю.* Игры поиска. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
3. *Зенкевич Н. А., Местников С. В.* Динамический поиск подвижного объекта в условиях конфликта // Вопросы механики и процессов управления. 1991. Т. 14. С. 68–76.

г. Якутск *31 мая 2006 г.*

УДК 517.95

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ СИНЬОРИНИ

З. В. Монастырева

В работе исследуется вопрос о применении метода фиктивных областей в задаче Синьорини. Суть метода состоит в том, что в более широкой области находятся решения семейства вспомогательных задач, сходящиеся к решению исходной задачи. Отметим, что метод фиктивных областей для краевой задачи может принимать различные формы в зависимости от выбора фиктивной области. Фиктивная область строится так, что новая задача рассматривается в области с разрезом.

Рассмотрим постановку исходной задачи Синьорини. Пусть $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей $\Gamma_1 = \Gamma_c \cup \Gamma_0$, $\Gamma_c \cap \Gamma_0 = \varnothing$, $\operatorname{meas}\Gamma_0 > 0$. Для простоты предполагаем, что Γ_c — гладкая кривая, не содержащая своих концевых точек. Обозначим через ν вектор внутренней нормали к Γ_1. В области Ω_1 будем решать задачу Синьорини. В статье В. Д. Степанова и А. М. Хлуднева [1] рассмотрен случай, когда уравнение равновесия имеет вид

$$-\operatorname{div}(a\nabla u) = f \quad \text{в } \Omega_1$$

и краевые условия вида

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad u \geqslant 0, \quad a\frac{\partial u}{\partial \nu} \leqslant 0, \quad u \cdot a\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_C.$$

В данной работе рассмотрен более общий случай. Именно, требуется

© 2006 Монастырева З. В.

найти функцию u такую, что

$$-\operatorname{div}(a\nabla u) + bu = f \quad \text{в } \Omega_1, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \tag{2}$$

$$u \geqslant 0, \quad a\frac{\partial u}{\partial \nu} \leqslant 0, \quad u \cdot a\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \tag{3}$$

Здесь $a \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $b \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ — заданные функции, $a \geqslant c_0$, $c_0 = \mathrm{const} > 0$, $b \geqslant 0$. Задача (1)–(3) допускает вариационную постановку. Пусть

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1) = \{v \in H^1(\Omega_1) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0\}, \tag{4}$$

где $H^1(\Omega_1)$ — пространство Соболева функций, суммируемых с квадратом вместе с первыми производными в Ω_1. Введем также в рассмотрение выпуклое замкнутое множество допустимых перемещений:

$$K_c = \left\{v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1) \mid [v] \geqslant 0 \text{ почти всюду на } \Gamma_c\right\}. \tag{5}$$

Тогда задача (1)–(3) эквивалентна минимизации функционала энергии

$$E(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_1} (a|\nabla v|^2 + bv^2) - \int\limits_{\Omega_1} fv \tag{6}$$

на множестве K_c и может быть записана в виде следующего вариационного неравенства:

$$u \in K_c, \quad \int\limits_{\Omega_1} (a\nabla u\nabla(v-u) + bu(v-u)) \geqslant \int\limits_{\Omega_1} f(v-u) \quad \forall v \in K_c. \tag{7}$$

Поскольку функционал $E(v)$ коэрцитивный и слабо полунепрерывный снизу, то вариационное неравенство (7) имеет решение, причем единственное.

К этой задаче эффективно применяется метод фиктивных областей. Исходную задачу Синьорини должны рассматривать как предельную для некоторого семейства вспомогательных задач с параметром, определенных в более широкой по сравнению с Ω_1 области.

Расширим область Ω_1 до области Ω_c, добавляя фиктивную область Ω_2 так, что внешняя граница области Ω_c совпадает с внешней границей области Ω_2. Пусть Γ — внешняя граница области Ω_c, которую будем считать достаточно гладкой.

Сформулируем в Ω_c некоторое семейство вспомогательных задач. Положим

$$a^\varepsilon = \begin{cases} a & \text{в } \Omega_1, \\ \frac{a}{\varepsilon} & \text{в } \Omega_2, \end{cases} \tag{8}$$

где ε — положительный параметр, который впоследствии будет стремиться к нулю.

В области Ω_c будем решать следующую задачу. *Найти функцию* u^ε:

$$-\operatorname{div}(a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) + bu^\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega_c, \tag{9}$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{10}$$

$$[u^\varepsilon] \geqslant 0, \quad \left[a^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\right] = 0, \quad a^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} \leqslant 0, \quad [u^\varepsilon] \cdot a^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \tag{11}$$

$[u] = u^+ - u^-$ — скачок функции u на Γ_c, где $u^\pm$ определяется на $\Gamma_c^\pm$ в соответствии с выбранным направлением нормали ν на Γ_c. Задача (9)–(11) также допускает вариационную формулировку. Именно, пусть

$$H^1_\Gamma(\Omega_c) = \{v \in H^1(\Omega_c) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma\}, \tag{12}$$

$$K = \left\{v \in H^1_\Gamma(\Omega_c) \mid [v] \geqslant 0 \text{ почти всюду на } \Gamma_c\right\}. \tag{13}$$

Тогда задача (9)–(11) эквивалентна задаче минимизации функционала

$$F(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_c} (a^\varepsilon |\nabla v|^2 + bv^2) - \int\limits_{\Omega_c} fv \tag{14}$$

на множестве K и может быть записана в виде вариационного неравенства

$$u^\varepsilon \in K, \quad \int\limits_{\Omega_c} (a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla (v - u^\varepsilon) + bu^\varepsilon (v - u^\varepsilon)) \geqslant \int\limits_{\Omega_c} f(v - u^\varepsilon) \quad \forall v \in K. \tag{15}$$

При каждом фиксированном ε можно найти из (15) решение задачи (9)–(11), причем единственное. Отметим, что это решение определено в более широкой области и, более того, при $\varepsilon \to 0$

$$u^\varepsilon \to u \quad \text{слабо в } H^1_\Gamma(\Omega_c), \tag{16}$$

$$u^\varepsilon \to 0 \quad \text{сильно в } H^1(\Omega_2). \tag{17}$$

Осуществим переход к пределу в вариационном неравенстве (15). Выберем $v \in K$ таким образом, чтобы $v \equiv 0$ (при этом $v \geqslant 0$ на Γ_c^+), и подставим эту функцию в (15). Далее, переходя к нижнему пределу в обеих частях с учетом (16)–(17) и принимая во внимание очевидное неравенство

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Omega_2} (a|\nabla u^\varepsilon|^2 + b u^{\varepsilon 2}) \geqslant 0, \tag{18}$$

будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_1} (a \nabla u \nabla v + buv) \geqslant \int\limits_{\Omega_1} (a|\nabla u|^2 + bu^2) + \int\limits_{\Omega_1} f(v-u). \tag{19}$$

Так как $u^\varepsilon \in K$, заключаем, что ограничение предельной функции u на область Ω_1 принадлежит множеству K_c, которое определено в (5). Таким образом, соотношение (19) может быть записано в виде вариационного неравенства, в точности совпадающего с (7). Это означает, что сужение предельной функции u на область Ω_1 является решением задачи Синьорини (1)–(3). Вернемся теперь к дифференциальной постановке задачи и дадим точную интерпретацию краевых условий (11) на Γ_c. Прежде всего отметим, что из (15) вытекает справедливость уравнения (9) в смысле обобщенных функций. В частности,

$$-\operatorname{div}(a \nabla u^\varepsilon) + b u^\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega_1, \quad -\operatorname{div}\left(\frac{a}{\varepsilon} \nabla u^\varepsilon\right) + b u^\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega_2. \tag{20}$$

Первое условие (11) заложено в определении множества K. Возьмем $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, где $\Omega = \Omega_c \cup \overline{\Gamma_c}$, а $H^1_0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma\}$.

Тогда $v = u^\varepsilon \pm \varepsilon \in K$ и после подстановки v в (15) в качестве пробной функции получим

$$\int\limits_{\Omega_c} (a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi + b u^\varepsilon \varphi) = \int\limits_{\Omega_c} f\varphi. \tag{21}$$

Из этого соотношения следует равенство

$$\int\limits_{\Omega_1} (a\nabla u^\varepsilon \nabla \varphi + b u^\varepsilon \varphi) + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Omega_2} (a\nabla u^\varepsilon \nabla \varphi + b u^\varepsilon \varphi) = \int\limits_{\Omega_2} f\varphi + \int\limits_{\Omega_1} f\varphi. \tag{22}$$

Воспользуемся известной формулой Грина для областей Ω_1, Ω_2 с липшицевыми границами Γ_1, Γ_2:

$$\int\limits_{\Omega_i} a^\varepsilon \nabla w \nabla v = -\int\limits_{\Omega_i} v \operatorname{div}(a^\varepsilon \nabla w) + \left\langle a^\varepsilon \frac{\partial w}{\partial n}, v \right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma_i}, \tag{23}$$

справедливой для всех $w \in H^1(\Omega_i)$, $\operatorname{div}(a^\varepsilon \nabla w) \in L^2(\Omega_i)$, $v \in H^1(\Omega_i)$, где n — внешняя нормаль к Γ_i, а скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2},\Gamma_i}$ обозначают двойственность между сопряженными пространствами $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ и $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$. При этом $a^\varepsilon \frac{\partial w}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$. Добавим, что через $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$, $i = 1, 2$, обозначены пространства функций с нормами

$$\|v\|_{\frac{1}{2}}, \quad \Gamma_i^2 = \|v\|^2_{L^2(\Gamma_i)} + \int\limits_{\Gamma_i} \int\limits_{\Gamma_i} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^2}\, dxdy.$$

Введем также пространство функций $H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_c)$ с нормой

$$\|v\|_{\frac{1}{2}}, \quad \Gamma_c^{00} = \left(\|v\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma_c} + \int\limits_{\Gamma_c} \frac{v^2}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Gamma_c)$. Через $H^{-\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_c)$ будем обозначать пространство, сопряженное к $H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_c)$. Для функции v, заданной на Γ_c, обозначим через $\bar{v}$ продолжение нулем вне Γ_c, т. е.

$$\bar{v} = \begin{cases} v & \text{на } \Gamma_c, \\ 0 & \text{на } \Gamma_i \setminus \Gamma_c, \ i = 1, 2. \end{cases} \tag{24}$$

В этом случае $\bar{v} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ тогда и только тогда, когда $v \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$. Отметим также, что если $v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$, то можно считать $v \in H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$.

Итак, из уравнений (22) с учетом формулы Грина и уравнений (20) получаем

$$-\left\langle a\frac{\partial u^{\varepsilon\,+}}{\partial \nu}\,,\varphi\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma_1} + \left\langle a\frac{\partial u^{\varepsilon\,-}}{\partial \nu}\,,\varphi\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma_1} = 0. \tag{25}$$

Заметим, что $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Так как $\varphi = 0$ на $\Gamma_1 \cap \Gamma_c$, то $\varphi \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$. Тогда предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$\left\langle \left(\frac{a}{\varepsilon}\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \nu}\right)^{-} - \left(a\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \nu}\right)^{+}, \varphi\right\rangle^{00}_{\frac{1}{2},\Gamma_c} = 0. \tag{26}$$

Заметим, что в (26) в качестве φ можно выбрать любой элемент из пространства $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$. Итак, (26) выполняется для всех $\varphi \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$. Это означает, что второе условие в (11) выполняется в смысле элементов из пространства $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$.

Аналогичным образом можно получить, в каком смысле понимаются остальные условия (11):

$$a^{\varepsilon}\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \nu} \leqslant 0 \quad \text{в смысле элементов из } H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c), \tag{27}$$

$$\left\langle \left(a^{\varepsilon}\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \nu}\right), [u^{\varepsilon}]\right\rangle^{00}_{\frac{1}{2},\Gamma_c} = 0. \tag{28}$$

Таким образом, получены точные интерпретации краевых условий на Γ_c.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов В. Д., Хлуднев А. М.*. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, №. 6. С. 1350–1364.

г. Якутск *2 июня 2006 г.*

УДК 532.546

ИТЕРАЦИОННАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А. Р. Павлов, И. Г. Ларионова,
М. В. Михайлова

В работе рассмотрено численное решение задачи о промерзании влажных пористых сред. Построена неявная разностная схема, для численной реализации которой определена итерационная схема, доказана ее сходимость.

1. Задача о промерзании влажной пористой среды сводится к системе уравнений тепломассопереноса с фазовыми переходами [1, 2].

Температурная задача:

$$C_1\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial T}{\partial x}\right),\quad T>T_*,\ \xi(t)<x<l, \tag{1}$$

$$C_2\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2\frac{\partial T}{\partial x}\right)+L\frac{\partial w_2}{\partial t},\quad T<T_*,\ 0<x<\xi(t). \tag{2}$$

На границе раздела фаз имеет место условие типа Стефана:

$$\lambda_2\frac{\partial T}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial T}{\partial x}=L[w_*-w_1(T_*)]\frac{d\xi}{dt},\quad T=T_*\ (x=\xi(t)). \tag{3}$$

Граничные условия для случая промерзания с левой границы:

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha(T-T_c),\quad x=0,\ t>0, \tag{4}$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x}=0,\quad x=l,\ t>0. \tag{5}$$

© 2006 Павлов А. Р., Ларионова И. Г., Михайлова М. В.

Начальное условие:

$$T(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{6}$$

Введены следующие обозначения: C_i, λ_i — объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности i-й фазы, T_* — температура фазового перехода, w_* — значение влажности на фазовой границе со стороны талой зоны, $w_1(T_*)$ — такая же величина со стороны мерзлой зоны, $w_1(T)$ — известная функция, выражающая количество незамерзшей воды при данной температуре, w_2 — влажность по льду, L — скрытая теплота, выделяющаяся при промерзании куб. м. воды, α — коэффициент теплообмена с окружающей средой, T_c — температура окружающей среды, $x = \xi(t)$ — положение фронта фазового перехода.

Влажностная задача. Рассматривается движение влаги как в талой, так и мерзлой зонах:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad T > T_*, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2 \frac{\partial w_1}{\partial x}\right), \quad T < T_*, \tag{8}$$

где $\overline{w} = w_1 + w_2$. На границе фазового перехода скачком замерзает свободная влага $w_* - w_1(T_*) = w_2(T_*)$. Уравнение баланса массы на фазовой границе можно записать в виде

$$k_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} - k_1 \frac{\partial w}{\partial x} = w_2(T_*) \frac{d\xi}{dt}. \tag{9}$$

Граничные условия для влажности записываются в зависимости от фазового состояния границы:

$$k_1 \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_*(w - \psi), \quad x = 0,\ T > T_*, \tag{10}$$

$$k_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} = \alpha_*(w_1 - \psi), \quad x = 0,\ T \leqslant T_*, \tag{11}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = l,\ T > T_*, \tag{12}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \quad x = l,\ T \leqslant T_*. \tag{13}$$

Начальное условие:

$$w(x,0) = \varphi_*, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{14}$$

w — влажность в талой зоне, ψ — равновесная с окружающей средой влажность материала, α_* — коэффициент влагообмена.

Приведенная математическая модель, в частности, описывает процессы тепломассопереноса при промерзании и оттаивании грунтов, интерес исследователей к которым не ослабевает [3, 4].

Уравнения (1)–(3) обычно принято записывать в виде одного уравнения, заданного во всей области. Аналогично поступаем и с уравнениями для влажности. Заметим, что функция $T(x,t)$ в первой задаче является непрерывной функцией. А решение второй задачи, если рассматривать влажность по жидкой фазе, терпит разрыв первого рода на фазовом фронте. Для того чтобы написать влажностную задачу относительно непрерывной функции, введем новую функцию:

$$\Phi = \begin{cases} w, & T \geqslant T_*, \\ \overline{w}, & T < T_*. \end{cases}$$

Функция $\Phi(T)$ при $T \to T_* - 0$ принимает значение $\Phi(T) = \overline{w} = w_1(T_*) + w_2(T_*) = w_*$, а при $T \to T_* + 0$ — значение, равное w_*, т. е. она непрерывна в точке $T = T_*$.

Имеет место следующее утверждение: уравнения (7)–(9) можно заменить одним уравнением

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial w_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\delta w_2), \tag{15}$$

определенным во всей области $0 < x < l$, где

$$k = \begin{cases} k_1, & T > T_*, \\ k_2, & T \leqslant T_*, \end{cases} \qquad \delta = \begin{cases} 1, & T = T_*\ (x = \xi(t)), \\ 0, & T \neq T_*\ (x \neq \xi(t)). \end{cases}$$

Справедливость утверждения при $T < T_*$ и $T > T_*$ очевидна. Для доказательства того, что уравнение (15) включает и условие (9), воспользуемся методикой работ [5, 6]. Выберем область на плоскости XOT,

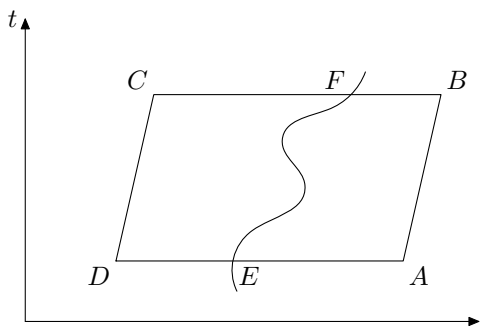

Рис. 1.

представляющую достаточно малую окрестность границы фазового перехода с контуром $ABCDA$, внутри которой находится фазовый фронт EF (рис. 1).

Пусть слева от линии EF ($x = \xi(t)$) находится мерзлая область, справа — талая. Проинтегрируем уравнение (15) по данной области и воспользуемся формулой Грина

$$\int\limits_{\Gamma} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} - k_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) dt + \int\limits_{\Gamma} (\Phi - w_2(T_*))\, dx = 0,$$

Γ — контур $ABCDA$. Пусть отрезки BC и DA стягиваются к точкам F и E соответственно. Тогда интегралы по ним обращаются в нуль:

$$\int\limits_{EF} \left(k_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right) dt + \int\limits_{FE} \left(k_2 \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} \right) dt - \int\limits_{FE} k_2 \frac{\partial w_2}{\partial x}\, dt + \int\limits_{EF} w_*\, dx + \int\limits_{FE} \overline{w}\, dx - \int\limits_{FE} w_2(T_*)\, dx = 0.$$

Пользуясь определением функции $\overline{w}$, объединяем второе и третье слагаемые, а четвертый и пятый члены взаимно уничтожаются. Тогда получим

$$\int\limits_{EF} \left(k_1 \frac{\partial w}{\partial x} - k_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) dt - \int\limits_{FE} w_2(T_*)\, dx = 0,$$

откуда следует (9). Совершенно аналогично доказывается, что уравнения (1)–(3) заменяются одним уравнением

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + L\frac{\partial w_2}{\partial t}, \tag{16}$$

определенным во всей области, где

$$C = \begin{cases} C_1, & T > T_*, \\ C_2, & T < T_*, \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_1, & T > T_*, \\ \lambda_2, & T < T_*. \end{cases}$$

Граничные и начальное условия (10)–(14) формулируются относительно функции $\Phi(x,t)$:

$$k_1\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \alpha_*(\Phi - \psi), \quad x = 0,\ T > T_*, \tag{17}$$

$$k_2\frac{\partial}{\partial x}(\Phi - w_2) = \alpha_*(w_1 - \psi), \quad x = 0,\ T \leqslant T_*, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad x = l,\ T > T_*, \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Phi - w_2) = 0, \quad x = l,\ T \leqslant T_*, \tag{20}$$

$$\Phi(x,0) = \varphi_*, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{21}$$

2. Разностная задача. Вводится равномерная по каждой переменной разностная сетка с шагами h и τ: $x_i = ih$, $i = 0,1,\ldots,N$; $x_N = Nh = l$; $t_j = j\tau$, $j = 0,1,\ldots,j_0$.

На границе фазового перехода коэффициенты уравнений (15), (16) имеют разрывы первого рода и не определены на ней. Для построения разностных схем сквозного счета разрывные коэффициенты заменяются сглаженными (непрерывными) функциями. Сглаживание проводится в окрестности точки фазового перехода $(T_* - \Delta, T_* + \Delta)$, например, линейной интерполяцией.

Прежде чем строить разностную схему для температурной задачи, исключим производную w_2 по t с помощью уравнения (8):

$$\overline{C}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + L\frac{\partial}{\partial x}\left(k_2\frac{\partial w_1}{\partial x}\right), \quad \overline{C} = C + L\frac{dw_1}{dT}. \tag{22}$$

Для этого уравнения интегро-интерполяционным методом строится итерационная разностная схема

$$\overset{m}{\overline{C}}_i \overset{m+1}{T}_{\bar{t},i} = (\overset{m}{\lambda}_{i-0.5} \overset{m+1}{T}_{\bar{x}})_{x,i} + L((\overset{m}{k_2})_{i-0.5}(\overset{m}{w_1})_{\bar{x}})_{x,i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1, \quad (23)$$

где m — номер итерации.

Граничные условия строим, используя уравнение (22). Ввиду наличия в нем функции w_1, которую определим отличной от нуля в мерзлой области и равной нулю в талой, эти условия будут разными в зависимости от фазового состояния границ области.

Интегрируя уравнение (22) по x от $x = 0$ до $x = 0.5h$, получим

$$\frac{h}{2}\overline{C_0}\frac{\partial T}{\partial t}\bigg|_0 = \lambda\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{0.5} - \lambda\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_0 + Lk_2\frac{\partial w_1}{\partial x}\bigg|_{0.5} - Lk_2\frac{\partial w_1}{\partial x}\bigg|_0.$$

Используя условия (4), (11), получаем разностное граничное условие следующего вида:

$$\overset{m}{\tau\lambda}_{0.5} \overset{m+1}{T}_{x,0} + \tau L(\overset{m}{k_2})_{0.5}(\overset{m}{w_1})_{x,0} = \frac{h}{2}\overset{m}{\overline{C_0}}(\overset{m+1}{T} - \overset{\vee}{T})_0 + \tau\alpha(\overset{m+1}{T_0} - T_c) + \tau L\alpha_*(\overset{m+1}{w_1} - \psi)_0. \quad (24)$$

Аналогично строится правое граничное условие:

$$\overset{m}{\tau\lambda}_{N-0.5} \overset{m+1}{T}_{\bar{x},N} + \tau L(\overset{m}{k_2})_{N-0.5}(\overset{m}{w_1})_{\bar{x},N} = -\frac{h}{2}\overset{m}{\overline{C}}_N(\overset{m+1}{T} - \overset{\vee}{T})_N. \quad (25)$$

Начальное условие выглядит так:

$$T(x_i, 0) = \varphi(x_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant N. \quad (26)$$

Аналогичным образом строится итерационная разностная схема для влажностной задачи:

$$\overset{m+1}{\Phi}_{\bar{t}} = (\overset{m}{k}\overset{m+1}{(\Phi)}_{\bar{x}})_x - (\overset{m}{k_2}(\overset{m}{w_2})_{\bar{x}})_x + \delta(\overset{\vee}{w_2})_{\bar{t}}, \quad (27)$$

$$(\overset{m}{k_1})_{0.5}\overset{m+1}{(\Phi)}_{x,0} = \frac{h}{2}\overset{m+1}{(\Phi)}_{\bar{t},0} + \alpha_*(\overset{m+1}{(\Phi)}_0 - \psi_0), \quad T_0 > T_*, \quad (28)$$

$$(\overset{m}{k_2})_{0.5}(\overset{m}{w_1})_{x,0} = \frac{h}{2}\overset{m+1}{\Phi}_{\bar{t},0} + \alpha_*(\overset{m}{w_1} - \psi)_0 - \frac{h}{2}\delta(\overset{\vee}{w_2})_{\bar{t},0}, \quad T_0 \leqslant T_*, \quad (29)$$

$$-\overset{m}{(k_1)}_{N-0.5}\overset{m+1}{(\Phi)}_{\bar{x},N} = \frac{h}{2}\overset{m+1}{(\Phi)}_{\bar{t},N}, \quad T_N > T_*, \tag{30}$$

$$-\overset{m}{(k_2)}_{N-0.5}\overset{m}{(w_1)}_{\bar{x},N} = \frac{h}{2}(\overset{m+1}{\Phi}_{\bar{t},N} - \delta\overset{\vee}{(w_2)}_{\bar{t},N}), \quad T_N \leqslant T_*, \tag{31}$$

$$\Phi(x_i, 0) = \varphi_*(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N. \tag{32}$$

3. Исследование сходимости итерационной схемы. Пусть T, Φ — решения разностных задач на текущем моменте времени, $\overset{m+1}{T}$, $\overset{m+1}{\Phi}$ — решения задач (23)–(26) и (27)–(32) соответственно. Введем две функции

$$\overset{m+1}{y_1} = \overset{m+1}{T} - T, \quad \overset{m+1}{y_2} = \overset{m+1}{\Phi} - \Phi.$$

Тогда для них получаем следующие задачи:

$$\begin{aligned}
&\overset{m}{\overline{C}}\overset{m+1}{y_1} = \tau(\overset{m}{\lambda}(\overset{m+1}{y_1})_{\bar{x}})_x + \tau((\overset{m}{\lambda} - \lambda)T_{\bar{x}})_x + \tau L(\overset{m}{k_2}(\overset{m}{w_1} - w_1)_{\bar{x}})_x \\
&\qquad + \tau L((\overset{m}{k_2} - k_2)(w_1)_{\bar{x}})_x - \tau(\overset{m}{\overline{C}} - C)T_{\bar{t}}, \quad (33)\\
&\tau\overset{m}{\lambda}_{0.5}\overset{m+1}{y}_{1x,0} + \tau(\overset{m}{\lambda} - \lambda)_{0.5}T_{x,0} \\
&+\tau L(\overset{m}{k_2})_{0.5}(\overset{m}{w_1} - w_1)_{x,0} + \tau L(\overset{m}{k_2} - k_2)_{0.5}(w_1)_{x,0} = \frac{h}{2}\overset{m}{\overline{C}_0}\overset{m+1}{y}_{1,0} \\
&+\tau\alpha\overset{m+1}{y}_{1,0} + \tau L\alpha_*(\overset{m+1}{w_1} - w_1)_0 + \tau\frac{h}{2}(\overset{m}{\overline{C}_0} - \overline{C}_0)T_{\bar{t},0}, \quad x = 0; \\
&\tau\overset{m}{\lambda}_{N-0.5}\overset{m+1}{y}_{1\bar{x},N} \qquad (34)\\
&+\tau(\overset{m}{\lambda} - \lambda)_{N-0.5}T_{\bar{x},N} + \tau L(\overset{m}{k_2})_{N-0.5}(\overset{m}{w_1} - w_1)_{\bar{x},N} \\
&+\tau L(\overset{m}{k_2} - k_2)_{N-0.5}(w_1)_{\bar{x},N} = -\frac{h}{2}\overset{m}{\overline{C}_N}\overset{m+1}{y}_{1,N} \\
&-\tau\frac{h}{2}(\overset{m}{\overline{C}_N} - \overline{C}_N)T_{\bar{t},N}, \quad x = l,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{m+1}{y_2} = \tau(\overset{m}{k}(\overset{m+1}{y_2})_{\bar{x}})_x + \tau(\overset{m}{k} - k)\Phi_{\bar{x}})_x \\
&-\tau(\overset{m}{k_2}(\overset{m}{w_2} - w_2)_{\bar{x}})_x - \tau((\overset{m}{k_2} - k_2)(w_2)_{\bar{x}})_x, \\
&\tau(\overset{m}{k_1})_{0.5}(\overset{m+1}{y_2})_{\bar{x},0} + \tau(\overset{m}{k_1} - k_1)_{0.5}\Phi_{x,0}
\end{aligned}$$

$$= \frac{h}{2}(\overset{m+1}{y_2})_0 + \tau\alpha_*(\overset{m+1}{y_2})_0, \quad x = 0,\ T_0 > T_*,$$

$$\tau(\overset{m}{k_2})_{0.5}(\overset{m}{w_1} - w_1)_{x,0} + \tau(\overset{m}{k_2} - k_2)_{0.5}(w_1)_{x,0}$$

$$= \frac{h}{2}(\overset{m+1}{y_2})_0 + \tau\alpha_*(\overset{m}{w_1} - w_1)_0, \quad x = 0,\ T \leqslant T_*,$$

$$-\tau(\overset{m}{k_1})_{N-0.5}(\overset{m+1}{y_2})_{\bar{x},N} - \tau(\overset{m}{k_1} - k_1)_{N-0.5}\Phi_{\bar{x},N}$$

$$= \frac{h}{2}(\overset{m+1}{y_2})_N, \quad x = l,\ T_N > T_*,$$

$$-\tau(\overset{m}{k_2})_{N-0.5}(\overset{m}{w_w} - w_1)_{\bar{x},N} - \tau(\overset{m}{k_2} - k_2)_{N-0.5}(w_1)_{\bar{x},N}$$

$$= \frac{h}{2}(\overset{m+1}{y_2})_N, \quad x = l,\ T_N \leqslant T_*.$$

Далее используются скалярные произведения сеточных функций [7]

$$(y,\eta) = h\sum_{i=1}^{N-1} y_i\eta_i, \quad (y,\eta] = h\sum_{i=1}^{N} y_i\eta_i,$$

$$[y_i,\eta_i] = h\sum_{i=1}^{N-1} y_i\eta_i + \frac{h}{2}y_N\eta_N + \frac{h}{2}y_0\eta_0.$$

Уравнение (33) скалярно умножаем на $\overset{m+1}{y_1}$ и применяем разностную формулу Грина [7]

$$(\overset{m}{\overline{C}}\overset{m+1}{y_1}, \overset{m+1}{y_1}) + \tau(\overset{m}{\lambda}(\overset{m+1}{y_1})_{\bar{x}}, (\overset{m+1}{y_1})_{\bar{x}}]$$

$$= \tau\overset{m+1}{y_{1,N}}[\overset{m}{\lambda}_{N-0.5}(\overset{m+1}{y_1})_{\bar{x},N} + (\overset{m}{\lambda} - \lambda)_{N-0.5}T_{\bar{x},N}$$

$$+L(\overset{m}{k_2})_{N-0.5}(\overset{m}{w_1} - w_1)_{\bar{x},N} + L(\overset{m}{k_2} - k_2)_{N-0.5}(w_1)_{\bar{x},N}] - \tau\overset{m+1}{y_{1,0}}[\overset{m}{\lambda}_{0.5}(\overset{m+1}{y_1})_{x,0}$$

$$+ (\overset{m}{\lambda} - \lambda)_{0.5}T_{x,0} + L(\overset{m}{k_2})_{0.5}(\overset{m}{w_1} - w_1) + L(\overset{m}{k_2} - k_2)_{0.5}(w_1)_{x,0}]$$

$$- \tau((\overset{m}{\lambda} - \lambda)T_{\bar{x}}, (\overset{m+1}{y_1})_{\bar{x}}] - \tau L(\overset{m}{k_2}(\overset{m}{w_1} - w_1)_{\bar{x}}, (\overset{m+1}{y_1})_{\bar{x}}]$$

$$- \tau L((\overset{m}{k_2} - k_2)(w_1)_{\bar{x}}, (\overset{m+1}{y_1})_{\bar{x}}] - \tau((\overset{m}{\overline{C}} - \overline{C})T_{\overline{t}}, \overset{m+1}{y_1}).$$

Отсюда, пользуясь граничными условиями для уравнения (33), придем к соотношению

$$(\overset{m}{\overline{C}}\overset{m+1}{y_1}, \overset{m+1}{y_1}) + \frac{h}{2}\overset{m}{\overline{C}}_N(\overset{m+1}{y_{1,N}})^2$$

$$+\frac{h}{2}\overset{m}{\overline{C}}_0(\overset{m+1}{y}_{1,0})^2+\tau(\overset{m}{\lambda}(\overset{m+1}{y}_1)_{\bar{x}},(\overset{m+1}{y}_1)_{\bar{x}})$$

$$=\frac{h}{2}\tau\overset{m+1}{y}_{1,N}(\overset{m}{\overline{C}}_N-\overline{C}_N)T_{\bar{t},N}-\tau\overset{m+1}{y}_{1,0}\Bigg[\alpha\overset{m+1}{y}_{1,0}+L\alpha_*(\overset{m+1}{w}_1-w_1)_0$$

$$+\frac{h}{2}(\overset{m}{\overline{C}}_0-\overline{C}_0)T_{\bar{t},0}\Bigg]-\tau((\overset{m}{\lambda}-\lambda)T_{\bar{x}},(\overset{m+1}{y}_1)_{\bar{x}}]-\tau L(\overset{m}{k}_2(\overset{m}{w}_1-w_1)_{\bar{x}},(\overset{m+1}{y}_1)_{\bar{x}}]$$

$$-\tau L((\overset{m}{k}_2-k_2)(w_1)_{\bar{x}},(\overset{m+1}{y}_1)_{\bar{x}}]-\tau((\overset{m}{\overline{C}}-\overline{C})T_{\bar{t}},\overset{m+1}{y}_1). \quad (35)$$

Коэффициенты уравнения (22) являются функциями $\overline{C}=\overline{C}(T,w_1,w_2)$, $k_1=k_1(w)$, $k_2=k_2(w_1,w_2)$, $\lambda=\lambda(T)$, и пусть они имеют ограниченные производные по указанным переменным

$$\overset{m}{\overline{C}}-\overline{C}=\frac{\partial\overline{C}}{\partial w_1}(\overset{m}{w}_1-w_1)+\frac{\partial\overline{C}}{\partial w_2}(\overset{m}{w}_2-w_2)+\frac{\partial\overline{C}}{\partial T}(\overset{m}{T}-T),$$

но

$$w_2=\Phi-w_1,\quad \overset{m}{w}_1-w_1=\frac{dw_1}{dT}\overset{m}{y}_1,\quad \overset{m}{w}_2-w_2=\overset{m}{y}_2-\frac{dw_1}{dT}\overset{m}{y}_1.$$

Окончательно получаем

$$\overset{m}{\overline{C}}-\overline{C}=\left(\frac{\partial\overline{C}}{\partial w_1}-\frac{\partial\overline{C}}{\partial w_2}\right)\frac{dw_1}{dT}\overset{m}{y}_1+\frac{\partial\overline{C}}{\partial w_2}\overset{m}{y}_2+\frac{\partial\overline{C}}{\partial T}\overset{m}{y}_1.$$

Аналогично

$$\overset{m}{k}_2-k_2=\left(\frac{\partial k_2}{\partial w_1}-\frac{\partial k_2}{\partial w_2}\right)\frac{dw_1}{dT}\overset{m}{y}_1+\frac{\partial k_2}{\partial w_2}\overset{m}{y}_2,$$

$$k_1^m-k_1=\frac{\partial k_1}{\partial w}\overset{m}{y}_2,\quad \overset{m}{\lambda}-\lambda=\frac{\partial\lambda}{\partial T}\overset{m}{y}_1.$$

Учитывая полученные выражения, оцениваем сверху правую часть (35) с помощью ε-неравенства

$$|a*b|\leqslant\varepsilon a^2+\frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Для сокращения записи все постоянные обозначим одной буквой M, не указывая их структуры, как это обычно делается при выводе априорных оценок решения разностных задач [7].

Окончательно придем к соотношению

$$(\min\overline{C}-\tau M)[\overset{m+1}{y}_1,\overset{m+1}{y}_1]+\tau(\min\lambda-3\varepsilon)[(\overset{m+1}{y}_1)_{\bar{x}},(\overset{m+1}{y}_1)_{\bar{x}}]$$
$$\leqslant \tau M([\overset{m}{y}_1,\overset{m}{y}_1]+((\overset{m}{y}_1)_{\bar{x}},(\overset{m}{y}_1)_{\bar{x}}]+[\overset{m}{y}_2,\overset{m}{y}_2]). \quad (36)$$

Аналогичные выкладки производим для задачи (34). Умножив скалярно уравнение (34) на $\overset{m+1}{y}_2$ и применяя разностную формулу Грина, имеем соотношение

$$(\overset{m+1}{y}_2,\overset{m+1}{y}_2)+\tau(\overset{m}{k}(\overset{m+1}{y}_2)_{\bar{x}},(\overset{m+1}{y}_2)_{\bar{x}}]$$
$$=\tau\overset{m+1}{y}_{2,N}[\overset{m}{k}_{N-0.5}((\overset{m+1}{y}_{2,N})_{\bar{x}})+(\overset{m}{k}-k)_{N-0.5}\Phi_{\bar{x},N}$$
$$-(\overset{m}{k}_2)_{N-0.5}(\overset{m}{w}_2-w_2)_{\bar{x},N}-(\overset{m}{k}_2-k_2)_{N-0.5}(w_2)_{\bar{x},N}]$$
$$-\tau\overset{m+1}{y}_{2,0}[\overset{m}{k}_{0.5}(\overset{m+1}{y}_{2,0})_x+(\overset{m}{k}-k)_{0.5}\Phi_{x,0}-(\overset{m}{k}_2)_{0.5}(\overset{m}{w}_2-w_2)_{x,0}$$
$$-(\overset{m}{k}_2-k_2)_{0.5}(w_2)_{x,0}]+\tau(\overset{m}{k}(\overset{m}{w}_2-w_2)_{\bar{x}},(\overset{m+1}{y}_2)_{\bar{x}}]$$
$$+\tau((\overset{m}{k}_2-k_2)(w_2)_{\bar{x}},(\overset{m+1}{y}_2)_{\bar{x}}]-\tau((\overset{m}{k}-k)\Phi_{\bar{x}},(\overset{m+1}{y}_2)_{\bar{x}}]. \quad (37)$$

При оценке сверху правой части (37) учитывается фазовое состояние границ и используются соответствующие граничные условия из (34). Таким путем получаем в общем случае следующее соотношение:

$$[\overset{m+1}{y}_2,\overset{m+1}{y}_2]+(\min k_2-3\varepsilon)\tau((\overset{m+1}{y}_2)_{\bar{x}},(\overset{m+1}{y}_2)_{\bar{x}}]$$
$$\leqslant \tau M([\overset{m}{y}_1,\overset{m}{y}_1]+((\overset{m}{y}_1)_{\bar{x}},(\overset{m}{y}_1)_{\bar{x}}]+((\overset{m}{y}_2)_{\bar{x}},(\overset{m}{y}_2)_{\bar{x}}]+[\overset{m}{y}_2,\overset{m}{y}_2]). \quad (38)$$

В правых частях (36) и (38) воспользуемся неравенством

$$(y_{\bar{x}},y_{\bar{x}}]\leqslant\frac{4}{h^2}[y,y]$$

и объединим их. При достаточно малых ε и τ, удовлетворяющих условию

$$\min\overline{C}-\tau M>0,$$

получим

$$[\overset{m+1}{y}_1,\overset{m+1}{y}_1]+[\overset{m+1}{y}_2,\overset{m+1}{y}_2]\leqslant M\tau([\overset{m}{y}_1,\overset{m}{y}_1]+[\overset{m}{y}_2,\overset{m}{y}_2]).$$

Отсюда при достаточно малом $\tau<\frac{1}{M}$ следует сходимость итерационной схемы, т. е. доказана

Теорема. *Пусть существуют решения разностных задач* T *и* Φ. *Если функции* $C(T, w_1, w_2)$, $\lambda(T), k_1(w)$, $k_2(w_1, w_2)$ *имеют ограниченные производные, то при достаточно малом* τ *решения итерационных схем* $\overset{m}{T}, \overset{m}{\Phi}$ *сходятся к решениям разностных задач.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лыков А. В.* Явления переноса в капиллярно-пористых телах. М.: Изд-во техн.-теоретич. лит., 1954.

2. *Иванов Н. С.* Тепло- и массоперенос в мерзлых горных породах. М.: Наука, 1969.

3. *Гамаюнов Н. И., Гамаюнов С. Н.* Перенос тепла и влаги при промерзании грунтов // ИФЖ. 2004. Т. 77, № 5. С. 72–81.

4. *Бровка Г. П., Иванов С. Н.* Расчет температурных полей в грунте с фазовыми переходами вода-лед в спектре температур // ИФЖ. 2004. Т. 77, № 6. С. 112–119.

5. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973.

6. *Коновалов А. Н.* Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988.

7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

г. Якутск *28 апреля 2006 г.*

УДК 517.956

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С НЕИЗВЕСТНЫМ СОСТАВНЫМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПРИ СОСТАВНОМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИИ*)

Р. Р. Сафиуллова

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка области Ω, t — точка интервала $(0,T)$, S — боковая граница цилиндра Q : $S = \Gamma \times (0,T)$. Далее, пусть $h_1(x,t)$, $h_2(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $u_1(x)$, $v_1(x)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $K(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, t_1 — фиксированная точка полуинтервала $(0,T]$.

Обратная задача: *найти функции* $u(x,t)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, *связанные в цилиндре* Q *уравнением*

$$u_{tt} - \Delta u + b(x,t)u_t + a(x,t)u = q_1(x)h_1(x,t) + q_2(x)h_2(x,t) + f(x,t) \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ *условий*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u(x,t)|_S = 0, \quad (4)$$

$$u(x,t_1) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$\int_0^T K(t)u(x,t)dt = v_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00439) и Сибирского отделения РАН, междисциплинарный проект № 48.

© **2006 Сафиуллова Р. Р.**

Данная задача представляет собой обратную задачу нахождения вместе с решением $u(x,t)$ гиперболического уравнения также неизвестного внешнего источника составного вида. Ранее подобные задачи в случае, когда неизвестной была лишь одна компонента $q_1(x)$, рассматривались А. Х. Амировым [1]. В данной работе решается более общая задача, метод исследования отличен от предложенного в [1].

Введем в рассмотрение пространства H_0, H_1, V_0 и V_1:

$$H_0 = \big\{v(x,t) \in L_\infty\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big),\ v_t(x,t) \in L_\infty\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big),\ v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\big\},$$

$$H_1 = \big\{v(x,t) \in L_\infty\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big),\ v_t(x,t) \in L_\infty\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big),\ v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\big\},$$

$$V_0 = \{v(x,t) : v(x,t) \in H_0, v_t(x,t) \in H_0\},$$

$$V_1 = \{v(x,t) : v(x,t) \in H_1, v_t(x,t) \in H_1\}.$$

Нормы в этих пространствах определим естественным образом:

$$\|v\|_{H_0} = \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)},$$

$$\|v\|_{H_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)},$$

$$\|v\|_{V_0} = \|v\|_{H_0} + \|v_t\|_{H_0}, \quad \|v\|_{V_1} = \|v\|_{H_1} + \|v_t\|_{H_1}.$$

Положим

$$h_0(x) = h_1(x,t_1)\tilde{h}_2(x) - h_2(x,t_1)\tilde{h}_1(x),$$

$$\tilde{h}_i(x) = \int_0^T h_i(x,t)K(t)\,dt, \quad i = 1,2,$$

$$K_1(x,t) = K(t)b(x,t) - K_t(t), \quad K_2(x,t) = K(t)a(x,t),$$

$$\alpha_{j1}(x) = (-1)^j \frac{1}{h_0(x)}\tilde{h}_j(x), \quad \alpha_{j2}(x) = \alpha_{j1}(x)b(x,t_1),$$

$$\alpha_{j3}(x) = \alpha_{j4}(x)K(T), \quad \alpha_{j4}(x) = (-1)^{j+1}\frac{1}{h_0(x)}h_j(x,t_1),$$

$$\alpha_{j0}(x)=\frac{1}{h_0(x)}[(-1)^{j+1}h_j(x,t_1)\tilde{\psi}(x)+(-1)^j\tilde{h}_j(x)\tilde{\varphi}(x)],\quad j=1,2,$$

$$\gamma_i(x,t)=h_1(x,t)\alpha_{2i}(x)+h_2(x,t)\alpha_{1i}(x),\quad i=0,1,\ldots,4,$$

$$F(x,t)=\gamma_0(x,t)+f(x,t),$$

$$\varphi_1(x)=\Delta\varphi(x)-b(x,0)\psi(x)-a(x,0)\varphi(x)+F(x,0),$$

$$\widetilde{\varphi}(x)=a(x,t_1)u_1(x)-\Delta u_1(x)-f(x,t_1),$$

$$\widetilde{\psi}(x)=-\Delta v_1(x)-K(0)\psi(x)-\int\limits_0^T f(x,t)K(t)\,dt,$$

$$\bar{b}_0=b_0-3\delta_1^2-\frac{\delta_0^2}{2}-T^2\left(\max_{\overline{Q}}[(b_t+a)_t]+\frac{2T^2}{\delta_1^2}\max_{\overline{Q}}a_t^2(x,t)\right),$$

$$s_i=3\max_{\Omega}\gamma_j^2(x,0)+\frac{T}{2\delta_1^2}\max_{\overline{Q}}\gamma_{it}^2(x,t),\quad i=1,2,3,$$

$$k_1=\frac{1}{2}\min_{\Omega}[b_t(x,t)+a(x,t)]-s_2,$$

$$s_j=T\max_{\overline{Q}}K_{j-3}^2(x,t)\left[\frac{T}{2\delta_1^2}\max_{\overline{Q}}\gamma_{4t}^2(x,t)+3\max_{\Omega}\gamma_4^2(x,0)\right],\quad j=4,5,$$

$$s_6=2T^2(s_4+2T^2s_5).$$

Теорема. *Пусть для функций* $h_k(x,t)$, $k=1,2$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *выполняются включения*

$$h_k(x,t)\in C^2(\overline{Q}),\quad a(x,t)\in C^1(\overline{Q}),\quad b(x,t)\in C^2(\overline{Q}),$$

$$\varphi(x)\in W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\quad \psi(x)\in W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

$$u_1(x)\in W_2^3(\Omega)\cap W_\infty^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),f(x,t)\in L_2(Q),$$

$$f_t(x,t)\in L_2(Q),\quad F_t(x,t)\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)).$$

Кроме того, пусть выполняются условия

$$\begin{gathered}h_0(x)\geqslant\bar{h}_0>0,\quad x\in\overline{\Omega},\\ b_t(x,t)+a(x,t)>0,\quad b(x,t)\geqslant b_0>0,\quad (x,t)\in\overline{Q};\end{gathered}\tag{7}$$

$$\overline{b}_0 - s_6\left(\frac{1}{1-2s_1}+\frac{s_2}{k_1}\right) > 0; \tag{8}$$

$$\frac{1}{2} - s_1 > 0; \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}\min_{\overline{\Omega}}[b_t(x,t)+a(x,t)] - \max\left\{s_2, s_3\left(\frac{1}{1-2s_1}+\frac{s_2}{k_1}\right)\right\} > 0. \tag{10}$$

Тогда обратная задача (1)–(6) *имеет решение* $\{u(x,t),\ q_1(x),\ q_2(x)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in V_0$, $q_k(x) \in W_2^1(\Omega)$, $k = 1,2$, *причем в указанном классе это решение единственно.*

Доказательство. Рассмотрим следующую краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$\begin{aligned} Lu \equiv {} & u_{ttt}(x,t) - \Delta u_t + b(x,t)u_{tt}(x,t) + (b_t(x,t)+a(x,t))u_t \\ & + a_t(x,t)u - \gamma_{1t}(x,t)u_{tt}(x,t_1) - \gamma_{2t}(x,t)u_t(x,t_1) - \gamma_{3t}(x,t)u_t(x,T) \\ & - \gamma_{4t}(x,t)\int_0^T K_1(x,t)u_t(x,t)\,dt - \gamma_{4t}(x,t)\int_0^T K_2(x,t)u(x,t)\,dt = F_t(x,t), \end{aligned} \tag{11}$$

такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), а также условие

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,0) = {} & \varphi_1(x) + \gamma_1(x,0)u_{tt}(x,t_1) + \gamma_2(x,0)u_t(x,t_1) + \gamma_3(x,0)u_t(x,T) \\ & + \gamma_4(x,0)\int_0^T K_1(x,t)u_t(x,t)\,dt + \gamma_4(x,0)\int_0^T K_2(x,t)u(x,t)\,dt. \end{aligned} \tag{12}$$

Разрешимость данной краевой задачи докажем, комбинируя метод регуляризации и метод продолжения по параметру.

При фиксированном положительном ε рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u \equiv {} & u_{ttt}(x,t) - \Delta u_t(x,t) + b(x,t)u_{tt}(x,t) + (b_t(x,t)+a(x,t))u_t(x,t) \\ & - \varepsilon\Delta u_{tt}(x,t) - \gamma_{1t}(x,t)u_{tt}(x,t_1) - \gamma_{2t}(x,t)u_t(x,t_1) \\ & - \gamma_{3t}(x,t)u_t(x,T) - \gamma_{4t}(x,t)\int_0^T K_1(x,t)u_t(x,t)\,dt \end{aligned}$$

$$-\gamma_{4t}(x,t)\int\limits_0^T K_2(x,t)u(x,t)\,dt + a_t(x,t)u(x,t) = F_t(x,t), \quad (11_\varepsilon)$$

такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), (12).

Для доказательства разрешимости задачи (11_ε), (2)–(4), (12) воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка [0,1], $L_{\varepsilon\lambda}u$ — оператор

$$L_{\varepsilon\lambda}u \equiv u_{ttt}(x,t) - \Delta u_t + bu_{tt} + (b_t + a)u_t - \varepsilon\Delta u_{tt}$$
$$-\lambda\Bigg\{\gamma_{1t}(x,t)u_{tt}(x,t_1) + \gamma_{2t}(x,t)u_t(x,t_1) + \gamma_{3t}(x,t)u_t(x,T)$$
$$+\gamma_{4t}(x,t)\int\limits_0^T K_1(x,t)u_t(x,t)\,dt$$
$$+\gamma_{4t}(x,t)\int\limits_0^T K_2(x,t)u(x,t)\,dt - a_t(x,t)u(x,t)\Bigg\}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти решение уравнения*

$$L_{\varepsilon\lambda}u = g(x,t) \quad (11_{\varepsilon\lambda})$$

такое, что для него выполняются условия (2)–(4), (12).

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача $(11_{\varepsilon\lambda})$, (2)–(4), (12) разрешима в пространстве V_1 при произвольной функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Как известно, если множество Λ непусто, открыто и замкнуто одновременно, то оно совпадает со всем отрезком $[0,1]$. Это и будет означать, что краевая задача (11_ε), (2)–(4), (12) имеет решение из пространства V_1.

Множество Λ непусто, поскольку число $\lambda = 0$ принадлежит ему. При $\lambda = 0$ уравнение $(11_{\varepsilon\lambda})$ вместе с условиями (3), (4), (12) дает нелокальную по времени краевую задачу для псевдогиперболического относительно функции $u_t(x,t)$ уравнения, разрешимость которой в нужном

классе установлена в [2]. Найдя $u_t(x,t)$, с помощью условия (2) находим и саму функцию $u(x,t)$. Сказанное означает, что множество Λ непусто. Для доказательства открытости и замкнутости Λ установим необходимые априорные оценки решений задачи $(11_{\varepsilon\lambda})$, (2)–(4), (12) из пространства V_1 при фиксированном ε.

Пусть Q_t — цилиндр $\{(x,\tau):\ 0<\tau<t,\ x\in\Omega\}$, $(t\leqslant T)$.

Обозначим

$$r(x,t)=\gamma_{1t}(x,t)u_{tt}(x,t_1)+\gamma_{2t}(x,t)u_t(x,t_1)+\gamma_{3t}(x,t)u_t(x,T)+\gamma_{4t}(x,t)\int_0^T K_1(x,t)u_t(x,t)\,dt+\gamma_{4t}(x,t)\int_0^T K_2(x,t)u(x,t)\,dt-a_t(x,t)u(x,t).$$

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_\Omega u_{\tau\tau\tau}u_{\tau\tau}\,dxd\tau-\int_0^t\int_\Omega \Delta u_\tau u_{\tau\tau}\,dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega b(x,\tau)u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega (b_t+a)u_\tau u_{\tau\tau}\,dxd\tau-\varepsilon\int_0^t\int_\Omega \Delta u_{\tau\tau}u_{\tau\tau}\,dxd\tau=\int_0^t\int_\Omega g(x,\tau)u_{\tau\tau}\,dxd\tau+\lambda\int_0^t\int_\Omega r(x,\tau)u_{\tau\tau}\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям в левой части равенства, используя условия (3), (12), элементарные арифметические неравенства, а также неравенство Юнга, получим

$$\frac12\int_\Omega u_{tt}^2(x,t)\,dx+\frac12\sum_{j=1}^n\int_\Omega u_{x_jt}^2(x,t)\,dx+\int_0^t\int_\Omega bu_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\frac12\int_\Omega (b_t(x,t)+a(x,t))u_t^2(x,t)\,dx+\varepsilon\sum_{j=1}^n\int_0^t\int_\Omega u_{x_j\tau\tau}^2\,dxd\tau$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (b_t+a)_\tau u_\tau^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega g u_{\tau\tau}\,dxd\tau + s_1\int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t_1)\,dx$$

$$+ s_2\int\limits_\Omega u_t^2(x,t_1)\,dx + s_3\int\limits_\Omega u_t^2(x,T)\,dx + 3\delta_1^2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau$$

$$+ \frac{1}{2\delta_1^2}\max_{\overline{Q}} a_t^2(x,t)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2\,dxd\tau$$

$$+ s_{41}\int\limits_\Omega\left(\int\limits_0^T K_1(x,t)u_t(x,t)\,dt\right)^2 dx + s_{41}\int\limits_\Omega\left(\int\limits_0^T K_2(x,t)u(x,t)\,dt\right)^2 dx$$

$$+ s_{42}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\left(\int\limits_0^T K_1(x,t)u_t(x,t)\,dt\right)^2 dxd\tau$$

$$+ s_{42}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\left(\int\limits_0^T K_2(x,t)u(x,t)dt\right)^2 dxd\tau + N_1,$$

где $s_{41} = 3\max\limits_{\Omega}\gamma_4^2(x,0)$, $s_{42} = \frac{1}{2\delta_1^2}\max\limits_{\overline{Q}}\gamma_{4t}^2(x,t)$, N_1 определяется лишь входными данными задачи.

Применяя к последнему соотношению неравенство Гёльдера, а также условие (7) теоремы, имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_jt}^2(x,t)\,dx + b_0\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (b_t(x,t)+a(x,t))u_t^2(x,t)\,dx + \varepsilon\sum_{j=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_j\tau\tau}^2\,dxd\tau$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\max_{\overline{Q}}[(b_t+a)_t]\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2\,dxd\tau\int\limits_0^t\int\limits_\Omega g u_{\tau\tau}\,dxd\tau$$

$$+ s_1\int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t_1)\,dx + s_2\int\limits_\Omega u_t^2(x,t_1)\,dx + s_3\int\limits_\Omega u_t^2(x,T)\,dx$$

$$3\delta_1^2 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau + \frac{1}{2\delta_1^2}\max_{\overline{Q}} a_t^2(x,t) \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u^2\,dxd\tau + s_4 \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dxdt + s_5 \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dxdt + N_1.$$

Применяя к ряду слагаемых правой части последнего соотношения неравенства Гёльдера и Юнга и учитывая условия (2), (3), нетрудно прийти к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_jt}^2(x,t)\,dx + \bar{b}_0 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (b_t(x,t) + a(x,t))u_t^2(x,t)\,dx + \varepsilon\sum_{j=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{x_j\tau\tau}^2\,dxd\tau \leqslant s_1 \int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t_1)\,dx + s_2 \int\limits_\Omega u_t^2(x,t_1)\,dx + s_3 \int\limits_\Omega u_t^2(x,T)\,dx + s_4 \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dxdt + s_5 \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dxdt + N_2,$$

где N_2 определяется лишь входными данными задачи.

Вновь используя элементарные соотношения, получим неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_jt}^2(x,t)\,dx + \bar{b}_0 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau + \frac{1}{2}\min_{\overline{\Omega}}(b_t(x,t) + a(x,t)) \int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \varepsilon\sum_{j=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{x_j\tau\tau}^2\,dxd\tau \leqslant s_1 \int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t_1)\,dx + s_2 \int\limits_\Omega u_t^2(x,t_1)\,dx$$

$$+ s_3 \int\limits_\Omega u_t^2(x,T)\,dx + s_6 \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)\,dxdt + N_3, \quad (13)$$

где N_3 определяется лишь входными данными задачи.

Исходя из условий (7), (8) теоремы, полагая $t = t_1$ и учитывая условия (9) и (10) теоремы, имеем

$$\int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t_1)\,dx \leqslant \frac{2s_3}{1-2s_1} \int\limits_\Omega u_t^2(x,T)\,dx + \frac{2s_6}{1-2s_1} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)\,dxdt + N_4,$$

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,t_1)\,dx \leqslant \frac{s_3}{k_1} \int\limits_\Omega u_t^2(x,T)\,dx + \frac{s_6}{k_1} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)\,dxdt + N_5,$$

где N_4, N_5 определяются лишь входными данными задачи.

С учетом последнего соотношения от неравенства (13) нетрудно прийти к следующему соотношению:

$$\bar{b}_0 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau + \frac{1}{2} \min_{\overline{\Omega}} (b_t(x,t) + a(x,t)) \int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx$$

$$\leqslant s_7 \int\limits_\Omega u_t^2(x,T)\,dx + s_8 \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)\,dxdt + N_6,$$

где

$$s_7 = s_3 \cdot s_0, \quad s_8 = s_6 \cdot s_0, \quad s_0 = 1 + \frac{2s_1}{1-2s_1} + \frac{s_2}{k_1},$$

число N_6 определяется лишь входными данными задачи.

Полагая в последнем неравенстве $t = T$ и учитывая условия (8), (10) теоремы, имеем

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,T)\,dx + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)\,dxdt \leqslant N_7.$$

Отсюда и из неравенства (13) приходим к первой априорной оценке

$$\int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)\,dx + \int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_j t}^2(x,t)\,dx$$

$$+\int_0^t\int_\Omega u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\varepsilon\sum_{j=1}^n\int_0^t\int_\Omega u_{x_j\tau\tau}^2\,dxd\tau\leqslant N,\quad(14)$$

где N определяется лишь входными данными задачи.

Равенство $(11_{\varepsilon\lambda})$ можно записать в краткой форме

$$u_{ttt}-\Delta u_t-\varepsilon\Delta u_{tt}=\Phi_\lambda(x,t),\quad(15)$$

где

$$\Phi_\lambda(x,t)=g(x,t)-b(x,t)u_{tt}(x,t)$$
$$-[b_t(x,t)+a(x,t)]u_t(x,t)-a_t(x,t)u(x,t)+\lambda\tilde r(x,t),$$

$\tilde r(x,t)=r(x,t)+a_t(x,t)u(x,t)$.

Умножая равенство (15) на функцию $-\Delta u_{tt}(x,t)$ и интегрируя по цилиндру Q_t, получим равенство

$$-\int_0^t\int_\Omega u_{\tau\tau\tau}\Delta u_{\tau\tau}\,dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega\Delta u_\tau\Delta u_{\tau\tau}\,dxd\tau$$
$$+\varepsilon\int_0^t\int_\Omega(\Delta u_{\tau\tau})^2\,dxd\tau=-\int_0^t\int_\Omega\Phi_\lambda(x,\tau)\Delta u_{\tau\tau}\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям в левой части этого равенства, используя условие (3) и применяя к правой части последнего соотношения неравенство Юнга, получим

$$\frac12\sum_{j=1}^n\int_\Omega u_{x_jtt}^2(x,t)\,dx+\frac12\int_\Omega(\Delta u_t)^2\,dx+\varepsilon\int_0^t\int_\Omega(\Delta u_{\tau\tau})^2\,dxd\tau$$
$$\leqslant\frac12\sum_{j=1}^n\int_\Omega\psi_{x_jx_j}^2(x)\,dx+\frac{\delta^2}{2}\int_0^t\int_\Omega(\Delta u_{\tau\tau})^2\,dxd\tau+\frac{1}{2\delta^2}\int_0^t\int_\Omega\Phi_\lambda^2\,dxd\tau$$
$$+\frac12\sum_{j=1}^n\int_\Omega\left([\gamma_1(x,0)u_{tt}(x,t_1)+d(x)]_{x_j}\right)^2,$$

где

$$d(x) = \gamma_2(x,0)u_t(x,t_1) + \gamma_3(x,0)u_t(x,T) + \gamma_4(x,0)\int\limits_0^T K_1(x,t)u_t(x,t)\,dt + \gamma_4(x,0)\int\limits_0^T K_2(x,t)u(x,t)\,dt + \varphi_1(x).$$

В силу оценки (14) функция $\Phi_\lambda(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$. Беря $\delta^2 = \varepsilon$ и применяя элементарные арифметические неравенства и вновь учитывая первую априорную оценку, получим

$$\sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega u^2_{x_jtt}(x,t)\,dx + \int\limits_\Omega (\Delta u_t)^2\,dx + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (\Delta u_{\tau\tau})^2\,dxd\tau \leqslant 2\sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \gamma_1^2(x,0)u^2_{x_jtt}(x,t_1)\,dx + R_1(\varepsilon),$$

где $R_1(\varepsilon)$ определяется входными данными задачи, а также числом ε.

Полагая в этом неравенстве $t = t_1$, в силу условия (9) имеем

$$\sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega u^2_{x_jtt}(x,t_1)\,dx \leqslant R_2(\varepsilon).$$

Отсюда приходим к второй априорной оценке

$$\sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega u^2_{x_jtt}(x,t)\,dx + \int\limits_\Omega (\Delta u_t)^2\,dx + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (\Delta u_{\tau\tau})^2\,dxd\tau \leqslant R_3(\varepsilon). \quad (16)$$

Очевидным следствием оценок (14), (16) является третья априорная оценка

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2_{\tau\tau\tau}\,dxd\tau \leqslant R_4(\varepsilon),$$

которая вместе с первыми двумя приводит нас к финальной априорной оценке в случае фиксированного числа ε:

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)\,dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega u^2_{x_jt}(x,t)\,dx$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\sum_{j=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_jtt}^2(x,t)\,dx+\int\limits_\Omega(\Delta u_t)^2\,dx$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau\tau}^2\,dxd\tau+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(\Delta u_{\tau\tau})^2\,dxd\tau\leqslant R_5(\varepsilon).$$

Из данной оценки следуют открытость и замкнутость множества Λ.

Непустота, открытость и замкнутость множества Λ означают его совпадение с отрезком [0,1]. В свою очередь, данный факт определяет разрешимость краевой задачи (11_ε), (3), (4), (12) в пространстве V_1.

На следующем шаге рассмотрим случай, когда ε не является фиксированной величиной. Вновь рассмотрим краевую задачу (11_ε), (3), (4), (12) и получим в этом случае априорные оценки ее решений. Заметим, что установленная нами первая априорная оценка (14) остается справедливой и в случае нефиксированного ε.

Вернемся к равенству (15), положив в нем $\lambda=1$. Умножая данное равенство на функцию $-\Delta u_{tt}(x,t)$ и повторяя ряд тех же операций, что были проведены при ε фиксированном, приходим к равенству

$$\frac12\sum_{j=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_jtt}^2(x,t)\,dx+\frac12\int\limits_\Omega(\Delta u_t)^2\,dx+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(\Delta u_{\tau\tau})^2\,dxd\tau$$
$$=\frac12\sum_{j=1}^n\int\limits_\Omega\psi_{x_jx_j}^2(x)\,dx+\frac12\sum_{j=1}^n\int\limits_\Omega\left([\gamma_1(x,0)u_{tt}(x,t_1)+d(x)]_{x_j}\right)^2\,dx$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\Phi_1(x,\tau)\Delta u_{\tau\tau}\,dxd\tau.$$

Используя элементарные арифметические неравенства, интегрируя по частям в последнем слагаемом правой части равенства и учитывая оценку (14), получим

$$\frac12\sum_{j=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_jtt}^2(x,t)\,dx+\frac12\int\limits_\Omega(\Delta u_t)^2\,dx+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(\Delta u_{\tau\tau})^2\,dxd\tau$$

$$\leqslant \max_{\overline{\Omega}} \gamma_1^2(x,0) \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} u_{x_j tt}^2(x,t_1)\,dx + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \int_{\Omega} \Phi_{1x_j}(x,\tau) u_{x_j\tau\tau}\,dxd\tau$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \int_{\Gamma} \Phi_1(x,\tau) u_{x_j\tau\tau}\nu_{x_j}\,dsd\tau + R_6.$$

В силу условия (4), а также условий, налагаемых на функцию $g(x,t)$, последнее интегральное слагаемое предыдущего соотношения равно нулю. Таким образом, с учетом неравенства (14), а также условия (7) теоремы, имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} u_{x_j tt}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\Delta u_t)^2\,dx$$
$$+ \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau\tau})^2\,dxd\tau + b_0 \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_j\tau\tau}^2\,dxd\tau$$
$$\leqslant s_9 \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} u_{x_j tt}^2(x,t_1)\,dx + 3\delta_1^2 \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_j\tau\tau}^2\,dxd\tau + R_7, \quad (17)$$

где $s_9 = \max\limits_{\Omega} \gamma_1^2(x,0) + \frac{T}{2\delta_1^2} \max\limits_{\overline{Q}} \gamma_{1t}^2(x,t)$.

В силу условия (8) теоремы, полагая в неравенстве (17) $t = t_1$ и учитывая условие (9), приходим к неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} u_{x_j tt}^2(x,t_1)\,dx \leqslant R_8.$$

Отсюда получаем вторую априорную оценку

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} u_{x_j tt}^2(x,t)\,dx + \int_{\Omega} (\Delta u_t)^2\,dx$$
$$+ \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau\tau})^2\,dxd\tau + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_j\tau\tau}^2\,dxd\tau \leqslant R_9.$$

Очевидным следствием первых двух оценок является третья априорная оценка

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{\tau\tau\tau}^2 \, dxd\tau \leqslant R_{10},$$

с учетом которой приходим к финальной априорной оценке решений краевой задачи (11_ε), (3), (4), (12) в случае, когда ε не является фиксированной величиной:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)\,dx + \int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_jt}^2(x,t)\,dx \\
&\qquad + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2 \, dxd\tau + \int\limits_\Omega (\Delta u_t)^2 \, dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_jtt}^2(x,t)\,dx \\
&\qquad\qquad + \sum_{j=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{x_j\tau\tau}^2 \, dxd\tau + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta u_{\tau\tau})^2 \, dxd\tau \leqslant R, \qquad (18)
\end{aligned}$$

где R — постоянная, определяемая лишь входными данными задачи.

Эта оценка и дает нам разрешимость задачи (11_ε), (3), (4), (12). Найденная функция $u_t(x,t) = u_t^\varepsilon(x,t)$ является решением уравнения

$$\begin{aligned}
&u_{ttt}^\varepsilon - \Delta u_t^\varepsilon + b(x,t)u_{tt}^\varepsilon + (b_t + a)u_t^\varepsilon - \varepsilon \Delta u_{tt}^\varepsilon \\
&\qquad = \left[\gamma_{1t}(x,t)u_{tt}^\varepsilon(x,t_1) + \gamma_{2t}(x,t)u_t^\varepsilon(x,t_1)\right] \\
&\qquad + \left[\gamma_{3t}(x,t)u_t^\varepsilon(x,T) + \gamma_{4t}(x,t) \int\limits_0^T K_1(x,t)u_t^\varepsilon(x,t)\,dt \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \gamma_{4t}(x,t) \int\limits_0^T K_2(x,t)u^\varepsilon(x,t)\,dt - a_t(x,t)u^\varepsilon(x,t)\right].
\end{aligned}$$

Оценка (18) дает возможность стандартным образом выделить из семейства решений сходящуюся подпоследовательность $\{u^m(x,t)\}$; для предельной функции $u(x,t)$ будут выполняться уравнение (11), условия (2)–(4), (12), и эта функция будет принадлежать пространству V_0.

Определим функции $q_k(x)$ следующим образом:

$$q_k(x) = \alpha_{j1}(x)u_{tt}(x,t_1) + \alpha_{j2}(x)u_t(x,t_1) + \alpha_{j3}(x)u_t(x,T) + \alpha_{j4}(x)\int_0^T K_1(x,t)u_t(x,t)\,dt + \alpha_{j4}(x)\int_0^T K_2(x,t)u(x,t)\,dt + \alpha_{j0}(x),$$

$$k = j + (-1)^{j+1}, \quad j = 1,2,$$

получим, что найденная функция $u(x,t)$ и функции $q_1(x)$, $q_2(x)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1).

Выполнение для функции $u(x,t)$ условий переопределения (5) и (6) показывается вполне аналогично тому, как это сделано в работах [3, 4]. Единственность решений очевидна.

Теорема доказана.

Замечание 1. Доказанная теорема легко обобщается на случай неизвестного внешнего воздействия вида

$$\sum_{k=1}^{m} g_k(x)h_k(x,t)$$

с произвольным числом неизвестных коэффициентов $q_k(x)$. В качестве условий переопределения в этом случае должны задаваться условие (6) и условия

$$u(x,t_k) = u_k(x), \quad k = 1,\dots,m-1,\ 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1} \leqslant T. \quad (19)$$

Сущность доказанной теоремы от этого не изменится.

Замечание 2. Одно или несколько условий переопределения (5) или (19) также можно заменить интегральными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амиров А. Х.* К вопросу о разрешимости обратных задач // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 6. С. 3–12.

2. *Сафиуллова Р. Р.* Нелокальные задачи для одного класса уравнений составного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, вып. 2. С. 57–72.

3. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.

4. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном параболическом уравнении и связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2994. Т. 76, вып. 6. С. 840–853.

г. Стерлитамак *1 ноября 2006 г.*

УДК 517.95

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Т. А. Сафонова

Интерес к уравнениям смешанного типа возник в связи с тем, что ряд важных проблем газовой динамики и гидродинамики можно свести к краевым задачам для уравнений смешанного типа. Первые фундаментальные результаты были получены Ф. Трикоми.

Уравнениями смешанного типа занимались также М. А. Лаврентьев, Ф. И. Франкль, К. И. Бабенко, С. А. Чаплыгин. Ф. И. Франкль обратил внимание на важные приложения задачи Трикоми и других родственных ей задач к газовой динамике, а именно к теории установившихся смешанных до- и сверхзвуковых течений.

В работах В. Н. Врагова, О. А. Олейник, С. А. Терсенова, И. М. Петрушко, С. Г. Пяткова и других поставлены и исследованы новые задачи для уравнений смешанного типа. В этой работе рассматривается краевая задача с периодическими условиями по времени для уравнения смешанного типа. При этом используется метод Фурье, причем разложение неизвестной функции проводится по собственным функциям одной неклассической спектральной задачи. Спектральные задачи такого типа рассматривались в работах [1–3].

1. Постановка задачи

Пусть дано уравнение смешанного типа

$$Lu = \operatorname{sgn} x u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad -1 < x < 1,\ 0 < t < 1. \tag{1}$$

© 2006 Сафонова Т. А.

Краевая задача. *Найти решение уравнения* (1) *такое, что*

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{2}$$

$$u(0+,t) = u(0-,t), \quad u'_x(0+,t) = u'_x(0-,t), \quad -1 < x < 1, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u(x,1), \quad -1 < x < 1, \tag{4}$$

$$u_t(x,0) = u_t(x,1), \quad -1 < x < 1, \tag{5}$$

где $f(x,t) \in C([0,1], H_0)$, H_0 — пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_0 = \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sgn} xuv\, dx.$$

Пусть уравнение (1) имеет решение вида $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставим u в уравнение (1) и поделим обе части на $u = XT$. Получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$X''(x) + \lambda \operatorname{sgn} x X(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \tag{6}$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{7}$$

где $\lambda = \text{const}$.

2. Решение одной спектральной задачи

Рассматривается спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$X''(x) + \lambda \operatorname{sgn}\ x X(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \tag{8}$$

$$X(-1) = X(1) = 0, \quad -1 < x < 1, \tag{9}$$

$$X(0+) = X(0-) = 0, \quad X'(0+) = X'(0-), \quad -1 < x < 1, \tag{10}$$

где (10) — условия склеивания. Решив спектральную задачу, получим собственные функции. Собственные функции, соответствующие $\lambda > 0$, будут иметь вид

$$\varphi_k^+(x) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda_k^+}(1-x)}{\cos \sqrt{\lambda_k^+}}, & x > 0, \\ -\frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k^+}(1+x)}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_k^+}}, & x < 0, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

собственные числа удовлетворяют уравнению $-\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \operatorname{th}\sqrt{\lambda}$. Собственные функции, соответствующие $\lambda < 0$, таковы:

$$\varphi_k^-(x) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_k^-}(1-x)}{\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_k^-}}, & x > 0, \\ & k = 1, 2, \dots, \\ \dfrac{\sin\sqrt{-\lambda_k^-}(1+x)}{\cos\sqrt{-\lambda_k^-}}, & x < 0, \end{cases}$$

собственные числа удовлетворяют уравнению $-\operatorname{tg}\sqrt{-\lambda} = \operatorname{th}\sqrt{-\lambda}$.

Собственные функции образуют ортогональную систему в пространстве H_0. Спектральные задачи такого рода встречаются в работах [1, 2, 3]. Полнота функций φ_k^-, φ_k^+ в пространстве H_0 доказана в работе [2].

3. Метод Фурье решения краевой задачи

Общее решение задачи (1)–(5) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^+(t)\varphi_k^+(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k^-(t)\varphi_k^-(x). \tag{11}$$

Далее, считаем, что $f \perp H_0$, где H_0 — подпространство, образованное функциями φ_k^- при $k = 1, 2, 3 \dots$. Подставим (11) в уравнение (1) и после некоторых преобразований получим два дифференциальных уравнения:

$$T_k''^+(t) + \lambda_k^+ T_k^+(t) = f_k^+(t), \quad T_k''^-(t) + \lambda_k^- T_k^-(t) = 0.$$

Учитывая условия (4), (5), для положительных собственных значений имеем

$$T_k''^+(t) + \lambda_k^+ T_k^+(t) = f_k^+(t), \tag{12}$$

$$T_k^+(0) = T_k^+(1),\ T_k'^+(0) = T_k'^+(1). \tag{13}$$

Общее решение уравнения (12) будем искать в виде

$$T_k^+(t) = a_k \cos\sqrt{\lambda_k^+}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k^+}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^+}} \int_0^t f_k^+(\tau) \sin\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)\, d\tau.$$

Из условий (13) найдем коэффициенты a_k, b_k. При этом общее решение будет иметь вид

$$T_k^+(t) = \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda_k^+}}{2}}{\left(1-\cos\sqrt{\lambda_k^+}\right)\sqrt{\lambda_k^+}} \int\limits_0^1 f_k^+(\tau)\cos\sqrt{\lambda_k^+}\left(\frac{1+2t-2\tau}{2}\right)d\tau + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^+}} \int\limits_0^t f_k^+(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)\,d\tau.$$

Для отрицательных собственных значений:

$$T_k''^-(t) + \lambda_k^- T_k^-(t) = 0, \tag{14}$$

$$T_k^-(0) = T_k^-(1), \quad T_k'^-(0) = T_k'^-(1), \tag{15}$$

задача (14), (15) будет иметь нулевое решение $T_k^-(t) = 0$.

Исследуем сходимость ряда (11) по норме пространства H_s:

$$\|u(x,t)\|_s^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |T_k^+(t)|^2 |\lambda_k^+|^s + \sum_{k=1}^{\infty} |T_k^-(t)|^2 |-\lambda_k^-|^s.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\|u(x,t)\|_0^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |T_k^+(t)|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda_k^+}}{2}}{\left(1-\cos\sqrt{\lambda_k^+}\right)\sqrt{\lambda_k^+}} \int\limits_0^1 f_k^+(\tau)\cos\sqrt{\lambda_k^+}\left(\frac{1+2t-2\tau}{2}\right)d\tau \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^+}} \int\limits_0^t f_k^+(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)\,d\tau \right|^2 \\
&\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda_k^+}}{2}}{\left(1-\cos\sqrt{\lambda_k^+}\right)\sqrt{\lambda_k^+}} \int\limits_0^1 f_k^+(\tau)\cos\sqrt{\lambda_k^+}\left(\frac{1+2t-2\tau}{2}\right)d\tau \right|^2 \\
&\qquad + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^+}} \int\limits_0^t f_k^+(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)\,d\tau \right|^2
\end{aligned}$$

$$\leqslant 2\delta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |f_k^+(\tau)| d\tau \right)^2 + 2\delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t |f_k^+(\tau)| d\tau \right)^2$$

$$\leqslant 2\delta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f_k^+(\tau) d\tau \right|^2 + 2\delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t f_k^+(\tau)\, d\tau \right|^2 \leqslant c_0 \int_0^1 \|f\|_0^2\, d\tau,$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

при выполнении условий

$$1 - \cos\sqrt{\lambda_k^+} \geqslant \delta_0 > 0 \tag{16}$$

для любого натурального k.

При выполнении условий (16) также верно следующее:

$$\|u(x,t)\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |T_k^+(t)|^2 |\lambda_k^+|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\sqrt{\lambda_k^+}/2}{\left(1 - \cos\sqrt{\lambda_k^+}\right)} \int_0^1 f_k^+(\tau) \cos\sqrt{\lambda_k^+} \left(\frac{1 + 2t - 2\tau}{2} \right) d\tau \right.$$

$$\left. + \int_0^t f_k^+(\tau) \sin\sqrt{\lambda_k^+}(t - \tau)\, d\tau \right|^2$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda_k^+}}{2}}{\left(1 - \cos\sqrt{\lambda_k^+}\right)} \int_0^1 f_k^+(\tau) \cos\sqrt{\lambda_k^+} \left(\frac{1 + 2t - 2\tau}{2} \right) d\tau \right|^2$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t f_k^+(\tau) \sin\sqrt{\lambda_k^+}(t - \tau)\, d\tau \right|^2$$

$$\leqslant 2\delta_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f_k^+(\tau)\, d\tau \right|^2 + 2\delta_3 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t f_k^+(\tau) d\tau \right|^2 \leqslant c_1 \int_0^1 \|f\|_0^2\, d\tau.$$

Аналогично ряд, полученный однократным дифференцированием по t

ряда (11), также сходится:

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'^{+}(t)\varphi_k^+(x).$$

Действительно,

$$\|u_t(x,t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda_k^+}}{2}}{\left(1-\cos\sqrt{\lambda_k^+}\right)} \int_0^1 f_k^+(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k^+}\left(\frac{1+2t-2\tau}{2}\right)d\tau \right.$$
$$\left. + \int_0^t f_k^+(\tau)\cos\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)\,d\tau \right|^2$$
$$\leqslant 2\left[\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda_k^+}}{2}}{\left(1-\cos\sqrt{\lambda_k^+}\right)} \int_0^1 f_k^+(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k^+}\left(\frac{1+2t-2\tau}{2}\right)d\tau \right|^2 \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t f_k^+(\tau)\cos\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)\,d\tau \right|^2 \right] \leqslant c_2 \int_0^1 \|f\|_0^2\,d\tau, \quad k=1,2,\ldots.$$

Ряд, полученный двукратным дифференцированием по t ряда (11), сходится аналогично:

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k''^{+}(t)\varphi_k^+(x).$$

В самом деле,

$$\|u_{tt}(x,t)\|_{-1}^2$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\sqrt{\lambda_k^+}\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda_k^+}}{2}}{\left(1-\cos\sqrt{\lambda_k^+}\right)} \int_0^1 f_k^+(\tau)\cos\sqrt{\lambda_k^+}\left(\frac{1+2t-2\tau}{2}\right)d\tau \right.$$
$$\left. -\sqrt{\lambda_k^+}\int_0^t f_k^+(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)\,d\tau \right]^2 \frac{1}{|\lambda_k^+|}$$
$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda_k^+}}{2}}{\left(1-\cos\sqrt{\lambda_k^+}\right)} \int_0^1 f_k^+(\tau)\cos\sqrt{\lambda_k^+}\left(\frac{1+2t-2\tau}{2}\right)d\tau \right|^2$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t f_k^+(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k^+}(t-\tau)\,d\tau\right|^2 \leqslant c_3\int_0^1 \|f\|_0^2\,d\tau, \quad k=1,2,\ldots.$$

Здесь c_0, c_1, c_2, c_3 — постоянные. Результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия* (16) *и* $f \in C([0,1],H_0)$. *Тогда* $u(x,t)$, *определенная рядом* (11), *удовлетворяет условиям*

$$u(x,t)\in C([0,1],H_1), \quad u_t(x,t)\in C([0,1],H_0),$$
$$u_{tt}(x,t)\in C([0,1],H_{-1})$$

и является обобщенным решением задачи (1)–(5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бускарова О. Ф.* О методе Фурье для решения параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Науч. конф. студентов и молодых ученых Республики Саха (Якутии): тез. докл. Якутск: НИИ ПМиИ ЯГУ, 1997.

2. *Егоров И. Е., Попов С. В., Пятков С. Г.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

3. *Федоров Ф. М.* Граничный метод в задачах с переменным направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 1995. Т. 2, вып. 2. С. 52–60.

г. Якутск *15 июня 2006 г.*

УДК 517.958:57

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ ПАРАМЕТРАМИ

Е. Т. Софронов

В статье рассматривается система уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - bx_2 - ax_3),\\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - bx_1 - x_2 - ax_3),\\ \dot{x}_3 &= -x_3(k - cx_1 - bx_2 - x_3),\end{aligned}$$

где a, b, c, k — положительные постоянные, и изучается устойчивость или неустойчивость состояния равновесия M с положительными координатами. Состояние равновесия $M(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ находится из системы уравнений

$$\begin{aligned}x_1 + bx_2 + ax_3 &= 1,\\ bx_1 + x_2 + ax_3 &= 1,\\ cx_1 + bx_2 + x_3 &= k.\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь

$$x_i^* = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где

$$\Delta = (1-b)(1+b-ab-ac), \quad \Delta_1 = \Delta_2 = (1-b)(1-ak),$$

$$\Delta_3 = (1-b)[-b-c+k(1+b)], \quad x_1^* = x_1^* = \frac{1-ak}{1+b-ab-ac},$$

$$x_3^* = \frac{-b-c+k(1+b)}{1+b-ab-ac}.$$

© 2006 Софронов Е. Т.

Сделаем замену переменных $x_i = x_i^* + y_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (x_1^* + y_1)(-y_1 - by_2 - ay_3), \\ \dot{y}_2 &= (x_1^* + y_2)(-by_1 - y_2 - ay_3), \\ \dot{y}_3 &= (x_3^* + y_3)(cy_1 + by_2 + y_3). \end{aligned} \tag{2}$$

Характеристическое уравнение для соответствующей линейной системы уравнений можно представить так:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

где

$$a_1 = 2x_1^* - x_3^*, \quad a_2 = (1 - b^2)x_1^{*2} + (ab + ac - 2)x_1^*x_3^*,$$
$$a_3 = -\Delta x_1^{*2}x_3^*.$$

Из дальнейшего рассмотрения исключаются случаи, когда $x_i^* \leqslant 0$, $a_3 < 0$ и $a = b = 1$.

Кроме того, предполагаем, что $c \neq a$, $c \neq b$. Возможны следующие случаи:

1) $b < 1$, $1 + b - a(b + c) < 0$;

2) $b > 1$, $1 + b - a(b + c) > 0$;

3) $b = 1$.

Случай 1: $b < 1$, $1 + b - a(b + c) < 0$.

Теорема 1. *Пусть*

$$b < 1, \quad 1 + b - a(b + c) < 0, \quad \frac{1}{a} < \frac{1 + c + 2b}{(1 + b)(1 + a)} < k < \frac{b + c}{1 + b}. \tag{3}$$

Тогда существует состояние равновесия M с положительными координатами и оно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Из неравенств (3) следует, что $x_1^* > 0$, $x_3^* > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 > 0$. Действительно,

$$a_1 = \frac{2 + b + c - k(1 + 2a + b)}{1 + b - a(b + c)} > 0 \quad \text{при } k > \frac{2 + b + c}{1 + 2a + b}.$$

Но

$$\frac{2+b+c}{1+2a+b} < \frac{1+c+2b}{(1+b)(1+a)} \quad \text{или} \quad (1-b)[1+b-a(b+c)] < 0.$$

Теперь покажем, что $a_1a_2 - a_3 > 0$. Подставляя вместо a_1, a_2 и a_3 их значения, получим

$$a_1a_2 - a_3 = x_1^*[(1+b)x_1^* - x_3][2(1-b)x_1^* + (ac+ab-2)x_3^*]. \qquad (4)$$

В этом выражении $(1+b)x_1^* - x_3^* > 0$, что следует из (3). Если $ac + ab - 2 \geqslant 0$, то $a_1a_2 - a_3 > 0$. Пусть теперь $ac + ab - 2 < 0$. Покажем, что тогда $a_2 > 0$, т. е.

$$(1-b^2)(1-ak) + (ab+ac-2)[-b-c+k(1+b)] < 0,$$

или

$$k > \frac{1-b^2-(b+c)(ab+ac-2)}{a(1-b^2)-(1+b)(ab+ac-2)}.$$

Но

$$\frac{1-b^2-(b+c)(ab+ac-2)}{a(1-b^2)-(1+b)(ab+ac-2)} < \frac{1+c+2b}{(1+b)(1+b)} < k.$$

Такое неравенство возможно, если

$$(ab+ac-2)[1+c+2b-(1+a)(1+b)]+(1-b)[(1+b)(1+a)-a(1+c+2b)] < 0,$$

или

$$(1+b-ac-ab)(ab+ac-1-b) < 0.$$

Итак, $a_2 > 0$ и

$$2(1-b)x_1^* + (ab+ac-2)x_3^* = (1-b^2)x_1^* + (ab+ac-2)x_3^* + (1-b)^2x_1^* > 0.$$

Отсюда следует, что $a_1a_2 - a_3 > 0$, и состояние равновесия M с положительными координатами асимптотически устойчиво.

Теорема 2. *Пусть*

$$b < 1, \quad 1+b-a(b+c) < 0, \quad \frac{1}{a} < k < \frac{1+2b+c}{(1+b)(1+a)} < \frac{b+c}{1+b}.$$

Тогда существует состояние равновесия M с положительными координатами и оно неустойчиво.

Доказательство. Если

$$k < \frac{2+b+c}{1+2a+b},$$

то $a_1 < 0$ и состояние равновесия M неустойчиво. Если $a_1 > 0$ и

$$k < \frac{1-b^2-(b+c)(ab+ac-2)}{(1+b)[a(1-b)-(ab+ac-2)]} \quad \text{при } ab+ac-2<0,$$

то $a_2 < 0$ и $a_1a_2 - a_3 < 0$. Если $ab+ac-2 \geqslant 0$, то $a_2 > 0$, но $a_1a_2 - a_3 < 0$ в силу неравенства

$$(1+b)x_1^* - x_3 < 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть*

$$b<1, \quad 1+b-a(b+c)<0, \quad \frac{1}{a} < k = \frac{1+2b+c}{(1+b)(1+a)} < \frac{b+c}{1+b}. \tag{5}$$

Тогда существует состояние равновесия M с положительными координатами и оно устойчиво.

Доказательство. При выполнении неравенств (5) имеем

$$x_1^* = x_2^* = \frac{1}{(1+b)(1+a)}, \quad x_3^* = \frac{1}{1+a},$$
$$a_1 = (1-b)x_1^*, \quad a_2 = (1+b)(ab+ac-1-b){x_1^*}^2,$$
$$a_1a_2 - a_3 = 0, \quad \lambda_1 = (b-1)x_1^*, \quad \lambda_{2,3} = \pm\beta i, \quad \beta = \sqrt{a_2}.$$

Сделаем преобразование:

$$x = \frac{\beta}{ax_1^*}y_2, \quad y = \frac{1+b}{a}y_2 + y_3, \quad z = y_1 - y_2.$$

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -\beta y - axy - z\left(bx + \frac{b\beta}{ax_1^*}\right),\\
\dot{y} &= \beta x - x^2 + y^2 + c_1xy + zF(x,y),\\
\dot{z} &= \lambda_1 z - z\left(z - ay + \frac{a(3+b)}{\beta}x_1^*x\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Для системы уравнений (6) $z = 0$ — интегральная плоскость. На этой плоскости лежат замкнутые траектории. Поэтому [1] состояние равновесия M устойчиво.

Случай 2: $b > 1$, $1 + b - a(b + c) > 0$.

Теорема 4. *Пусть*

$$b > 1, \quad 1 + b - a(b + c) > 0, \quad \frac{b + c}{1 + b} < k < \frac{1}{a}.$$

Тогда существует состояние равновесия M с положительными координатами и оно неустойчиво.

Доказательство. Если $ab + ac - 2 \leqslant 0$, то $a_2 < 0$ и состояние равновесия M неустойчиво. Пусть $a_2 > 0$ и

$$2 < a(b + c) < 1 + b, \quad \frac{b + c}{1 + b} < k < \frac{1}{a}.$$

Если

$$k \geqslant \frac{2 + b + c}{1 + 2a + b},$$

то $a_1 < 0$ и M неустойчиво. Пусть $a_1 > 0$. Тогда из $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ следует, что

$$\frac{b^2 - 1 + (b + c)(ab + ac - 2)}{(1 + b)[a(b - 1) + (ab + ac - 2)]} < k < \frac{2 + b + c}{1 + 2a + b}. \tag{7}$$

Покажем, что этого быть не может. Действительно, это неравенство возможно, если

$$(ab + ac - 2)[(b + c)(1 + 2a + b) - (1 + b)(2 + b + c)] + (b^2 - 1)[1 + 2a + b - a(a + b + c)] < 0.$$

Но

$$(ab + ac - 2)(2ab + 2ac - 2 - 2b) + (b^2 - 1)(1 + b - ab - ac) = (1 + b - ab - ac)[2(1 + b - ab - ac) + (b - 1)] > 0,$$

что противоречит предыдущему неравенству. Следовательно, неравенства (7) невозможны, и состояние равновесия M неустойчиво. Теорема доказана.

Случай 3: $b = 1$, $a + ac - 2 > 0$. Если $a + ac - 2 \leqslant 0$, то $a_2 \leqslant 0$ и M неустойчиво.

Теорема 5. *Пусть*

$$b = 1, \quad a + ac - 2 > 0, \quad \frac{1}{a} < \frac{3+c}{2(1+a)} < \frac{1+c}{2}. \tag{8}$$

Тогда существует состояние равновесия M с положительными координатами и оно устойчиво.

Доказательство. При выполнении неравенств (8) $x_i^* > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Действительно,

$$a_1 = \frac{3 + c - 2k(1+a)}{2 - a(1+c)} > 0 \quad \text{при } k > \frac{3+c}{2(1+a)}.$$

Характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_1 = 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_{2,3} < 0,$$

и существуют состояния равновесия, определяемые системой уравнений

$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1, \quad cx_1 + x_2 + x_3 = k.$$

Поэтому [1] состояние равновесия M устойчиво.

Теорема 6. *Пусть*

$$b = 1, \quad \frac{1}{a} < \frac{3+c}{2(1+a)} = k < \frac{1+c}{2}, \quad a + ac - 2 > 0, \quad c \neq 1. \tag{9}$$

Тогда существует состояние равновесия M с положительными координатами и оно неустойчиво.

Доказательство. При выполнении неравенств (9) имеем

$$x_1^* = x_2^* = \frac{1}{2(1+a)}, \quad x_3^* = \frac{1}{1+a}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm\beta i,$$
$$\beta = \sqrt{a_2}, \quad a_2 = \frac{a + ac - 2}{2(1+a)^2}.$$

Сделаем замену переменных:

$$x = -\beta(c_1 y_1 + c_2 y_2), \quad y = y_1 + y_2 + ay_3, \quad z = y_1 - y_2,$$

где

$$c_1 = \frac{ac-1}{(1+a)\beta^2}, \quad c_2 = \frac{a-1}{(1+a)\beta^2}, \quad c_1 + c_2 = 2(1+a).$$

Тогда получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \beta y - xy, \\ \dot{y} &= -\beta x - \frac{1}{a}x^2 + \frac{1}{a}y^2 + dxy + F(x,y,z), \\ \dot{z} &= -yz. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь d — const, $F(x,y,z)$ — однородный многочлен второго порядка и $F(x,y,z) = (b_1 x + b_2 y)z$.

На интегральной плоскости $z = 0$ лежат периодические решения [2] в окрестности точки с координатами $x = 0$, $y = 0$. Имеем интегральные плоскости $z = (\beta - x)c_3$, где c_3 — const. Поэтому для системы уравнений (10) при $z = 0$ имеем голоморфный интеграл [1] вида

$$V(x,y) = x^2 + y^2 + f(x,y) = c_4,$$

где $f(x,y)$ — голоморфная функция, разложение которой в сходящийся ряд по целым положительным степеням начинается с членов не ниже третьего порядка.

Для исследования устойчивости состояния равновесия M возьмем функцию

$$V_1(x,y,z) = V(x,y) + (d_1 x^2 + d_2 xy + d_3 y^2)\frac{z}{\beta - x} \tag{11}$$

такую, что ее производная, вычисленная в силу системы уравнений (10), имеет вид

$$\frac{dV_1}{dt} = [q(x^2 + y^2) + \ldots]z + R(x,y)z^2,$$

где многоточием обозначен ряд, начинающийся с членов не ниже третьего порядка; $R(x,y)$ — голоморфная функция, разложение которой в ряд начинается с членов второго порядка. В выражении (10)

$$b_1 = \frac{1-c}{2(1+a)\beta}, \quad b_2 = \frac{(c-1)(1+a)}{ac+a-2},$$

откуда $F(x,y,z)=0$ при $c=1$. Если выберем

$$d_3=0,\quad d_1=-\frac{b_1}{\beta},\quad d_2=-\frac{b_2}{\beta},$$

то

$$q=\frac{(c-1)(a+1)}{(a+ac-2)\beta}.$$

На интегральной плоскости $z=(\beta-x)c_3$ находится состояние равновесия с координатами $x_0=y_0=0$, $z=z_0\neq 0$. Тогда если $c>1$, $z_0>0$, то траектории пересекают поверхность $V_1=c_5$ изнутри при $t\geqslant t_0$, а если $z_0<0$ то — извне внутрь. Поэтому указанное состояние равновесия в одном случае неустойчивый фокус, а в другом — устойчивый фокус в зависимости от знака z_0. Поэтому, применяя теорему 2.17 из [3], завершаем доказательство теоремы.

Заметим, что если $c=1$, то состояние равновесия M — центр, а если $c>1$, то при $x_1=x_2$ происходит циклическое изменения количества особей всех видов, а в случае $x_1<x_2$ количество особей всех видов стремится к определенному числу. Аналогичный вывод можно сделать и при $c<1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

2. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1947.

3. *Софронов Е. Т.* Устойчивость автономных систем в критических случаях. Новосибирск: Наука, 2000.

г. Якутск *18 мая 2006 г.*

УДК 512.6:519.61

О СВЯЗЯХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕКОТОРЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ. I

Ф. М. Федоров

1. Введение. Пусть задана последовательность вещественных чисел

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots. \tag{1}$$

О структуре этой последовательности пока не говорим. При определенных условиях на последовательности (1) можно построить аналитическую функцию

$$f(x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots + (-1)^p a_p x^p + \cdots = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p x^p \tag{2}$$

и ее обратную функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} \tag{2'}$$

и, кроме того, можно поставить задачу определения нулей функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p x^p = 0. \tag{3}$$

Очевидно, если для всех $p > n$ имеем $a_p = 0$ для некоторого n, то вместо (2) получим многочлен n-й степени, а вместо (3) — алгебраическое уравнение n-й степени. Производя в последнем случае замену переменных $y = 1/x$, получим следующее алгебраическое уравнение n-й степени:

$$a_0 y^n - a_1 y^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n = 0. \tag{3'}$$

© **2006 Федоров Ф. М.**

В этом случае можно построить конечно-разностное (возвратное, рекуррентное) уравнение

$$a_0V_{n+i} - a_1V_{n+i-1} + a_2V_{n+i-2} - \cdots + (-1)^n a_nV_i = 0, \tag{4}$$

для которого уравнение $(3')$ является характеристическим.

Из последовательности (1) можно составить следующую однородную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений в гауссовой форме [1]:

$$\begin{aligned} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots &= 0,\\ a_0x_1 + a_1x_2 + a_2x_3 + a_3x_4 + \ldots &= 0,\\ a_0x_2 + a_1x_3 + a_2x_4 + \ldots &= 0,\\ a_0x_3 + a_1x_4 + \ldots &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots & \end{aligned} \tag{5}$$

На основании последовательности (1) можно построить последовательность

$$a_{j,j+p} = a_p a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k} \quad \forall a_{j,j} \neq 0 \quad (j, p = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

причем последовательность $\overline{a}_j$ строим следующим образом: сначала положим $\bar{a}_0 = a_{1,1}$, а для последующих коэффициентов можно взять $\bar{a}_k = a_{k+1,k+1}/a_{k,k},\ k > 0$. Заметим, что для унификации обозначений в (6) можно положить $\prod\limits_{k=0}^{-1} \bar{a}_{j+k} = 1$ и $a_0 = 1$, поэтому, не нарушая общности, в выражениях (1)–(6) полагаем, что $a_0 = 1$.

Наряду с бесконечной системой (5) рассмотрим бесконечную систему

$$\begin{aligned} a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 + a_{0,2}x_2 + a_{0,3}x_3 + a_{0,4}x_4 + \ldots &= 0,\\ a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 + \ldots &= 0,\\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 + \ldots &= 0,\\ a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 + \ldots &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots & \end{aligned} \tag{7}$$

с коэффициентами $a_{j,j+p}$ вида (6).

Исходя из последовательности (1) можно построить другую последовательность

$$s_1 = a_1, \quad s_n = a_1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{(-1)^{p-1} a_p}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} s_{n-k}}, \quad n = \overline{2, \infty}, \tag{8}$$

а также последовательность определителей n-го порядка

$$A_0 = 1, \quad A_1 = a_1, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

$$\ldots, A_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 \end{vmatrix}, \ldots . \tag{9}$$

В данной работе исследуем некоторые связи между этими математическими структурами, а также укажем связь этих структур с дифференциальными и интегральными уравнениями.

2. Решение алгебраических и реккуррентных уравнений. Метод Бернулли. Разложение обратной функции в степенной ряд. Последовательность $V_i = \varphi(i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, члены которой удовлетворяют конечно-разностному уравнению (4), называется *решением* этого уравнения. Для построения решения V_i достаточно задать n его начальных значений $V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$; остальные члены V_n, V_{n+1} шаг за шагом можно определить из уравнения (4).

Теоретическим обоснованием метода Бернулли служит следующая теорема [2].

Теорема 1. *Пусть алгебраическое уравнение* $(3')$ *имеет единственный наибольший по модулю корень* y_1. *Тогда отношение двух последовательных членов* V_{i+1} *и* V_i *решения конечно-разностного уравнения* (4) *стремится, вообще говоря, к пределу, равному* y_1, *т. е.*

$$\lim_{i \to \infty} \frac{V_{i+1}}{V_i} = y_1.$$

Обобщение метода Бернулли изложено в работах [3, 4], основная идея которого высказана в [1]. Для уравнения (2) прямое применение метода Бернулли не проходит, поэтому в [3, 4] предложено его обобщение.

В указанных работах [3, 4] последовательность определителей (9) названа характеристической последовательностью уравнения (3) и получены достаточные условия сходимости последовательности (8).

Условие 1. Пусть степенной ряд (2) абсолютно сходится в $|x| \leqslant r > 0$, где r — радиус сходимости ряда (2), и пусть существует ближайшая к нулю точка x_0 на вещественной оси такая, что $|x_0| \leqslant r$ и $f(x_0) = 0$, т. е. удовлетворяется уравнение (3), причем полагаем, что в области $x \leqslant |x_0|$ функция $f(x)$ не имеет других (комплексных) нулей.

Теорема 2. *При выполнении условия* 1 *обратная функция* $\varphi(x)$ $(2')$ *в области* $x < |x_0|$ *разлагается в абсолютно сходящийся степенной ряд*

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \tag{10}$$

где A_n *— характеристические определители* (9) *и радиус сходимости* R *ряда* (10) *равен* $|x_0|$, *т. е.* $R = |x_0|$.

Условие 2. Пусть последовательность $\{a_p\}$ такая, что $A_n \neq 0$ для любого натурального n.

Следующая теорема дает условия сходимости последовательности (8) и законности предельного перехода в нем.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты* a_i *удовлетворяют условиям* $1, 2$ *и* $|x_0|$ *является единственным, причем вещественным, нулем функции* $f(x)$ *в области* $x \leqslant |x_0|$. *Тогда существует предел последовательности* (8), *верно равенство*

$$|s| = \frac{1}{|x_0|}, \quad \text{где } \lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

и возможен предельный переход под знаком суммы в выражении (8), *т. е. имеет место равенство*

$$s = a_1 + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} a_p}{s^{p-1}}. \tag{11}$$

В соответствии с уравнением (2) конечно-разностное уравнение (4) запишем в виде

$$V_n = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p a_p V_{n-p} \tag{12}$$

с начальным значением $V_0 = a_0 = 1$. В отличие от уравнения (4), где n имеет фиксированное значение, в уравнении (12) n нарастает шаг за шагом.

Теорема 4. *Характеристическая последовательность* (9) *является решением конечно-разностного уравнения* (12), *т. е.* $V_i = A_i$.

Утверждение теоремы легко доказывается разложением определителя A_n в (9) по первым строкам.

В работах [3, 4] показано, что $s_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}$. Следовательно, на основании теорем 3 и 4 получаем

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{V_{n-1}} = s = a_1 + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} a_p}{s^{p-1}}, \tag{13}$$

т. е. $1/s$ является единственным наименьшим по модулю корнем уравнения (2).

Замечание 1. Таким образом, для уравнения (3) имеем аналогичный теореме 1 результат. Последнее является основанием называть предложенный способ решения уравнения (3) *обобщенным методом Бернулли.*

Для конечного уравнения (3′) обобщение метода Бернулли осуществляется следующим образом. В данном случае вид определителей характеристической последовательности (9) зависит от порядка n

уравнения (3′), т. е. $A_i = A_i(n)$, при этом для $i \leqslant n$ они остаются теми же, что и в (9), а для $i > n$ записываются так:

$$A_i(n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Заметим, что на пересечении j-й строки и $j-n+1$-го столбца определителя (14) стоит элемент a_n, где $n \leqslant j \leqslant i$.

Как показано в работе [3], характеристическая последовательность (9) с учетом (14) удовлетворяет конечно-разностному уравнению (4), а последовательность (8) имеет вид

$$s_i = a_1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{(-1)^{p-1} a_p}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} s_{i-k}}, \quad i > n;$$

$$s_i = a_1 + \sum_{p=2}^{i} \frac{(-1)^{p-1} a_p}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} s_{i-k}}, \quad i \leqslant n,\ s_1 = a_1,\ i = \overline{2, \infty}.$$

Тем самым завершается обобщение метода Бернулли.

3. Решение бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Теорема 5. *Решения систем* (5) *и* (7) *с коэффициентами* $a_{j,j+p}$ *вида* (6) *эквивалентны в том смысле, что исходя из решения системы* (5) *можно построить решение системы* (7), *и наоборот.*

Доказательство. Сначала построим решение системы (7), зная решение $\bar{x}_{j+p}$ системы (5). Заметим, что краткие записи систем (5) и (7) соответственно имеют вид

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p x_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \tag{15}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p}x_{j+p} = 0, \quad j = 0,1,2,\ldots. \tag{16}$$

Поскольку по условию (6) $a_{j,j}$ и $\bar{a}_j$ не равны нулю для любого j, то деля и умножая выражение под знаком суммы в (15) на $a_{j,j}\prod\limits_{k=0}^{p-1}\bar{a}_{j+k}$, в силу (6) получаем

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{j,j+p}}{a_{j,j}\prod\limits_{k=0}^{p-1}\bar{a}_{j+k}}\bar{x}_{j+p} = 0, \quad j = 0,1,2,\ldots, \tag{17}$$

но $a_{j,j}\prod\limits_{k=0}^{p-1}\bar{a}_{j+k} = a_{j+p,j+p}$. Действительно, из построения $\bar{a}_j$ можно записать $\prod\limits_{k=0}^{j-1}\bar{a}_k = \bar{a}_0\prod\limits_{k=1}^{j-1}(a_{k+1,k+1}/a_{k,k}) = a_{j,j}$. Следовательно, имеем следующую цепочку равенств:

$$a_{j+p,j+p} = \prod_{k=0}^{j+p-1}\bar{a}_k = \prod_{k=0}^{j-1}\bar{a}_k\prod_{k=j}^{j+p-1}\bar{a}_k = a_{j,j}\prod_{k=0}^{p-1}\bar{a}_{j+k}.$$

Таким образом, обозначая $\frac{\bar{x}_{j+p}}{a_{j+p,j+p}} = X_{j+p}$ и подставляя ее в (17), убеждаемся в удовлетворении системы (16), если только $\bar{x}_{j+p}$ является решением системы (15). Аналогичным образом можно удовлетвориться в справедливости обратного утверждения, при этом решением системы (15) будет $\bar{x}_{j+p} = a_{j+p,j+p}X_{j+p}$, если только X_{j+p} является решением системы (16), что и требовалось доказать.

Пусть теперь коэффициенты a_i здесь и в дальнейшем удовлетворяют условиям 1 и 2. При этих предположениях получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Решением бесконечной системы* (5) *является выражение*

$$x_i = \frac{(-1)^i x_0}{s^{i-1}}, \quad i > 0, \tag{18}$$

где $\frac{1}{s}$ *— вещественный корень уравнения* (11) *или, иначе,* $\frac{1}{s}$ *— нуль функции* (2), *а* x_0 *— произвольное вещественное число.*

Доказательство очевидным образом следует из уравнения (11), умноженного на $\frac{(-1)^{j+1}x_0}{s^j}$, $j \geqslant 0$.

Заметим, что аналогичный результат получен в работе [5] методом редукции.

Следствие 1. *Последовательные неизвестные системы* (5) *связаны друг с другом следующим образом*:

$$x_i = -sx_{i+1} \quad \text{или} \quad x_{i+1} = -\frac{1}{s}x_i. \tag{19}$$

Таким образом, число s является коэффициентом пропорциональности между соседними неизвестными в системе (5).

Пусть коэффициенты $a_{j,j+p}$ системы (7) выражаются соотношением (6), тогда имеет место

Теорема 7. *Решением бесконечной системы* (7) *является выражение*

$$x_i = \frac{(-1)^i x_0}{a_{i,i}s^{i-1}}, \quad i > 0, \tag{20}$$

где s, x_0 *те же, что и в теореме* 6.

Доказательство легко следует из теорем 5 и 6 с учетом соотношения $\prod\limits_{k=0}^{i-1} \bar{a}_k = a_{i,i}$.

Аналогичный результат также получен в работе [5] методом редукции.

Следствие 2. *Последовательные неизвестные системы* (7) *связаны друг с другом следующим образом*:

$$x_i = -\overline{a}_i s x_{i+1}. \tag{21}$$

Замечание 2. Если уравнение (11) имеет несколько различных вещественных корней, то столько же независимых ненулевых решений имеют системы (5) и (7).

4. Связь с граничными задачами математической физики, а также с собственными значениями и собственными функциями краевых задач. В настоящее время для решения линейных задач математической физики бесконечная система линейных алгебраических уравнений может быть применена двояко. Например, классический метод Фурье в наиболее общем виде состоит из двух этапов: сначала методом разделения переменных решение исходной задачи сводится к нахождению собственных функций и собственных значений соответствующей краевой задачи для ОДУ, а затем на втором этапе, разложением искомой и заданной начальной функций в ряд Фурье определяется искомое решение. Неизвестные коэффициенты ряда Фурье фактически находятся из решения соответствующей бесконечной системы, только в данном случае в силу ортонормированности и полноты системы собственных функций решение бесконечной системы упрощается, в общем случае коэффициенты разложения по полной системе функций, не обязательно ортогональных, определяются из решения бесконечной системы [6]. Задача первого этапа решается методами решения краевых задач для ОДУ, что не всегда легко реализуется. Вместе с тем, как показано в монографии [1], граничный метод непосредственно дает частное решение исходной задачи, в том числе собственные функции. Кратко, суть метода состоит в следующем. Частное решение исходной задачи ищется в виде формального степенного ряда типа (2), в данном случае коэффициенты разложения b_i зависят от другой переменной задачи, например от времени $b_i = b_i(t)$. Неизвестные коэффициенты разложения b_i находим из заданных граничных условий задачи и бесконечных условий, вытекающих из этих заданных граничных условий при предположении об удовлетворении (в предельном смысле) в граничных точках исходного диффференциального уравнения, т. е. в конечном счете из решения бесконечной системы уравнений. Для иллюстрации сказанного рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \tag{22}$$

с граничными условиями

$$\left(\beta_1 \frac{\partial T}{\partial x} - \beta_2 T\right)_{x=0} = 0, \tag{23}$$

$$\left(\beta_1' \frac{\partial T}{\partial x} - \beta_2' T\right)_{x=1} = 0, \quad \text{где } \beta_1, \beta_1, \beta_1', \beta_1' = \text{const}, \tag{24}$$

а также с начальным условием

$$T(x,0) = \varphi(t). \tag{25}$$

Перепишем граничные условия (23), (24) в виде

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = B\,(T)_{x=0}\,, \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=1} = B'\,(T)_{x=1}\,, \quad \text{где } B = \beta_2/\beta_1,\ B' = \beta_2'/\beta_1'. \tag{27}$$

Сначала решаем задачу (22), (26) и (27) граничным методом и в соответствии с ним ищем решение в виде степенного ряда типа (2):

$$T(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(t) x^i. \tag{28}$$

Дифференцируя последовательно j раз условия (26) и (27) по t и используя каждый раз основное уравнение (22), получим дополнительные условия в виде

$$\left(\frac{\partial^{2j+1} T}{\partial x^{2j+1}}\right)_{x=0} = B\left(\frac{\partial^{2j} T}{\partial x^{2j}}\right)_{x=0}, \tag{29}$$

$$\left(\frac{\partial^{2j+1} T}{\partial x^{2j+1}}\right)_{x=1} = B'\left(\frac{\partial^{2j} T}{\partial x^{2j}}\right)_{x=1}, \quad j = \overline{0,\infty}. \tag{30}$$

С учетом равенства

$$\frac{\partial^j T}{\partial x^j} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+j)!}{p!} b_{j+p}(t) x^p$$

из условий (29), (30), обозначая $b_j(t)$ через b_j, находим бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных b_j:

$$(2j+1) b_{2j+1} = B b_{2j}, \tag{31}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2j+1)!}{k!}b_{k+1+2j}=B'\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{(k+2j+1)!}{(k+1)!}b_{k+1+2j},\quad j=\overline{0,\infty}. \tag{32}$$

Формально объединяя неизвестные b_j в выражении (32) соответственно с четными и нечетными индексами в отдельные суммы, запишем (32) в виде

$$(2j)!B'b_{2j}+\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\frac{B'(2(p+j)+1)!}{(2p+1)!}-\frac{(2(p+j)+1)!}{(2p)!}\right\}b_{2(p+j)+1}$$
$$+\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\frac{B'(2(p+j+1))!}{(2(p+1))!}-\frac{(2(p+j+1))!}{(2p+1)!}\right\}b_{2(p+j+1)}=0. \tag{33}$$

Подставляя (31) в (33), имеем

$$(2j)!B'b_{2j}+\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\frac{B'(2(p+j))!}{(2p+1)!}-\frac{(2(p+j))!}{(2p)!}\right\}Bb_{2(p+j)}$$
$$+\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\frac{B'(2(p+j+1))!}{(2(p+1))!}-\frac{(2(p+j+1))!}{(2p+1)!}\right\}b_{2(p+j+1)}=0. \tag{34}$$

Введя обозначение $x_{j+p}=b_{2(j+p)}(t)$, выражение (34) приводим к виду (16):

$$\sum_{p=0}^{\infty}a_{j,j+p}x_{p+j}=0,\quad j=\overline{0,\infty}, \tag{35}$$

где

$$a_{j,j+p}=(2j+2p)!\left[\frac{BB'}{(2p+1)!}+\frac{B'-B}{(2p)!}-\frac{1}{(2p-1)!}\right]. \tag{36}$$

Здесь условно считаем, что $1/(-1)!=0$.

Легко убедиться, что формула (36) имеет вид (6)

$$a_{j,j+p}=\underbrace{\left(\frac{B'B}{(2p+1)!}+\frac{B'-B}{(2p)!}-\frac{1}{(2p-1)!}\right)}_{a_p}\underbrace{(2j)!}_{a_{j,j}}$$
$$\times\prod_{k=0}^{p-1}\underbrace{(2j+2k+1)(2j+2k+2)}_{\overline{a}_{j+k}}. \tag{37}$$

Следовательно, на основании теоремы 7 решение системы (35) имеет вид (20), т. е.

$$x_i(t) = \frac{(-1)^i x_0(t)}{a_{i,i} s^{i-1}} = \frac{(-1)^i x_0(t)}{(2i)! s^{i-1}} = b_{2i}(t), \tag{38}$$

где s определяется из уравнения (11), которое при предположении, что $s \neq 0$, можно переписать в виде

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} a_p \left(\frac{1}{s}\right)^p = 0.$$

Отсюда, учитывая a_p из (37), имеем

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} \left(\frac{B'B}{(2p+1)!} + \frac{B'-B}{(2p)!} - \frac{1}{(2p-1)!}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^{2p} = 0. \tag{39}$$

Введя обозначение $b_{2j+2p+1}(t) = y_{j+p}$, аналогичным образом находим неизвестные $b_j(t)$ с нечетными индексами:

$$y_i(t) = \frac{(-1)^i y_0(t)}{(2i+1)! s^{i-1}} = b_{2i+1}(t), \tag{40}$$

где s определяется также из уравнения (39), поскольку и в этом случае a_p сохраняет свой вид (37).

Таким образом, учитывая (38) и (40), из (28) получим

$$\begin{aligned} T(x,t) = s x_0(t) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} \left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)^{2p} + \sqrt{s} y_0(t) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)^{2p+1} \\ = A_1(t) \cos \frac{x}{\sqrt{s}} + A_2(t) \sin \frac{x}{\sqrt{s}} = Y\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right), \end{aligned} \tag{41}$$

где функция Y записана для фиксированного t_0, т. е. для $t = t_0$.

Подставляя (41) в условия (26) и (27), найдем $A_1(t)$ и $A_2(t)$ и тем самым получим выражение для определения s при любом t:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s}(B - B')}{1 + sBB'}. \tag{42}$$

Покажем, что функция $Y(x/\sqrt{s})$ является собственной функцией краевой задачи для ОДУ, соответствующей краевой задаче (22), (26), (27), а числа s, определяемые уравнением (42), фактически дают собственные числа краевой задачи для ОДУ.

Действительно, разделяя переменные, решение уравнения (22) сведем к решению ОДУ

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{43}$$

где λ — собственные числа задачи, при этом краевые условия (26), (27) преобразуются к виду

$$X'(0) = BX(0), \quad X'(1) = B'X(1). \tag{44}$$

Общее решение уравнения (43), очевидно, имеет вид

$$X = A_1 \cos\sqrt{\lambda}x + A_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad \lambda > 0, \tag{45}$$

что вместе с краевыми условиями (44) дает для определения собственного числа λ уравнение

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{\lambda}(B - B')}{\lambda + BB'}. \tag{46}$$

Понятно, что при замене $1/s = \lambda$ выражения (41) и (42) совпадают соответственно с выражениями (45) и (46).

Отметим, что имеется принципиальная возможность для дальнейшего решения ограничиться, дальше не решая конкретно бесконечную систему уравнений, только выражением (39), которое получено исходя из вида (37).

Действительно, преобразуя уравнение (39), имеем

$$\sqrt{s}(B' - B)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^{2p} + (sBB' + 1)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^{2p+1} = 0. \tag{47}$$

Пусть существует функция $Y(x/\sqrt{S})$, которую формально можно построить из (47) заменой выражения $1/\sqrt{s}$ на $x/\sqrt{s}$:

$$Y\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) = A_1 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} \left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)^{2p} + A_2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)^{2p+1} = A_1 \cos\frac{x}{\sqrt{s}} + A_2 \sin\frac{x}{\sqrt{s}},$$

а соотношение (47) очевидно дает уравнение (42) для определения s.

Заметим, что аналогичная задача с применением метода редукции рассмотрена в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров Ф. М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.

2. *Загускин В. Л.* Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. М.: Физматгиз, 1960.

3. *Федоров Ф. М.* О новом подходе изучения вещественных корней полиномиального уравнения // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т. 10, вып. 1. С. 105–113.

4. *Федоров Ф. М., Абрамова М. Е.* О решении алгебраических уравнений бесконечной степени обобщенным методом Бернулли // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, вып. 2. С. 80–88.

5. *Федоров Ф. М., Осипова Т. Л.* О решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, вып. 2. С. 89–97.

6. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Гостехтеориздат, 1952.

г. Якутск *18 мая 2006 г.*

УДК 514.752.437

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛНОГО МИНИМАЛЬНОГО ТОРА С ПЯТЬЮ ПЛОСКИМИ КОНЦАМИ С ОДНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ*)

Э. И. Шамаев

Введение

Мы продолжаем исследовать вопрос о существовании полных минимальных поверхностей, ведущих себя на бесконечности асимптотически как плоскость и гомеоморфных тору с выколотыми точками [1, 2]. В этой статье нами построен пример такой поверхности с особой точкой.

Теорема 1. *Существует минимальное погружение римановой поверхности рода один* Γ, *заданной в* $\mathbb{C}^2$ *уравнением*

$$w^2 = 4z^3 - 4z, \tag{1}$$

в $\mathbb{R}^3$ *с пятью плоскими концами и одной особой точкой.*

Брайант [3] показал, что полные минимальные поверхности с плоскими концами под действием инверсии $\mathbb{R}^3$ переходят в уиллморовские. Этим фактом вызван интерес к полным минимальным поверхностям с плоскими концами без особых точек. Для любого четного $n > 2$ примеры таких поверхностей построены [1, 2, 4, 5]. Для нечетного случая неизвестно существование полного минимального тора даже с $n = 5$ плоскими концами. Торы с $n = 1, 3$ не существуют [5, 6].

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00094).

© 2006 Шамаев Э. И.

Гипотеза. *Не существуют полные минимальные торы в* $\mathbb{R}^3$ *с пятью плоскими концами.*

Наш пример построен с помощью представления Вейерштрасса [7]:

$$\Phi(T) = \operatorname{Re} \int\limits_{T_0}^{T} \bigl(\psi_1^2 - \psi_2^2, i\bigl(\psi_1^2 + \psi_2^2\bigr), 2\psi_1\psi_2\bigr)\frac{dz}{w}, \tag{2}$$

где $T_0 \in \Gamma$ — фиксированная точка, ψ_1^2, ψ_2^2 и $\psi_1\psi_2$ — мероморфные функции на Γ такие, что $\bigl|\psi_1^2(T)\bigr| + \bigl|\psi_2^2(T)\bigr| \neq 0$ для точек $T \in \Gamma$.

Считаем точки ветвления ∞, $(0,0)$, $(0,1)$ и две произвольные симметрические точки $(\pm w_0, z_0) \in \Gamma$ выколотыми. Положим

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{z - z_0}{z(z-1)}w;$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0 - 1} + \frac{1}{z_0 + 1}\right)\frac{z_0}{z} - \frac{4}{z - z_0}\right)w$$

и

$$\psi_1 = \varphi_1, \quad \psi_2 = \alpha(\varphi_1 + \beta\varphi_2), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

По теореме Вейерштрасса — Эннепера отображение (2) задает минимальное погружение односвязных областей Γ в $\mathbb{R}^3$.

Для того чтобы отображение Φ задавало минимальную поверхность с плоскими концами, необходимо, чтобы каждый полюс дифференциалов

$$\psi_1^2\frac{dz}{w}, \quad \psi_2^2\frac{dz}{w}, \quad \psi_1\psi_2\frac{dz}{w} \tag{3}$$

был второго порядка с нулевыми вычетами [7]. Справедлива

Лемма 1. *Для каждого* $z_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, \pm 1\}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *дифференциалы* (3) *имеют полюсы только второго порядка с нулевыми вычетами.*

Теперь, чтобы Φ был корректно определен на всем Γ, достаточно, чтобы следующие интегралы (*периоды*) были нулевыми:

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\gamma_i}\bigl(\psi_1^2 - \psi_2^2\bigr)\frac{dz}{w} = 0, \quad \operatorname{Im}\int\limits_{\gamma_i}\bigl(\psi_1^2 + \psi_2^2\bigr)\frac{dz}{w} = 0, \quad \operatorname{Re}\int\limits_{\gamma_i} 2\psi_1\psi_2\frac{dz}{w} = 0, \tag{4}$$

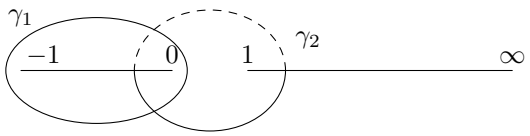

Рис. 1.

где $i = 1, 2$; γ_1 и γ_2 — базис $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$.

Выбирая параметры α, $\beta \in \mathbb{R}$ и $(w_0, z_0) \in \Gamma$, обнулим периоды (4).

Представим Γ как две плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ («нижний» и «верхний» листы) с разрезами по отрезкам $[-1, 0]$ и $[1, \infty)$. На Γ определены голоморфная и антиголоморфная инволюции: $\sigma : (w, z) \mapsto (-w, z)$, $\tau : (w, z) \mapsto (\overline{w}, \bar{z})$. Выберем циклы γ_1 и γ_2, как показано на рис. 1. Многоточием обозначены части циклов, расположенные на «нижнем» листе римановой поверхности. Они образуют канонический базис в $H_1(\Gamma; \mathbb{Z})$ и преобразуются инволюцией τ по формулам $\tau\gamma_1 = \gamma_1$, $\tau\gamma_2 = -\gamma_2$. Отсюда следует

Лемма 2. *Для всех $z_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, \pm 1\}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ следующие периоды:*

$$\operatorname{Re} \int\limits_{\gamma_2} \left(\psi_1^2 - \psi_2^2\right) \frac{dz}{w} = \operatorname{Im} \int\limits_{\gamma_1} \left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right) \frac{dz}{w} = \operatorname{Re} \int\limits_{\gamma_2} 2\psi_1 \psi_2 \frac{dz}{w}$$

равны нулю.

Пусть

$$\eta_k = -\frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_k} \frac{z dz}{w}, \quad \omega_k = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{w}, \quad k = 1, 2;$$

$$a_{11} = 2\left(z_0^2 - z_0 + 1\right); \quad a_{12} = \frac{1}{2}\left(3z_0 + \frac{2}{z_0 - 1} - 1\right);$$

$$a_{22} = \frac{2{z_0}^2}{(z_0 - 1)^2 (z_0 + 1)^2} + \frac{9}{2}; \quad b_{11} = -{z_0}^2 + 1;$$

$$b_{12} = -\frac{3}{2} z_0 - \frac{1}{z_0 + 1} - \frac{1}{2}; \quad b_{22} = \frac{-4z_0}{(z_0 - 1)(z_0 + 1)}.$$

В следующей лемме вычислены периоды.

Лемма 3. *Для $k = 1, 2$ справедливы равенства*

$$\int\limits_{\gamma_k} \varphi_1\varphi_2\frac{dz}{w} = -8a_{12}\eta_k + 8b_{12}\omega_k;$$

$$\int\limits_{\gamma_k} \varphi_1^2\frac{dz}{w} = -8a_{11}\eta_k + 8b_{11}\omega_k; \quad \int\limits_{\gamma_k} \varphi_2^2\frac{dz}{w} = -8a_{22}\eta_k + 8b_{22}\omega_k.$$

Теперь условие того, что выполнено (4), перепишем в алгебраическом виде:

$$-\eta_1(a_{11} - \alpha^2(a_{22}\beta^2 + 2a_{12}\beta + a_{11}) + \omega_1(b_{11} - \alpha^2(b_{22}\beta^2 + 2b_{12}\beta + b_{11}) = 0;$$

$$-\eta_2(a_{11} + \alpha^2(a_{22}\beta^2 + 2a_{12}\beta + a_{11})) + \omega_2(b_{11} + \alpha^2(b_{22}\beta^2 + 2b_{12}\beta + b_{11})) = 0;$$

$$-\eta_1\alpha(a_{12}\beta + a_{11}) + \omega_1\alpha(b_{12}\beta + b_{11}) = 0.$$

Пусть

$$A_{11} = a_{22}\beta^2 + 2a_{12}\beta + a_{11}, \quad B_{11} = b_{22}\beta^2 + 2b_{12}\beta + b_{11}.$$

В случае

$$\det\begin{pmatrix} -\eta_1 a_{11} + \omega_1 b_{11} & \eta_1 A_{11} - \omega_1 B_{11} \\ -\eta_2 a_{11} + \omega_2 b_{11} & -\eta_2 A_{11} + \omega_2 B_{11} \end{pmatrix} = 0; \quad \frac{\omega_2 b_{11} - \eta_2 a_{11}}{\omega_2 B_{11} - \eta_2 A_{11}} < 0 \quad (5)$$

условие (4) выполнено при

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\omega_2 b_{11} - \eta_2 a_{11}}{\omega_2 B_{11} - \eta_2 A_{11}}}, \quad \beta = -\frac{\omega_1 b_{11} - \eta_1 a_{11}}{\omega_1 b_{12} - \eta_1 a_{12}}.$$

Справедлива

Лемма 4. *Существует $z_0 \in \mathbb{R}$ такой, что условие* (5) *выполнено и отображение* (2) *является погружением Γ с особой точкой* $(0, -1)$.

Из лемм 1–4 следует справедливость теоремы 1.

Доказательство теоремы 1

Доказательство леммы 1. Пусть φ — один из дифференциалов $\psi_1^2\frac{dz}{w}$, $\psi_2^2\frac{dz}{w}$, $\psi_1\psi_2\frac{dz}{w}$. Тогда справедливо равенство $\sigma^*\varphi=-\varphi$. Это означает, что разложение φ в ряд Лорана в выколотых точках ветвления относительно локального параметра w имеет вид

$$\varphi=\left(\frac{c_{-2}}{w^2}+\frac{c_{-1}}{w}+c_0+\dots\right)dw=-\sigma^*\varphi=\left(\frac{c_{-2}}{w^2}-\frac{c_{-1}}{w}+c_0+\dots\right)dw.$$

Поэтому $c_{-1}=\operatorname{res}\varphi=0$ в выколотых точках ветвления.

Очевидно, что $\varphi_1^2\frac{dz}{w}$ и $\varphi_1\varphi_2\frac{dz}{w}$ голоморфны в точках $(\pm w_0,z_0)$.

Осталось показать справедливость леммы для $\varphi_2^2\frac{dz}{w}$ в точках $(\pm w_0,z_0)$. Поскольку

$$\frac{2}{w_0}\frac{dw}{dz}\bigg|_{(w_0,z_0)}=\frac{1}{z_0-1}+\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z_0+1},$$

то

$$4\varphi_2^2\frac{dz}{w}=\left(\frac{2}{w_0}\frac{dw}{dz}\bigg|_{(w_0,z_0)}\frac{z_0}{z}-\frac{4}{z-z_0}\right)^2w\,dz.$$

Из равенств

$$\operatorname*{res}_{(w_0,z_0)}\frac{w}{(z-z_0)^2}=\frac{dw}{dz}\bigg|_{(w_0,z_0)},\qquad\operatorname*{res}_{(w_0,z_0)}\frac{f(w,z)}{z-z_0}=f(w_0,z_0)$$

следует, что

$$\operatorname{res}4\varphi_2^2\frac{dz}{w}=\operatorname{res}\left(\frac{16w}{(z-z_0)^2}-\frac{16w}{w_0}\frac{z_0}{z}\frac{dw}{dz}\bigg|_{(w_0,z_0)}\frac{1}{z-z_0}\right)dz=0.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть φ — один из дифференциалов

$$\left(\psi_1^2-\psi_2^2\right)\frac{dz}{w},\quad\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\frac{dz}{w},\quad\psi_1\psi_2\frac{dz}{w}.$$

Из $\tau^*\varphi=\bar\varphi$, что можно проверить непосредственными выкладками, вытекают равенства

$$\int\limits_{\gamma_1}\varphi=\int\limits_{\tau\gamma_1}\varphi=\int\limits_{\tau\tau\gamma_1}\tau^*\varphi=\overline{\int\limits_{\gamma_1}\varphi},$$

$$\int\limits_{\gamma_2}\varphi=\int\limits_{-\tau\gamma_2}\varphi=\int\limits_{-\tau\tau\gamma_2}\tau^*\varphi=-\overline{\int\limits_{\gamma_2}\varphi}.$$

Это означает, что периоды φ по γ_1 вещественны, а по γ_2 чисто мнимы.

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Обозначим $\frac{1}{2z_0-2}+\frac{1}{2z_0}+\frac{1}{2z_0+2}$ через λ. Прямыми вычислениями можно проверить справедливость следующих равенств:

$$\varphi_1^2\frac{dz}{w} = z\frac{dz}{w} + z_0^2\left(-z+\frac{w^2}{4z^2}\right)\frac{dz}{w}$$
$$+(z_0-1)^2\left(-z-1+\frac{1}{4}\left(\frac{w}{z-1}\right)^2\right)\frac{dz}{w} + b_{11}\frac{dz}{w};$$
$$\varphi_2^2\frac{dz}{w} = (\lambda z_0-2)^2 z\frac{dz}{w} - 2(z+z_0)\frac{dz}{w} + \lambda^2 z_0^2\left(-z+\frac{w^2}{4z^2}\right)\frac{dz}{w}$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{w-w_0}{z-z_0}\right)^2\frac{dz}{w} + \frac{1}{4}\left(\frac{w+w_0}{z-z_0}\right)^2\frac{dz}{w} + b_{22}\frac{dz}{w};$$
$$\varphi_1\varphi_2\frac{dz}{w} = (\lambda z_0-2)z\frac{dz}{w} + \lambda z_0^2\left(-z+\frac{w^2}{4z^2}\right)\frac{dz}{w} + b_{12}\frac{dz}{w}.$$

Известно [8], что для

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_1}\frac{dz}{w}, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_2}\frac{dz}{w}$$

отображение $\rho(u) = (\rho'(u), \rho(u))$, построенное с помощью пе-функции Вейерштрасса ρ, задает биголоморфное отображение тора $\mathbb{C}/\{2\omega_1 n + 2\omega_2 m \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$ на Γ. Считаем, что u — глобально определенный локальный параметр.

По теореме сложения

$$\rho(u+v) = -\rho(u) - \rho(v) + \frac{1}{4}\left(\frac{\rho'(u)-\rho'(v)}{\rho(u)-\rho(v)}\right)$$

для произвольного $v \in \mathbb{C}/\{2\omega_1 n + 2\omega_2 m \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$. Кроме того,

$$\{\rho(\omega_1), \rho(\omega_2), \rho(\omega_1+\omega_2)\} = \{-1,0,1\} \quad \text{и} \quad \rho(0) = \infty.$$

Пусть u_0 — точка такая, что $\rho(u_0) = (w_0, z_0)$.

Для $\{k,l\}=\{1,2\}$ справедливы следующие равенства:

$$\rho^*\left(\varphi_1^2\frac{dz}{w}\right)=\rho(u)\,du+z_0^2\rho(u+\omega_k)\,du+(z_0-1)^2\rho(u+\omega_l)du+b_{11}\,du;$$

$$\rho^*\left(\varphi_2^2\frac{dz}{w}\right)=(\lambda z_0-2)^2\rho(u)\,du+\lambda^2 z_0^2\rho(u+\omega_k)\,du+\rho(u+u_0)\,du$$
$$+\rho(u-u_0)\,du+b_{22}\,du;$$

$$\rho^*\left(\varphi_1\varphi_2\frac{dz}{w}\right)=(\lambda z_0-2)\rho(u)\,du+\lambda z_0^2\rho(u+\omega_k)du+b_{12}\,du.$$

Теперь утверждение леммы получаем из следующих равенств:

$$\int\limits_{\gamma_j}\rho(u)\,du=\int\limits_{\gamma_j}\rho(u+\omega_k)\,du=\int\limits_{\gamma_j}\rho(u+\omega_l)\,du=\int\limits_{\gamma_j}z\frac{dz}{w}=2\eta_j,\quad j=1,2;$$

$$\int\limits_{\gamma_j}du=\int\limits_{\gamma_j}\frac{dz}{w}=2\omega_j,\quad j=1,2.$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Поскольку мы рассматриваем квадратный тор, то $\omega_2=i\omega_1$, $\eta_2=-i\eta_1$. Определитель (5) равен

$$\det\begin{pmatrix}-\eta_1a_{11}+\omega_1b_{11} & \eta_1A_{11}-\omega_1B_{11}\\ i\eta_1a_{11}+i\omega_1b_{11} & i\eta_1A_{11}+i\omega_1B_{11}\end{pmatrix}=-2i\big(a_{11}A_{11}\eta_1^2-b_{11}B_{11}\omega_1^2\big).$$

Подставляя в $a_{11}A_{11}\eta_1^2-b_{11}B_{11}\omega_1^2$ значения a_{11}, b_{11}, A_{11}, B_{11}, получим

$$\begin{aligned}a_{11}A_{11}\eta_1^2-b_{11}B_{11}\omega_1^2&=-252\eta_1^3+198\eta_1^2\omega_1+36\eta_1{\omega_1}^2-54{\omega_1}^3\\&+\big(468\eta_1^3-204\eta_1^2\omega_1+76\eta_1{\omega_1}^2-68{\omega_1}^3\big)z_0\\&+\big(-328\eta_1^3-52\eta_1^2\omega_1-184\eta_1{\omega_1}^2+84{\omega_1}^3\big)z_0^2+\big(-388\eta_1^3+244\eta_1^2\omega_1-28\eta_1{\omega_1}^2\\&+252{\omega_1}^3\big)z_0^3+\big(744\eta_1^3+200\eta_1{\omega_1}^2\big)z_0^4\\&-\big(388\eta_1^3+244\eta_1^2\omega_1+28\eta_1{\omega_1}^2+252{\omega_1}^3\big)z_0^5\\&+\big(-328\eta_1^3+52\eta_1^2\omega_1-184\eta_1{\omega_1}^2-84{\omega_1}^3\big)z_0^6\\&+\big(468\eta_1^3+204\eta_1^2\omega_1+76\eta_1{\omega_1}^2+68{\omega_1}^3\big)z_0^7\\&+\big(-252\eta_1^3-198\eta_1^2\omega_1+36\eta_1{\omega_1}^2+54{\omega_1}^3\big)(4{\eta_1}^2-{\omega_1}^2-2\eta_1(2\eta_1+\omega_1)z_0\\&+(2\eta_1+\omega_1)^2{z_0}^2)/\big(\eta_1\big(3-z_0-z_0^2+3z_0^3\big)+\omega_1\big(-3-z_0+z_0^2+3z_0^3\big)\big)^2.\end{aligned}$$

Для корней

$$4{\eta_1}^2 - {\omega_1}^2 - 2\eta_1(2\eta_1 + \omega_1)z_0 + (2\eta_1 + \omega_1)^2{z_0}^2 = 0$$

условие

$$\frac{\omega_2 b_{11} - \eta_2 a_{11}}{\omega_2 B_{11} - \eta_2 A_{11}} < 0$$

не выполнено.

С помощью оценок ω_1 и η_1 можно показать, что $z_0 \sim -38.43$ является корнем $a_{11}A_{11}\eta_1^2 - b_{11}B_{11}\omega_1^2 = 0$, при этом условие

$$\frac{\omega_2 b_{11} - \eta_2 a_{11}}{\omega_2 B_{11} - \eta_2 A_{11}} < 0$$

выполнено.

Нулями функции ψ_1 являются три точки $(\pm w_0, z_0)$ и $(0, -1)$. Функция ψ_2 в точках $(\pm w_0, z_0)$ имеет полюсы. Таким образом, общим нулем ψ_1 и ψ_2, или особой точкой (2), является единственная точка $(0, -1)$.

Лемма 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шамаев Э. И.* Минимальные торы с шестью плоскими концами // Вестник НГУ. Математика, механика, информатика. 2004. Т. 4, № 4. С. 68–73.

2. *Шамаев Э. И.* Об одном семействе минимальных торов в $\mathbb{R}^3$ с плоскими концами // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1407–1426.

3. *Bryant R. L.* A duality theorem for Willmore surfaces // J. Differential Geometry. 1984. V. 20. P. 23–53.

4. *Costa C.* Complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ of genus one and four planar embedded ends // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 119. P. 1279–1287.

5. *Kusner R., Schmitt N.* The spinor representation of minimal surfaces in space // Univ. Massachusetts in Amherst, 1993 (GANG preprint III.27).

6. *Шамаев Э. И.* Минимальные торы в $\mathbb{R}^3$ с малым числом плоских концов // Мат. заметки ЯГУ. 2005. Т. 12, вып. 1. С. 121–133.

7. *Минимальные* поверхности / Под ред. Оссермана Р. М.: Физматлит, 2003.

8. *Дубровин Б. А.* Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ижевск: НИЦ РиХД, 2001.

г. Якутск *26 июня 2006 г.*

УДК 531.391.5

МОДЕЛИ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

И. М. Бондарь, А. И. Бондарь

1. Введение. Существует ряд задач, в которых требуется построить модель движения твердого тела вокруг неподвижной точки при условии, что угловая скорость собственного вращения значительно больше угловой скорости вращения оси (например, модель вращения волчка). В этом случае удобно строить модели первого приближения, полагая, что углы поворота оси вращения и соответствующие угловые скорости являются величинами малыми. При построении моделей первого приближения сферического движения можно воспользоваться либо динамическими уравнениями Эйлера, либо уравнениями Лагранжа второго рода. В данной работе рассматриваются оба варианта построения моделей.

При выводе динамических уравнений сферического движения Эйлер предложил два упрощения [1]. Первое состоит в проектировании обеих частей уравнения моментов на оси подвижной системы координат, второе — в выборе в качестве осей подвижной системы координат главных осей инерции тела. Строя модели первого приближения, от первого упрощения Эйлера можно отказаться, так как динамические уравнения в проекциях на неподвижные оси получаются того же порядка сложности, что и на подвижные оси. Однако, при проектировании уравнения моментов на подвижные оси следует отказаться от жесткой связи тела с подвижной системой координат, поскольку в этом случае один из углов Эйлера не будет малым и строить модель перво-

© 2006 Бондарь И. М., Бондарь А. И.

го приближения будет невозможно. Эта ошибка допущена в [2] при построении модели первого приближения вращения волчка.

В работе также анализируется различие условий устойчивого движения тела для разных моделей.

2. Модель в проекциях на подвижные оси. Для получения уравнений сферического движения воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента. Пусть $\overline{K}_0$ — кинетический момент тела относительно неподвижного центра O (рис. 1), $\overline{M}_O$ — главный момент внешних сил относительно того же центра. Тогда

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{M}_0. \tag{1}$$

Пусть $Oxyz$ — подвижная система координат, ось Oz которой совпадает с осью вращения тела, $O\xi\eta\zeta$ — неподвижная система координат. В начальный момент времени системы $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ совпадали. Затем система $Oxyz$ повернулась вокруг оси $O\eta$ на угол θ с угловой скоростью $\dot\theta$. Далее произошел поворот системы $Oxyz$ относительно оси Ox на угол ψ с угловой скоростью $\dot\psi$. При этом тело вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\dot\varphi$ (угол поворота φ на рисунке не обозначен). Угол поворота φ тела вокруг собственной оси вращения и соответствующая угловая скорость $\dot\varphi$ не являются малыми величинами. Углы Эйлера ψ, θ определяют положение подвижной системы $Oxyz$ относительно неподвижной системы $O\xi\eta\zeta$. Пусть $\overline{\omega}$ — угловая скорость вращения тела вокруг неподвижной точки O. Получим проекции вектора $\overline{\omega}$ на оси системы $Oxyz$. При этом будем полагать, что тело жестко не связано с подвижной системой координат. В соответствии с рисунком вектор $\dot\theta$, направленный вдоль оси $O\eta$, лежит в плоскости, проходящей через оси $O\eta, Oy, Oz$ (эта плоскость на рисунке обозначена цифрой II), поэтому его проекции определяются следующим образом: $\dot\theta_x = 0$, $\dot\theta_y = \dot\theta\cos\psi$, $\dot\theta_z = \dot\theta\sin\psi$. Вектор угловой скорости $\dot\psi$ направлен вдоль оси Ox и лежит в плоскости I, проходящей через оси $Ox, O\xi, O\zeta$. Его проекции на оси системы $Oxyz$ будут $\dot\psi_x = \dot\psi$, $\dot\psi_y = 0$, $\dot\psi_z = 0$.

Рис. 1.

Аналогично проекции вектора $\dot{\varphi}$ на оси системы $Oxyz$ будут $\dot{\varphi}_x = 0$, $\dot{\varphi}_y = 0$, $\dot{\varphi}_z = \dot{\varphi}$. Следовательно, $\omega_x = \dot{\psi}$, $\omega_y = \dot{\theta}\cos\psi$, $\omega_z = \dot{\varphi} - \dot{\theta}\sin\psi$.

Пусть $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — единичные векторы вдоль координатных осей Ox, Oy, Oz. Тогда вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ записывается в виде

$$\overline{\omega} = \dot{\psi}\bar{i} + \dot{\theta}\cos\psi\bar{j} + (\dot{\varphi} - \dot{\theta}\sin\psi)\bar{k}.$$

Определим кинетический момент $\overline{K}_O$ и его проекции на оси подвижной системы координат.

Строя модель первого приближения, будем считать, что величины $\psi, \theta, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ являются малыми. В этом случае можно считать, что $\sin\psi \approx \psi$, $\cos\psi \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$, а произведениями малых величин можно пренебречь. Тогда $\omega_x = \dot{\psi}$, $\omega_y = \dot{\theta}$, $\omega_z = \dot{\varphi}$,

$$\overline{\omega} = \dot{\psi}\bar{i} + \dot{\theta}\bar{j} + \dot{\varphi}\bar{k}. \tag{2}$$

Обозначим через A, B, C моменты инерции тела относительно осей Ox,

Oy, Oz соответственно. Тогда проекции кинетического момента на оси системы $Oxyz$ будут иметь вид $K_x = A\omega_x = A\dot{\psi}$, $K_y = B\dot{\theta}$, $K_z = C\dot{\varphi}$.

По формуле абсолютной и относительной производной получим

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \frac{\tilde{d}\overline{K}_O}{dt} + \overline{\omega}_1 \times \overline{K}_O. \tag{3}$$

Здесь $\frac{d\overline{K}_O}{dt}$ — производная вектора $\overline{K}_O$ в системе $O\xi\eta\varsigma$ (абсолютная производная), $\frac{\tilde{d}\overline{K}_O}{dt}$ — производная того же вектора в системе $Oxyz$ (относительная производная), $\overline{\omega}_1 = \dot{\psi}\bar{i} + \dot{\theta}\bar{j}$ — угловая скорость вращения системы $Oxyz$ относительно системы $O\xi\eta\varsigma$. Следовательно,

$$\frac{\tilde{d}\overline{K}_O}{dt} + \overline{\omega}_1 \times \overline{K}_O = \overline{M}_O,$$

$$\frac{\tilde{d}\overline{K}_O}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt}(K_x\bar{i}+K_y\bar{j}+K_z\bar{k}) = \frac{\tilde{d}}{dt}(A\dot{\psi}\bar{i}+B\dot{\theta}\bar{j}+C\dot{\varphi}\bar{k}) = A\ddot{\psi}\bar{i}+B\ddot{\theta}\bar{j}+C\ddot{\varphi}\bar{k},$$

$$\overline{\omega}_1 \times \overline{K}_O = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{\psi} & \dot{\theta} & 0 \\ A\dot{\psi} & B\dot{\theta} & C\dot{\varphi} \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot C\dot{\varphi}\dot{\theta} - \bar{j}\cdot C\dot{\varphi}\dot{\psi} + \bar{k}(B\dot{\psi}\dot{\theta} - A\dot{\psi}\dot{\theta}).$$

С учетом малости величин $\dot{\psi}, \dot{\theta}$ получим

$$\overline{\omega}_1 \times \overline{K}_O = \bar{i}\cdot C\dot{\varphi}\dot{\theta} - \bar{j}\cdot C\dot{\varphi}\dot{\psi}),$$

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = A\ddot{\psi}\bar{i} + B\ddot{\theta}\bar{j} + C\ddot{\varphi}\bar{k} + C\dot{\varphi}\dot{\theta}\bar{i} - C\dot{\varphi}\dot{\psi}\bar{j}.$$

Пусть $\overline{P} = m\bar{g}$ — вес тела, приложенный в точке C, имеющей в системе $Oxyz$ координаты $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = R$, $\bar{\zeta}^0$ — единичный вектор вдоль оси $O\zeta$. Имеем $\overline{P} = -P\bar{\zeta}^0 = -mg\bar{\zeta}^0$. Тогда главный момент внешних сил относительно центра O равен $\overline{M}_O = \bar{r}_c \times \overline{P} = -mg\bar{r}_c \times \bar{\zeta}^0$, где $\bar{r}_c$ — радиус-вектор центра масс тела относительно опорной точки O.

Определим проекции вектора $\bar{\zeta}^0$ на оси системы $Oxyz$.

Для краткости введем следующие обозначения: если вектор $\bar{a}$ имеет проекцию на ось Ox, равную a_x, то проекцию a_x на ось $O\xi$ будем обозначать через $a_{x\xi}$.

В плоскости I (рис. 1) имеем $\zeta_k^0 = \zeta^0 \cos\theta = 1$, $\zeta_x^0 = -\zeta^0 \sin\theta = -\theta$, в плоскости II $\zeta_{kz}^0 = \zeta_k^0 \cos\psi = 1$, $\zeta_{ky}^0 = \zeta_k^0 \sin\psi = \psi$. Таким образом, будем иметь $\zeta_x^0 = -\theta$, $\zeta_y^0 = \psi$, $\zeta_z^0 = 1$. Тогда для момента $\overline{M}_O$ получим

$$\overline{M}_O = mg \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \zeta_x^0 & \zeta_x^0 & \zeta_x^0 \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = mg \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\theta & \psi & 1 \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} = mgR(\psi\bar{i} + \theta\bar{j}).$$

Следовательно, $M_x = mgR\psi$, $M_y = mgR\theta$, $M_z = 0$.

В проекциях на координатные оси подвижной системы координат $Oxyz$ получаем дифференциальные уравнения движения тела

$$A\ddot{\psi} + C\dot{\varphi}\dot{\theta} = mgR\psi,$$
$$B\ddot{\theta}\psi - C\dot{\varphi}\dot{\psi} = mgR\theta,$$
$$C\ddot{\varphi} = 0.$$

Из последнего уравнения имеем $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{\varphi} = \Omega = \text{const}$. Это значит, что тело вращается вокруг своей оси с постоянной скоростью. Тогда первые два уравнения примут вид

$$\begin{aligned} A\ddot{\psi} + C\dot{\theta}\Omega &= mgR\psi, \\ B\ddot{\theta} - C\dot{\psi}\Omega &= mgR\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Это модель сферического движения тела по первому приближению, построенная на основе динамических уравнений Эйлера в проекциях на подвижные оси координат.

Если мы, следуя [1, 2], жестко свяжем тело с подвижной системой координат, то полученная при этом условии модель движения тела будет содержать ошибку в коэффициентах при членах гироскопической связи $\dot{\theta}\Omega$ и $\dot{\psi}\Omega$. Действительно, в этом случае $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}$ и

$$\overline{\omega}_1 \times \overline{K}_O = \overline{\omega} \times \overline{K}_O = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{\psi} & \dot{\theta} & \dot{\varphi} \\ A\dot{\psi} & B\dot{\theta} & C\dot{\varphi} \end{vmatrix}$$
$$= \bar{i}(C\dot{\varphi}\dot{\theta} - B\dot{\varphi}\dot{\theta}) - \bar{j}(C\dot{\psi}\dot{\varphi} - A\dot{\psi}\dot{\varphi}) + \bar{k}(B\dot{\psi}\dot{\theta} - A\dot{\psi}\dot{\theta}).$$

С учетом малости величин имеем

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = A\ddot{\psi}\bar{i} + B\ddot{\theta}\bar{j} + C\ddot{\varphi}\bar{k} + (C - B)\dot{\varphi}\dot{\theta}\bar{i} - (C - A)\dot{\varphi}\dot{\psi}\bar{j},$$

$$A\ddot{\psi} + (C-B)\dot{\theta}\dot{\varphi} = mgR\psi,$$
$$B\ddot{\theta} - (C-A)\dot{\psi}\dot{\varphi} = mgR\theta, C\ddot{\varphi} = 0,$$

$$\begin{gathered}\ddot{\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \Omega = \text{const},\\ A\ddot{\psi} + (C-B)\dot{\theta}\Omega = mgR\psi,\\ B\ddot{\theta} - (C-A)\dot{\psi}\Omega = mgR\theta.\end{gathered} \tag{5}$$

В модели (5) коэффициенты при членах гироскопической связи равны $C-B$ и $C-A$, в действительной модели (4) эти коэффициенты равны C.

При $A = B$ модель (5) совпадает с моделью вращения волчка, приведенной в [2], которая, таким образом, тоже содержит ошибку.

3. Проектирование на оси неподвижной системы координат. Построим теперь модель движения тела в проекциях на неподвижные оси координат системы $O\xi\eta\zeta$.

Определим проекции кинетического момента $\overline{K}_O$ на оси неподвижной системы координат. В плоскости I

$$K_{x\xi} = K_x\cos\theta = K_x = A\dot{\psi},$$
$$K_{x\zeta} = -K_x\sin\theta = -K_x\theta = -A\dot{\psi}\theta = 0, \quad K_{x\eta} = 0.$$

В плоскости II имеем

$$K_{y\eta} = K_y\cos\psi = K_y = B\dot{\theta}, \quad K_{yk} = K_y\sin\psi = K_y\psi = B\psi\dot{\theta} = 0,$$
$$K_{zk} = K_z\cos\psi = K_z = C\dot{\varphi}, \quad K_{z\eta} = -K_z\sin\psi = -K_z\psi = -C\dot{\varphi}\psi,$$
$$K_{zk\xi} = K_{zk}\sin\theta = C\dot{\varphi}\theta, \quad K_{zk\zeta}\theta = K_{zk}\cos\theta = K_{zk} = C\dot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$K_\xi = A\dot{\psi} + C\dot{\varphi}\theta, \quad K_\eta = B\dot{\theta} - C\dot{\varphi}\psi, \quad K_\zeta = C\dot{\varphi}.$$
$$\frac{dK_\xi}{dt} = A\ddot{\psi} + C\dot{\varphi}\dot{\theta} + C\ddot{\varphi}\theta, \quad \frac{dK_\eta}{dt} = B\ddot{\theta}\psi - C\dot{\varphi}\dot{\psi} - C\ddot{\varphi}\psi, \quad \frac{dK_\zeta}{dt} = C\ddot{\varphi}.$$

Далее определим момент $\overline{M}_O$. Это момент силы $\overline{P} = mg$ относительно центра O. Имеем $\overline{M}_O = \bar{r}_C \times \overline{P}$, где $\bar{r}_C = R\bar{z}^0$, $R = OC$ — расстояние от

центра масс тела до опорной точки O, $\bar{z}^0$ — единичный вектор вдоль оси Oz.

В проекциях на координатные оси $O\xi, O\eta, O\zeta$ получим

$$P_\xi = 0,\ P_\eta = 0,\ P_\zeta = -mg, \quad z_k^0 = z^0\cos\psi = 1, \quad z_\eta^0 = -z^0\sin\psi = -\psi,$$

$$z_{k\zeta}^0 = z_k^0\cos\theta = 1, \quad z_{k\xi}^0 = z_k^0\sin\theta = \theta.$$

Следовательно, $r_{C\xi} = R\theta$, $r_{C\eta} = -R\psi$, $r_{C\zeta} = R$.

Пусть $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ — единичные векторы вдоль координатных осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Тогда

$$\overline{M}_O = mg\begin{vmatrix} \bar{l} & \bar{m} & \bar{n} \\ R\theta & -R\psi & R \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = -mgR\begin{vmatrix} \bar{l} & \bar{m} & \bar{n} \\ \theta & -\psi & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = mgR(\psi\bar{i} + \theta\bar{j}).$$

Таким образом, будем иметь следующие уравнения:

$$A\ddot{\psi} + C\dot{\varphi}\dot{\theta} + C\ddot{\varphi}\theta = mgR\psi,$$
$$B\ddot{\theta}\psi - C\dot{\varphi}\dot{\psi} - C\ddot{\varphi}\psi = mgR\theta,$$
$$C\ddot{\varphi} = 0.$$

Из последнего уравнения имеем

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \Omega = \text{const}\,.$$

Тогда первые два уравнения можно записать в виде

$$A\ddot{\psi} + C\dot{\theta}\Omega = mgR\psi,$$
$$B\ddot{\theta} - C\dot{\psi}\Omega = mgR\theta$$

Эта модель совпадает с моделью (4).

4. Построение модели на основе уравнений Лагранжа второго рода. Теперь построим модель того же движения, используя уравнения Лагранжа второго рода.

Следуя [3, 4], запишем кинетическую энергию тела в виде

$$T = \frac{m}{2}\left(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2\right).$$

Потенциальная энергия может быть записана в виде

$$\Pi = mgR\cos\theta\cos\psi.$$

Так как в выражение кинетической энергии T входят квадраты угловых скоростей $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, то при возведении в квадрат ω_z необходимо взять выражение $\omega_z = \dot\varphi - \dot\theta\sin\psi = \dot\varphi - \dot\theta\psi$, чтобы не потерять удвоенное произведение.

В выражении для потенциальной энергии также следует сохранить $\cos\theta, \cos\psi$ или заменить их приближением до второго порядка малости, $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(A\dot\psi^2 + B\dot\theta^2 + C(\dot\varphi - \dot\theta\psi)^2) \\ &= \frac{m}{2}(A\dot\psi^2 + B\dot\theta^2 + C\dot\varphi^2 - 2C\dot\varphi\dot\theta\psi + C\dot\theta^2\psi^2). \end{aligned}$$

Отбрасывая последнее слагаемое, которое является членом порядка малости более второго, получим функцию Лагранжа $L = T - \Pi$:

$$L = \frac{m}{2}(A\dot\psi^2 + B\dot\theta^2 + C\dot\varphi^2 - 2C\dot\varphi\dot\theta\psi) - mgR\cos\theta\cos\psi.$$

Уравнения Лагранжа второго рода в нашей задаче имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,2,3,$$

где $q_1 = \varphi$, $q_2 = \psi$, $q_3 = \theta$.

Вычислим производные

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = C\dot\varphi - C\dot\theta\psi = C\dot\varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = A\dot\psi, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = B\dot\theta - C\dot\varphi\dot\psi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = C\ddot\varphi, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) = A\ddot\psi, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = B\ddot\theta - C\ddot\varphi\psi - C\dot\varphi\dot\psi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = -C\dot\varphi\dot\theta + mgR\cos\theta\sin\psi, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgR\sin\theta\cos\psi.$$

После дифференцирования можно учесть малость величин θ, ψ. Тогда получим

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -C\dot\varphi\dot\theta + mgR\psi, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgR\theta.$$

Следовательно, модель движения тела будет иметь вид

$$A\ddot{+}C\dot{\theta}\dot{\varphi} = mgR\psi,$$
$$B\ddot{\theta} - C\ddot{\varphi}\psi - C\dot{\psi}\dot{\varphi} = mgR\theta,$$
$$C\ddot{\varphi} = 0.$$

Из последнего уравнения имеем $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{\varphi} = \Omega = \text{const}$.

Тогда первые два уравнения примут вид

$$\begin{aligned} A\ddot{\psi} + C\dot{\theta}\Omega &= mgR\psi, \\ B\ddot{\theta} - C\dot{\psi}\Omega &= mgR\theta. \end{aligned} \tag{6}$$

Модель (6) соответствует аналогичным моделям, полученным в [3] для волчка и в [4] для диска, и совпадает с моделью (4).

5. Исследование устойчивости вращения тела. Рассмотрим теперь, как различаются условия устойчивого вращения тела для моделей (4) и (5). Получим условие устойчивого движения тела по модели (4). Следуя [5] и [2], будем искать частное решение системы в виде $\theta = c_1 e^{\lambda t}$, $\psi = c_2 e^{\lambda t}$. Требуется определить постоянные c_1, c_2, λ таким образом, чтобы функции $\theta = c_1 e^{\lambda t}$, $\psi = c_2 e^{\lambda t}$ удовлетворяли системе (4). Так как $\dot{\theta} = \lambda c_1 e^{\lambda t}$, $\dot{\psi} = \lambda c_2 e^{\lambda t}$, $\ddot{\theta} = \lambda^2 c_1 e^{\lambda t}$, $\ddot{\psi} = \lambda^2 c_2 e^{\lambda t}$, то, подставляя это в систему (4), получим

$$C\Omega\lambda c_1 + A\lambda^2 c_2 - mgRc_2 = 0, \quad B\lambda^2 c_1 - mgRc_1 - C\Omega\lambda c_2 = 0, \tag{7}$$

или

$$C\Omega\lambda c_1 + (A\lambda^2 - mgR)c_2 = 0, \quad (B\lambda^2 - mgR)c_1 - C\Omega\lambda c_2 = 0.$$

Для того чтобы эта система имела ненулевое решение c_1, c_2, необходимо, чтобы имело место соотношение

$$\Delta = \begin{vmatrix} C\Omega\lambda & A\lambda^2 - mgR \\ B\lambda^2 - mgR & -C\Omega\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$C^2\Omega^2\lambda^2 + (A\lambda^2 - mgR)(B\lambda^2 - mgR) = 0.$$

Далее,

$$C^2\Omega^2\lambda^2 + AB\lambda^4 - (A+B)mgR\lambda^2 + m^2g^2R^2 = 0,$$
$$\lambda^4 + \frac{C^2\Omega^2 - (A+B)mgR}{AB}\lambda^2 + \frac{m^2g^2R^2}{AB} = 0. \tag{8}$$

Введем обозначения

$$\frac{C^2\Omega^2 - (A+B)mgR}{AB} = 2p, \quad \frac{m^2g^2R^2}{AB} = q.$$

Тогда получим

$$\lambda^4 + 2p\lambda^2 + q = 0, \quad \lambda^2_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

Чтобы вращение тела было устойчивым, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\lambda^2 < 0$ [5]. Следовательно, условиями устойчивости вращения тела будут

1) $p > 0$, 2) $p^2 - q \geqslant 0$.

Второе условие более сильное, из него следует неравенство

$$\left(\frac{C^2\Omega^2 - (A+B)mgR}{2AB}\right)^2 \geqslant \frac{m^2g^2R^2}{AB},$$

или $C^2\Omega^2 - (A+B)mgR \geqslant 2\sqrt{AB}mgR$, откуда

$$\Omega^2 \geqslant \frac{(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 mgR}{C^2}. \tag{9}$$

Это условие устойчивого вращения тела.

При $A = B$ будем иметь $\Omega^2 \geqslant \frac{4AmgR}{C^2}$.

Для модели (5) при $A = B$ условие устойчивого вращения [2] имеет вид

$$\Omega^2 \geqslant \frac{4AmgR}{(C-A)^2}.$$

Это условие требует бóльшую скорость Ω для устойчивого вращения тела, чем это требуется в действительности, т. е. модель (5) рассчитывает устойчивости вращения с запасом. Однако, например, в случае, когда $A \to C$, будет $\Omega \to \infty$, что является заведомо неверным результатом. Действительное значение Ω при $A = B = C$ дает формула (9):

$$\Omega^2 \geqslant \frac{4mgR}{A}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. М: Наука, 1969. Т. 2.
2. *Алфутов Н. А., Алфутов Н. А., Колесников К. С.* Устойчивость движения и равновесия. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2003.
3. *Меркин Д. Р., Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971.
4. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1999.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1952.

г. Новосибирск *1 ноября 2006 г.*

УДК 519.2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ГИДРОЛОГИЧЕСКОГО РАЙОНИРОВАНИЯ МЕТОДАМИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

М. Г. Чистяков, Р. М. Кылатчанов,
А. А. Никифорова, А. А. Семенова

Аппроксимационные методы дают возможность представить качественную картину функциональной зависимости, но не дают необходимой точности. Например, при определении объема стратиграфического горизонта требуется определить функцию, аппроксимирующую кровлю или подошву горизонта с точностью не менее 20–50 см при глубине до 3500 м или, иными словами, относительная погрешность не должна превышать $0,0015\%$, т. е. фактически решить задачу интерполяции. Такие методы, как метод наименьших квадратов и др., не позволяют решать подобные задачи, особенно при больших объемах исходной информации.

При решении интерполяционных задач, а также задач выделения различных объектов: гидрологического, геологического, экономического районирования, выделения различной породы структур и т. д. по комплексу признаков, для выделения границ и внутренних точек будем использовать методы непараметрической идентификации [1–4].

Будем считать, что нами измерены на некоторой площади данные по интересующим нас свойствам в некоторой в общем случае произвольной сети. Данные представлены в виде матриц «объекты-координаты-свойства». Здесь координатами служат географические коорди-

© 2006 Чистяков М. Г., Кылатчанов Р. М., Никифорова А. А., Семенова А. А.

наты, объект — это точка или интервал измерения, свойства — значения интересующих нас свойств в этой точке или на этом интервале. Короче говоря, дана матрица $A = \{x_i, y_i, a_{ij}\}$, где x, y — координаты, а a_{ij} — значения свойств в i-й точке, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, M$. Здесь и далее N — число точек измерения, M — число измеренных свойств. Будем считать, что все свойства арифметические и измерены в сильной шкале. Будем рассматривать каждую точку исследуемой области

$$D\{x_m < x < x^m;\, y_m < y < y^m;\, a_{mi} < a_{ij} < a_j^m\}$$

как точку $(M+2)$-мерного пространства, где символом S_m обозначено минимальное значение измерений, а символом S^m — максимальное. Тогда можно ввести для каждой точки $d \in D$ функцию принадлежности

$$\varphi(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } K(d) > 0, \\ 0, & \text{если } K(d) \leqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $K(d)$ — некоторый критерий, смысл которого будет пояснен ниже.

Назовем точку $g \in D$ граничной, если $|K(d)| < K_0$, где K_0 — достаточно малое положительное число, лежащее в пределах точности наших измерений.

Пусть для некоторых точек $d_l \in D$, $l = 1, \ldots, L$, кроме свойств a_{ij} измерено еще и свойство P, причем $L \ll N$ и $\{d_1\} \in A$, т. е. точки d_1 входят в матрицу A. Рассмотрим функцию

$$\psi(d, P) = \max_r \left\{ P_r - \alpha \sum_{k=1}^{t} \left[\frac{(x_k - x_d)^2}{\sigma_x} + \frac{(y_k - y_d)^2}{\sigma_y} \right] - (1-\alpha) \sum_{k=1}^{L} \sum_{j=1}^{M} \frac{(a_{kj} - a_{dj})}{\sigma_{kj}} \right\}. \tag{2}$$

Здесь α — веса для координат и измерений. Эти веса нужно брать существенно различными, чтобы была возможность варьировать значения функции принадлежности в зависимости или только от свойств — такую задачу будем называть *задачей распознавания*, или только от координат — такую задачу будем называть *задачей интерполяции*.

При решении задачи распознавания для нас более важно то, что точка a близка к точке P_k не в смысле близости по координатам, а в смысле близости по значениям измеренных свойств. При решении же задачи интерполяции более важно, что эти точки близки именно в координатном смысле.

Таким образом, можно установить, скажем, функцию изменения открытой пористости в зависимости от литологических свойств, когда данных по измеренной пористости существенно меньше, чем данных по литологии. Решая же задачу интерполяции при $\alpha = 1$ можно построить разделяющую поверхность как функцию координат.

Пусть заранее задано значение порога KP. Тогда в качестве $K(d)$ возьмем

$$K(d) = \varphi(d, p) - KP. \tag{3}$$

Теперь на основании значений, выделенных при помощи критерия (1), в сети измерений можно определить совокупность точек $\{g\}$, называемых граничными. При решении задачи распознавания для граничных точек нельзя с полной определенностью сказать, принадлежат ли они выделяемому объекту. Это так называемая область отказов. Если эта область составляет непрерывную поверхность в координатном смысле, то объект выделяем геометрически и для него можно определить границы.

Основной смысл метода непараметрической идентификации состоит в том, что функция φ является дискретно-непрерывной. Она непрерывна в каждой точке пространства, но на некоторых совокупностях точек имеет разрыв производной первого рода.

Практически любая модель, описывающая гидрологический цикл, включает большее или меньшее число параметров, значения которых могут меняться для различных водосборов. Априори не удается оценить возможную эффективность модели в практических задачах, поскольку она в большей мере зависит от информационной базы (ее объема, погрешностей измерений и т. д.). Вследствие этого модель, имеющая практическую направленность, включает формализованную схему

ее идентификации.

Под идентификацией в общем случае подразумевается установление структуры модели и определение ее параметров по входным и выходным данным [5, 6]. При применении непараметрических методов граница раздела многоводных и маловодных районов строится как поверхность функции регрессии. Важно отметить, что в данном случае это не математическая поверхность, не имеющая толщины, а некоторое множество точек, обладающее свойствами меры Хаусдорфа, как показано в теоремах, приведенных в [1–3].

В качестве критерия разделения на первом этапе можно взять суммарный уровень модуля стока для правобережных и левобережных притоков реки Лена. В дальнейшем критерий можно уточнять по мере накопления данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисов В. З.* Методы гарантированной идентификации стохастических систем. Якутск: ЯНЦ СО РАН, 2005.

2. *Борисов В. З., Чистяков М. Г.* Асимптотические свойства оценок непараметрической идентификации // Мат. заметки ЯГУ. 1995. Т. 2, вып. 2. С. 11–22.

3. *Борисов В. З., Чистяков М. Г.* Последовательная непараметрическая идентификация стохастических систем // Мат. заметки ЯГУ. 1999. Т. 6, № 2. С. 3–8.

4. *Катковник В. Я.* Непараметрическая идентификация и сглаживание данных. М.: Наука, 1985.

5. *Корень В. И.* Математические модели в прогнозах речного стока. Л.: Гидрометеоиздат, 1991.

6. *Христофоров А. В., Круглова Г. В., Самборский Г. В.* Стохастическая модель колебаний речного стока в паводочный период. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1998.

г. Якутск *29 мая 2005 г.*

АННОТАЦИИ

УДК 517.956

К РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. *В. П. Аносов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

В ограниченной области Ω n-мерного пространства с границей S рассматривается задача

$$L(x,D)u - A(x)u = f(x) \quad (x \in \Omega),$$

$$u(x) = \varphi(x) \quad (x \in S),$$

которая изучалась ранее в работах (см. РЖМат. 2Б739(1972), 3Б270(1972), 4Б893(1972)). В отличие от приведенных выше работ здесь обосновывается новый подход к построению функции Грина в полупространстве, а также уточняются результаты, касающиеся решения этой задачи. Библиогр. 12.

УДК 519.17

(p,q)-РАСКРАСКА РАЗРЕЖЕННЫХ ПЛОСКИХ ГРАФОВ. *О. В. Бородин, А. О. Иванова, Т. К. Неустроева.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Доказано, что если G — планарный граф обхвата не менее 31, то (p,q)-хроматическое число $\chi_{p,q}(G)$ не превышает $2p + (\Delta - 1)(2q - 1)$ при $\Delta \geqslant 5$. С другой стороны, показано, что существуют плоские графы произвольного обхвата со сколь угодно большим Δ, для которых $\chi_{p,q} \geqslant 2p + 1 + (\Delta - 2)q$. Библиогр. 2.

УДК 517.946

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМИ МЛАДШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. *И. Р. Валитов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Исследуется разрешимость нелинейных обратных начально-краевых задач для гиперболических уравнений с неизвестным младшим коэффициентом, зависящим от времени, и с условием переопределения интегрального типа. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Библиогр. 2.

УДК 518.9

О СТРАТЕГИИ КВАЗИПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ. *Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Рассматривается игра простого преследования в полуплоскости, когда преследователь не всегда может использовать стратегию параллельного сближения. Рассматривается стратегия квазипараллельного сближения и доказывается теорема, описывающая множество точек поимки. Библиогр. 2.

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА. *А. И. Кожанов, И. И. Кулешова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Рассматривантся первая начально–краевая задача для уравнения

$$Au_t + Bu = f$$

с вырождающимися по переменной x операторами A второго и B четвертого порядков соответственно. Доказываются теоремы существования почти регулярного и регулярного решений. Библиогр. 5.

УДК 517.956.4

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ. *Н. Н. Матвеева.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Предложен численный алгоритм решения задачи Дирихле для модельного уравнения. Точность численного решения проверяется на тестовых примерах с использованием автомодельного решения и тестового точного решения. Библиогр. 3.

УДК 518.9

ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ОБНАРУЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА НЕПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ. *С. В. Местников, Г. В. Эверстова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Рассматривается игра поиска неподвижного объекта в замкнутом ограниченном множестве на плоскости, являющемся прямоугольником. Целью ищущего игрока является гарантированное обнаружение прячущегося игрока за минимальное время. Динамика движения ищущего игрока простая. Прячущийся игрок неподвижен, находится в прямоугольнике и считается обнаруженным, если попадает в круг обнаружения ищущего игрока. Ил. 7, библиогр. 3.

УДК 517.95

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ СИНЬОРИНИ.
З. В. Монастырева. — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Работа посвящена обоснованию метода фиктивных областей для задачи Синьорини. Метод позволяет строить семейство вспомогательных задач, определенных в расширенной области так, что их решения сходятся должным образом к решению исходной задачи Синьорини. Библиогр. 1.

УДК 532.546

ИТЕРАЦИОННАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ. *А. Р. Павлов, И. Г. Ларионова, М. В. Михайлова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Рассмотрено численное решение задачи о промерзании влажных пористых сред. Построена неявная разностная схема, для численной реализации которой определена итерационная схема, доказана ее сходимость. Ил. 1, библиогр. 7.

УДК 517.956

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С НЕИЗВЕСТНЫМ СОСТАВНЫМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПРИ СОСТАВНОМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИИ.
Р. Р. Сафиуллова. — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Изучается разрешимость линейных обратных начально-краевых задач для гиперболических уравнений с неизвестной правой частью составного вида и с заданием составного условия переопределения. Доказывается существование регулярных решений. Библиогр. 4.

УДК 517.95

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА.
Т. А. Сафонова. — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Изучено уравнение смешанного типа

$$Lu = \operatorname{sgn} x u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad -1 < x < 1,\ 0 < t < 1. \tag{1}$$

Для уравнения (1) исследуется краевая задача с периодическими условиями по времени. Для данной задачи получено обобщенное решение. Библиогр. 3.

УДК 517.958:57

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ ПАРАМЕТРАМИ. *Е. Т. Софронов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Исследуется устойчивость одного состояния равновесия с положительными координатами. Доказаны теоремы, обеспечивающие устойчивость, асимптотическую устойчивость этого состояния равновесия в зависимости от значения параметров. Библиогр. 3.

УДК 512.6:519.61

О СВЯЗЯХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕКОТОРЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ. I. *Ф. М. Федоров.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Установлены определенная связь между бесконечными системами линейных алгебраических уравнений с некоторыми математическими структурами, в частности, с конечно-разностными и алгебраическими уравнениями, с методом Бернулли, а также с собственными значениями и собственными функциями краевых задач и ряд других связей. Библиогр. 6.

УДК 514.752.437

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛНОГО МИНИМАЛЬНОГО ТОРА С ПЯТЬЮ ПЛОСКИМИ КОНЦАМИ С ОДНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ. *Э. И. Шамаев.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Показано существование минимального тора в $\mathbb{R}^3$ с пятью плоскими концами и одной особой точкой. Ил. 1, библиогр. 8.

УДК 531.391.5

МОДЕЛИ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. *И. М. Бондарь, А. И. Бондарь.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Строятся модели первого приближения движения тела, имеющего одну неподвижную точку. Одна модель строится на основе динамических уравнений Эйлера, вторая на основе уравнений Лагранжа второго рода. Указаны особенности построения моделей на основе динамических уравнений Эйлера в проекциях на подвижные оси. Ил. 1, библиогр. 5.

УДК 519.2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ГИДРОЛОГИЧЕСКОГО РАЙОНИРОВАНИЯ МЕТОДАМИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ. *М. Г. Чистяков, Р. М. Кылатчанов, А. А. Никифорова, А. А. Семенова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2006, т. 13, вып. 2.

Произведена постановка задачи разделения бассейна реки Лена на многоводные и маловодные районы, имеющая большое практическое значение. Математически задача ставится как комбинированная задача непараметрической идентификации — задача интерполяции-распознавания. На первом этапе в качестве критерия предложено использовать суммарный модуль стока, а в дальнейшем можно будет привлекать и другие параметры по мере накопления базы гидрологических данных. Библиогр. 6.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

К публикации в «Математических заметках ЯГУ» принимаются оригинальные статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

В редакцию представляется рукопись в двух экземплярах объемом не более 1 авторского листа, оформленная согласно стандартным требованиям к авторским оригиналам. К рукописи должны быть приложены два экземпляра аннотации, шифр УДК. Депонирование рукописи редакцией не осуществляется. В случае возвращения статьи для переработки указываются две даты поступления — первоначальная дата и дата получения редакцией окончательного текста.

Основные требования к оформлению рукописи:

1. Текст статьи должен быть напечатан через 2 интервала на одной стороне листа белой писчей бумаги форматом 210×300 мм.

2. Рисунки и сложные диаграммы выполняются на отдельных листах с указанием на обороте фамилии автора, названия статьи и номера рисунка; их место в тексте указывается на полях статьи.

3. Формулы и математические обозначения должны быть вписаны черной пастой или чернилами черного цвета отчетливо, единообразно.

4. Пронумерованные формулы располагаются в отдельной строке. Номер формулы ставится у правого края листа.

5. Проводится дополнительная разметка формул.

6. В рукописях, подготовленных с помощью текстовых редакторов типа Word, должны быть размечены греческие, готические, латинские рукописные буквы, указано использование букв прямого начертания, а также проведена разметка индексов.

7. В авторских оригиналах, подготовленных с использованием наборных систем типа TEX и выданных на лазерном принтере, разметка формул не проводится, однако на полях поясняются буквы готического алфавита.

Список литературы печатается в конце текста на отдельном листе. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

Рукописи, оформленные не по стандартам или превышающие указанный выше объем, возвращаются.

ВНИМАНИЮ ПОДПИСЧИКОВ!

Зарубежная подписка на «Математические заметки ЯГУ» оформляется через фирмы — партнеры ЗАО «Международная книга — Периодика» или непосредственно в ЗАО «МК — Периодика» по адресу:

117049 Москва, ул. Б. Якимянка, 39, ЗАО «МК — Периодика». Тел. 238–14–85, 238–49–67, факс 238–46–34;

e-mail info@mkniga.msk.su. Internet: http://WWW.mkniga.ru

To effect subscription it is necessary to address to one of the partners of JSC Mazhdunarodnaya kniga – Periodica" in your country or to the JSC "MK – Periodica" directly.

Address: "MK – Periodica", ul. B. Yakimianka, 39, Moscow, 117049, Russia.

Tel.: (095) 238–14–85, 238–49–67, Fax: 238–46–34.

e-mail info@mkniga.msk.su.

Internet: http://www.mkniga.ru

Журнал подготовлен с использованием макро-пакета $\mathcal{AMS}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro system.

Подписано в печать 01.12.2006. Формат $60 \times 84\,{}^{1}\!/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,5. Уч.-изд. л. 9,5. Тираж 150 экз. Заказ № 2.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.