

ЯКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМ. М. К. АММОСОВА

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ЯГУ

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1994 ГОДА

ВЫХОДИТ 2 РАЗА В ГОД

Том 15, вып. 2

Июль—Декабрь, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Алексеев В. Г. <i>Об оценке математического ожидания периодически коррелированного случайного процесса</i>	3
Горохова И. И., Софонов Е. Т. <i>Исследование на устойчивость состояния равновесия одной системы трех уравнений</i>	11
Егоров И. Е., Степанова П. И. <i>О методе Галёркина для эллиптико-параболических уравнений</i>	19
Егоров Р. И., Кайгородов С. П. <i>О способах формирования стратегий и выигрышей при моделировании РЕС-задач</i>	27
Кожанов А. И. <i>Обратная задача определения коэффициента поглощения в одномерном уравнении нелинейной диффузии</i> .	31
Сафиуллова Р. Р. <i>Линейная обратная задача для гиперболического уравнения с неизвестной правой частью специального вида</i>	48
Федоров Ф. М. <i>К теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. III</i>	69

Математическое моделирование

Васильева М. А., Кондаков А. С., Старостин Н. П. <i>Исследование применимости упрощенных моделей тепловых процессов в радиальных подшипниках скольжения на основе численных экспериментов</i>	84
---	----

Егоров В. А. Численные расчеты вязких течений в модельных руслах с поймой	92
Леонов А. М., Трофимцев Ю. И. Особые точки и бифуркационные параметры модели восстановления популяции	106
Старостин Н. П., Аммосова О. А. Моделирование процесса охлаждения сварного соединения полимерных труб при низких температурах	119

**ОБ ОЦЕНКЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОЖИДАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИ
КОРРЕЛИРОВАННОГО СЛУЧАЙНОГО
ПРОЦЕССА**
 В. Г. Алексеев

Статью следует рассматривать как продолжение работы [1], посвященной статистическому оцениванию тренда (неслучайной аддитивной составляющей) периодически коррелированного случайного процесса (ПКСП). Как указано ранее в [1, 2], изучение периодически коррелированных случайных процессов представляет большой интерес для метеорологии, океанологии и ряда разделов статистической радиотехники. Соответствующие литературные ссылки могут быть найдены в [1]. Напомним, что вещественный случайный процесс $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ называется *периодически коррелированным* с периодом коррелированности T , если его математическое ожидание $m(t) = \mathbf{E}X(t)$ и корреляционная функция $R(t, \tau) = \mathbf{E}\{[X(t) - m(t)][X(t + \tau) - m(t + \tau)]\}$ периодичны по t с периодом T . Настоящая статья посвящена статистическому оцениванию математического ожидания $m(t)$ ПКСП $X(t)$ по его реализации конечного объема. Будем считать при этом, что тренд ПКСП $X(t)$ заранее выделен и удален. Переходя к формулировке основных определений, касающихся избранной нами модели случайного процесса, условимся, что интеграл без указания пределов будет обозначать интегрирование в пределах от $-\infty$ до ∞ , а символ \sim — пропорциональность двух величин. Нам будет удобно предполагать в дальнейшем, что для всех $t \in \mathbf{R}$

$$(2\pi)^{-1} \int |R(t, \tau)| dT \leq C < \infty. \quad (1)$$

При сделанных нами предположениях спектральное разложение корреляционной функции $R(t, \tau)$ описывается формулой

$$R(t, \tau) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{ikt\gamma} \int e^{i\lambda\tau} f_k(\lambda) d\lambda, \quad \gamma = \frac{2\pi}{T}. \quad (2)$$

Функции $f_k(\lambda)$, фигурирующие в формуле (2), называются *спектральными плотностями* ПКСП $X(t)$. Функция $f_0(\lambda)$ вещественна, четна и неотрицательна (т. е. обладает всеми свойствами спектральной плотности стационарного случайного процесса). Что же касается спектральных плотностей $f_k(\lambda)$, $k \neq 0$, то они, вообще говоря, комплексны и удовлетворяют условиям (см., например, [3])

$$f_k(\lambda) = f_k(k\gamma - \lambda) = \overline{f_{-k}(-\lambda)}.$$

Обратным к формуле (2) является соотношение

$$f_k(\lambda) = (2\pi T)^{-1} \int_0^T e^{-ikt\gamma} dt \int e^{i\lambda\tau} R(t, \tau) d\tau, \quad (3)$$

позволяющее выразить каждую из спектральных плотностей $f_k(\lambda)$ через корреляционную функцию $R(t, \tau)$.

Сопоставляя формулу (3) с предположением (1), приходим к выводу, что для всех $k \in \mathbf{Z}$

$$|f_k(\lambda)| \leq C. \quad (4)$$

Относительно функции $m(t)$ будем предполагать в дальнейшем, что она имеет производные по крайней мере до четвертого порядка включительно, причем

$$|m^{(l)}(t)| \leq K_l, \quad l = 2, 4. \quad (5)$$

В работе [2] предложена оценка $\mu_1^{(n)}(t)$ функции $m(t)$, определяемая соотношением

$$\mu_1^{(n)}(t) = (nh)^{-1} \int_{t-h}^{t+h} w_1\left(\frac{s-t}{h}\right) \left[\sum_{k=0}^{n-1} X(s + kT) \right] ds, \quad (6)$$

где

$$w_1(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

и $h = h(n)$ — некоторая последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю (но не слишком быстро!) с ростом длины реализации ПКСП $X(t)$. Было установлено при этом, что при сделанных выше предположениях смещение оценки (6) не превосходит $K_2 h^2/12$, а для ее дисперсии справедливо неравенство

$$\mathbf{D}\mu_1^{(n)}(t) \leq \frac{2\pi CT}{nh^2} \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right).$$

При этом минимальный порядок среднего квадрата ошибки оценивания функции $m(t)$ достигается, если $h = h(n) \sim n^{-1/6}$. Легко видеть, что в этом случае

$$\mathbf{E}[\mu_1^{(n)}(t) - m(t)]^2 = [\mathbf{E}\mu_1^{(n)}(t) - m(t)]^2 + \mathbf{D}\mu_1^{(n)}(t) \sim n^{-2/3}. \quad (7)$$

В настоящей статье мы рассмотрим оценку

$$\mu_2^{(n)}(t) = (nh)^{-1} \int_{t-2h}^{t+2h} w_2\left(\frac{s-t}{h}\right) \left[\sum_{k=0}^{n-1} X(s+kT) \right] ds,$$

где

$$w_2(t) = 2a_1(t) - a_2(t), \quad (8)$$

$a_1(t) = w_1(t)$ и

$$a_2(t) = \begin{cases} (4 - 6t^2 + 3|t|^3)/6, & |t| \leq 1, \\ (2 - |t|)^3/6, & 1 \leq |t| \leq 2, \\ 0, & |t| > 2. \end{cases}$$

При этом

$$\Phi(\lambda) \equiv \int_{-2}^2 e^{it\lambda} w_2(t) dt = 2 \left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2} \right]^2 - \left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2} \right]^4 \geq 0, \quad (9)$$

$$\Phi(0) = \int_{-2}^2 w_2(t) dt = 1 \quad (10)$$

и

$$\Phi''(0) = - \int_{-2}^2 t^2 w_2(t) dt = 0. \quad (11)$$

При сделанных нами предположениях

$$\mathbf{E}\mu_2^{(n)}(t) = h^{-1} \int_{t-2h}^{t+2h} w_2\left(\frac{s-t}{h}\right) m(s) ds$$

и в соответствии с (10)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_2^{(n)}(t) - m(t) &= h^{-1} \int_{t-2h}^{t+2h} w_2\left(\frac{s-t}{h}\right) [m(s) - m(t)] ds \\ &= h^{-1} \int_{t-2h}^{t+2h} w_2\left(\frac{s-t}{h}\right) \left[\frac{m''(t)}{2}(s-t)^2 + \frac{m^{(4)}(\xi)}{4!}(s-t)^4 \right] ds, \end{aligned}$$

где точка $\xi = \xi(s)$ находится где-то внутри интервала, ограниченного точками t и s .

Отсюда в силу соотношений (5) и (11) следует, что

$$|\mathbf{E}\mu_2^{(n)}(t) - m(t)| \leq \frac{h^4 K_4}{4!} \int_{-2}^2 s^4 |W_2(s)| ds. \quad (12)$$

Пользуясь спектральным разложением корреляционной функции $R(t, \tau)$ (формула (2)) и неравенствами (4) и (9), находим без труда, что

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mu_2^{(n)}(t) &= \mathbf{E} \left| (nh)^{-1} \int_{t-2h}^{t+2h} w_2\left(\frac{s-t}{h}\right) \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} [X(s+kT) - m(s+kT)] \right\} ds \right|^2 \\ &\leq \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{ikt\gamma} \int \left[\frac{\sin(nT\lambda/2)}{n \sin(T\lambda/2)} \right]^2 f_k(\lambda) \Phi(h\lambda) \Phi(h(k\gamma - \lambda)) d\lambda \\ &\leq C \int \left[\frac{\sin(nT\lambda/2)}{n \sin(T\lambda/2)} \right]^2 \Phi(h\lambda) \left[\sum_{k \in \mathbf{Z}} \Phi(h(k\gamma - \lambda)) \right] d\lambda. \end{aligned}$$

Заметим, что при любом $k \in \mathbf{Z}$

$$\int \Phi(h(k\gamma - \lambda)) d\lambda = h^{-1} \int \Phi(\mu) d\mu = \frac{2\pi}{h} w_2(0) = \frac{8\pi}{3h},$$

причем функция $\Phi(h(k\gamma - \lambda))$ меняется очень медленно при малых h и с каждым переходом от k к $k + 1$ график функции $\Phi(h(k\gamma - \lambda))$ сдвигается вдоль оси абсцисс на величину $\gamma = 2\pi/T$. Отсюда нетрудно видеть, что при $h \ll 1$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \Phi(h(k\gamma - \lambda)) \approx \frac{4T}{3h}$$

(площадь между кривой $\Phi(h(k\gamma - \lambda))$ и осью абсцисс на координатной плоскости делится на γ , т. е. на величину сдвига вдоль оси абсцисс при переходе от k к $k + 1$).

Нам осталось вычислить интеграл

$$I_n = \frac{1}{2\pi n} \int \left[\frac{\sin(nT\lambda/2)}{\sin(T\lambda/2)} \right]^2 \Phi(h\lambda) d\lambda. \quad (13)$$

Полагая $\mu = T\lambda$ в формуле (13), имеем

$$\begin{aligned} I_n &= T^{-1} \frac{\sin^2(n\mu/2)}{2\pi n \sin^2(\mu/2)} \Phi\left(\frac{h\mu}{T}\right) d\mu \\ &= T^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(n\mu/2)}{2\pi n \sin^2(\mu/2)} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \Phi\left(\frac{h(\mu + 2k\pi)}{T}\right) d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при достаточно больших n

$$\begin{aligned} I_n &\approx T^{-1} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \Phi\left(\frac{2k\pi h}{T}\right) \\ &= T^{-1} \sum_{|k| \leqslant T/h} \Phi\left(\frac{2k\pi h}{T}\right) + 2T^{-1} \sum_{k > T/h} \Phi\left(\frac{2k\pi h}{T}\right). \end{aligned}$$

Из соотношения (9) нетрудно видеть, что при малых h

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum_{|k| \leqslant T/h} \Phi\left(\frac{2k\pi h}{T}\right) &= (2\pi h)^{-1} \sum_{|k| \leqslant T/h} \Phi\left(\frac{2k\pi h}{T}\right) \frac{2\pi h}{T} \\ &\approx (2\pi h)^{-1} \int_{-2\pi}^{2\pi} \Phi(\mu) d\mu \leqslant (2\pi h)^{-1} \int \Phi(\mu) d\mu = \frac{2a_1(0) - a_2(0)}{h} = \frac{4}{3h} \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} 2T^{-1} \sum_{k>T/h} \Phi\left(\frac{2k\pi h}{T}\right) &\leq 4T^{-1} \sum_{k>T/h} \left[\frac{\sin(k\pi h/T)}{k\pi h/T}\right]^2 \\ &\leq 4T^{-1} \sum_{k>T/h} \left(\frac{T}{k\pi h}\right)^2 \approx \frac{4T}{(\pi h)^2} \int_{T/h}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{4}{\pi^2 h}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$I_n \leq \frac{4}{3h} + \frac{4}{\pi^2 h} = \frac{4}{3h} \left(1 + \frac{3}{\pi^2}\right).$$

Таким образом, при больших n и малых h

$$\mathbf{D}\mu_2^{(n)}(t) \leq \frac{8\pi CT}{3nh} \leq \frac{32\pi CT}{9nh^2} \left(1 + \frac{3}{\pi^2}\right). \quad (14)$$

Если теперь выбрать последовательность $h = h(n)$ таким образом, чтобы она удовлетворяла соотношению $h \sim n^{-1/10}$, то из (12) и (14) будет следовать, что

$$\mathbf{E}[\mu_2^{(n)}(t) - m(t)]^2 = [\mathbf{E}\mu_2^{(n)}(t) - m(t)]^2 + \mathbf{D}\mu_2^{(n)}(t) \sim n^{-4/5}. \quad (15)$$

Сопоставляя формулы (7) и (15), видим, что оценка $\mu_2^{(n)}(t)$ сходится к функции $m(t)$ гораздо быстрее, чем $\mu_1^{(n)}(t)$. Следует, кроме того, иметь в виду, что полученные нами оценки сверху для смещения и дисперсии оценки $\mu_2^{(n)}(t)$ могут оказаться завышенными, вследствие чего качество оценки $\mu_2^{(n)}(t)$ может оказаться даже выше, чем это следует из формулы (15). В заключение мы укажем на то обстоятельство, что функция $w_2(t)$, определенная соотношением (8), совпадает с функцией $h_{12}(t)$ из работы [4]. Вместо функции $w_2(t) = h_{12}(t)$ могла бы быть использована любая другая функция из приведенного в работе [4] набора функций $h_{jk}(t)$. Функция $h_{12}(t)$ является лишь простейшей из них. Читатель может остановить свой выбор на функции $h_{jk}(t)$ с большим числом равных нулю моментов или с большей степенью гладкости, чем у функции $h_{12}(t)$. Тем самым в определенных условиях может быть достигнуто дальнейшее улучшение качества оценки математического ожидания $m(t)$ ПКСП $X(t)$. Осталось заметить, что все

функции $h_{jk}(t)$ из [4] являются линейными комбинациями B -сплайнов Шёнберга нечетных порядков, благоприятные свойства которых, по-видимому, трудно переоценить. Не претендуя здесь на сколько-нибудь обстоятельный обзор применений B -сплайнов Шёнберга, мы укажем лишь на работы [5–18], где с их помощью находятся эффективные решения ряда задач из чистой и прикладной математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В. Г. К задаче о выделении тренда периодически коррелированного случайного процесса // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, вып. 1. С. 8–15.
2. Алексеев В. Г. Некоторые вопросы статистического анализа периодически коррелированных временных рядов // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2005. Т. 41, № 1. С. 125–130.
3. Алексеев В. Г. О свойствах симметрии старших спектральных плотностей периодически нестационарных случайных процессов // Проблемы передачи информации. 1987. Т. 23, № 3. С. 48–53.
4. Алексеев В. Г., Суходоев В. А. Новые аналоговые плосковершинные и дифференцирующие линейные фильтры // Электромагнитные волны и электронные системы. 2006. Т. 11, № 10. С. 21–25.
5. Unser M. Sampling — 50years after Shannon // Proc. IEEE. 2000. V 88, № 4. P. 569–587.
6. Meijering E. A chronology of interpolation from ancient astronomy to modern signal and image processing // Proc. IEEE. 2002. V. 90, N 3. P. 319–342.
7. Kano H., Nakata H., Martin C. F. Optimal curve fitting using normalized uniform B -splines: a tool for studying complex systems // Appl. Math. Comput. 2005. V. 169, N 1. P. 96–128.
8. Liu X. Univariate and bivariate orthonormal splines on compact supports // J. Comput. Appl. Math. 2006. V. 195, N 1–2. P. 93–105.
9. Жук А. С., Жук В. В. О приближении периодических функций линейными методами аппроксимации // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2006. Т. 337. С. 134–164.
10. Apaydin G., Secer S., Ari N. Weighted extended b -splines for one-dimensional electromagnetic problems // Appl. Math. Comput. 2007. V. 190, N 2. P. 1125–1135.
11. Подкур П. Н. Построение вейвлетов с коэффициентами масштабирования N на основе B -сплайнов // Вестн. Кемеровск. гос. университета. 2006. № 4. С. 19–24.
12. Алексеев В. Г. Эмпирический спектральный анализ периодически коррелированных случайных процессов. Альтернативный подход // Проблемы передачи информации. 1997. Т. 33, № 4. С. 61–69.
13. Алексеев В. Г. Новые непрерывные фильтры низких частот // Радиотехника. 1998. № 4. С. 34–35.

-
14. Алексеев В. Г. *B-сплайны Шёнберга и их применения в радиотехнике и в смежных с ней дисциплинах* // Радиотехника. 2003. № 12. С. 21–23.
 15. Алексеев В. Г. Новый аналоговый линейный фильтр низких частот // Радиотехника. 2005. № 10. С. 143–144.
 16. Алексеев В. Г., Суходoev B. A. Новые наборы вейвлетообразующих функций // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2007. Т. 43, № 5. С. 617–622.
 17. Алексеев В. Г. Непараметрическое оценивание плотности вероятности и ее производных. L_2 -подход // Автометрия. 2007. Т. 43, № 6. С. 39–47.
 18. Алексеев В. Г. Аппроксимация аналоговых фильтров с бесконечной импульсной характеристикой // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т. 13, № 1. С. 9–13.

г. Звенигород Московской обл.

31 августа 2008 г.

**ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ
СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОДНОЙ
СИСТЕМЫ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ**
И. И. Горохова, Е. Т. Софонов

В статье рассматривается трехмерная система уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - bx_2 - ax_3), \\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - bx_1 - x_2 - ax_3), \\ \dot{x}_3 &= -x_3(k - ax_1 - cx_2 - x_3),\end{aligned}\tag{1}$$

где a, b, k, c — положительные числа, $a \neq c$. Нам необходимо исследовать устойчивость или неустойчивость состояния равновесия с положительными координатами. Такая система уравнений может быть математической моделью отношения «хищника» с «жертвами», если x_1, x_2 — биомассы жертв, а x_3 — биомасса хищника.

Состояние равновесия M найдем из системы уравнений

$$x_1 + bx_2 + ax_3 = 1,$$

$$bx_1 + x_2 + ax_3 = 1,$$

$$ax_1 + cx_2 + x_3 = k.$$

Состояние равновесия M имеет координаты x_1^*, x_2^*, x_3^* , где

$$\begin{aligned}x_1^* = x_2^* &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_3^* = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \Delta = (1 - b)(1 + b - ac - a^2), \\ \Delta_1 &= \Delta_2 = (1 - b)(1 - ak), \quad \Delta_3 = (1 - b)[-a - c + k(1 + b)],\end{aligned}$$

т. е.

$$x_1^* = x_2^* = \frac{1 - ak}{1 + b - ac - a^2}, \quad x_3^* = \frac{-a - c + k(1 + b)}{1 + b - ac - a^2}.$$

В системе уравнений (1) введем замену переменных:

$$x_1 = x_1^* + y_1, \quad x_2 = x_2^* + y_2, \quad x_3 = x_3^* + y_3.$$

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (x_1^* + y_1)(-y_1 - by_2 - ay_3), \\ \dot{y}_2 &= (x_2^* + y_2)(-by_1 - y_2 - ay_3), \\ \dot{y}_3 &= (x_3^* + y_3)(ay_1 + cy_2 + y_3). \end{aligned} \tag{2}$$

Характеристическое уравнение для уравнения первого приближения данной системы уравнений (2) имеет вид

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

где

$$a_1 = 2x_1^* - x_3^*, \quad a_2 = (1 - b^2)x_1^{*2} + (-2 + ac + a^2)x_1^*x_3^*, \quad a_3 = -\Delta x_1^{*2}x_3^*.$$

Так как мы исследуем состояние равновесия с положительными координатами, предполагаем x_1^* , x_2^* , x_3^* положительными. Кроме того, для устойчивости состояния равновесия M необходимо выполнение неравенств

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0.$$

Поэтому из дальнейшего рассмотрения исключаем случай $\Delta > 0$, ибо тогда состояние равновесия неустойчиво. Исходя из этого, будем рассматривать следующие случаи:

- а) $b < 1$, $1 + b - ac - a^2 < 0$,
- б) $b > 1$, $1 + b - ac - a^2 > 0$,
- в) $b = 1$.

Пусть рассматривается первый случай.

Теорема 1. Если

$$b < 1, \quad 1 + b - ac - a^2 < 0, \quad \frac{1}{a} < \frac{1 + a + b + c}{(1 + a)(1 + b)} < \frac{a + c}{1 + b},$$

то существует состояние равновесия M с положительными координатами и оно асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условий теоремы состояние равновесия M имеет положительные координаты. Покажем, что $a_1 > 0$. Решая неравенство $2x_1^* - x_3^* > 0$, имеем

$$\frac{1}{a} < \frac{2+a+c}{1+2a+b} < k. \quad (3)$$

Теперь нужно показать неравенство

$$\frac{2+a+c}{1+2a+b} < \frac{1+a+b+c}{(1+a)(1+b)}. \quad (4)$$

Действительно, (4) сводится к неравенству

$$(1+a+b+c)(1+2a+b) - (2+a+c)(1+a+b+ac) = (b-1)(1+b-ac-a^2) > 0.$$

Итак, $a_1 > 0$. Осталось показать выполнение неравенства $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Его можно представить так:

$$a_1 a_2 - a_3 = x_1^* [2(1-b)x_1^* + (-2+ac+a^2)x_3^*][(1+b)x_1^* - x_3^*] > 0.$$

Пусть $-2+ac+a^2 \geq 0$. Тогда неравенство выполняется, если $(1+b)x_1^* - x_3^* > 0$. Можно показать, что последнее неравенство справедливо при условии

$$\frac{1+a+b+c}{(1+a)(1+b)} < k.$$

Учитывая (3), (4), получим неравенство $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Пусть теперь выполняется неравенство $-2+ac+a^2 < 0$. Сначала покажем, что $a_2 > 0$. Неравенство верно, если

$$\frac{1-b^2-(a+c)(-2+ac+a^2)}{(1-b^2)a-(1+b)(-2+ac+a^2)} < k.$$

С другой стороны, мы можем показать выполнение неравенства

$$\frac{1-b^2-(a+c)(-2+ac+a^2)}{(1-b^2)a-(1+b)(-2+ac+a^2)} < \frac{1+a+b+c}{(1+a)(1+b)},$$

ибо

$$\begin{aligned} & (-2+ac+a^2)[(a+c)(1+a)(1+b) - (1+b)(1+a+b+c)] \\ & + (1-b^2)[a(1+a+b+c) - (1+a)(1+b)] \\ & = (ac+a^2-1-b)^2(1+b) > 0. \end{aligned}$$

Итак, $a_2 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 = & [(1 - b^2)x_1^{*2} + (-2 + ac + a^2)x_1^* x_3^* \\ & + (1 - b)^2 x_1^{*2}] [(1 + b)x_1^* - x_3^*] > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что $a_1 a_2 - a_3 > 0$, следовательно, состояние равновесия M асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Если

$$b < 1, \quad 1 + b - ac - a^2 < 0, \quad \frac{1}{a} < k < \frac{1 + a + b + c}{(1 + a)(1 + b)} < \frac{a + c}{1 + b},$$

то существует состояние равновесия M с положительными координатами и оно неустойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполняется неравенство

$$\frac{1}{a} < k \leq \frac{2 + a + c}{1 + 2a + b},$$

то $a_1 \leq 0$. Если

$$\frac{2 + a + c}{1 + 2a + b} < k \leq \frac{1 - b^2 - (a + c)(-2 + ac + a^2)}{(1 - b^2)a - (1 + b)(-2 + ac + a^2)},$$

то $a_2 \leq 0$ и $a_1 a_2 - a_3 < 0$. А если

$$\frac{1 - b^2 - (a + c)(-2 + ac + a^2)}{(1 - b^2)a - (1 + b)(-2 + ac + a^2)} < k < \frac{1 + a + b + c}{(1 + a)(1 + b)},$$

то $a_1 a_2 - a_3 < 0$. Таким образом, во всех случаях нарушается хотя бы одно из условий Рууса — Гурвица, и состояние равновесия неустойчиво.

Теорема 3. Если

$$b < 1, \quad 1 + b - ac - a^2 < 0, \quad \frac{1}{a} < \frac{1 + a + b + c}{(1 + a)(1 + b)} = k < \frac{a + c}{1 + b},$$

то существует состояние равновесия M с положительными координатами и оно устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $a_1a_2 - a_3 = 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_1 = (b-1)x_1^*, \quad \lambda_{1,2} = \pm\beta i,$$

где

$$\beta^2 = (1+b)(-1-b+ac+a^2)x_1^{*2}, \quad x_3^* = (1+b)x_1^*.$$

Сделаем следующее преобразование для системы уравнений (2):

$$x = y_1 - y_2, \quad y = \frac{1+b}{a}y_2 + y_3, \quad z = -\frac{\beta}{ax_1^*}y_2.$$

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x - x^2 - axy + \frac{a(1-b)}{\beta}x_1^*xz, \\ \dot{y} &= -\beta z + y^2 - z^2 + [(1+b)(2+a) - ac - a^2]\frac{x_1^*}{\beta}yz \\ &\quad + dx + x(d_1y + d_2z), \\ \dot{z} &= \beta y - dyz + \frac{b\beta}{a}x - bxz. \end{aligned}$$

Здесь d, d_1, d_2 — постоянные. Так как $x = 0$ есть интегральная плоскость и на ней лежат замкнутые траектории, то по известным критериям [1,2] состояние равновесия M устойчиво. Теорема доказана.

Теорема 4. Если

$$b > 1, \quad 1 + b - ac - a^2 > 0, \quad \frac{a+c}{1+b} < k < \frac{1}{a},$$

то существует состояние равновесия M с положительными координатами и оно неустойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы следует, что координаты состояния равновесия M положительны. Если выполняется неравенство

$$\frac{a+c}{1+b} < k < \frac{2+a+c}{1+2a+b}, \quad (5)$$

то $a_1 > 0$. Если справедливо неравенство $-2 + ac + a^2 \leq 0$, то $a_2 < 0$ и состояние равновесия M неустойчиво. Пусть $a_2 > 0$, т. е. выполняется неравенство

$$\frac{b^2 - 1 + (a+c)(-2+ac+a^2)}{(1+b)[(b-1)a-2+ac+a^2]} < k. \quad (6)$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{2+a+c}{1+2a+b} < \frac{b^2 - 1 + (a+c)(-2+ac+a^2)}{(1+b)[(b-1)a-2+ac+a^2]}.$$

Действительно, из этого неравенства вытекает, что

$$\begin{aligned} & (-2+ac+a^2)[(1+b)(2+a+c) - (a+c)(1+2a+b)] \\ & + (b^2 - 1)[(2+a+c)a - 1 - 2a - b] \\ & = (-1 - b + ac + a^2)[(b-1)^2 - 2(-1 - b + ac + a^2)] < 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что неравенство (6) противоречит неравенству (5). Тогда $a_1 a_2 - a_3 < 0$ и состояние равновесия M неустойчиво.

Теорема 5. Если $b = 1$, $2 - ac - a^2 < 0$,

$$\frac{1}{a} < \frac{2+a+c}{2(1+a)} < k < \frac{a+c}{2},$$

то существует состояние равновесия M с положительными координатами и оно устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условий теоремы $x_i^* > 0$,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2+a+c-2k(1+a)}{2-ac-a^2} > 0 \quad \text{при } \frac{2+a+c}{2(1+a)} < k; \\ a_2 &= (-2+ac+a^2)x_1^*x_3^* > 0; \\ a_1 a_2 - a_3 &= (a^2+ac-2)(2x_1^*-x_3^*)x_1^*x_3^* > 0. \end{aligned}$$

Так как $a_3 = 0$, то характеристическое уравнение имеет один нулевой корень и два корня с отрицательными частями. Из системы уравнений (2) получаем, что на прямой

$$y_1 + y_2 + ay_3 = 0, \quad ay_1 + cy_2 + y_3 = 0$$

лежат состояния равновесия и точка M . Поэтому получим критический случай одного нулевого корня и этот случай А. М. Ляпунов назвал особым случаем. Тем самым состояние равновесия устойчиво.

Теорема 6. Если выполнено одно из условий:

$$1) b = 1, 2 - ac - a^2, \frac{1}{a} < k < \frac{2+a+c}{2(1+a)} < \frac{a+c}{2};$$

$$2) b = 1, 2 - ac - a^2 > 0, \frac{a+c}{2} < k < \frac{1}{a},$$

то существует состояние равновесия M с положительными коэффициентами и оно неустойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первом случае из неравенства

$$k < \frac{2+a+c}{2(1+a)}$$

следует, что $a_1 < 0$. А во втором случае $a_2 < 0$, следовательно, состояние равновесия M неустойчиво.

Теорема 7. Если $b = 1, 2 - ac - a^2 < 0$,

$$\frac{1}{a} < \frac{2+a+c}{2(1+a)} = k < \frac{a+c}{2}, \quad (7)$$

то существует состояние равновесия M с положительными коэффициентами и оно неустойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем преобразование для системы уравнений (2):

$$x = p(y_1 + y_2), \quad y = y_1 + y_2 + ay_3, \quad z = y_1 - y_2,$$

где

$$p = -(1+a)\beta, \quad (8)$$

$$\beta^2 = \frac{ac + a^2 - 2}{2(1+a)^2} = a_2, \quad a_1 = 0.$$

С учетом (7), (8) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \beta y - xy, \\ \dot{y} &= -\beta x - \frac{1}{a}x^2 + \frac{1}{a}y^2 + \frac{ac + a^2 - 4 - 2a}{2ap}xy \\ &\quad + \left(y - \frac{x}{p} + \frac{a}{1+a}\right) \frac{a-c}{2}z, \\ \dot{z} &= -yz. \end{aligned} \quad (9)$$

Для системы уравнений (9) $z = 0$ есть интегральная плоскость, на которой лежат замкнутые траектории. Кроме этой интегральной плоскости существуют интегральные поверхности вида

$$F = \frac{z}{\beta - x} = c_1.$$

На этих поверхностях лежат особые точки типа фокус (неустойчивый и устойчивый в зависимости от знака c_1). Поэтому состояние равновесия M неустойчиво [3].

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в системе уравнений (1) в третьем уравнении заменить c на a , то состояние равновесия в данном случае было бы центром.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
3. Софронов Е. Т. Устойчивость автономных систем в критических случаях. Новосибирск: Наука, 2000.

г. Якутск

10 декабря 2007 г.

О МЕТОДЕ ГАЛЁРКИНА
ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ

И. Е. Егоров, П. И. Степанова

В связи с тем, что вырождающиеся эллиптические уравнения встречаются в теории уравнений смешанного типа [1], им посвящена обширная литература [2–7]. В работе М. В. Келдыша [2] поставлена и исследована первая краевая задача для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка в зависимости от младших коэффициентов уравнения. Для общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка, в частности, содержащих вырождающиеся на границе эллиптические уравнения, Г. Фикера [3] впервые осуществил постановку первой краевой задачи. Необходимо отметить, что в работе [4] получены глубокие обобщения результатов Фикера и исследованы свойства решений эллиптико-параболического уравнения, т. е. уравнения с неотрицательной характеристической формой.

В работах [3, 4, 7] при исследовании краевых задач для эллиптико-параболических уравнений применялись функциональные методы. В настоящей работе устанавливается, что при определенных условиях на коэффициенты эллиптико-параболического уравнения единственное обобщенное решение первой краевой задачи можно найти как предел приближенных решений, вычисляемых по методу Галёркина [8].

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей S рассмотрим эллиптико-параболическое уравнение

$$Lu \equiv \sum_{\epsilon, j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_i + c(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ и a_{ij}, b_i, c принадлежат классу $C^\infty(\bar{\Omega})$, $i, j = \overline{1, n}$, и выполнено условие

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Обозначим через $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ вектор внутренней нормали к границе области Ω . Введем множество характеристических точек уравнения (1) на S :

$$S_0 = \left\{ x \in S : \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\nu_i\nu_j = 0 \right\}.$$

Рассматривая на множестве S_0 функцию Фикеры [3, 4, 7]

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right) \nu_i, \quad x \in S_0,$$

определим следующие множества:

$$S^+ = \{x \in S_0 : \Phi(x) \geq 0\}, \quad S^- = \{x \in S_0 : \Phi(x) < 0\},$$

$$S^0 = \{x \in S_0 : \Phi(x) = 0\}.$$

Положим

$$S_1 = S \setminus S_0, \quad S_2 = S_1 \cup S^-.$$

Первая краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Ω такое, что

$$u|_{\bar{S}_2} = 0. \tag{2}$$

Отметим, что первая краевая задача (1), (2) охватывает известные классические краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений второго порядка.

Обозначим через C_L класс функций из $C^2(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих условию (2).

Введем на множестве C_L скалярное произведение

$$(u, v)_{H_1} = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + uv \right) dx, \quad u, v \in C_L.$$

Обозначим через H_1 гильбертово пространство, полученное дополнением класса C_L по норме

$$\|u\|_{H_1} = (u, u)_{H_1}^{1/2}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

$$\left[\sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \xi_i \right]^2 \leq M \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad M > 0. \quad (3)$$

Заметим, что для эллиптических уравнений условие (3) всегда имеет место.

Лемма 1. Пусть выполнено условие (3). Тогда для любой функции $u(x) \in H_1$

$$\sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) u_{x_i} \in L_2(\Omega)$$

и справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) u_{x_i} \right]^2 dx \leq M \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $u(x) \in C_L$ из условия (3) немедленно следует справедливость неравенства (4).

Теперь пусть $u \in H_1$. Тогда существует последовательность функций $\{u_m(x)\}$ из C_L такая, что $u_m \rightarrow u$ в H_1 при $m \rightarrow \infty$. Далее, в неравенстве (4) заменяя функцию $u(x)$ на $u_m - u_k$, получаем

$$\|v_m - v_k\|_0^2 \leq M \|u_m - u_k\|_{H_1}^2 \rightarrow 0, \quad m, k \rightarrow \infty,$$

где

$$v_m(x) = \sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) u_{mx_i}.$$

В силу фундаментальности последовательности $\{v_m(x)\}$ в $L_2(\Omega)$ существует функция $v(x) \in L_2(\Omega)$ такая, что $v_m \rightarrow v$ в $L_2(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$.

Отсюда, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в неравенстве (4) при $u = u_m$, получим неравенство

$$\|v\|_0^2 \leq M \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx. \quad (5)$$

Если T — обобщенная функция из $D'(\Omega)$ и $\varphi \in D(\Omega)$, то значение T на функции φ обозначим через $\langle T, \varphi \rangle$. Нетрудно показать, что

$$\langle v, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v \varphi dx = \left\langle \sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) u_{x_i}, \varphi \right\rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Следовательно, имеет место равенство

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) u_{x_i}$$

в смысле теории обобщенных функций. Отсюда и из неравенства (5) следует справедливость утверждений леммы 1.

Для функций $u, v \in H_1$ рассмотрим билинейную форму

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,s=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_s} + u \sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) v_{x_i} - c^* u v \right] dx,$$

где

$$c^*(x) = c(x) - \sum_{i=1}^n b_{ix_i} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Лемма 2. Пусть выполнено условие (3). Тогда имеет место неравенство

$$|B(u, v)| \leq K \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_1}, \quad u, v \in H_1, \quad (6)$$

где $K > 0$ зависит только от коэффициентов оператора L и константы M .

В силу леммы 1 неравенство (6) нетрудно доказывается с помощью известных неравенств Коши — Буняковского и Гёльдера.

Лемма 3. Пусть выполнено условие (3) и $S_0 = S^0$ или множество S_0 пустое. Тогда для любого $u \in H_1$ справедливо равенство

$$\int_{\Omega} u \sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ijx_j} \right) u_{x_i} dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(b_{ix_i} - \sum_{i,j=1}^n a_{ijx_i x_j} \right) u^2 dx. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что в силу второго условия леммы 3 равенство (7) имеет место для любой функции $u(x)$ из C_L . Для $u \in H_1$ существует последовательность $\{u_m(x)\}$ из C_L такая, что $u_m \rightarrow u$ в H_1 . Отсюда

$$\int_{\Omega} u_m \sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ijx_j} \right) u_{mx_i} dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(b_{ix_i} - \sum_{ij=1}^n a_{ijx_i x_j} \right) u_m^2 dx.$$

С другой стороны, как видно из доказательства леммы 1,

$$\sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ijx_j} \right) u_{mx_i} \rightarrow \sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ijx_j} \right) u_{x_i}$$

в пространстве $L_2(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда справедливость равенства (7) устанавливается из последнего равенства предельным переходом.

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 3 и

$$c(x) + c^*(x) \leq -\delta < 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Тогда существует константа $m > 0$ такая, что для всех функций $u \in H_1$ имеет место неравенство

$$B(u, u) \geq m \|u\|_{H_1}^2. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $u \in H_1$ в силу определения билинейной формы $B(u, v)$ и равенства (7) имеем

$$B(u, u) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} - \frac{1}{2} (c + c^*) u^2 \right] dx.$$

Отсюда получаем, что

$$B(u, u) \geq m \|u\|_{H_1}^2, \quad m = \min\{1, \delta/2\}.$$

Лемма 4 доказана.

Всюду ниже будем предполагать, что правая часть уравнения (1) $f(x)$ принадлежит $L_2(\Omega)$ и выполнены условия леммы 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u \in H_1$ называется *обобщенным решением* первой краевой задачи (1), (2), если выполняется тождество

$$B(u, v) = -(f, v)_0 \quad \forall v \in H_1. \quad (9)$$

Теорема 1. Если выполнены условия леммы 3, то первая краевая задача (1), (2) может иметь не более одного обобщенного решения из H_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если u_1 и u_2 суть два обобщенных решения задачи (1), (2), то разность $u = u_1 - u_2 \in H_1$ будет удовлетворять однородному тождеству (9)

$$B(u, v) = 0 \quad \forall v \in H_1.$$

Отсюда в силу леммы 4 при $u = v$ имеем

$$0 = B(u, u) \geq m \|u\|_{H_1}^2.$$

Из данного неравенства следует совпадение u_1 с u_2 . Теорема доказана.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ — полная система линейно независимых элементов в H_1 . Приближенные решения $u^N(x)$ первой краевой задачи (1), (2) ищем в виде

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N C_k^N \varphi_k(x),$$

в которых C_k^N определяются системой N линейных алгебраических уравнений

$$B(u^N, \varphi_l) = -(f, \varphi_l)_0, \quad l = \overline{1, N}. \quad (10)$$

Теорема 2. Если выполнены предположения леммы 3, то задача (1), (2) однозначно разрешима в H_1 при любой $f \in L_2(\Omega)$ и ее решение есть сильный предел в H_1 галёркинских приближений u^N , однозначно определяемых алгебраическими системами (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система (10) однозначно разрешима, так как для нее справедлива теорема единственности в силу неравенства (8). Итак, система (10) однозначно определяет галёркинские приближения u^N .

Умножим обе части (10) на C_l^N и просуммируем по l от 1 до N , что дает равенство

$$B(u^N, u^N) = -(f, u^N)_0.$$

Из данного равенства в силу (8) следует априорная оценка

$$\|u^N\|_{H_1} \leq \frac{1}{m} \|f\|_0. \quad (11)$$

Пусть P_N — линейное подпространство в H_1 , натянутое на $\varphi_1, \dots, \varphi_N$. Благодаря (10) u^N удовлетворяет тождеству

$$B(u^N, \eta) = -(f, \eta)_0 \quad \forall \eta \in P_N. \quad (12)$$

Отсюда в силу оценки (11), леммы 1 и теоремы 1 стандартным образом [8] приходим к заключению, что вся последовательность u^N слабо в H_1 сходится к функции $u \in H_1$, которая является обобщенным решением первой краевой задачи (1), (2).

Возьмем последовательность u_N из P_N такую, что $\|u_N - u\|_{H_1} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Из (9), (12) при $\eta = v = u_N - u^N$ имеем равенство

$$B(u - u^N, u - u^N) = B(u - u^N, u - u_N). \quad (13)$$

Так как u^N сходится к u слабо в H_1 , а u_N сходится к u сильно в H_1 , то в силу (6) правая часть (13) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Тогда (8) гарантирует сильную сходимость u^N к u в пространстве H_1 . Теорема доказана.

Приведем теорему об оценке погрешности метода Галёркина.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения леммы 3. Тогда для галёркинских приближений имеет место оценка

$$\|u^N - u\|_{H_1} \leq \frac{K}{m} d(P_N, u), \quad (14)$$

где

$$d(P_N, u) = \inf_{v \in P_N} \|v - u\|_{H_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $v \in P_N$ из (9), (12) получаем

$$B(u^N - u, u^N - u) = B(u^N - u, v - u).$$

Отсюда в силу (6), (8) имеем

$$m\|u^N - u\|_{H_1}^2 \leq K\|u^N - u\|_{H_1}\|v - u\|_{H_1},$$

т. е.

$$\|u^N - u\|_{H_1} \leq \frac{K}{m}\|v - u\|_{H_1}.$$

Отсюда следует оценка (14). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
2. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
3. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений // Математика. 1963. Т. 7, № 6. С. 99–121.
4. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 7–252. (Итоги науки и техники).
5. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.
6. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск: НГУ, 1973.
7. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
8. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

О СПОСОБАХ ФОРМИРОВАНИЯ
СТРАТЕГИЙ И ВЫИГРЫШЕЙ
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ РЕС-ЗАДАЧ

Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов

В работе рассматриваются условия, делающие возможным корректное применение РЕС-задач при моделировании ситуаций выбора и принятия решений. Приведем основные понятия и термины, необходимые для дальнейшего изложения. Некоторые задачи выбора и принятия решений сводятся к одной или нескольким задачам выбора одной из двух возможностей: «поступить таким образом» или «не поступить таким образом». Такого рода задачи будем называть *задачами «за» и «против»* или РЕС-задачами (от латинского *pro et contra*). Для каждой РЕС-задачи рассматриваются определенные наборы аргументов (доказательств) в пользу той или иной возможности. РЕС-задача определяется как совокупность множеств P , C и матрицы A , где

$$P \rightleftharpoons \{p_1, \dots, p_n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

— множество аргументов «за»,

$$C \rightleftharpoons \{c_1, \dots, c_m\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

— множество аргументов «против»,

$$A = \{a_{ij}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

— $n \times m$ -матрица, состоящая из элементов a_{ij} , являющихся экспертными оценками взаимодействия p_i и c_j . Таким образом, предполагается, что каждый аргумент «за» p_i из P сравнивается с каждым аргументом

«против» c_j из C и методом экспертных оценок [1] (или каким-либо другим способом) получаются числа a_{ij} , которые мы и назвали *экспертными оценками* взаимодействия p_i и c_j . Чем больше значение a_{ij} , тем более значим и убедителен аргумент «за» p_i по сравнению с аргументом «против» c_j . И, наоборот, чем меньше значение a_{ij} , тем более значим и убедителен аргумент «против» c_j по сравнению с аргументом «за» p_i .

Пусть \widehat{A} — множество всех $n \times m$ -матриц с элементами из \mathbb{R}^1 ($n, m \in \mathbb{N}$). Тогда можно сказать, что любая РЕС-задача с множествами P и C определяет некоторую матрицу A из \widehat{A} экспертных оценок a_{ij} взаимодействия p_i и c_j .

Пусть A — $n \times m$ -матрица из \widehat{A} . Авторами ранее было показано, что для вычисления решения порождаемой ею РЕС-задачи (т. е. определения интегральной экспертной оценки) достаточно найти цену соответствующей матричной игры [2]. Поэтому, рассматривая РЕС-задачу (1)–(3), уместно говорить об играх с множествами стратегий P и C .

Как видно из вышеизложенного, интегральная экспертная оценка вычисляется исходя из наборов аргументов P , C и матрицы оценок A . Назовем круг лиц, формирующих конкретный вид P , C и A , *экспертной комиссией* (ЭК). Понятно, что для корректной постановки РЕС-задачи ЭК должна придерживаться некоторых правил.

Рассмотрим множество аргументов «за» P . Будем говорить, что аргумент p_s *доминирует над аргументом* (стратегией) p_t , если $a_{sj} \geq a_{tj}$ ($s, t \in \{1, \dots, n\}$, $s \neq t$, $j = \overline{1, m}$), причем хотя бы одно неравенство должно быть строгим. Далее будем считать термины «аргумент» и «стратегия» взаимозаменяемыми. Для краткости будем избегать излишней строгости в изложении.

Если мы рассматриваем РЕС-задачу: строить некий завод или нет, то ЭК может определить, например, такие аргументы «за»:

p_1 = «экономически эффективный и экологически безопасный проект»,

-
- p_2 = «проект строительства экономически выгодный»,
 p_3 = «проект строительства экологически безопасный»,
 p_4 = «предусмотрена установка фильтров для очистки жидких стоков»,
 p_5 = «на территории завода планируется разбить цветочные клумбы».

Тогда иногда допустимо говорить, что какой-то аргумент *является частью* некоторого другого аргумента или какой-то аргумент *состоит из некоторых других аргументов*. Например, можно сказать, что p_2 , p_3 *суть части* p_1 . В свою очередь, p_1 состоит из p_2 и p_3 ; p_4 есть часть аргументов p_3 и p_1 .

Также в некоторых случаях можно говорить, что какой-то аргумент менее (или более) *значим*, чем некоторый другой аргумент. Например, p_5 менее значим, чем аргументы p_1 , p_2 , p_3 , p_4 .

Очевидна справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. Рассмотрим РЕС-задачу (1)–(3). Пусть выполняются следующие условия:

- 1) если аргумент p_s есть часть аргумента p_t , то p_t доминирует над p_s ;
- 2) если аргумент p_s менее значим, чем аргумент p_t , то p_t доминирует над p_s ($s, t \in \{1, \dots, n\}$, $s \neq t$).

Тогда количество в P аргументов, являющихся частями каких-то аргументов из P или менее значимыми, чем какие-то другие аргументы из P , не влияет на величину интегральной экспертной оценки.

Теорема 1. Рассмотрим РЕС-задачу (1)–(3). Пусть выполняется условие 1 леммы 1 и существует $q \in P$, состоящий из аргументов q_1, \dots, q_r ($r \in \mathbb{N}$), причем необязательно, что все они из множества P . Тогда величина интегральной экспертной оценки в РЕС-задаче (1)–(3), в которой множество P заменено множеством $(P \setminus \{q\}) \cup \{q_1, \dots, q_r\}$, не увеличится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда

по лемме 1 увеличение количества аргументов из P за счет множества $\{q_1, \dots, q_r\}$ не изменит интегральной экспертной оценки, а удаление q согласно теоретико-игровому подходу не увеличивает значения игры. Теорема доказана.

Следствие 1. Изменяя соответствующие формулировки, можно доказать аналогичные утверждения и для второго игрока.

Таким образом, можно указать некоторые способы формирования множеств стратегий игроков (множеств P, C) и функционала выигрыша (матрицы A) в антагонистической матричной игре, порождающей РЕС-задачу (1)–(3).

Следствие 2. Если ЭК будет придерживаться условий 1 и 2 леммы 1 при определении множеств P, C и матрицы A , то ей не придется беспокоиться о малозначимых аргументах или об аргументах, являющихся частями некоторых других аргументов. В то же время из утверждения теоремы 1 вытекает для ЭК необходимость осторожного подбора «составных» или слишком общо сформулированных аргументов, так как есть опасность необоснованного завышения выигрыша игрока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988.
2. Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ
КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ
В ОДНОМЕРНОМ УРАВНЕНИИ
НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ^{*)}

А. И. Кожанов

Пусть Ω — интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q — прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. Пусть $F(\eta)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ суть заданные при $\eta \in R$, $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$ функции, t^* — заданное число из полуинтервала $(0, T]$.

Обратная задача. Найти функции $u(x, t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x} F(u_x) + q(x)u = f(x, t) \quad (1)$$

и такие, что для функции $u(x, t)$ выполняются условия

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

$$u(x, t^*) = \psi(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Уравнение (1) в случае $F'(\eta) > 0$ (далее такое условие будет выполняться) является нелинейным параболическим уравнением, описывающим процессы одномерной теплопроводности или диффузии; коэффициент $q(x)$ в этом уравнении отвечает за скорость поглощения и

^{*)} Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала» (код проекта № АХ-23/11 пр. от 12 декабря 2008 г.).

является внутренней характеристикой среды (см. [1]). В случае среды с неизвестными характеристиками возникает задача, называемая в литературе обратной, а именно задача одновременного определения решения $u(x, t)$ и коэффициента $q(x)$. В рассматриваемой обратной задаче условия (2) и (3) являются условиями обычной первой начально-краевой задачи для параболического уравнения, (4) есть условие переопределения, необходимость которого обусловлена наличием дополнительной неизвестной функции $q(x)$. Обратные задачи для параболических уравнений с неизвестным коэффициентом при решении с условием переопределения (4) вполне качественно исследованы в случае $F(\eta) \equiv \eta$ (см. [2–5]), в случае же нелинейной функции $F(\eta)$ подобные задачи ранее не изучались.

Пусть V — множество функций

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)), v_t(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \\ v_{tt}(x, t) \in L_2(Q), v_{xxt}(x, t) \in L_2(Q)\}.$$

Очевидно, что это множество есть банахово пространство с нормой

$$\|v\|_V = \left\{ \text{vrai} \max_{[0, T]} \int_{\Omega} [v^2(x, t) + v_x^2(x, t) + v_{xx}^2(x, t) \\ + v_t^2(x, t) + v_{xt}^2(x, t)] dx + \int_Q (v_{tt}^2 + v_{xxt}^2) dx dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим вначале случай уравнения (1), близкого к линейному. Определим необходимые вспомогательные функции. Положим

$$\bar{u}(x, t) = x\mu_2(t) + (1-x)\mu_1(t), \\ \alpha_1(x) = -\frac{1}{\psi(x)}, \quad \beta_1(x) = -\alpha_1(x)[f(x, t^*) + F'(\psi_x(x))\psi_{xx}(x) - \bar{u}_t(x, t^*)], \\ \alpha_2(x) = -\alpha_1(x)\varphi(x), \quad \varphi_0(x) = \varphi(x) - \bar{u}(x, 0), \\ \varphi_1(x) = f(x, 0) + F'(\varphi_x(x))\varphi_{xx}(x) - \alpha_2(x)[f(x, t^*) + F'(\psi_x(x))\psi_{xx}(x) \\ - \bar{u}_t(x, t^*)] - \bar{u}_t(x, 0), \quad \gamma(x, t) = \alpha_1(x)\bar{u}(x, t),$$

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) - \bar{u}_t(x, t) - \beta_1(x)\bar{u}(x, t).$$

Далее, пусть k_1, m_1, m_2, δ_0 и δ_1 — заданные положительные числа (они появятся ниже в условиях соответствующих теорем). Определим другие необходимые (для компактности формулировок) числа. Именно, положим

$$\alpha_{11} = \text{vrai}_{\overline{\Omega}} \max |\alpha_1(x)|, \quad \alpha_{21} = \text{vrai}_{\overline{\Omega}} \max |\alpha_2(x)|, \quad \alpha_{22} = \text{vrai}_{\overline{\Omega}} \max |\alpha_{2x}(x)|,$$

$$\beta_{10} = \text{vrai}_{\overline{\Omega}} \min \beta_1(x), \quad \beta_{11} = \text{vrai}_{\overline{\Omega}} \max \beta_1(x), \quad \gamma_1 = \text{vrai}_{\overline{Q}} \max |\gamma(x, t)|,$$

$$k_2 = \beta_{10} - \alpha_{11}k_1, \quad k_3 = \alpha_{21}^2 + \gamma_1^2 T, \quad m_3 = m_2 \max_{[0, T]} |\mu'_1(t) - \mu'_2(t)|,$$

$$K_1 = \left(1 + \frac{1}{\delta_0^2}\right) \left[\int_{\Omega} \varphi_1^2(x) dx + \frac{1}{k_2} \int_Q \tilde{f}_t^2 dx dt \right] + m_1 \int_Q \bar{u}_{xt}^2 dx dt,$$

$$R_1 = \frac{K_1}{1 - (1 + \delta_0^2)k_3}, \quad R_2 = \min \left(R_1 T, \frac{R_1}{k_2} \right), \quad R_3 = \frac{2\alpha_{11}^2 R_1^2}{m_0} + 2\beta_{11}^2 R_2,$$

$$\begin{aligned} K_2 &= 4(2 + \alpha_{21}^2 + \gamma_1^2 T)R_1 + R_3 \\ &\quad + 4 \left[\int_{\Omega} F'^2(\varphi_x(x)) \varphi_{xx}^2(x) dx + \int_{\Omega} \varphi_1^2(x) dx + \int_Q \tilde{f}_t^2 dx dt \right], \end{aligned}$$

$$R_4 = K_2 \exp(4T),$$

$$\begin{aligned} R_5 &= \frac{1}{1 - (1 + 2\delta_1^2)\alpha_{21}^2} \left[\left(\frac{\alpha_{22}^2}{\delta_1^2} + \frac{8\gamma_1^2 T}{m_0} + 1 \right) R_1 + \frac{4}{m_0} R_3 + \frac{2m_3^2}{m_0} R_4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{9m_2^4 R_4^2 R_1}{m_0} + \frac{8}{m_0} \int_Q \tilde{f}_t^2 dx dt + \int_{\Omega} \alpha_{1x}^2(x) \varphi_{1x}^2(x) dx \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_6 &= \frac{2}{m_0} \left[\left(\frac{\alpha_{22}^2}{\delta_1^2} + \frac{8\gamma_1^2 T}{m_0} + 1 \right) R_1 + \frac{4}{m_0} R_3 + \frac{2m_3^2}{m_0} R_4 + \frac{9m_2^4 R_4^2 R_1}{m_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{m_0} \int_Q \tilde{f}_t^2 dx dt + \int_{\Omega} \alpha_{1x}^2(x) \varphi_{1x}^2(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$F(\eta) \in C^2(R), \quad 0 < m_0 \leq F'(\eta) \leq m_1, \quad |F''(\eta)| \leq m_2 \quad \text{при } \eta \in R; \quad (5)$$

$$\varphi(x) \in W_2^3(\Omega), \quad \psi(x) \in W_2^3(\Omega), \quad \mu_i(t) \in W_2^2([0, T]), \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} f(x, t) &\in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q), \\ \alpha_1(x) &\in L_\infty(\Omega), \quad \varphi_1(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega); \end{aligned} \quad (6)$$

$$k_2 > 0; \quad (7)$$

$$k_3 < 1, \quad (1 + \delta_0^2)k_3 < 1, \quad (1 + 2\delta_1^2)\alpha_{21}^2 < 1; \quad (8)$$

$$R_5 < 1; \quad (9)$$

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \quad \mu_2(0) = \varphi(1), \quad \mu_1(t^*) = \psi(0), \quad \mu_2(t^*) = \psi(1). \quad (10)$$

Тогда обратная задача (1)–(4) имеет решение $\{u(x, t), q(x)\}$ такое, что $u(x, t) \in V$, $q(x) \in L_\infty(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$w_{tt} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} F(w_x + \bar{u}_x) + [\alpha_1(x)w_t(x, t^*) + \beta_1(x)]w_t + \gamma(x, t)w_t(x, t^*) = \tilde{f}_t(x, t) \quad (11)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x, 0) = \varphi_0(x), \quad w_t(x, 0) = \varphi_1(x) + \alpha_2(x)w_t(x, t^*), \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

$$w(0, t) = w(1, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (13)$$

Разрешимость этой задачи докажем с помощью метода срезок и метода неподвижной точки.

Определим функцию $G(\xi)$:

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| < k_1, \\ k_1, & \text{если } \xi \geq k_1, \\ -k_1, & \text{если } \xi \leq -k_1. \end{cases}$$

Пусть V_0 — подпространство пространства V , определенное следующим образом:

$$V_0 = \{v(x, t) \in V : v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)), \\ v_t(x, t) \in L_\infty(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)), v_{tt}(x, t) \in L_2(Q), v_{xxt}(x, t) \in L_2(Q)\},$$

и пусть $v(x, t)$ — произвольная функция из V_0 . Положим

$$q_v(x) = \alpha_1(x)G(v_t(x, t^*)) + \beta_1(x), \quad g_v(x, t) = \tilde{f}_v(x, t) - \gamma(x, t)v_t(x, t^*),$$

$$\varphi_{1v}(x) = \varphi_1(x) + \alpha_2(x)v_t(x, t^*).$$

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$w_{tt} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} F(w_x + \bar{u}_x) + q_v(x)w_t = g_v(x, t) \quad (11_v)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x, 0) = \varphi_0(x), \quad w_t(x, 0) = \varphi_{1v}(x), \quad x \in \Omega, \quad (12_v)$$

а также условия (13). Данная задача представляет собой первую начально-краевую задачу для нелинейного уравнения составного типа (11_v); вследствие включений $g_v(x, t) \in L_2(Q)$, $q_v(x) \in L_\infty(\Omega)$, $\varphi_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $\varphi_{1v}(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, вытекающих из условий (6) и (10), а также в силу условия (5) она имеет решение, принадлежащее пространству V_0 ([6, 7], см. также [8]). Другими словами, краевая задача (11_v), (12_v), (13) порождает оператор Φ , действующий из пространства V_0 в него же: $\Phi(v) = w$. Покажем, что Φ имеет в пространстве V_0 неподвижные точки.

Повторяя доказательство априорных оценок из работ [5–7], нетрудно установить, что для решений $w(x, t)$ краевой задачи (11_v), (12_v), (13) имеет место равномерная априорная оценка

$$\|w\|_{V_0} \leq R_0 \quad (14)$$

с постоянной R_0 , определяющейся лишь функциями $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, а также числами k_1 , m_0 , m_1 и T . Из этой оценки следует, что оператор Φ переводит шар радиуса R_0 пространства V_0 в себя. Далее, повторяя рассуждения работы [4], нетрудно показать, что оператор Φ вполне непрерывен в пространстве V_0 .

Из проведенных рассуждений вытекает, что для оператора Φ выполняются все условия теоремы Шаудера. Следовательно, Φ имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Очевидно, что эта неподвижная точка представляет собой решение краевой задачи (11_w) , (12_w) , (13) .

Итак, существует функция $w(x, t)$, принадлежащая пространству V_0 , являющаяся в прямоугольнике Q решением уравнения (11_w) и принимающая краевые условия (12_w) , (13) . Покажем, что при выполнении условий теоремы эта функция даст решение исходной обратной задачи.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left[w_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial t} F(w_x + \bar{u}_x) + q_w w_{\tau} \right] w_{\tau} dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} g_w w_{\tau} dx d\tau.$$

После интегрирования по частям это равенство преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} F'(w_x + \bar{u}_x) w_{x\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} q_w w_{\tau}^2 dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_{1w}^2(x) dx - \int_0^t \int_{\Omega} F'(w_x + \bar{u}_x) \bar{u}_{x\tau} w_{x\tau} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} g_w w_{\tau} dx d\tau. \end{aligned}$$

Заметим, что при $x \in \overline{\Omega}$ выполняется неравенство

$$q_w(x) \geq k_2.$$

Используя это неравенство, условие (5) и неравенство Юнга, нетрудно показать, что следствием последнего равенства будет неравенство

$$\int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} F'(w_x + \bar{u}_x) w_{x\tau}^2 dx d\tau$$

$$\begin{aligned}
& + k_2 \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau \leq (1 + \delta^2) k_3 \int_{\Omega} w_t^2(x, t^*) dx \\
& + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \left[\int_{\Omega} \varphi_1^2(x) dx + \frac{1}{k_2} \int_Q \tilde{f}_t^2 dx dt \right] + m_1 \int_Q \bar{u}_{xt}^2 dx dt,
\end{aligned}$$

в котором δ — произвольное положительное число. Зафиксируем δ так, что

$$(1 + \delta^2) k_3 < 1$$

(вследствие условия (8) это возможно). Выбранное число δ обозначим через δ_0 . Очевидно, что для решений $w(x, t)$ краевой задачи (11_w) , (12_w) , (13) выполняется оценка

$$\text{vrai} \max_{[0, T]} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx \leq R_1. \quad (15)$$

Заметим, что помимо оценки (15) для решений $w(x, t)$ краевой задачи (11_w) , (12_w) , (13) имеют место оценки

$$\int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau \leq R_2, \quad (16)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} F'(w_x + \bar{u}_x) w_{x\tau}^2 dx d\tau \leq R_1. \quad (17)$$

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega} \left[w_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} F(w_x + \bar{u}_x) + q_w w_{\tau} \right] \frac{\partial}{\partial x} F(w_x + \bar{u}_x) dx d\tau \\
& = \int_0^t \int_{\Omega} g_w \frac{\partial}{\partial x} F(w_x + \bar{u}_x) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем равенство, являющееся его следствием:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} F'^2(w_x(x, t) + \bar{u}_x(x, t)) w_{xx}^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} F'^2(\varphi_x(x)) \varphi_{xx}^2(x) dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_{\Omega} F'(w_x(x, \tau) + \bar{u}_x(x, \tau)) w_{x\tau}^2(x, \tau) dx d\tau \\
& + \int_{\Omega} w_t(x, t) F'(w_x(x, t) + \bar{u}_x(x, t)) w_{xx}(x, t) dx \\
& - \int_{\Omega} w_t(x, 0) F'(\varphi_x(x)) \varphi_{xx}(x) dx + \int_0^t \int_{\Omega} q_w w_\tau F'(w_x + \bar{u}_x) w_{xx} dx d\tau \\
& - \int_0^t \int_{\Omega} g_v F'(w_x + \bar{u}_x) w_{xx} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Данное равенство, неравенство Юнга, оценки (15) и (17) дают неравенство

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \int_{\Omega} F'^2(w_x(x, t) + \bar{u}_x(x, t)) w_{xx}^2(x, t) dx \\
& \leq \int_0^t \int_{\Omega} F'^2(w_x + \bar{u}_x) w_{xx}^2 dx d\tau \\
& + (2 + \alpha_{21}^2 + \gamma_1^2 T) R_1 + \int_{\Omega} F'^2(\varphi_x(x)) \varphi_{xx}^2(x) dx + \int_{\Omega} \varphi_1^2(x) dx \\
& + \int_Q \tilde{f}_t^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} q_w^2 w_\tau^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

Оценим последнее слагаемое:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega} q_w^2 w_\tau^2 dx d\tau \\
& \leq 2\alpha_{11}^2 \int_0^t \int_{\Omega} w_\tau^2(x, t^*) w_\tau^2(x, \tau) dx d\tau + 2\beta_{11}^2 \int_0^t \int_{\Omega} w_\tau^2 dx d\tau \\
& \leq 2\alpha_{11}^2 \int_0^t \text{vrai} \max_{\overline{\Omega}} [w_\tau^2(x, \tau)] \left(\int_{\Omega} w_t^2(x, t^*) dx \right) d\tau + 2\beta_{11}^2 R_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\alpha_{11}^2 \int_0^t \left(\int_{\Omega} w_{x\tau}^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} w_{\tau}^2(x, t^*) dx \right) d\tau + 2\beta_{11}^2 R_2 \\
&\leq \frac{2\alpha_{11}^2 R_1^2}{m_0} + 2\beta_{11}^2 R_2 = R_3. \quad (18)
\end{aligned}$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} F'^2(w_x(x, t) + \bar{u}(x, t)) w_{xx}^2(x, t) dx \\
&\leq 4 \int_0^t \int_{\Omega} F'(w_x + \bar{u}_x) w_{xx}^2 dxd\tau + K_2.
\end{aligned}$$

Это неравенство и лемма Гронуолла дают оценку

$$\int_{\Omega} F'^2(w_x(x, t) + \bar{u}_x(x, t)) w_{xx}^2(x, t) dx \leq R_4. \quad (19)$$

Последнее анализируемое равенство имеет вид

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left[w_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x} F(w_x + \bar{u}_x) + q_w w_{\tau} \right] w_{xx\tau} dxd\tau = \int_0^t \int_{\Omega} g_w w_{xx\tau} dxd\tau.$$

Данное равенство легко преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{\omega} w_{xt}^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} F'(w_x + \bar{u}_x) w_{xx\tau}^2 dxd\tau \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_{xt}^2(x, 0) dx + \int_0^t \int_{\Omega} q_w w_{\tau} w_{xx\tau} dxd\tau - \int_0^t \int_{\Omega} g_w w_{xx\tau} dxd\tau \\
&\quad - \int_0^t \int_{\Omega} F''(w_x + \bar{u}_x) w_{xx}(w_{x\tau} + \bar{u}_{x\tau}) w_{xx\tau} dxd\tau. \quad (20)
\end{aligned}$$

Используя неравенство Юнга, представление функций $\varphi_{1w}(x)$ и $g_w(x)$, а также оценки (15) и (18), нетрудно получить, что выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_{xt}^2(x, 0) dx + \int_0^t \int_{\Omega} q_w w_{\tau} w_{xx\tau} dxd\tau - \int_0^t \int_{\Omega} g_w w_{xx\tau} dxd\tau \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{m_0}{4} \int_0^t \int_{\Omega} w_{xx\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2}(1+2\delta^2)\alpha_{21}^2 \int_{\Omega} w_{xt}^2(x, t^*) dx + \frac{\alpha_{22}^2}{2\delta^2} R_1 \\ &+ \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_{1x}^2(x) \varphi_{1x}^2(x) dx + \frac{2}{m_0} R_3 + \frac{4}{m_0} \int_Q \tilde{f}_t^2 dx dt + \frac{4}{m_0} \gamma_1^2 T R_1, \end{aligned}$$

в котором δ — произвольное положительное число. Зафиксируем δ так, что

$$(1+2\delta^2)\alpha_{21}^2 < 1;$$

выбранное число δ обозначим через δ_1 .

Оценим последнее слагаемое правой части (20). Имеем

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \int_{\Omega} F''(w_x + \bar{u}_x) w_{xx} (w_{x\tau} + \bar{u}_{x\tau}) w_{xx\tau} dx d\tau \right| \\ &\leq m_2 \int_0^t \int_{\Omega} |w_{xx}| |w_{x\tau}| |w_{xx\tau}| dx d\tau + m_3 \int_0^t \int_{\Omega} |w_{xx}| |w_{xx\tau}| dx d\tau \\ &\leq m_2 \int_0^t \text{vrai} \max_{\bar{\Omega}} |w_{x\tau}| \left(\int_{\Omega} w_{xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} w_{xx\tau}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\quad + m_3 \int_0^t \left(\int_{\Omega} w_{xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} w_{xx\tau}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\leq \sqrt{2} m_2 \left(\frac{R_4}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \left(\int_{\Omega} w_{x\tau}^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\Omega} w_{xx\tau}^2 dx \right)^{\frac{3}{4}} d\tau \\ &\quad + \frac{m_0}{4} \int_0^t \int_{\Omega} w_{xx\tau}^2 dx d\tau + \frac{2m_2^2}{m_0^2} R_4 \leq \frac{m_0}{4} \int_0^t \int_{\Omega} w_{xx\tau}^2 dx d\tau \\ &\quad + \frac{9m_2^4 R_4^2 R_1}{m_0^6} + \frac{m_0}{4} \int_0^t \int_{\Omega} w_{xx\tau}^2 dx d\tau + \frac{2m_3^2}{m_0^2} R_4 \end{aligned}$$

$$= \frac{m_0}{2} \int_0^t \int_{\Omega} w_{xx\tau}^2 dx d\tau + \frac{9m_2^4 R_4^2 R_1}{m_0^6} + \frac{2m_3^2}{m_0^2} R_4.$$

Суммируя, получаем, что следствием равенства (20) является неравенство

$$\begin{aligned} & [1 - (1 + 2\delta_1^2)\alpha_{21}^2] \int_{\Omega} w_{xt}^2(x, t) dx + \frac{m_0}{2} \int_0^t \int_{\Omega} w_{xx\tau}^2 dx d\tau \\ & \leq \left(\frac{\alpha_{22}^2}{\delta_1^2} + \frac{8\gamma_1^2 T}{m_0} + 1 \right) R_1 + \frac{4}{m_0} R_3 + \frac{2m_3^2}{m_0^2} R_4 + \frac{9m_2^4 R_4^2 R_1}{m_0^6} \\ & \quad + \frac{8}{m_0} \int_Q \tilde{f}_t^2 dx dt + \int_{\Omega} \alpha_{1x}^2(x) \varphi_{1x}^2(x) dx. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следуют априорные оценки

$$\int_{\Omega} w_{xt}^2(x, t) dx \leq R_5, \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} w_{xx\tau}^2(x, t) dx d\tau \leq R_6. \quad (22)$$

Оценка (21) играет решающую роль в доказательстве разрешимости краевой задачи (11)–(13). Действительно, следствием (21) является оценка

$$\text{vrai} \max_{\overline{\Omega}} |w_t(x, t)| \leq R_5.$$

Вместе с условием (9) эта оценка означает, что почти всюду в $\overline{\Omega}$ выполняется равенство

$$q_w(x) = \alpha_1(x) w_t(x, t^*) + \beta_1(x).$$

Другими словами, решение $w(x, t)$ краевой задачи $(11_w), (12_w), (13)$ при выполнении всех условий теоремы будет существовать, принадлежать пространству V_0 и являться решением краевой задачи (11)–(13).

Положим

$$u(x, t) = w(x, t) + \bar{u}(x, t), \quad q(x) = \alpha_1(x) w_t(x, t^*) + \beta_1(x).$$

Очевидно, что $u(x, t)$ и $q(x)$ связаны в прямоугольнике Q уравнением

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} F(u_x) + q(x)u_t = f_t(x, t).$$

Интегрируя, получаем, что функции $u(x, t)$ и $q(x)$ дают решение задачи (1)–(3). Выполнение условия (4) для функции $u(x, t)$ следует из условий согласования (10) и из вида функции $q(x)$. Принадлежность функций $u(x, t)$ и $q(x)$ пространствам V и $L_\infty(\Omega)$ очевидна.

Теорема доказана.

Очевидно, что условие (7) теоремы 1 выполняется для непустого класса входных данных задачи (1)–(4). Далее, при выполнении условия (7) условие (8) выполняется, если функции $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ малы. Условие (9) выполняется, если число R_1 мало и малы функции $\tilde{f}_t(x, t)$, $\varphi(x)$, $f(x, 0)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$; число же R_1 мало, если вновь малы функции $\tilde{f}_t(x, t)$, $\varphi(x)$, $f(x, 0)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$. Таким образом, множество входных данных, для которых выполняются все условия теоремы 1, не пусто. Заметим, что наиболее просто показывается непустота множества нужных входных данных в случае $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x, t) \equiv f(x)$.

Покажем, что использованными методами можно установить и несколько иной вариант теоремы о разрешимости обратной задачи (1)–(4).

Пусть вместо условия (7) выполняется условие

$$\beta_{10} - \alpha_{11}k_1 \geq 0. \quad (7')$$

При выполнении этого условия задача (11_v), (12_v), (13) по-прежнему будет разрешима в пространстве V_0 и по-прежнему оператор Φ , порождаемый этой задачей, будет иметь неподвижные точки. Другими словами, задача (11_w), (12_w), (13) по-прежнему будет разрешима в пространстве V_0 .

Вновь рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left[w_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x} F(w_x + \bar{u}_x) + q_w w_{\tau} \right] w_{\tau} dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} q_w w_{\tau} dx d\tau.$$

Используя неравенство (7'), условие (5) и неравенство Юнга, нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \frac{m_0}{2} \int_0^t \int_{\Omega} w_{x\tau}^2 dxd\tau \\ & \leq [(1 + \delta_0^2) \alpha_{21}^2 + \gamma_1 T^2] \int_{\Omega} w_t^2(x, t^*) dx + \left(1 + \frac{1}{\delta_0^2}\right) \int_{\Omega} \varphi_1^2(x) dx \\ & \quad + \frac{1}{m_0} \int_Q \tilde{f}_t^2 dxdt + m_1 \int_Q \bar{u}_{xt}^2 dxdt. \end{aligned}$$

Предполагая выполненным условие

$$\alpha_{21}^2 + \gamma_1 T^2 < 1 \quad (8')$$

и подбирая число δ_0 так, что

$$(1 + \delta_0^2) \alpha_{21}^2 + \gamma_1 T^2 < 1,$$

получим оценку (15), но с иным числом R_1 . Повторяя все дальнейшие выкладки, придем к требуемым априорным оценкам с иными, нежели в теореме 1, постоянными в правых частях.

Очевидно, что можно предположить и еще некоторые вариации условий теоремы 1.

Далее, в целом аналогично можно доказать разрешимость обратной задачи (1)–(4) в случае функции $F(\eta)$, растущей быстрее, чем $|\eta|$, например, для функций $F(\eta)$ с выполненным условием

$$0 < m_0 \leq F'(\eta) \leq m_1(1 + \eta^2)$$

(очевидно, что условия разрешимости будут иметь весьма громоздкий вид).

Обсудим вопрос о единственности решений обратной задачи (1)–(4). Положим

$$\beta(x) = -\alpha_1(x)[f(x, t^*) + F'(\psi_x(x))\psi_{xx}(x)].$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$F(\eta) \in C^2(R), \quad F'(\eta) \geq m_0 > 0 \quad \text{при } \eta \in R; \quad (23)$$

$$\varphi(x) \equiv 0 \quad \text{при } x \in \bar{\Omega}. \quad (24)$$

Тогда любые два решения $\{u_1(x, t), q_1(x)\}$, $\{u_2(x, t), q_2(x)\}$ такие, что $u_i(x, t) \in V$, $q_i(x) \in L_\infty(\Omega)$, $q_i(x) \geq 0$, $i = 1, 2$, совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале общую ситуацию. Вследствие принадлежности функций $u_i(x, t)$ и $q_i(x)$ указанным в формулировке теоремы классам для функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$ имеют место равенства

$$q_1(x) = \alpha_1(x)u_{1t}(x, t^*) + \beta(x), \quad q_2(x) = \alpha_2(x)u_{2t}(x, t^*) + \beta(x).$$

Далее, для функции $w(x, t)$, определенной равенством

$$w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t),$$

имеют место соотношения

$$\begin{aligned} w_{tt} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} [F(u_{1x}) - F(u_{2x})] + q_1(x)u_{1t} - q_2(x)u_{2t} &= 0, \\ w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = \alpha_2(x)w_t(x, t^*), \\ w(0, t) = w(1, t) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left\{ w_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x} [F(u_{1x}) - F(u_{2x})] + q_1(x)u_{1\tau} - q_2(x)u_{2\tau} \right\} w_{\tau} dx d\tau = 0.$$

Интегрируя по частям, учитывая указанные выше соотношения для функций $u_i(x, t)$, $q_i(x)$ и $w(x, t)$, используя условие (23), неравенство $q_1(x) \geq 0$ и теорему о среднем, нетрудно от данного равенства перейти к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + m_0 \int_0^t \int_{\Omega} w_{x\tau}^2 dx d\tau &\leq \frac{\alpha_{21}^2}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t^*) dx \\ + \int_0^t \int_{\Omega} |F''(\theta)| |u_{2x\tau}| |w_x| |w_{x\tau}| dx d\tau + \alpha_{11} \int_0^t \int_{\Omega} |w_{\tau}(x, t^*)| |w_{\tau}| dx d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ принадлежат пространству V , то имеют место неравенства

$$|F'(\theta)| \leq M_1, \quad \text{враi} \max_{\bar{\Omega}} |u_{2x\tau}(x, \tau)| \leq M_2 + \left(\int_{\Omega} u_{2xx\tau}^2(x, \tau) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

с некоторыми фиксированными постоянными M_1 и M_2 . Используя эти неравенства, а также применяя неравенство Юнга, получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + m_0 \int_0^t \int_{\Omega} w_{x\tau}^2 dx d\tau \\ & \leq \frac{\delta_1^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} w_{x\tau}^2 d\tau + \frac{\delta_2^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau \\ & + \frac{M_1^2}{\delta_1^2} \int_0^t \left(M_2^2 + \int_{\Omega} u_{2xx\tau}^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} w_x^2 dx \right) d\tau \\ & + \left(\frac{\alpha_{21}^2}{2} + \frac{\alpha_{11}^2 T}{2\delta_2^2} \right) \int_{\Omega} w_t^2(x, t^*) dx, \end{aligned}$$

в котором δ_1 и δ_2 — произвольные положительные числа. Положим $\delta_1 = \delta_2 = (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}}$. Используя элементарное неравенство

$$\int_{\Omega} w_x^2(x, t) dx \leq T \int_0^t \int_{\Omega} w_{x\tau}^2 dx d\tau,$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \frac{m_0}{T} \int_{\Omega} w_x^2(x, t) dx \leq (\alpha_{21}^2 + \alpha_{11}^2 T) \int_{\Omega} w_t^2(x, t^*) dx \\ & + M_3 \int_0^t \left(1 + \int_{\Omega} u_{2xx\tau}^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} w_x^2 dx \right) d\tau. \quad (25) \end{aligned}$$

Пусть теперь выполняется условие (24). Тогда $\alpha_{21} = \alpha_{11} = 0$ и из неравенства (25) и леммы Гронуолла вытекает тождество $w(x, t) \equiv 0$

при $(x, t) \in \overline{Q}$. Очевидно, что из этого тождества следует $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$, $q_1(x) \equiv q_2(x)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим случай функции $\varphi(x)$, не являющейся тождественно нулевой. Пусть выполняется условие

$$\alpha_{21}^2 + \alpha_{11}^2 T < 1. \quad (24')$$

Положим в неравенстве (25) $t = t^*$. Вследствие условия (24') получаем, что справедлива оценка

$$\int_{\Omega} w_t^2(x, t^*) dx \leq M_4 \int_0^{t^*} \left(1 + \int_{\Omega} u_{2xx\tau}^2 dx \right) \int_{\Omega} w_x^2 dx d\tau$$

с некоторой постоянной M_4 , определяемой числами $\alpha_{21}^2 + \alpha_{11}^2 T$ и M_3 .

Отсюда и из (25) следует неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_x^2(x, t) dx &\leq M_3 \left[T + \int_Q u_{2xxt}^2 dx dt \right] \\ &+ (\alpha_{21}^2 + \alpha_{11}^2 T) M_4 \left[t^* + \int_0^{t^*} \int_{\Omega} u_{2xxt}^2 dx dt \right] \text{ vrai } \max_{[0, T]} \int_{\Omega} w_x^2(x, t) dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть теперь выполняется условие

$$M_3 \left[T + \int_Q u_{2xxt}^2 dx dt \right] + (\alpha_{21}^2 + \alpha_{11}^2 T) M_4 \left[t^* + \int_0^{t^*} \int_{\Omega} u_{2xxt}^2 dx dt \right] < 1.$$

Из этого условия и оценки (26) вытекает тождество $w(x, t) \equiv 0$ и далее — единственность решений обратной задачи (1)–(4).

Таким образом, в случае не тождественно нулевой функции $\varphi(x)$ единственность решений обратной задачи (1)–(4) можно установить указанным выше способом, но при этом возникнут весьма громоздкие и жесткие условия.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученные по ходу доказательства теоремы 1 оценки (15)–(17), (19), (21)–(22) фактически вновь дают оценку (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимицов В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
2. Прилепко А. И., Костин А. Б. Об обратных задачах определения коэффициентов в параболическом уравнении. I // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 3. С. 146–155; II. 1993. Т. 34, № 5. С. 147–162.
3. Prilepko A. I., Orlovsky D. G. Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker Inc., 1999.
4. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 722–744.
5. Кожанов А. И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом по-глощания // Докл. РАН. 2006. Т. 409, № 6. С. 740–743.
6. Кожанов А. И., Ларькин Н. А., Яненко Н. Н. Смешанная задача для одного класса уравнений третьего порядка // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 6. С. 81–87.
7. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
8. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983.

г. Новосибирск

11 января 2009 г.

УДК 517.956

ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ
СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Р. Р. Сафиуллова

Введение

Работа посвящена исследованию разрешимости обратной задачи в цилиндрической области с неизвестной правой частью специального (составного) вида для гиперболического уравнения второго порядка.

Обратные задачи для гиперболических уравнений второго порядка в различных постановках исследовались в многочисленных работах В. Г. Романова, С. И. Кабанихина, А. Лоренци, А. И. Прилепко, Б. А. Бубнова, Ю. Е. Аниконова, Ю. Я. Белова, А. М. Денисова, М. Клибанова и в многих других (см. [1–13] и имеющуюся там библиографию). Вместе с тем заметим, что в предложенной ниже постановке обратные задачи для гиперболических уравнений ранее не изучались. Как близкие к настоящей работе можно отметить лишь статьи А. Д. Искендерова [14], А. Х. Амирова [15, 16], в которых рассматривались обратные задачи для гиперболических уравнений с неизвестной правой частью простейшего вида, работу автора [17], в которой изучалась обратная задача для гиперболических уравнений с неизвестной правой частью составного вида, но с иными, нежели в настоящей работе, условиями переопределения, а также работу А. И. Кожанова [18], в которой исследовалась близкая по условиям переопределения обратная задача для параболических уравнений.

© 2008 Сафиуллова Р. Р.

Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T , $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка области Ω , t — точка интервала $(0, T)$, S — боковая граница цилиндра Q : $S = \Gamma \times (0, T)$. Далее, пусть $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $v_0(x)$, $v_1(x)$, $f(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Обратная задача. Найти функции $u(x, t)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + b(x, t)u = h_1(x, t)q_1(x) + h_2(x, t)q_2(x) + f(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (4)$$

$$u(x, T) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$u_t(x, T) = v_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

В рассматриваемой обратной задаче условия (2)–(4) суть условия обычной первой начально-краевой задачи, условия же (5), (6) — условия переопределения, необходимые для нахождения дополнительных неизвестных функций $q_1(x)$, $q_2(x)$.

Разрешимость обратной задачи

Введем в рассмотрение пространства H_0 , H_1 , V_0 и V_1 :

$$\begin{aligned} H_0 &= \{v(x, t) : v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)), \\ &\quad v_t(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\}, \end{aligned}$$

$$H_1 = \{v(x, t) : v \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)), \\ v_t \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), v_{tt} \in L_2(Q)\},$$

$$V_i = \{v(x, t) : v(x, t) \in H_i, v_t(x, t) \in H_i, v_{tt}(x, t) \in H_i\}, \quad i = 1, 2;$$

нормы в этих пространствах определим естественным образом:

$$\|v\|_{H_0} = \|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)},$$

$$\|v\|_{H_1} = \|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)},$$

$$\|v\|_{V_0} = \|v\|_{H_0} + \|v_t\|_{H_0} + \|v_{tt}\|_{H_0}, \quad \|v\|_{V_1} = \|v\|_{H_1} + \|v_t\|_{H_1} + \|v_{tt}\|_{H_1}.$$

Положим

$$\alpha(x) = a(x, T)v_1(x) + b(x, T)v_0(x) - \Delta v_0(x) - f(x, T),$$

$$\beta(x) = [a_t(x, T) + b(x, T)]v_1(x) + b_t(x, T)v_0(x) - \Delta v_1(x) - f_t(x, T),$$

$$A_i(x) = (-1)^i \frac{h_i(x, T)\beta(x) - \alpha(x)h_{it}(x, T)}{h_2(x, T)h_{1t}(x, T) - h_1(x, T)h_{2t}(x, T)}, \quad i = 1, 2,$$

$$B_i(x) = (-1)^i \frac{h_i(x, T)}{h_2(x, T)h_{1t}(x, T) - h_1(x, T)h_{2t}(x, T)}, \quad i = 1, 2,$$

$$C_i(x) = (-1)^i \frac{h_i(x, T)a(x, T) - h_{it}(x, T)}{h_2(x, T)h_{1t}(x, T) - h_1(x, T)h_{2t}(x, T)}, \quad i = 1, 2,$$

$$d_1(x, t) = h_1(x, t)B_2(x) + h_2(x, t)B_1(x),$$

$$d_2(x, t) = h_1(x, t)C_2(x) + h_2(x, t)C_1(x),$$

$$c(x) = d_{2t}(x, 0) - a(x, 0)d_2(x, 0),$$

$$F(x, t) = f(x, t) + h_1(x, t)A_2(x) + h_2(x, t)A_1(x),$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1 + \delta_1^2}{2} + \frac{1}{2\delta_2^2} \max_{\bar{Q}} d_{1tt}^2(x, t) \\
&\quad + \frac{1}{2\delta_3^2} \max_{\bar{Q}} d_{2tt}^2(x, t) + \frac{1}{2} \max_{\bar{Q}} (a_{tt}(x, t) + 2b_t(x, t))^2 + \frac{1}{2} \max_{\bar{Q}} b_{tt}^2(x, t), \\
r_2 &= \frac{3}{2} [\max_{\bar{\Omega}} c^2(x) + \max_{\bar{\Omega}} d_{2x_i}^2(x, 0)] + \frac{\delta_3^2 T}{2} \\
&\quad + 3T \max_{\bar{\Omega}} d_2^2(x, 0) \left[\frac{1}{2} \max_{\bar{Q}} (2a_t(x, t) + b(x, t))^2 + T + 2T^4 \right], \\
r_3 &= r_1 + 3T^2 \left[\frac{1}{2} \max_{\bar{Q}} (2a_t(x, t) + b(x, t))^2 + T^2 + 2T^4 \right], \\
r_4 &= (a_0 - r_3)(1 - 4 \max_{\bar{\Omega}} d_2^2(x, 0)).
\end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть для функций $a(x, t)$, $b(x, t)$, $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $v_0(x)$, $v_1(x)$ и $f(x, t)$ выполняются включения $a(x, t) \in C^3(Q)$, $b(x, t) \in C^3(Q)$, $h_i(x, t) \in W_\infty^2(Q)$, $h_{it}(x, t) \in W_\infty^2(Q)$, $h_{itt}(x, t) \in W_2^2(Q)$, $i = 1, 2$, $u_0(x) \in W_2^4(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, $u_1(x) \in W_2^3(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, $v_j(x) \in W_2^4(\Omega) \cap W_\infty^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, $j = 0, 1$, $f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$, $f_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$, $f_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega))$, $F_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega))$.

Кроме того, пусть справедливы условия:

$$a(x, t) \geq a_0 > 0, \quad (x, t) \in \bar{Q}; \quad (7)$$

$$h_1(x, T)h_{2t}(x, T) - h_2(x, T)h_{1t}(x, T) \neq 0, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (8)$$

$$h_1(x, 0)h_2(x, T) - h_2(x, 0)h_1(x, T) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (9)$$

Пусть существуют $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ такие, что выполняются следующие условия:

$$a_0 - r_3 > 0; \quad (10)$$

$$r_4 - 2Tr_2 > 0; \quad (11)$$

$$1 - 3 \max_{\bar{\Omega}} d_2^2(x, 0) \cdot \frac{r_4}{r_4 - 2Tr_2} > 0; \quad (12)$$

$$1 - \left(3 \max_{\bar{\Omega}} d_{1t}^2(x, 0) + \delta_2^2 T \right) \cdot \frac{r_4}{r_4 - 2Tr_2} > 0. \quad (13)$$

Тогда обратная задача (1)–(6) имеет решение $\{u(x, t), q_1(x), q_2(x)\}$ такое, что $u(x, t) \in V_0$, $q_i(x) \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1(x) &= B_2(x)u_{ttt}(x, T) + C_2(x)u_{tt}(x, T) + A_2(x), \\ \tilde{q}_2(x) &= B_1(x)u_{ttt}(x, T) + C_1(x)u_{tt}(x, T) + A_1(x), \\ \nu(x) &= \Delta u_0(x) - a(x, 0)u_1(x) - b(x, 0)u_0(x) + F(x, 0), \\ \gamma(x) &= \Delta u_1(x) - [a_t(x, 0) + b(x, 0)]u_1(x) - b_t(x, 0)u_0(x) + F_t(x, 0), \\ c_0(x) &= \gamma(x) - a(x, 0)\nu(x), \quad w(x, t) = u_{tt}(x, t). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\begin{aligned} Lw &\equiv w_{tt}(x, t) - \Delta w + a(x, t)w_t(x, t) + (2a_t(x, t) \\ &+ b(x, t))w(x, t) = F_{tt}(x, t) + d_{1tt}(x, t)w_t(x, T) + d_{2tt}(x, t)w(x, T) \\ &- [a_{tt}(x, t) + 2b_t(x, t)]u_t(x, t) - b_{tt}(x, t)u(x, t), \quad (14) \end{aligned}$$

такую, что для нее выполняются условия (2), (3), а также следующие условия:

$$w(x, t)|_S = 0, \quad (15)$$

$$w(x, 0) = d_2(x, 0)w(x, T) + \nu(x), \quad x \in \Omega, \quad (16)$$

$$w_t(x, 0) = d_{1t}(x, 0)w_t(x, T) + c(x)w(x, T) + c_0(x). \quad (17)$$

Разрешимость данной краевой задачи докажем, комбинируя метод регуляризации и метод продолжения по параметру.

При фиксированном положительном ε рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u^\varepsilon(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon\lambda}w &= w_{tt}^\varepsilon(x, t) - \Delta w^\varepsilon(x, t) + a(x, t)w_t^\varepsilon(x, t) + [2a_t(x, t) \\ &+ b(x, t)]w^\varepsilon(x, t) - \varepsilon\Delta w_t^\varepsilon(x, t) = F_{tt}(x, t) + \lambda[d_{1tt}(x, t)w_t^\varepsilon(x, T) \end{aligned}$$

$$+ d_{2tt}(x, t)w^\varepsilon(x, T) - (a_{tt}(x, t) + 2b_t(x, t))u_t^\varepsilon(x, t) - b_{tt}(x, t)u^\varepsilon(x, t)] \quad (14_{\varepsilon\lambda})$$

и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), (15)–(17).

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача $(14_{\varepsilon\lambda})$, (2), (3), (15)–(17) разрешима в пространстве V_1 при произвольной функции $F_{tt}(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Как известно, если множество Λ непусто, открыто и замкнуто одновременно, то оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$. А это и будет означать, что краевая задача (14), (2), (3), (15)–(17) имеет решение из пространства V_1 .

При $\lambda = 0$ существует функция $w^\varepsilon(x, t)$, принадлежащая пространству H_1 , удовлетворяющая уравнению $(14_{\varepsilon,0})$ и такая, что для нее выполняются условия (15)–(17) (см. [19]). Имея функцию $w^\varepsilon(x, t)$, нетрудно с помощью условий (2) и (3) найти саму функцию $u^\varepsilon(x, t)$; очевидно, что эта функция будет принадлежать пространству V_1 . Следовательно, множество Λ непусто — число 0 принадлежит ему. Для доказательства открытости и замкнутости Λ установим необходимые априорные оценки решений задачи $(14_{\varepsilon\lambda})$, (2), (3), (15)–(17) из пространства V_1 .

Для удобства индекс ε у функции $w^\varepsilon(x, t)$ временно опустим.

Обозначим

$$\begin{aligned} r(x, t) = & d_{1tt}(x, t)w_t(x, T) + d_{2tt}(x, t)w(x, T) \\ & - (a_{tt}(x, t) + 2b_t(x, t))u_t(x, t) - b_{tt}(x, t)u(x, t). \end{aligned}$$

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} L_{\varepsilon\lambda} w w_\tau \, dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} F_{tt} w_\tau \, dx d\tau + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} r w_\tau \, dx d\tau.$$

Интегрируя по частям в левой части данного равенства и используя условия (15)–(17), придем к следующему равенству:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) \, dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) w_\tau^2 \, dx d\tau$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau = - \int_0^t \int_{\Omega} (2a_\tau + b) w w_\tau dx d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [d_{1t}(x, 0) w_t(x, T) + c(x) w(x, T) + c_0(x)]^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [(d_2(x, 0) w(x, T) + \nu(x))_{x_i}]^2 dx \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} F_{\tau \tau} w_\tau dx d\tau + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} d_{1\tau \tau}(x, \tau) w_\tau w_t(x, T) dx d\tau \\
& + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} d_{2\tau \tau}(x, \tau) w_\tau w(x, T) dx d\tau - \lambda \int_0^t \int_{\Omega} [a_{\tau \tau} + 2b_\tau] u_\tau w_\tau dx d\tau \\
& - \lambda \int_0^t \int_{\Omega} b_{\tau \tau} u(x, \tau) w_\tau(x, \tau) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Учитывая условие (7) теоремы и применяя элементарные арифметические неравенства, а также неравенство Юнга, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx + a_0 \int_0^t \int_{\Omega} w_\tau^2 dx d\tau \\
& + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq \frac{3}{2} \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, T) dx \\
& + s_0 \int_{\Omega} w_t^2(x, T) dx + s_1 \int_{\Omega} w^2(x, T) dx + r_1 \int_0^t \int_{\Omega} w_\tau^2 dx d\tau \\
& + \frac{1}{2} \max_{\overline{Q}} (2a_t + b)^2 \int_0^t \int_{\Omega} w^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} u_\tau^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} u^2 dx d\tau + N_0,
\end{aligned}$$

где

$$s_0 = \frac{3}{2} \max_{\overline{\Omega}} d_{1t}^2(x, 0) + \frac{\delta_2^2}{2} T, \quad s_1 = \frac{3}{2} \max_{\overline{\Omega}} c^2(x) + \frac{3}{2} \max_{\overline{\Omega}} d_{2x_i}^2(x, 0) + \frac{\delta_3^2}{2} T,$$

число N_0 определяется лишь входными данными задачи.

Используя элементарные неравенства вложения, неравенство Гёльдера и условия (2), (3), (16), придем к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx + (a_0 - r_3) \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau \\ + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq \frac{3}{2} \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, T) dx \\ + s_0 \int_{\Omega} w_t^2(x, T) dx + r_2 \int_{\Omega} w^2(x, T) dx + N_1, \quad (18) \end{aligned}$$

далее в силу условия (10) — к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx \leq \frac{3}{2} \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, T) dx \\ + s_0 \int_{\Omega} w_t^2(x, T) dx + r_2 \int_{\Omega} w^2(x, T) dx + N_1, \end{aligned}$$

где N_1 определяется лишь входными данными задачи.

Ввиду неравенств вложения имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx \leq 3T \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0) \frac{1}{a_0 - r_3} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, T) dx \\ + \frac{2Ts_0}{a_0 - r_3} \int_{\Omega} w_t^2(x, T) dx + s_2 \int_{\Omega} w^2(x, T) dx + N_2, \end{aligned}$$

где

$$s_2 = \frac{2Tr_2}{a_0 - r_3} + 4 \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0).$$

Полагая в последнем неравенстве $t = T$, с учетом условий (10), (11) получаем

$$\int_{\Omega} w^2(x, T) dx \leq \frac{3T}{(a_0 - r_3)(1 - s_2)} \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, T) dx$$

$$+ \frac{2Ts_0}{(a_0 - r_3)(1 - s_2)} \int_{\Omega} w_t^2(x, T) dx + \frac{N_2}{1 - s_2}. \quad (19)$$

В силу неравенства (19) из (18) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx \\ & \leq s_3 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, T) dx + s_4 \int_{\Omega} w_t^2(x, T) dx + N_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} s_3 &= 3 \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0) + \frac{6Tr_2}{(a_0 - r_3)(1 - s_2)} \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0), \\ s_4 &= 2s_0 \left[1 + \frac{2Tr_2}{(a_0 - r_3)(1 - s_2)} \right]. \end{aligned}$$

Полагая в данном неравенстве $t = T$, виду условий (12), (13), приходим к оценке

$$\int_{\Omega} w_t^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, T) dx \leq N_4,$$

где число N_4 зависит лишь от входных данных задачи.

Отсюда с учетом неравенства (19) из (18) получаем первую априорную оценку

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau + \int_{\Omega} w^2(x, t) dx \leq N_5, \quad (20) \end{aligned}$$

где число N_5 определяется лишь входными данными задачи.

Далее рассмотрим равенство

$$- \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau \tau} \Delta w_{\tau} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \Delta w \Delta w_{\tau} dx d\tau$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Omega} aw_{\tau} \Delta w_{\tau} \, dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} [2a_{\tau} + b]w \Delta w_{\tau} \, dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} \Delta w_{\tau}^2(x, \tau) \, dx d\tau \\
& = - \int_0^t \int_{\Omega} F_{\tau\tau} \Delta w_{\tau} \, dx d\tau - \lambda \int_0^t \int_{\Omega} d_{1\tau\tau}(x, \tau) w_t(x, T) \Delta w_{\tau} \, dx d\tau \\
& \quad - \lambda \int_0^t \int_{\Omega} d_{2\tau\tau}(x, \tau) w(x, T) \Delta w_{\tau} \, dx d\tau + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} [a_{\tau\tau} + 2b_{\tau}] u_{\tau} \Delta w_{\tau} \, dx d\tau \\
& \quad + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} b_{\tau\tau} u \Delta w_{\tau} \, dx d\tau.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям в первом и втором слагаемых левой части равенства, используя условия (15)–(17) и применяя элементарные арифметические неравенства, получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) \, dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) \, dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 \, dx d\tau \\
& \quad - \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) w_{\tau} \Delta w_{\tau} \, dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} [2a_{\tau} + b]w \Delta w_{\tau} \, dx d\tau \\
& \leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} d_{1t}^2(x, 0) w_{x_i t}^2(x, T) \, dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} d_2^2(x, 0) w_{x_i x_j}^2(x, T) \, dx \\
& \quad + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [c(x) w_{x_i}(x, T) + d_{1tx_i}(x, 0) w_t(x, T) + c_{x_i}(x) w(x, T) + c_{0x_i}(x)]^2 \, dx \\
& \quad + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} [\nu_{x_i x_j}(x) + d_{2x_i x_j}(x, 0) w(x, T) + 2d_{2x_i}(x, 0) w_{x_i}(x, T)]^2 \, dx \\
& \quad - \int_0^t \int_{\Omega} F_{\tau\tau} \Delta w_{\tau} \, dx d\tau - \lambda \int_0^t \int_{\Omega} d_{1\tau\tau}(x, \tau) w_t(x, T) \Delta w_{\tau} \, dx d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lambda \int_0^t \int_{\Omega} d_{2\tau\tau}(x, \tau) w(x, T) \Delta w_\tau \, dx d\tau + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} b_{\tau\tau} u \Delta w_\tau \, dx d\tau \\
& + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} [a_{\tau\tau} + 2b_\tau] u_\tau \Delta w_\tau \, dx d\tau. \quad (21)
\end{aligned}$$

Вновь применяя элементарные арифметические неравенства, а также неравенство Юнга, с учетом оценки (20) имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) \, dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) \, dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_\tau)^2 \, dx d\tau \\
& \leq \frac{7\delta^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_\tau)^2 \, dx d\tau + \max_{\overline{\Omega}} d_{1t}^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, T) \, dx \\
& + \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, T) \, dx + \frac{1}{2\delta^2} \int_0^t \int_{\Omega} F_{\tau\tau}^2 \, dx d\tau + N_6,
\end{aligned}$$

где число N_6 определяется лишь входными данными задачи.

Взяв $\delta^2 = \frac{1}{7}\varepsilon$, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) \, dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) \, dx \\
& + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_\tau)^2 \, dx d\tau \leq \max_{\overline{\Omega}} d_{1t}^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, T) \, dx \\
& + \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, T) \, dx + N_7,
\end{aligned}$$

где число N_7 определяется входными данными задачи, а также числом ε .

Отсюда приходим к неравенству

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) \, dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) \, dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{\bar{\Omega}} d_{1t}^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, T) dx \\ &+ \max_{\bar{\Omega}} d_2^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, T) dx + N_7. \end{aligned}$$

Полагая в последнем неравенстве $t = T$ и учитывая условия (10), (11), (13), получим оценку

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, T) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, T) dx \leq N_8,$$

где число N_8 определяется входными данными задачи и числом ε .

Отсюда приходим к второй априорной оценке в случае, когда ε является фиксированной величиной:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau \leq N_9, \quad (22)$$

где число N_9 определяется входными данными задачи, а также числом ε .

Умножая равенство $(14_{\varepsilon \lambda})$ на $w_{\tau \tau}$, интегрируя по частям и используя условие (15), а также оценки (20) и (22), приходим к третьей априорной оценке

$$\int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau \tau}^2 dx d\tau \leq N_{10},$$

где число N_{10} определяется входными данными задачи и числом ε .

Отсюда получаем финальную априорную оценку в случае, когда ε является фиксированной величиной:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} w^2(x, t) dx + \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2(x, \tau) dx d\tau + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \int_{\Omega} \Delta w^2(x, t) dx \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau\tau}^2(x, \tau) dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau \leq N,$$

число N в этой оценке определяется входными данными задачи, а также числом ε (см. [21]).

Из данной оценки и следуют открытость и замкнутость множества Λ . Как уже говорилось выше, непустота, открытость и замкнутость множества Λ означает его совпадение со всем отрезком $[0, 1]$, а следовательно, и разрешимость краевой задачи (14_{ε}) , (2), (3), (15)–(17) при фиксированном ε в пространстве V_1 .

На следующем шаге рассмотрим случай, когда ε не является фиксированной величиной. Вновь рассмотрим краевую задачу (14_{ε}) , (2), (3), (15)–(17).

Для решений этой краевой задачи имеет место равномерная по ε первая априорная оценка (20).

Для получения второй априорной оценки умножим равенство (14_{ε}) на функцию Δw_t . Повторив ряд операций, что были произведены в случае, когда число ε являлось фиксированной величиной, придем к неравенству (21) с $\lambda = 1$.

С учетом первой априорной оценки имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau \\ & - \int_0^t \int_{\Omega} aw_{\tau} \Delta w_{\tau} dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} [2a_{\tau} + b]w \Delta w_{\tau} dx d\tau \\ & \leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} d_{1t}^2(x, 0) w_{x_i t}^2(x, T) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} d_2^2(x, 0) w_{x_i x_j}^2(x, T) dx \\ & + \left| \int_0^t \int_{\Omega} F_{\tau\tau} \Delta w_{\tau} dx d\tau \right| + \left| \int_0^t \int_{\Omega} d_{1\tau\tau} w_t(x, T) \Delta w_{\tau} dx d\tau \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \int_0^t \int_{\Omega} d_{2\tau\tau} w(x, T) \Delta w_{\tau} dx d\tau \right| + \left| \int_0^t \int_{\Omega} b_{\tau\tau} u \Delta w_{\tau} dx d\tau \right| \\
& + \left| \int_0^t \int_{\Omega} [a_{\tau\tau} + 2b_{\tau}] u_{\tau} \Delta w_{\tau} dx d\tau \right| + K_1,
\end{aligned}$$

где число K_1 определяется лишь входными данными задачи и не зависит от ε .

Интегрируя в последнем неравенстве по частям, используя условие (15), применяя неравенство Юнга, а также учитывая первую априорную оценку, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx \\
& + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + a_0 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq \delta_0^2 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \\
& + \max_{\overline{\Omega}} d_{1t}^2(x, 0) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, T) dx + \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, T) dx \\
& + \sum_{i=1}^n \left| \int_0^t \int_{\Omega} F_{\tau\tau x_i} w_{x_i \tau} dx d\tau \right| + \sum_{i=1}^n \left| \int_0^t \int_{\Omega} d_{1\tau\tau x_i} w_t(x, T) w_{x_i \tau} dx d\tau \right| \\
& + \sum_{i=1}^n \left| \int_0^t \int_{\Omega} d_{1\tau\tau} w_{x_i t}(x, T) w_{x_i \tau} dx d\tau \right| + \sum_{i=1}^n \left| \int_0^t \int_{\Omega} d_{2\tau\tau x_i} w(x, T) w_{x_i \tau} dx d\tau \right| \\
& + \sum_{i=1}^n \left| \int_0^t \int_{\Omega} d_{2\tau\tau} w_{x_i}(x, T) w_{x_i \tau} dx d\tau \right| + \sum_{i=1}^n \left| \int_0^t \int_{\Omega} b_{\tau\tau x_i} u w_{x_i \tau} dx d\tau \right| \\
& + \sum_{i=1}^n \left| \int_0^t \int_{\Omega} b_{\tau\tau} u_{x_i} w_{x_i \tau} dx d\tau \right| + \sum_{i=1}^n \left| \int_0^t \int_{\Omega} [a_{\tau\tau} + 2b_{\tau}] u_{x_i \tau} w_{x_i \tau} dx d\tau \right| \\
& + \sum_{i=1}^n \left| \int_0^t \int_{\Omega} [a_{\tau\tau} + 2b_{\tau}]_{x_i} u_{\tau} w_{x_i \tau} dx d\tau \right| + K_2,
\end{aligned}$$

где число K_2 определяется лишь входными данными задачи.

Применяя неравенство Юнга, элементарные неравенства вложения, используя оценку (20), придем к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dxd\tau \\ & + a_1 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dxd\tau \leq \left[\max_{\overline{\Omega}} d_{1t}^2(x, 0) + \frac{\delta_2^2}{2} T \right] \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, T) dx \\ & + \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, T) dx + K_3, \end{aligned} \quad (23)$$

где $a_1 = a_0 - 5\delta_0^2 - \frac{1}{2\delta_2^2} \max_{\overline{Q}} d_{1tt}^2(x, t)$, число K_3 определяется лишь входными данными задачи.

Взяв $\delta_0^2 = \frac{\delta_1^2}{10}$, с учетом условия (10) теоремы приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx \\ & \leq \left[\max_{\overline{\Omega}} d_{1t}^2(x, 0) + \frac{\delta_2^2}{2} T \right] \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, T) dx \\ & + \max_{\overline{\Omega}} d_2^2(x, 0) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, T) dx + K_3. \end{aligned}$$

Положив в последнем неравенстве $t = T$ и используя условия (10), (11), (13) теоремы, получим соотношение

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, T) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, T) dx \leq K_4,$$

где K_4 зависит лишь от входных данных задачи и не зависит от ε .

С учетом данного из неравенства (23) получаем вторую равномерную по ε априорную оценку:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq K_5,$$

где число K_5 определяется лишь входными данными задачи и не зависит от ε .

Очевидным следствием первых двух априорных оценок является третья оценка

$$\int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau \tau}^2 dx d\tau \leq K_6,$$

где постоянная K_6 зависит лишь от входных данных задачи.

Результатом трех априорных оценок является следующая финальная априорная оценка:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w^2(x, t) dx + \int_{\Omega} w_t^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2 dx d\tau \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x, t) dx \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau \tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau \leq K, \quad (24) \end{aligned}$$

где K — постоянная, определяемая лишь входными данными задачи, не зависящая от величины ε .

Эта оценка и дает нам разрешимость задачи (14 $_{\varepsilon}$), (2), (3), (15)–(17) в пространстве V_0 . Найденная функция $u(x, t) = u^{\varepsilon}(x, t)$ является решением уравнения (14 $_{\varepsilon \lambda}$) с $\lambda = 1$.

Учитывая, что $w^{\varepsilon} = u_{tt}^{\varepsilon}$, исходя из оценки (24), имеем

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{ttt x_i}^{\varepsilon 2}(x, t) dx \leq K.$$

При $t = T$ справедлива оценка

$$\|u_{ttt}^{\varepsilon}(x, T)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C.$$

Подпоследовательность $\{u_{ttt}^\varepsilon(x, T)\}$ равномерно ограничена в $W_2^1(\Omega)$. Отсюда и из оценки (24) вытекает, что существует функция $u(x, t)$ такая, что при $t \rightarrow \infty$ имеют место следующие сходимости: $u_{ttt}^m(x, T) \rightarrow u_{ttt}(x, T)$ сильно в $L_2(\Omega)$, $u_{tttt}^m(x, t) \rightarrow u_{tttt}(x, t)$, $u_{ttt}^m(x, t) \rightarrow u_{ttt}(x, t)$, $u_{tt}^m(x, t) \rightarrow u_{tt}(x, t)$, $\Delta u_{tt}^m(x, t) \rightarrow \Delta u_{tt}(x, t)$, $\sqrt{\varepsilon_m} \Delta u_{ttt}^m(x, t) \rightarrow 0$ при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ слабо в $L_2(Q)$.

Из указанных сходимостей следует, что для предельной функции выполняется уравнение (14). Таким образом, найденная функция является решением краевой задачи (14), (2), (3), (15)–(17).

Проинтегрировав уравнение (14) по переменной τ от 0 до t и учитывая условия (2), (3), (17), получим

$$\begin{aligned} & u_{ttt}(x, t) - d_{1t}(x, 0)u_{ttt}(x, T) - c(x)u_{tt}(x, T) - c_0(x) - \Delta u_t(x, t) + \Delta u_1(x) \\ & + a(x, t)u_{tt}(x, t) - a(x, 0)[d_1(x, 0)u_{ttt}(x, T) + d_2(x, 0)u_{tt}(x, T) + \nu(x)] \\ & + a_t(x, t)u_t(x, t) - a_t(x, 0)u_1(x) + b(x, t)u_t(x, t) - b(x, 0)u_1(x) + b_t(x, t)u(x, t) \\ & - b_t(x, 0)u_0(x) = F_t(x, t) - F_t(x, 0) + d_{1t}(x, t)u_{ttt}(x, T) - d_{1t}(x, 0)u_{ttt}(x, T) \\ & \quad + d_{2t}(x, t)u_{tt}(x, T) - d_{2t}(x, 0)u_{tt}(x, T). \end{aligned}$$

С учетом вида функций $d_{1t}(x, 0)$, $c(x)$, $c_0(x)$, $\gamma(x)$ приходим к равенству

$$\begin{aligned} & u_{ttt}(x, t) - \Delta u_t(x, t) + [a(x, t)u_t(x, t)]_t + [b(x, t)u(x, t)]_t \\ & = F_t(x, t) + d_{1t}(x, t)u_{ttt}(x, T) + d_{2t}(x, t)u_{tt}(x, T). \end{aligned} \quad (25)$$

Вновь интегрируя по переменной τ от 0 до t и учитывая условия (2), (3) и вид функций $d_1(x, t)$, $d_2(x, t)$, $F(x, t)$, $\nu(x)$, имеем

$$\begin{aligned} & u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + a(x, t)u_t(x, t) + b(x, t)u(x, t) \\ & = f(x, t) + h_1(x, t)A_2(x) + h_2(x, t)A_1(x) \\ & + h_1(x, t)B_2(x)u_{ttt}(x, T) + h_2(x, t)B_1(x)u_{ttt}(x, T) \\ & + h_1(x, t)C_2(x)u_{tt}(x, T) + h_2(x, t)C_1(x)u_{tt}(x, T). \end{aligned}$$

Положив $q_1(x) = \tilde{q}_1(x)$ и $q_2(x) = \tilde{q}_2(x)$, получаем, что эти функции и функция $u(x, t)$ будут связаны в цилиндре Q уравнением (1).

Вновь интегрируя равенство (25) по переменной t от 0 до T и используя условия (2), (3), (9) и (16) и вид функций $\nu(x)$, $d_1(x, t)$, $d_2(x, t)$, $F(x, t)$, получаем

$$\begin{aligned} & u_{tt}(x, T) - \Delta u(x, T) + a(x, T)u_t(x, T) + b(x, T)u(x, T) \\ & = f(x, T) + h_1(x, T)A_2(x) + h_2(x, T)A_1(x) + h_1(x, T)B_2(x)u_{ttt}(x, T) \\ & + h_2(x, T)B_1(x)u_{ttt}(x, T) + h_1(x, T)C_2(x)u_{tt}(x, T) + h_2(x, T)C_1(x)u_{tt}(x, T). \end{aligned}$$

Далее, учитывая вид функций $A_i(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$, $i = 1, 2$, $\alpha(x)$ и условие (8) теоремы, приходим к равенству

$$a(x, T)[u_t(x, T) - v_1(x)] + b(x, T)[u(x, T) - v_0(x)] - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}[u(x, T) - v_0(x)] = 0,$$

из которого и получаем выполнимость условий переопределения.

Выполнимость для найденной функции $u(x, t)$ условия (4) следует из равенства (15), а также условий согласования.

Таким образом, найденные нами функции $u(x, t)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ есть решение первоначальной обратной задачи (1)–(6) из требуемых классов.

Теорема 1 доказана.

Введем некоторые дополнительные обозначения.

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(x) &= -\Delta u_0(x) + a(x, 0)u_1(x) + b(x, 0)u_0(x) - f(x, 0), \\ \tilde{\beta}(x) &= -\Delta u_1(x) + \{a_t(x, 0) + b(x, 0)\}u_1(x) + b_t(x, 0)u_0(x) - f_t(x, 0), \\ \tilde{A}_i(x) &= (-1)^i \frac{h_i(x, 0)\tilde{\beta}(x) - \tilde{\alpha}(x)h_{it}(x, 0)}{h_2(x, 0)h_{1t}(x, 0) - h_1(x, 0)h_{2t}(x, 0)}, \quad i = 1, 2, \\ \tilde{B}_i(x) &= (-1)^i \frac{h_i(x, 0)}{h_2(x, 0)h_{1t}(x, 0) - h_1(x, 0)h_{2t}(x, 0)}, \quad i = 1, 2, \\ \tilde{c}_i(x) &= (-1)^i \frac{h_i(x, 0)a(x, 0) - h_{it}(x, 0)}{h_2(x, 0)h_{1t}(x, 0) - h_1(x, 0)h_{2t}(x, 0)}, \quad i = 1, 2, \\ \tilde{d}_1(x, t) &= h_1(x, t)\tilde{B}_2(x) + h_2(x, t)\tilde{B}_1(x), \\ \tilde{d}_2(x, t) &= h_1(x, t)\tilde{c}_2(x) + h_2(x, t)\tilde{c}_1(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(x, T) &= \tilde{d}_{2t}(x, T) - a(x, T)\tilde{d}_2(x, T), \\
\tilde{F}(x, t) &= f(x, t) + h_1(x, t)\tilde{A}_2(x) + h_2(x, t)\tilde{A}_1(x), \\
r_1 &= \frac{1 + \delta_1^2}{2} + \frac{1}{2\delta_2^2} \max_{\overline{Q}} \tilde{d}_{1tt}^2(x, t) \\
&\quad + \frac{1}{2\delta_3^2} \max_{\overline{Q}} \tilde{d}_{2tt}^2(x, t) + \frac{1}{2} \max_{\overline{Q}} (a_{tt}(x, t) + 2b_t(x, t))^2 + \frac{1}{2} \max_{\overline{Q}} b_{tt}^2(x, t), \\
r_2 &= \frac{3}{2} \left[\max_{\overline{\Omega}} \tilde{c}^2(x, T) + \max_{\overline{\Omega}} \tilde{d}_{2x_i}^2(x, T) \right] \\
&\quad + \frac{\delta_3^2 T}{2} + 3T \max_{\overline{\Omega}} \tilde{d}_2^2(x, T) \left[\frac{1}{2} \max_{\overline{Q}} (2a_t(x, t) + b(x, t))^2 + T + 2T^4 \right], \\
r_3 &= r_1 + 3T^2 \left[\frac{1}{2} \max_{\overline{Q}} (2a_t(x, t) + b(x, t))^2 + T^2 + 2T^4 \right], \\
r_4 &= (a_0 - r_3)(1 - 4 \max_{\overline{\Omega}} \tilde{d}_2^2(x, T)).
\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть для функций $a(x, t)$, $b(x, t)$, $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $v_0(x)$, $v_1(x)$ и $f(x, t)$ выполняются включения $a(x, t) \in C^3(Q)$, $b(x, t) \in C^3(Q)$, $h_i(x, t) \in W_\infty^2(Q)$, $h_{it}(x, t) \in W_\infty^2(Q)$, $h_{itt}(x, t) \in W_2^2(Q)$, $i = 1, 2$, $u_0(x) \in W_2^4(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $u_1(x) \in W_2^3(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $v_j(x) \in W_2^4(\Omega) \cap W_\infty^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $j = 0, 1$, $f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$, $f_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$, $f_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$, $\tilde{F}_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$.

Кроме того, пусть справедливы условия

$$a(x, t) \leq -\bar{a}_0 < 0, \quad (x, t) \in \overline{Q};$$

$$h_1(x, 0)h_{2t}(x, 0) - h_2(x, 0)h_{1t}(x, 0) \neq 0, \quad x \in \overline{\Omega};$$

$$h_1(x, T)h_2(x, 0) - h_2(x, T)h_1(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Пусть существуют $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ такие, что выполняются следующие условия:

$$\bar{a}_0 - r_3 > 0; \quad r_4 - 2Tr_2 > 0;$$

$$1 - 3 \max_{\Omega} \tilde{d}_2^2(x, T) \cdot \frac{r_4}{r_4 - 2Tr_2} > 0;$$

$$1 - (3 \max_{\Omega} \tilde{d}_{1t}^2(x, T) + \delta_2^2 T) \cdot \frac{r_4}{r_4 - 2Tr_2} > 0.$$

Тогда обратная задача (1)–(6) имеет решение $\{u(x, t), q_1(x), q_2(x)\}$ такое, что $u(x, t) \in V_0$, $q_i(x) \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ проводится полностью аналогично доказательству теоремы 1 с изменениями лишь в том, что в соответствующей краевой задаче для уравнения четвертого порядка условия задаются при $t = T$ и регуляризирующее слагаемое есть $\varepsilon \Delta u_{tttt}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
2. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
3. Romanov V. G. Investigation methods for inverse problems. Utrecht (The Netherlands): VSP BV, 2002.
4. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods solving inverse problems in mathematical physic. New York: Marcel Decce, 2000.
5. Anikonov Yu. E. Multidimensional inverse and Ill-posed problems for differential equations. Utrecht (The Netherlands): VSP BV, 1995.
6. Anikonov Yu. E. Inverse and Ill-posed sources problems. Utrecht (The Netherlands): VSP BV, 1997.
7. Denisov A. M. Elements of theory of inverse problems. Utrecht (The Netherlands): VSP BV, 1999.
8. Кабанихин С. И., Исаков К. Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: НГУ, 2001.
9. Kabanikhin S. I., Lorenzi A. Identification problems of wave phenomena — theory and numerics. Utrecht (The Netherlands): VSP BV, 2000.
10. Lorenzi A. An introduction to identification problems via functional analisis. Utrecht (The Netherlands): VSP BV, 2001.
11. Belov Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equations. Utrecht (The Netherlands): VSP BV, 2002.
12. Klibanov M. V., Timonov A. A. Carleman estimates for coefficient inverse problems and numerical applications. Utrecht (The Netherlands): VSP BV, 2004.
13. Бубнов В. А. О корректных краевых и обратных задачах для некоторых классов эволюционных уравнений: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1989. 287с.
14. Искендеров А. Д. Некоторые обратные задачи об определении правых частей дифференциальных уравнений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1976. № 2, С. 58–63.
15. Амиров А. Х. К вопросу о разрешимости обратных задач // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290, № 2. С. 268–270.

-
16. Амиров А. Х. К вопросу о разрешимости обратных задач // Сиб. мат. журн. 1987. Т 28, № 6. С. 3–12.
 17. Сафиуллова Р. Р. Некоторые задачи для одного класса уравнений составного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 3, № 2. С. 58–63.
 18. Кожанов А. И. Задача определения решения и правой части специального вида в параболическом уравнении // Обратные задачи и информационные технологии. Югорский НИИ инф. технологий. 2002. Т. 1, № 3. С. 13–41.
 19. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht (The Netherlands): VSP BV, 1999.

г. Стерлитамак

1 октября 2008 г.

К ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ
ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ. III
Ф. М. Федоров

Статья является продолжением работ [1, 2]. Сохраним прежние нумерации предложений и формул.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Вопрос определения частного решения для более общих случаев свободных членов b_j неоднородной периодической системы (49) остается открытым.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Очевидно, в силу изоморфизма решений систем (2) и (35) функция $f(x)$ (12) является *характеристикой* также и для периодической системы (35).

Рассмотрим пример решения неоднородной периодической бесконечной системы.

ПРИМЕР 2. Пусть задана следующая неоднородная периодическая гауссова система:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2j+2p+1)!}{(2p)!} x_{j+p} = b^j, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad b = \text{const} > 0. \quad (69)$$

Проверим периодичность системы (69). Поскольку коэффициенты данной системы имеют вид $a_{j,j+p} = \frac{(2j+2p+1)!}{(2p)!}$, то $a_{j,j} = (2j+1)!$, следовательно, числа \bar{a}_j , входящие в формулу (36), останутся такими же, как и для примера 1. Поэтому произведение $\prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k}$ равно

$$\prod_{k=0}^{p-1} (2j+2k+2)(2j+2k+3) = \frac{(2j+2p+1)!}{(2j+1)!}.$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} a_{j,j+p} &= \frac{(2j+2p+1)!}{(2p)!} = \frac{(2j+1)!(2j+2p+1)!}{(2p)!(2j+1)!} \\ &= \frac{1}{(2p)!} (2j+1)! \prod_{k=0}^{p-1} (2j+2k+2)(2j+2k+3) = a_p a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k}, \end{aligned}$$

где

$$a_p = \frac{1}{(2p)!}, \quad a_{j,j} = (2j+1)!, \quad \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k} = \frac{(2j+2p+1)!}{(2j+1)!},$$

тем самым показана периодичность системы (69).

Очевидно, $b^{j+p} = b^j b^p$, т. е. для свободных членов системы (69) выполняется соотношение (50). Учитывая, что $\bar{b}_p = b^p$, рассмотрим ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p \bar{b}_p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b^p}{(2p)!} = \operatorname{ch}(\sqrt{b}).$$

Следовательно, имеем

$$B^* = \frac{1}{\sum_{p=0}^{\infty} a_p \bar{b}_p} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{b})}.$$

Согласно теореме 13 частным решением системы (69) служит выражение

$$x_i = \frac{b_i B^*}{a_{i,i}} = \frac{b^i}{(2i+1)! \operatorname{ch}(\sqrt{b})}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (70)$$

Проверим является ли выражение (70) решением системы (69). Подставляя (70) в систему (69), получим

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2j+2p+1)! b^{j+p}}{(2p)!(2j+2p+1)! \operatorname{ch}(\sqrt{b})} = b^j \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b^p}{(2p)! \operatorname{ch}(\sqrt{b})} = b^j, \quad j = 0, 1, \dots,$$

т. е. действительно выражение (70) служит решением системы (69).

В соответствии с теоремой 18 метод редукции в его узком понимании для бесконечной системы (69) сходится к решению (70).

Согласно общей теории линейных уравнений для нахождения общего решения неоднородной системы (69) необходимо найти общее решение однородной системы, ассоциированной с системой (69), т. е. системы (69) с нулевыми правыми частями.

В силу теорем 10 и 11 необходимо найти нули характеристики периодической системы (69).

Составим характеристику $f(x)$ системы (69)

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p x^p = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{(2p)!} x^{2p}. \quad (71)$$

Найдем нули $\frac{1}{s}$ характеристики (71), т. е. решаем уравнение

$$f(1/s) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{(2p)! s^p} = \cos(1/\sqrt{s}) = 0.$$

Отсюда заключаем, что $s \equiv s_k = 4/\pi^2(2k+1)^2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В силу теоремы 10 любое фундаментальное решение приведенной системы (69) будет иметь следующий вид:

$$x_i^{(k)} = \frac{(-1)^i \pi^{2i} (2k+1)^{2i} x_0}{(2i+1)! 2^{2i}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (72)$$

Тогда на основании теоремы 11 и формул (70) и (72) общее решение неоднородной системы (69) запишется так:

$$x_i = \sum_{k=1}^M \frac{(-1)^i \pi^{2i} (2k+1)^{2i} C_k}{(2i+1)! 2^{2i}} + \frac{b^i}{(2i+1)! \operatorname{ch}(\sqrt{b})}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (73)$$

где C_k — произвольные постоянные. Случай $M = \infty$ требует дополнительного исследования.

Относительно рассмотренного примера 2 сделаем следующее существенное замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Существующими методами исследования бесконечных систем невозможно решить систему примера 2, хотя бы потому, что

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{j,j+p}| = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2j+2p+1)!}{(2p)!} = \infty \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots,$$

кроме того, свободные члены $b_j = b^j$ могут быть не ограничены в совокупности, скажем, при $b > 1$.

Далее исследуем периодические бесконечные системы, характеристика которых является многочленом (полиномом) m -й степени.

В данном случае рассматриваемая однородная периодическая система будет иметь вид

$$\sum_{p=0}^m a_{j,j+p} x_{j+p} = 0, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad m \geq 1, \quad (74)$$

где коэффициенты $a_{j,j+p}$ удовлетворяют условиям периодичности (37), т. е. $a_{j,j+p} = a_p a_{j+p,j+p}$. Следовательно, характеристика $f(x)$ данной системы (74) будет многочленом m -го порядка

$$f(x) = \sum_{p=0}^m (-1)^p a_p x^p. \quad (75)$$

Как видим, каждое уравнение системы (74) содержит только конечное число неизвестных, а характеристика системы $f(x)$ является конечной суммой и именно эти обстоятельства обуславливают отдельное рассмотрение систем такого вида.

Из коэффициентов a_p полинома (75) можно также составить последовательность определителей $A_n(m)$ подобно последовательности (10), при этом при $n \leq m$ последовательность будет такая же, как и (10), а при $n > m$ имеем последовательность определителей n -го порядка:

$$A_n(m) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}. \quad (76)$$

Кроме того, можно составить последовательность (9), которая для

характеристики (75) будет выглядеть следующим образом:

$$s_n(m) = \begin{cases} a_1 + \sum_{p=2}^n \frac{(-1)^{p-1} a_p}{\prod_{k=1}^{p-1} s_{n-k}(m)}, & \text{если } n \leq m, \\ a_1 + \sum_{p=2}^m \frac{(-1)^{p-1} a_p}{\prod_{k=1}^{p-1} s_{n-k}(m)}, & \text{если } n > m, \end{cases}$$

где $s_1 = a_1$, $a_0 = 1$.

В дальнейшем нас будет интересовать поведение последовательности $s_n(m)$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому достаточно рассмотреть второе соотношение в последнем выражении:

$$s_n(m) = a_1 + \sum_{p=2}^m \frac{(-1)^{p-1} a_p}{\prod_{k=1}^{p-1} s_{n-k}(m)}. \quad (77)$$

После такого уточнения последовательностей $s_n(m)$ и определителей $A_n(m)$ вышеизложенная теория периодических систем остается в силе и для систем (74). Вместе с тем можно указать некоторые результаты, присущие только системам типа (74).

Теорема 19. *Периодическая однородная бесконечная система (74) всегда имеет хотя бы одно фундаментальное решение, а в общем случае может иметь m фундаментальных решений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ очевидным образом следует из того, что при $m \geq 1$ характеристика (75) имеет хотя бы один нуль, а в общем случае может иметь m различных нулей, следовательно, в соответствии с замечанием 5 система (74) имеет соответствующие фундаментальные решения.

Пусть однородная система (74) является приведенной для некоторой неоднородной бесконечной системы.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Для таких неоднородных бесконечных систем все вышеприведенные результаты касательно неоднородных систем остаются верными.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Неоднородная бесконечная система, для которой система (74) является приведенной, не может иметь единственного решения.

В силу конечности суммы в разложении характеристики $f(x)$ (75) в степенной ряд для исследования сходимости метода редукции в его широком понимании для системы (74) можно не использовать условие **A**, которое необходимым образом используется, когда характеристика $f(x)$ является рядом.

Прежде всего преобразуем характеристику (75) следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^m a_m \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^{m+p} a_p}{a_m} x^p = (-1)^m a^m \varphi(x) \\ &= (-1)^m a_m \sum_{p=0}^m \bar{a}_p x^{m-p}, \end{aligned}$$

где $\bar{a}_p = (-1)^p a_{m-p}/a_m$.

Очевидно, нули функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают. Если черточки над коэффициентами в разложении функции $\varphi(x)$ опустить, то будем иметь

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^m a_p x^{m-p} = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m, \quad a_0 = 1. \quad (78)$$

Ясно, что в случае ряда такое преобразование неосуществимо. При выполнении условия **A**, как показано выше, процесс (77) сходится для коэффициентов многочлена (75), если его рассмотреть как ряд. Для коэффициентов многочлена (78) сходимость процесса (77) изучена в работе автора [3], поэтому приведем только основные результаты без доказательств. Доказательства аналогичны доказательствам соответствующих утверждений работы [3], но с учетом того, что в определителях (76) под коэффициентами a_i подразумеваются коэффициенты $(-1)^i a_i$.

Из последовательности $\{A_n(m)\}$ можно составить последовательность

$$\bar{s}_n(m) = \frac{A_n(m)}{A_{n-1}(m)}. \quad (79)$$

Теорема 20. Пусть характеристика (75) (то же, что и (78)) имеет только вещественные корни, причем наибольший по модулю корень единственный. Тогда последовательность (79) сходится и справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n = \lambda_{j_0}$, где $|\lambda_{j_0}| = \max_j |\lambda_j|$, j пробегает все корни.

Следствие 13. Если последовательность (79) расходится, то характеристика (75) имеет либо комплексные корни, либо несколько вещественных корней, имеющих максимальные модули.

Следствие 14. Если для некоторого фиксированного $n = n_0$ определитель $A_{n_0}(m)$ равен 0, то характеристика (75) имеет либо комплексные корни, либо несколько вещественных корней, имеющих максимальные модули.

Теорема 21. Пусть характеристика (75) имеет комплексные корни. Тогда последовательность (79)

1) сходится, если $\max_j \rho_j < \max_k |\lambda_k| = |\lambda_{k_0}|$, причем λ_{k_0} является единственным вещественным корнем, имеющим максимальный модуль,

2) расходится, если $\max_j \rho_j \geq \max_k |\lambda_k| = |\lambda_{k_0}|$, где ρ_j — модуль j -го комплексного корня, λ_k — вещественные корни, индексы j и k пробегают соответственно комплексные и вещественные корни.

Следствие 15. Если характеристика (75) имеет только комплексные корни, то последовательность (79) расходится.

Теорема 22. Последовательность (79) можно преобразовать к виду

$$\bar{s}_n(m) = \frac{A_n(m)}{A_{n-1}(m)} = s_n(m) = -a_1 - \sum_{p=2}^m \frac{a_p}{\prod_{k=1}^{p-1} s_{n-k}(m)},$$

если $n > m$;

$$\bar{s}_n(m) = \frac{A_n(m)}{A_{n-1}(m)} = s_n(m) = -a_1 - \sum_{p=2}^n \frac{a_p}{\prod_{k=1}^{p-1} s_{n-k}(m)},$$

если $\leq m$, где $s_1 = -a_1$.

Теорема 23. Для периодической системы (74) с характеристикой (75) при выполнении условий теорем 20 и 21 метод редукции в его широком понимании сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ очевидным образом следует из теорем 22, 20 и 21.

Следствие 16. Если характеристика (75) имеет только комплексные корни, то метод редукции в его широком понимании не сходится.

В заключение рассмотрим сначала примеры применения последовательности (77) для конкретных уравнений, например, при $m = 2$, т. е. для решения полиномиального уравнения второй степени, а затем несколько примеров решения периодических систем типа (74) с полиномиальной характеристикой (75).

ПРИМЕР 3. Пусть задан следующий полином второй степени ($m = 2$):

$$f(x) = 2 - 7x + 3x^2 = 2 \left(1 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}x^2 \right). \quad (80)$$

Найти минимальный и максимальный по модулю нуль функции $f(x)$.

РЕШЕНИЕ. В данном случае процесс (77) будет иметь вид

$$s_n = a_1 - \frac{a_2}{s_{n-1}}, \quad s_1 = a_1. \quad (81)$$

Сначала функцию $f(x)$ будем рассматривать как урезанный ряд. В этом случае $a_0 = 1$, $a_1 = 7/2$, $a_2 = 3/2$ и

$$s_n = \frac{7}{2} - \frac{3}{2s_{n-1}}, \quad s_1 = \frac{7}{2}. \quad (82)$$

Вычисления по алгоритму (82) убеждают нас, что $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 3$. На основании теоремы 3 число $x_0 = 1/s = 1/3$ является минимальным по модулю нулем функции $f(x)$. Легко убедиться в том, что число $1/3$ действительно является нулем функции $f(x)$.

Теперь функцию $f(x)$ будем рассматривать как многочлен, заданный в виде

$$f(x) = 3x^2 - 7x + 2 = 3 \left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} \right).$$

Тогда имеем $a_0 = 1$, $a_1 = 7/3$, $a_2 = 2/3$ и

$$s_n = \frac{7}{3} - \frac{2}{3s_{n-1}}, \quad s_1 = \frac{7}{3}. \quad (83)$$

Вычисления по алгоритму (83) убеждают нас, что $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 2$. На основании теорем 22 и 20 число $s = 2$ является максимальным по модулю нулем функции $f(x)$. Очевидно, число 2 действительно является нулем функции $f(x)$, более того, число $1/3$ является минимальным по модулю, а число 2 — максимальным по модулю нулями функции $f(x)$.

Данный пример показывает, что процесс (81) может быть использован для функции $f(x)$ двояко: для получения минимального и максимального по модулю нулей функции $f(x)$. При этом в первом случае в алгоритме (81) коэффициенты разложения функции $f(x)$ используются в прямом порядке, а во втором случае — в обратном порядке, но в обоих случаях с учетом приведения первого коэффициента к единице ($a_0 = 1$). В связи с этим можно сделать одно замечание относительно метода редукции в его широком понимании, когда он применяется для решения периодической бесконечной системы, имеющей характеристику-многочлен. Если в алгоритме (81) коэффициенты разложения функции $f(x)$ используются в прямом порядке, то соответствующий метод редукции можно называть *прямой редукцией*, а если в обратном порядке, то — *обратной редукцией*. Очевидно, в случае, когда характеристика $f(x)$ является степенным рядом, всегда используется только прямая редукция.

Покажем принципиальную возможность получения точного значения нуля многочлена $f(x)$ с помощью алгоритма (81) на основе решения следующего примера.

ПРИМЕР 4. Пусть задан многочлен $f(x) = x^2 - x - 1$. Найти максимальный по модулю нуль функции $f(x)$.

РЕШЕНИЕ. Если положить $A_0 = A_1 = 1$, то последовательность определителей A_n будет хорошо известной последовательностью Фибоначчи:

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}, \quad (84)$$

т. е. $A_n = A_n(2) = F_n$, где F_n — числа Фибоначчи.

Последовательно подставляя соотношение (84) в себя, можно показать, что [4]

$$A_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_{n-1-k}^k A_1 + \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]} C_{n-2-k}^k A_0,$$

где $[z]$ — целая часть z и C_j^k — биномиальные коэффициенты. Поскольку известно [5], что

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n-k}^k x^k = 2^{-n-1}(1+4x)^{-1/2}[(1+\sqrt{1+4x})^{n+1} - (1-\sqrt{1+4x})^{n+1}],$$

то

$$A_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1} - (1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1} \sqrt{5}}.$$

Следовательно,

$$s_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{(1+\sqrt{5})^n}{2(1+\sqrt{5})^{n-1}} \left[\frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n + \frac{2}{1+\sqrt{5}} - \frac{2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{(1+\sqrt{5})^n}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} - \frac{2(1-\sqrt{5})^{n-2}}{(1+\sqrt{5})^{n-1}}} \right],$$

тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, таким образом, по теореме 20 получим точное значение максимального по модулю нуля функции $f(x)$.

Для численного решения (81) дает

$$s_n = 1 + \frac{1}{s_{n-1}}, \quad s_1 = 1.$$

Как нетрудно видеть, последнее выражение представляет собой цепную дробь, а s_n является подходящей дробью [6].

Уместно заметить, что данный пример рассмотрен в работе автора [3], но, к сожалению, там допущена ошибка, хотя она на окончательный результат не влияет.

Перейдем к примерам решения бесконечных периодических систем с полиномиальной характеристикой m -й степени. Сначала остановимся на самом простейшем примере, когда $m = 1$.

ПРИМЕР 5. Пусть задана следующая неоднородная периодическая гауссова система:

$$\sum_{p=0}^1 a_{j,j+p} x_{j+p} = b^j, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad (85)$$

где $a_{j,j+p} = a_p a_{j+p,j+p}$, $a_0 = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = a_3 = \dots = 0$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку для свободных членов b_j системы (85) выполняется соотношение (50), то на основании теоремы 13 частное решение неоднородной системы (85) имеет вид

$$x_i = \frac{b^i B^*}{a_{i,i}}, \quad \text{где } B^* = \frac{1}{1+ab}, \quad 1+ab \neq 0.$$

Чтобы найти общее решение системы (85), необходимо определить фундаментальные решения приведенной системы, если они существуют. Для этого найдем нуль характеристики $f(x) = 1+ax$ системы (85). Отсюда определим единственный нуль x_0 функции $f(x)$: $x_0 = -1/a$, и на основании теоремы 3 имеем $s = -a$. По теореме 10 единственное фундаментальное решение запишется так: $x_i = (-1)^i / a_{i,i} a^i$, таким образом, в соответствии с теоремой 11 общее решение периодической системы (85) можно выписать в виде

$$x_i = C \frac{(-1)^i}{a_{i,i} a^i} + \frac{b^i}{a_{i,i}(1+ab)} \quad \forall a_{i,i} \neq 0, \quad 1+ab \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (86)$$

где C — произвольная константа.

Подставляя выражение (86) в левую часть системы (85), легко убедиться, что оно действительно является искомым решением системы.

Очевидно, метод редукции в его широком понимании сходится для системы (85).

Рассмотрим примеры, когда характеристика периодической системы является многочленом второй степени, т. е. $m = 2$.

ПРИМЕР 6. Пусть задана периодическая однородная бесконечная система, характеристика которой есть функция $f(x)$ примера 3. Найти общее решение данной системы.

РЕШЕНИЕ. Здесь исходная система имеет вид

$$\sum_{p=0}^2 a_{j,j+p} x_{j+p} = 0, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad (87)$$

где

$$a_{j,j+p} = a_p a_{j+p,j+p} \quad \forall a_{j,j} \neq 0, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 7, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = a_4 = \dots = 0.$$

Исходя из примера 3, заключаем, что нулями характеристики $f(x) = 2 - 7x + 3x^2$ являются числа $1/3$ и 2 , тогда соответственно величина s будет иметь два значения: $s = 3$ и $s = 1/2$. Следовательно, на основании теоремы 10 будем иметь два фундаментальных решения:

$$x_i = \frac{(-1)^i 2^i x_0}{a_{i,i}}, \quad \bar{x}_i = \frac{(-1)^i x_0}{a_{i,i} 3^i}.$$

Если допустить, что коэффициенты $a_{j,j}$ в совокупности ограничены, то первое фундаментальное решение будет неограниченным, а второе — ограниченным.

На основании теоремы 11 искомое общее решение системы (87) будет

$$x_i = C_0 \frac{(-1)^i 2^i}{a_{i,i}} + C_1 \frac{(-1)^i}{a_{i,i} 3^i},$$

где C_0 и C_1 — произвольные постоянные.

ПРИМЕР 7. Пусть задана периодическая однородная бесконечная система, характеристика которой есть функция $f(x) = 13 - 4x + x^2$. Найти общее решение данной системы.

РЕШЕНИЕ. Здесь исходная система также имеет вид (87), при этом $a_0 = 13$, $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = \dots = 0$. Нулями характеристики $f(x) = 13 - 4x + x^2$, очевидно, являются сопряженные комплексные числа $2 - 3i$ и $2 + 3i$. Тогда соответственно величина s будет иметь два значения: $s = 1/(2 - 3i)$ и $s = 1/(2 + 3i)$. Следовательно, на основании теоремы 10 будем иметь два сопряженно-комплексных фундаментальных решения:

$$x_k = \frac{(-1)^k (2 - 3i)^k}{a_{k,k}}; \quad x_k^{(1)} = \frac{(-1)^k (2 + 3i)^k}{a_{k,k}}, \quad k > 0.$$

Если допустить, что коэффициенты $a_{k,k}$ в совокупности ограничены, то, очевидно, оба фундаментальные решения будут неограниченными. На основании теоремы 11 искомое общее решение системы примера 7 будет в виде

$$x_k = C_0 \frac{(-1)^k (2 - 3i)^k}{a_{k,k}} + C_1 \frac{(-1)^k (2 + 3i)^k}{a_{k,k}},$$

где C_0 и C_1 — произвольные постоянные.

Заметим, что, хотя коэффициенты линейной системы являются вещественными числами, решения системы могут быть комплексными, кроме того, на основании следствия 15 обратная редукция не сходится. После приведения первого коэффициента a_0 для характеристики $f(x)$ к единице остальные коэффициенты принимают значения $a_1 = 4/13$, $a_2 = 1/13$. Вычисляя по алгоритму (81) для этих коэффициентов, получим $s_1 = 0,31$, $s_2 = 0,06$, $s_3 = -1,02$, $s_4 = 0,38$, $s_5 = 0,11$, $s_6 = -0,41$, $s_7 = 0,49$, $s_8 = 0,15$, $s_9 = -0,2$ и т. д. Эти вычисления убеждают нас, что прямая редукция тоже не сходится. Таким образом, метод редукции в его широком понимании для решения данной периодической системы не сходится.

Рассмотрим примеры, когда характеристика периодической системы является многочленом третьей степени, т. е. $m = 3$.

ПРИМЕР 8. Пусть задана периодическая однородная бесконечная система, характеристика которой есть функция $f(x) = 3 - 3x + x^2 - x^3$. Найти общее решение данной системы.

РЕШЕНИЕ. Здесь исходная система имеет вид

$$\sum_{p=0}^3 a_{j,j+p} x_{j+p} = 0, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad (88)$$

где $a_0 = 3, a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = a_5 = \dots = 0$.

Нулями характеристики $f(x) = 3 - 3x + x^2 - x^3$, очевидно, являются одно вещественное число, равное 1, и два сопряженных комплексных числа $-\sqrt{3}i$ и $\sqrt{3}i$. Тогда соответственно величина s будет иметь три значения: $s = 1, s = -1/\sqrt{3}i$ и $s = 1/\sqrt{3}i$. Следовательно, на основании теоремы 10 будем иметь одно вещественное и два сопряженно-комплексных фундаментальных решения:

$$x_k = \frac{(-1)^k x_0}{a_{k,k}}, \quad x_k^{(1)} = \frac{(\sqrt{3}i)^k x_0}{a_{k,k}}, \quad x_k^{(2)} = \frac{(-1)^k (\sqrt{3}i)^k x_0}{a_{k,k}}, \quad k > 0.$$

На основании теоремы 11 искомое общее решение периодической системы (88) будет

$$x_k = C_0 \frac{(-1)^k}{a_{k,k}} + C_1 \frac{(\sqrt{3}i)^k}{a_{k,k}} + C_2 \frac{(-1)^k (\sqrt{3}i)^k}{a_{k,k}},$$

где C_0, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

В данном случае процесс (77) будет иметь вид

$$s_n = a_1 - \frac{a_2}{s_{n-1}} + \frac{a_3}{s_{n-1}s_{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad s_1 = a_1, \quad (89)$$

где s_2 вычисляется по формуле (81).

После приведения первого коэффициента a_0 характеристики $f(x)$ к единице остальные коэффициенты принимают значения $a_1 = 1, a_2 = 1/3, a_3 = 1/3$. Вычисляя по алгоритму (89) для этих коэффициентов, убеждаемся, что процесс (89) сходится, следовательно, сходится и прямая редукция для данной системы. Вычисления по алгоритму (89)

для обратной редукции убеждают нас, что она не сходится. Это легко подтверждается и теоремой 21, так как $|\pm\sqrt{3}i| = \sqrt{3} > 1$.

В заключение отметим, что многочисленные примеры применения бесконечных систем, в частности периодических, для решения прикладных задач математической физики отражены в работе автора [4], кроме того, необходимо подчеркнуть, что предложенная теория периодических бесконечных систем значительно обогащает общую теорию бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. М. К теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. I // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, вып. 2. С. 78–92.
2. Федоров Ф. М. К теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. II // Мат. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, вып. 1. С. 125–140.
3. Федоров Ф. М. О новом подходе изучения вещественных корней полномиального уравнения // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т. 10, вып. 1. С. 105–113.
4. Федоров Ф. М. Границный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.
5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
6. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Физматлит, 1961.

г. Якутск

21 апреля 2008 г.

УДК 621.89:536.24

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ
УПРОЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОВЫХ
ПРОЦЕССОВ В РАДИАЛЬНЫХ
ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ
НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

М. А. Васильева, А. С. Кондаков,
Н. П. Старостин

При тепловой диагностике трения в подвижных сопряжениях, связанной с решением многомерных граничных обратных задач теплообмена, особую актуальность имеет проблема предельного упрощения математических моделей теплового процесса для удобства работы с ней и снижения затрат вычислительного времени при их использовании. Упрощенные математические модели (ММ) использовались нами при тепловой диагностике трения в радиальных подшипниках скольжения с вращательным и возвратно-вращательным движением вала [1–3]. При вращательном движении вала принималось допущение об однородности температуры на его поверхности вследствие высокой скорости вращения. Задача определения значения скорости вращения вала, выше которой распределение температуры на поверхности вала можно считать однородным, требует отдельного исследования. В подшипниках скольжения с возвратно-вращательным движением вала упрощенные ММ строятся при допущениях о малости амплитуды и высокой частоте колебаний. В то же время не определены лимитирующие условия применимости таких ММ. В связи с этим, в данной работе поставлена следующая цель: разработать методики определения условий применимости упрощенных ММ на основе моделирования тепловых процессов

© 2008 Васильева М. А., Кондаков А. С., Старостин Н. П.

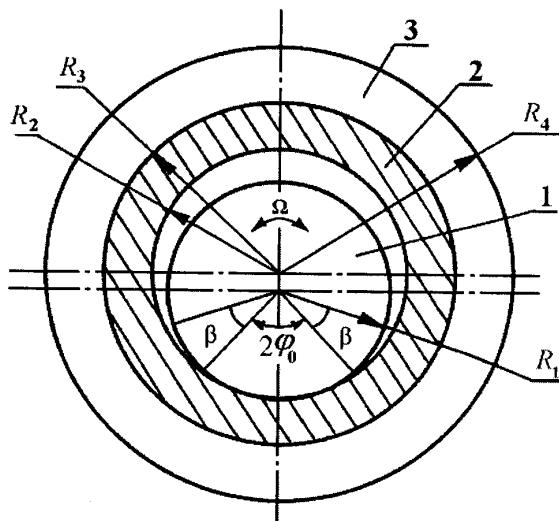


Рис. 1. Схема подшипника. 1 — вал, 2 — вкладыш, 3 — обойма.

в подшипниках скольжения с учетом движения вала.

Рассмотрим тепловую модель, принятую в работе [4], в которой учитывается вращательное или возвратно-вращательное движение вала с угловой скоростью $\Omega(t)$. Схема подшипника скольжения представлена на рис. 1. Втулка, изготовленная из полимерного композиционного материала, жестко соединена со стальной обоймой.

Распределение температуры $T(r, \varphi, t)$ в подшипнике описывается двумерным уравнением теплопроводности с разрывными коэффициентами $C(T)$, $\lambda(T)$ на границе сопряжения втулки с обоймой при $r = R_3$:

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right), \quad (1)$$

$$R_2 < r < R_4, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad 0 < t \leq t_m.$$

Температурное поле $T(r, \varphi, t)$ в подшипнике связано с распределением

температуры $U(r, \varphi, t)$ в вале, описываемым уравнением

$$C_B(U) \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_B(U) \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_B(U) \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \Omega(t) C_B(U) \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

$$0 < r < R_1, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad 0 < t \leq t_m. \quad (2)$$

На свободных поверхностях вала, втулки и обоймы задаются условия конвективного теплообмена с коэффициентами теплообмена $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

$$\lambda_B(U) \frac{\partial U(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{R_1} = -\alpha_1 (U(R_1, \varphi, t) - T_{cp}), \quad |\varphi| > \varphi_0, \quad (3)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{R_2} = \alpha_2 (T(R_2, \varphi, t) - T_{cp}), \quad |\varphi| > \varphi_0, \quad (4)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{R_4} = -\alpha_4 (T(R_4, \varphi, t) - T_{cp}), \quad -\pi < \varphi < \pi. \quad (5)$$

В центре вала задается условие ограниченности теплового потока:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \lambda_B(U) \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0. \quad (6)$$

В зоне контакта записываются условия неидеального теплового контакта с источником $Q(\varphi, t)$:

$$\lambda_B(U) \frac{\partial U(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{R_1} - \lambda(T) \frac{\partial T(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{R_2} = Q(\varphi, t), \quad |\varphi| \leq \varphi_0, \quad (7)$$

$$U(R_1, \varphi, t) - T(R_2, \varphi, t) = 0. \quad (8)$$

По оси симметрии расчетной схемы выполняются условия периодичности как для подшипника, так и для вала:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=-\pi} = \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi}, \quad T(r, -\pi, t) = T(r, \pi, t), \quad (9)$$

$$\lambda_B(U) \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=-\pi} = \lambda_B(U) \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi}, \quad U(r, -\pi, t) = U(r, \pi, t). \quad (10)$$

Начальные распределения температур в элементах узла трения считаются равными и однородными:

$$T(r, \varphi, 0) = U(r, \varphi, 0) = T_0. \quad (11)$$

Задача (1)–(11) решается методом конечных разностей сведением к цепочке локально-одномерных с использованием безусловно устойчивых разностных схем [5, 6].

Предлагаемую методику определения условий применимости упрощенных ММ изложим на конкретных примерах. Отметим, что выбор упрощенной модели диктуется целью проводимого исследования. В данном случае рассматривается возможность упрощения моделей тепловых процессов для восстановления мощности трения в достаточно широком временном интервале. Рассмотрим подшипник скольжения со следующими геометрическими размерами: $R_1 = 0,0125$ м, $R_2 = 0,013$ м, $R_3 = 0,016$ м, $R_4 = 0,03$ м, $\varphi_0 = 15^\circ$. Втулка в подшипнике выполнена из наполненного фторопласта, для которого зависимости теплофизических свойств от температуры имеют вид

$$\lambda = 0,7(T - 100)/150 + 0,35 \quad (\text{Вт}/(\text{м} \cdot {}^\circ\text{C})),$$

$$C = (6 \cdot 10^{-3}(T - 30) + 3) \cdot 10^6 \quad (\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot {}^\circ\text{C})).$$

Материалом для вала и обоймы служит сталь:

$$\lambda_B = 30,5(T - 100)/150 + 55,5 \quad (\text{Вт}/(\text{м} \cdot {}^\circ\text{C})),$$

$$C_B = (1,2 \cdot 10^{-3}(T - 30) + 3,7) \cdot 10^6 \quad (\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot {}^\circ\text{C})).$$

Коэффициенты теплообмена брались следующими: $\alpha_1 = \alpha_4 = 20$, $\alpha_2 = 10$ ($\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot {}^\circ\text{C})$).

Проведены расчеты нестационарных температурных полей в подшипнике с учетом скорости скольжения вала, сохраняющего постоянную абсолютную величину в расчетном интервале времени. Численные результаты показали, что увеличение скорости вращательного движения вала приводит к однородному распределению температуры по сечению вала по истечении некоторого времени. Максимальное значение температуры в вале достигается на поверхности трения. Оно со временем все меньше отличается от минимального значения температуры, и это отличие уменьшается тем быстрее, чем большее скорость вращения.

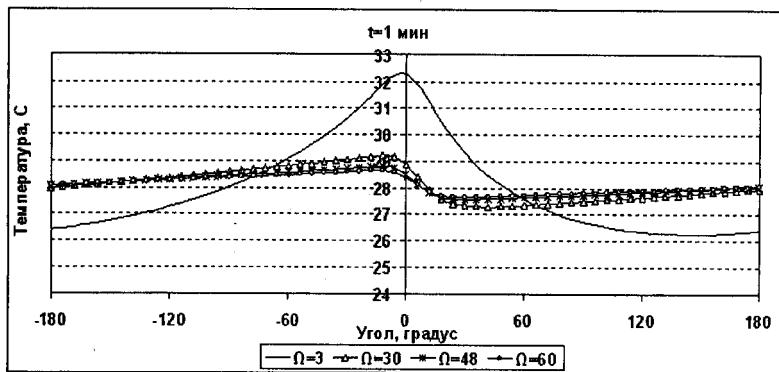


Рис. 2. Распределения температур по поверхности вала при различных скоростях его вращения.

Расчетные зависимости температур поверхности вала, приведенные на рис. 2, показывают динамику стремления к однородности температуры вала с увеличением скорости вращения.

На рис. 3. приведены температурные поля в вале с подшипником скольжения при скорости вращения вала $\Omega = 5$ рад/с ≈ 48 об/мин в различные моменты времени. Приведенная скорость вращения соответствует скорости, выше которой температура вала по сечению может считаться однородной, как принималось нами ранее, например, в работе [7]. Правомерность рассмотрения вала как одномерного стержня подтверждается проведенными расчетами. Однако при использовании такой упрощенной модели необходимо помнить, что однородность температуры поверхности вала достигается примерно за 7 минут, что может отразиться на точности восстановления функции момента трения в этот период времени.

Далее нами приводятся результаты расчетов в случае возвратно-вращательного (качательного) движения вала. Методика определения условий применимости упрощенных математических моделей в этом

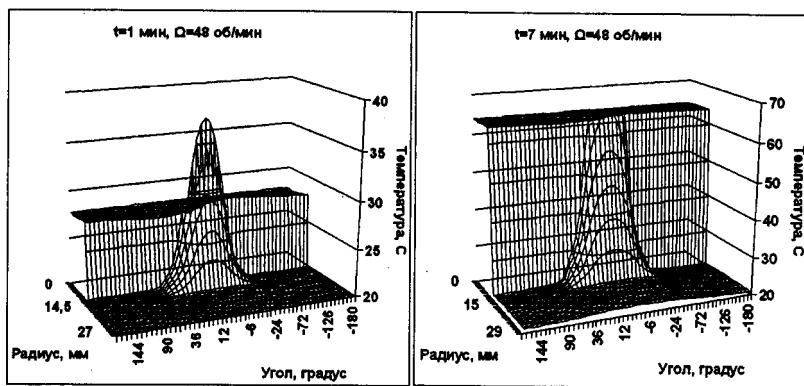


Рис. 3. Температурные поля в вале с подшипником скольжения при фиксированной скорости вращения вала в различные моменты времени.

случае также сводится к проведению численных экспериментов и анализу результатов расчетов при различных частотах и амплитудах колебаний. Допустим, что металлический вал совершает возвратно-вращательные движения с некоторой частотой f и с угловой амплитудой β . Угловая скорость равна $\Omega(t) = \pm 2\beta f$. Будем считать, что угол контакта вала с втулкой $2\varphi_0$ не изменяется по времени. Поскольку зона трения вала больше зоны трения втулки, для проверки правомерности допущения о неподвижности вала необходимо сравнить распределения температур на поверхности вала, полученных по модели с учетом движения вала и без него.

Приведенные на рис. 4 и 5 расчетные распределения температур по поверхности вала при его качательном движении показывают, что уменьшение амплитуды и увеличение частоты колебания приводят к уменьшению влияния конвективного члена в уравнении (2). Как видно из рис. 5, при амплитуде 3 градуса и частоте 2 Гц результаты расчетов с учетом конвективного члена в уравнении (2) и без его учета практически не отличаются. Следовательно, при достаточно малых амплитудах

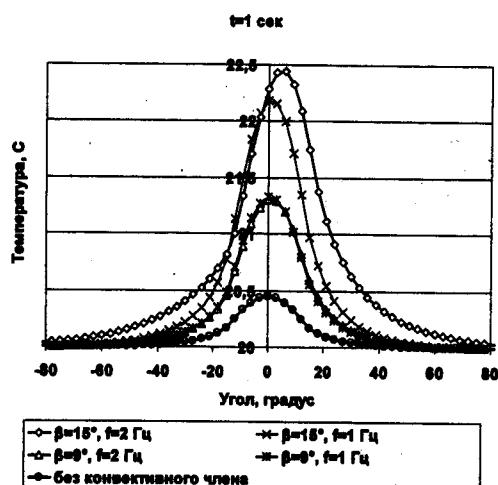


Рис. 4. Распределения температур по поверхности вала при различных амплитудах и скоростях качения.

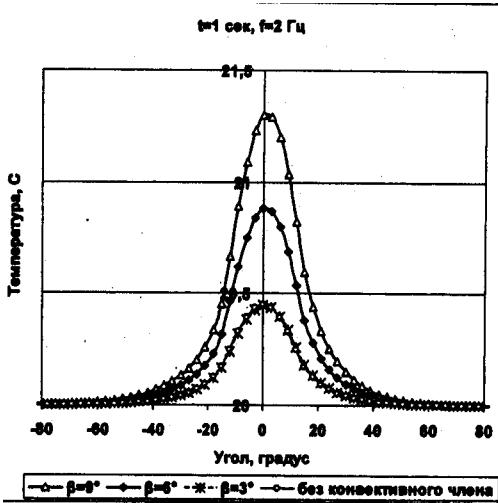


Рис. 5. Распределения температур по поверхности вала при различных амплитудах и при фиксированной скорости качения.

и высоких частотах качения можно воспользоваться упрощенной моделью теплообмена в подшипнике скольжения, принимая допущение о неподвижности вала, как в работах [2, 4].

Разработанные методики могут быть рекомендованы для определения режимов эксплуатации подшипников скольжения из различных антифрикционных материалов, при которых можно воспользоваться упрощенными ММ для проведения тепловой диагностики трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старостин Н. П., Кондаков А. С., Кондаков А. А. Восстановление момента силы трения в полимерном подшипнике скольжения по замеру температуры // Трение и износ. 2002. Т. 23, № 5. С. 498–508.
2. Старостин Н. П., Кондаков А. С., Васильева М. А. Тепловая диагностика трения в самосмазывающихся радиальных подшипниках скольжения возвратно-вращательного движения. Ч. 1. Алгоритм определения функции мощности тепловыделения // Трение и износ. 2007. Т. 28, № 4. С. 351–360.
3. Васильева М. А. Алгоритм восстановления мощности тепловыделения в радиальных подшипниках скольжения возвратно-вращательного движения с высокой частотой // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, вып. 2. С. 93–103.
4. Старостин Н. П., Кондаков А. С., Васильева М. А. Построение алгоритма восстановления плотности сосредоточенного источника тепла в двумерном уравнении теплопроводности в цилиндрических координатах // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, вып. 1. С. 138–150.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1997.
6. Самарский А. А., Бабицевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: Издательство УРСС, 2003.
7. Старостин Н. П., Тихонов А. Г., Моров В. А., Кондаков А. С. Расчет триботехнических параметров в опорах скольжения. Якутск: ЯНЦ СО РАН, 1999.

г. Якутск

16 апреля 2008 г.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ В МОДЕЛЬНЫХ РУСЛАХ С ПОЙМОЙ

В. А. Егоров

Введение. При моделировании течений в реках вследствие того, что реки имеют естественное выделенное направление (вдоль течения), обычно используется одномерный подход, так как протяженность вдоль реки существенно больше ширины. При этом оперируют с такими величинами, как средняя по сечению глубина и средняя по сечению и глубине скорость. При помощи одномерного моделирования можно достаточно точно решать множество задач, в том числе задачи о распространении паводковой волны, о распространении примесей вдоль русла и т. д. Но при моделировании движения реки при паводке с выходом реки на пойму, т. е. при затоплении обширных территорий с существенно меньшей глубиной, чем основное русло, для расчетов задач о затоплении этих территорий становится более подходящим моделирование уже в двумерном приближении вследствие существенной неоднородности течения воды по ширине реки, т. е. оперировать лишь средними по ширине реки становится невозможно. Для моделирования в двумерном приближении можно использовать плановые уравнения движения воды, оперируя уже средними только по глубине двумя компонентами скорости и глубиной. Такие плановые уравнения можно получить путем осреднения по вертикали трехмерных нестационарных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости Навье — Стокса или Рейнольдса. Далее, предполагая, что глубины в потоке малы по сравнению с шириной потока, производят упрощения и, делая также еще некоторые дополнительные допущения о характере течения, внут-

© 2008 Егоров В. А.

ренних массовых силах и силах, действующих на поток со стороны дна, приходят к окончательным плановым уравнениям.

1. Постановка модельной задачи. Рассматривается задача о течении воды по речному руслу с поймой. Прямоугольная область $\Omega : \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq l_x, -l_y/2 \leq y \leq l_y/2\}$ выбрана таким образом, что часть русла реки расположена в ней так, что при любом рассчитываемом уровне вода не доходит до верхней и нижней границ этой области. Необходимо определять глубины и скорости в каждой точке области, куда через левую границу втекает вода с заданной глубиной и скоростью. Движение воды происходит под воздействием напора поступающей воды и силы тяжести при сопротивлении сил внутреннего трения и трения о дно, рельеф которого внутри области считается заданным.

2. Уравнения. Движение жидкости будем описывать в двумерном приближении уравнениями типа «мелкой воды»:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial(z + h)}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2h} u \sqrt{u^2 + v^2} + A \Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial(z + h)}{\partial y} = -\frac{\lambda}{2h} v \sqrt{u^2 + v^2} + A \Delta v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Здесь $h(x, y, t)$ — глубина, $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ — средние по глубине величины компонент скоростей, $z(x, y)$ — уровень дна, A — эффективный коэффициент вязкости воды, g — ускорение свободного падения, Δ — дифференциальный оператор Лапласа, $\lambda(x, y, t)$ — коэффициент гидравлического трения, который считаем связанным с шероховатостью дна $n(x, y)$ и уровнем воды наиболее употребительной в гидравлике формулой Маннинга [2], т. е. $\lambda = 2gn^2h^{-1/3}$.

Для их получения проводят осреднение по вертикали трехмерных нестационарных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости Навье — Стокса или Рейнольдса. Далее, предполагая, что глубины в

потоке малы по сравнению с шириной потока, производят упрощения и, делая также еще некоторые дополнительные допущения о характере течения, внутренних массовых силах и силах, действующих на поток со стороны дна, приходят к окончательным плановым уравнениям.

При этом часто турбулентное и вязкое горизонтальные взаимодействия воды в потоке не учитываются отдельными членами в уравнениях, а включаются в член, отвечающий за трение воды о дно русла (см., например, [1]). Но все же в некоторых работах горизонтальные взаимодействия учитываются отдельно в слагаемых с эффективной вязкостью, где учитывается как молекулярная вязкость, так и коэффициент горизонтального турбулентного обмена количеством движения. Такой подход обычно используется для расчетов течения в открытых водоемах, где течение не имеет выделенного основного направления [2], но также встречается и в моделировании течения в речных руслах. В [3] отмечается, что в пользу использования уравнений такого вида для описания плана течений вязкой и мелкой воды есть веские, хотя и косвенные доводы.

В гидрологии известен кинематический эффект взаимодействия руслового и пойменного потоков, который выражается в том, что при выходе реки на пойму скорости потока в русле уменьшаются по сравнению со скоростями при заполнении русла до бровок, а восстановление исходных значений происходит после заполнения поймы до некоторой глубины (рис. 1, 2) [4]. Такое тормозящее влияние пойменного потока на русловой можно объяснить горизонтальным взаимодействием воды в потоке [5].

Поэтому и представляется целесообразным при моделировании в двумерном приближении отдельно выделить в плановых уравнениях члены с эффективной вязкостью.

3. Границные и начальные условия. Границные условия записываем в соответствии с вышесказанным. На левой (входной) гра-

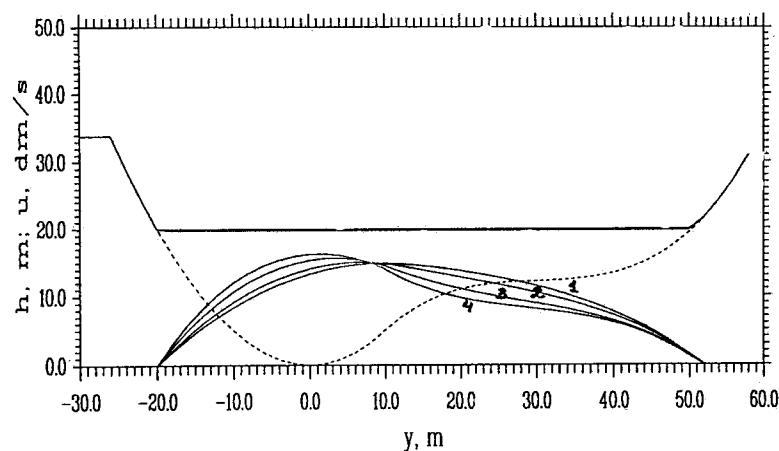


Рис. 1. Профиль сечения, уровень и распределение продольной скорости в сечении при разных значениях эффективной вязкости (естественное русло).

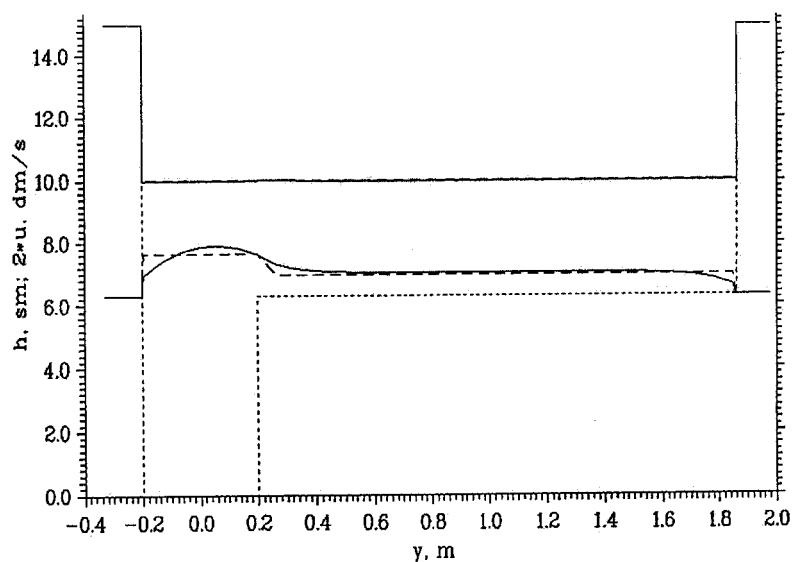


Рис. 2. Профиль сечения, уровень и распределение продольной скорости в сечении (прямоугольное русло).

нице задаются скорости и глубины, т. е.

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= u_0(y, t), & v(0, y, t) &= v_0(y, t), \\ h(0, y, t) &= h_0(y, t), & -l_y/2 \leq y \leq l_y/2. \end{aligned} \quad (4)$$

На верхней и нижней границах считаем скорости и глубины нулевыми, так как расчетная область выбирается таким образом, что до верхней и нижней границ ни при каком расчетном режиме вода никогда не доходит, т. е.

$$u(x, -l_y/2, t) = 0, \quad v(x, -l_y/2, t) = 0, \quad h(x, -l_y/2, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad (5)$$

$$u(x, l_y/2, t) = 0, \quad v(x, l_y/2, t) = 0, \quad h(x, l_y/2, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x. \quad (6)$$

Начальные условия возьмем в наиболее естественном виде:

$$u(x, y, 0) = u^0(x, y), \quad v(x, y, 0) = v^0(x, y), \quad h(x, y, 0) = h^0(x, y), \quad (7)$$

где $(x, y) \in \Omega$.

Заданные функции $u_0(y, t)$, $v_0(y, t)$, $h_0(y, t)$, $u^0(x, y)$, $v^0(x, y)$, $h^0(x, y)$ согласованы между собой, и $u_0(y, t)$, $u^0(x, y) \geq 0$. Полагаем также, что вычисляемая глубина $h(x, y)$ должна быть неотрицательной.

Таким образом, в области Ω решается задача (1)–(7) относительно $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и $h(x, y, t) \geq 0$ при заданных A , $n(x, y)$, $z(x, y)$.

4. Аппроксимации уравнений и алгоритм вычислений.

Введем равномерную прямоугольную сетку для глубин:

$$\omega = \{(x_j, y_i) \mid x_j = jh_1, y_i = ih_2, i = 0, 1, 2, \dots, n_y + 1, j = 0, 1, 2, \dots, n_x + 1\}.$$

Сетку для первой компоненты скорости получим сдвигом ω на $h_1/2$ вправо, а сетку для второй компоненты скорости — сдвигом ω на $h_2/2$ вниз и добавлением к ней еще точек $\{(x_j, y_i) \mid x_j = jh_1, y_i = ih_2, i = n_y + 2, j = 0, 1, 2, \dots, n_x + 1\}$.

Рассмотрим следующую разностную схему для системы уравнений (1)–(3):

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda_1^n(u^n, v^n, h^n)u^{n+1} - A(u_{\bar{x}\bar{x}}^{n+1} + u_{\bar{y}\bar{y}}^{n+1}) + W_1^n = 0, \quad (8)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} + \Lambda_2^n(u^n, v^n, h^n)v^{n+1} - A(v_{\bar{x}\bar{x}}^{n+1} + v_{\bar{y}\bar{y}}^{n+1}) + W_2^n = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\tau} + \frac{1}{h_1}(a_r^+(u_{i,j}^{n+}h_{i,j}^n - u_{i,j-1}^{n+}h_{i,j-1}^n) + a_r^-(u_{i,j}^{n-}h_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^{n-}h_{i,j}^n)) \\ & + \frac{1}{h_2}(b_r^+(v_{i+1,j}^{n+}h_{i,j}^n - v_{i,j}^{n+}h_{i-1,j}^n) + b_r^-(v_{i+1,j}^{n-}h_{i+1,j}^n - v_{i,j}^{n-}h_{i,j}^n)) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} W_1^n &= g(h_x^n + z_x) + u_{i,j-1/2}^{n+}u_{\bar{x}}^n + u_{i,j+1/2}^{n-}u_x^n + v_{i,j+1/2}^{n+}u_{\bar{y}}^n + v_{i+1,j+1/2}^{n-}u_y^n, \\ W_2^n &= g(h_y^n + z_x) + u_{i-1/2,j-1}^{n+}v_{\bar{x}}^n + u_{i-1/2,j}^{n-}v_x^n + v_{i-1/2,j}^{n+}v_{\bar{y}}^n + v_{i+1/2,j}^{n-}v_y^n, \\ \Lambda_1^n &= \frac{gN^2}{(h_{i,j+1/2}^n)^{4/3}} \sqrt{(u_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j}^n)^2}, \\ \Lambda_2^n &= \frac{gN^2}{(h_{i-1/2,j}^n)^{4/3}} \sqrt{(\langle u_{i,j}^n \rangle)^2 + (v_{i,j}^n)^2}, \\ u_{i,j}^{n+} &= \frac{1}{2}(u_{i,j}^n + |u_{i,j}^n|), \quad u_{i,j}^{n-} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^n - |u_{i,j}^n|), \\ v_{i,j}^{n+} &= \frac{1}{2}(v_{i,j}^n + |v_{i,j}^n|), \quad v_{i,j}^{n-} = \frac{1}{2}(v_{i,j}^n - |v_{i,j}^n|), \\ \langle u_{i,j}^n \rangle &= \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i-1,j-1}^n}{4}, \\ \langle v_{i,j}^n \rangle &= \frac{v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n + v_{i,j+1}^n + v_{i+1,j+1}^n}{4}, \end{aligned}$$

a_r^+ , a_r^- , b_r^+ , b_r^- — регуляризованные коэффициенты.

Аппроксимация уравнения (3) получена методом регуляризации [6] из центрально-разностной схемы. При $a_r^+ = a_r^- = b_r^+ = b_r^- = 1$ получается разностная схема с направленными разностями, которая условно монотонна и имеет первый порядок точности. Эта и другие разностные схемы первого порядка тестировались на задачах о растекании воды по плоской поверхности, течении в прямоугольном канале и течении в призматическом русле параболоидального сечения [7, 8].

Решения этих задач оказались наиболее чувствительны к аппроксимации уравнения (3), наилучшие результаты из рассмотренных показала приведенная схема. При этом использовались как указанная аппроксимация с различными значениями параметра регуляризации $\gamma \geq 0.25$, так и регуляризованные схемы, где в качестве производящей брались схемы второго порядка точности на расширенном шаблоне, а также их комбинации с различными весами. Результаты на этих схемах отличались незначительно, и в дальнейшем использовалась указанная схема при минимально возможном параметре регуляризации $\gamma = 0.25$.

Можно заметить, что каждое из уравнений (1), (2) имеет особенность: член, описывающий трение потока воды о дно, может стремиться к бесконечности при стремлении уровня воды к нулю, если скорость в этой точке ненулевая. Это создает трудность при расчете скоростей в точках около подвижной границы жидкой части расчетной области с сухой ее частью. В частности, в окрестностях точек соприкосновения воды с берегом при некоторой его крутизне в расчетах возникали искажения горизонтальности уровня. Для преодоления этой трудности при расчете скоростей использовался подход, примененный в [9], когда сухая часть считается изначально покрытой тонким слоем воды толщины ε . Кроме того, в окрестностях точек, где глубина ε , расчетные коэффициенты подбирались так, чтобы скорость там была равна 0.

Вследствие того, что дифференциальные уравнения (1), (2) второго порядка, при решении разностных уравнений необходимо задать скорости на правой, выходной для потока границе. Поэтому на правой границе вместо уравнений (1), (2) аппроксимируются уравнения, содержащие только конвективные члены. Аппроксимации этих уравнений берутся совпадающими с аппроксимациями соответствующих частей уравнений (1), (2):

$$\frac{u_{i,nx+1}^{n+1} - u_{i,nx+1}^n}{\tau} + u_{i,nx+1/2}^n v_{\bar{x}}^n + v_{i,nx+1}^{n+} u_{1\bar{y}}^n + v_{i+1,nx+1}^{n-} u_y^n = 0, \quad (11)$$

$$\frac{v_{i,nx+1}^{n+1} - v_{i,nx+1}^n}{\tau} + u_{i-1/2,nx}^n v_{\bar{x}}^n + v_{i-1/2,nx+1}^{n+} v_{\bar{y}}^n + v_{i+1/2,nx+1}^{n-} v_y^n = 0. \quad (12)$$

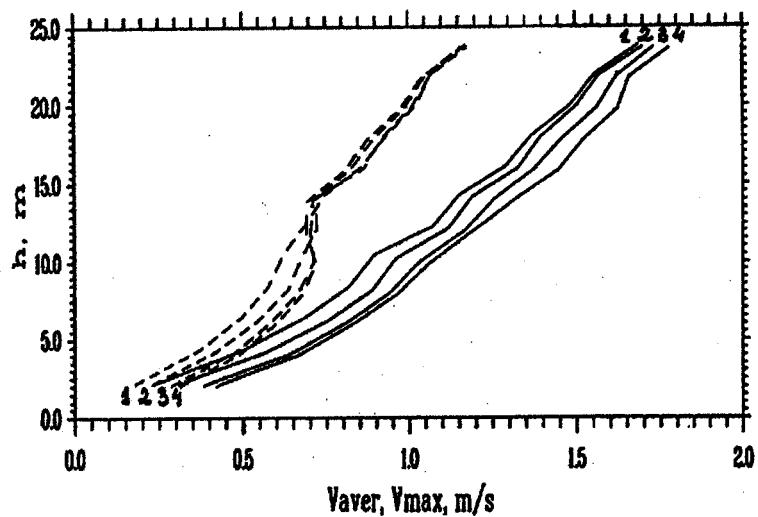


Рис. 3. Средняя и максимальная продольная скорости в зависимости от уровня (естественное русло).

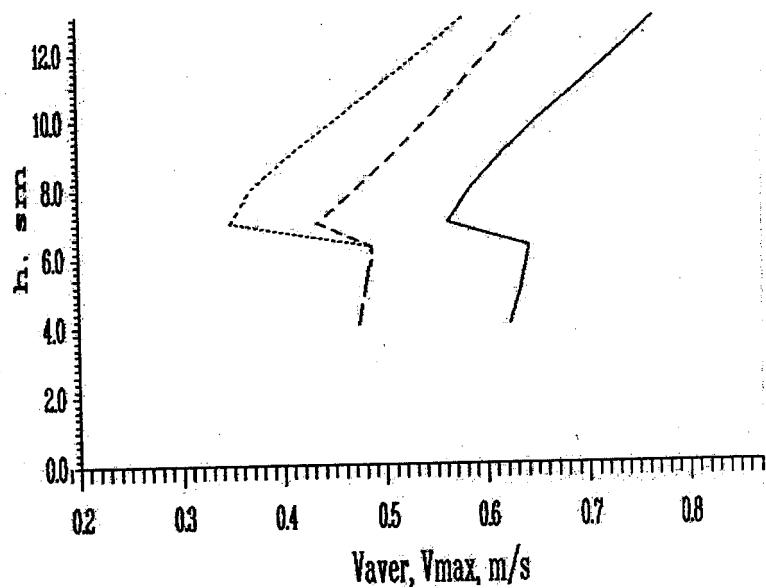


Рис. 4. Средняя и максимальная продольная скорости в зависимости от уровня (прямоугольное русло).

На остальных границах задаются сеточные значения скоростей и глубин в соответствии с граничными условиями (4)–(6).

Алгоритм проведения вычислений был следующим. На каждом временном шаге делаем последовательно такие действия.

1. Решая разностные уравнения (11) при $i = 1, 2, \dots, n_y$ и (12) при $i = 1, 2, \dots, n_y + 1$, находим скорости $u_{i,nx+1}^{n+1}, v_{i,nx+1}^{n+1}$.

2. Из разностных уравнений (10) находим $h_{i,j}^{n+1}, i = 1, 2, \dots, n_y, j = 1, 2, \dots, n_x + 1$.

3. Решая по отдельности системы разностных уравнений (8) и (9), находим $u_{i,j}^{n+1}, i = 1, 2, \dots, n_y, j = 1, 2, \dots, n_x, v_{i,j}^{n+1}, i = 1, 2, \dots, n_y + 1, j = 1, 2, \dots, n_x$. При этом используются в качестве заданных уже рассчитанные значения $u_{i,nx+1}^{n+1}, v_{i,nx+1}^{n+1}$.

Далее переходим к следующему шагу по времени.

? автору: Где формулы (4_a), (5_a), на которые если ссылки?

?!

Разностные уравнения (11), (12) и (10) решаются в явном виде. Системы разностных уравнений (8), (9) имеют пятидиагональную симметричную матрицу с диагональным преобладанием и решаются при помощи стандартной подпрограммы для решения таких систем: методом приближенной факторизации сопряженных градиентов.

С использованием приведенного здесь алгоритма решались некоторые задачи о течении воды в модельных руслах конкретного вида.

5. Расчетная задача и параметры. Представленные здесь расчеты проводились для задачи о течении воды в русле с односторонней поймой. Уровень дна задавался по формуле $z(x, y) = z_0(y) - ix$, где $z_0(y)$ — заданная функция, $i = \text{const}$ — уклон русла, причем функция $z_0(y)$ задавалась так, что поперечное сечение русла получалось таким, что имелась основная, более глубокая, часть и примыкающая к ней, более мелкая, но более широкая часть, — пойма.

Распределение глубин воды на входе $h_0(y)$ задавалось так, чтобы поверхность воды во входном сечении была горизонтальна, т. е.

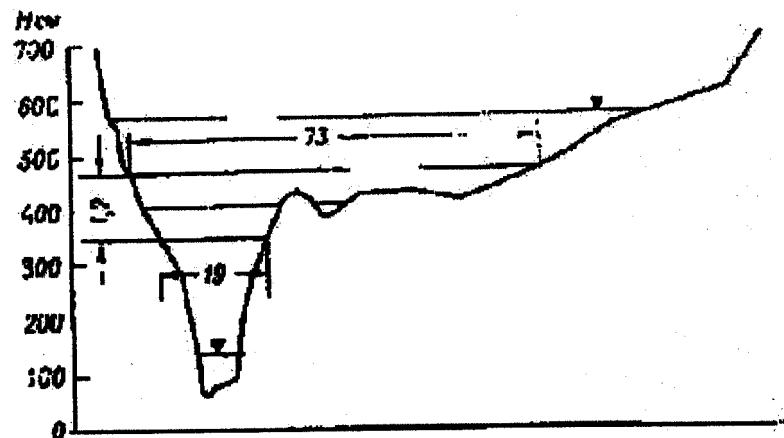


Рис. 5. Профиль живого сечения р.Ильда у Спас-Ильда (1948 г.) (из [1]).

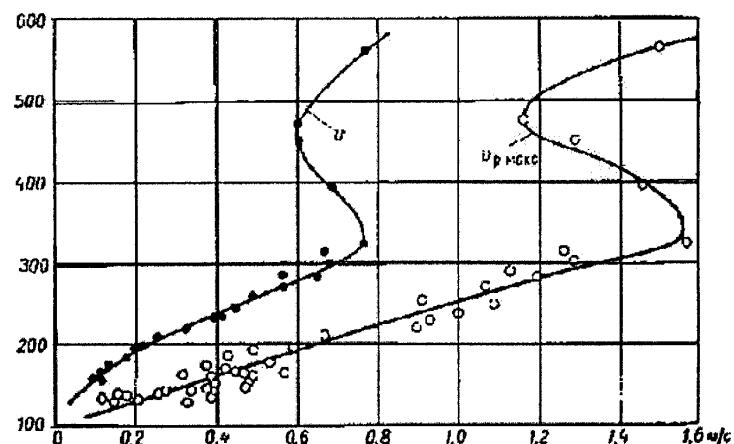


Рис. 6. Кривая средних и наибольших скоростей в основном русле р. Ильда (из [1]) у Спас-Ильда (1948 г.).

$h_0(y) + z_0(y) = \text{const}$, а входная скорость потока была направлена по оси X , т. е. поперечная скорость $v_0(y) = 0$, а продольная скорость задавалась связанный с входной глубиной формулой $u_0(y) = u_0 \sqrt{h_0(y)/h_0}$, где постоянные u_0, h_0 — максимальные входные скорость и глубина. Входные данные во времени не менялись. В начальный момент времени глубины задавались так, чтобы поверхность воды была плоская и наклонена с заданным уклоном i (уклоном дна) к оси X , а движение воды было поступательным и равномерным, т. е $h_0(x, y) = h_0(y)$, $u_0(x, y) = u_0(y)$, $v_0(x, y) = 0$.

Расчеты велись для течения в русле, близком в сечении к естественному с односторонней поймой (см. рис. 3, 4), а также в русле прямоугольного сечения с односторонней поймой тоже прямоугольного сечения (см. рис. 5, 6).

Для первого русла расчетная область имеет длину $l_x = 160$ м, ширину $l_y = 120$ м. Уклон русла равен 0.001. Максимальная входная глубина h_0 в серии расчетов менялась от 2 м до 28 м с шагом в 2 м. Максимальная входная скорость u_0 задавалась соответственно максимальной входной глубине по формуле $u_0 = \sqrt{h_0/10}$, т. е. соответственно от 0.45 м/с до 1.67 м/с. Значение шероховатости N бралось согласно [3] равным 0.02–0.03 для основной части русла и 75–150 для поймы. Значение параметра A подбиралось таким образом, чтобы распределение скорости по сечению было наиболее близко к естественному. Оказалось, что это происходит при A , равном $0.2 \text{ м}^2/\text{с} - 1 \text{ м}^2/\text{с}$. Количество шагов по времени бралось разным, максимальное количество шагов определялось временем установления. В приведенных расчетах было рассчитано до 40000 временных шагов по 0.0025 с, шаг по y был 2 м, по x — 4 м.

Параметры для второго русла брались такими же, как в натурной модели в [4].

6. Результаты расчетов и обсуждение. Некоторые результаты расчетов показаны на рис. 3, 5, 7, 8.

На рис. 3 показано сечение русла (пунктиром), уровень воды в

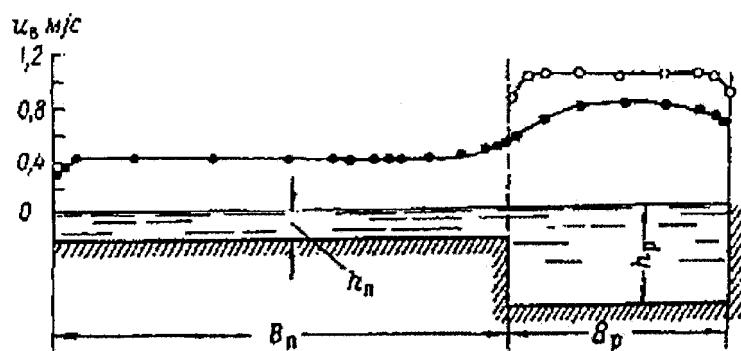


Рис. 7. Распределение средних на вертикалях скоростей по ширине потока для модельного русла (из [1]).

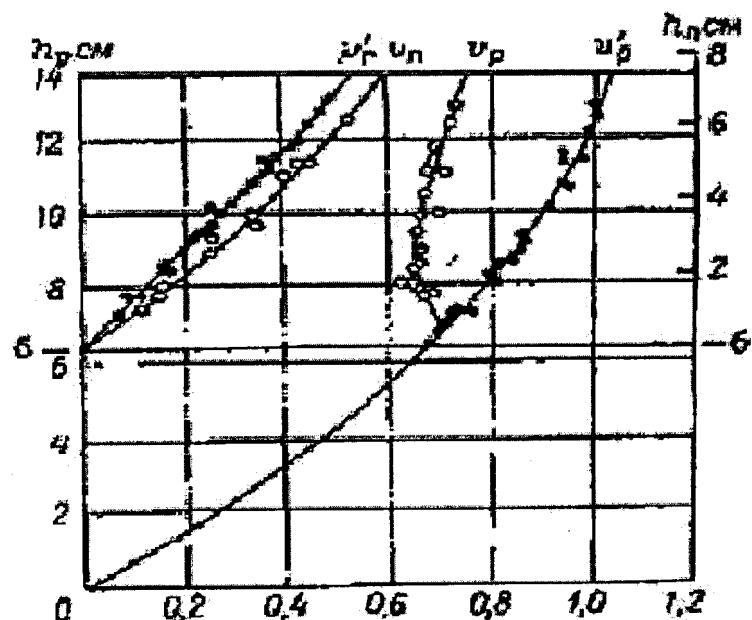


Рис. 8. Зависимость средних скоростей от уровня воды для модельного русла. v_1 и v_2 — в условиях взаимодействия потоков; v'_1 и v'_2 — в условиях отсутствия взаимодействия потоков (из [1]).

русле и распределение продольной скорости в выбранном сечении при разных A для первого русла. Из этого рисунка видно, что при больших значениях эффективной вязкости ($A = 10 \text{ м}^2/\text{с}, 5 \text{ м}^2/\text{с}$), несмотря на меньшую глубину и большую шероховатость поймы по сравнению с основным руслом, величина скорости зависит больше от расстояния до берегов, чем от глубины, что не соответствует действительности. Наиболее же близкое к реальному (см. рис. 6) распределение скоростей получается при $A = 1 \text{ м}^2/\text{с}$.

Как видно из рис. 7, для первого русла при всех выбранных значениях эффективной вязкости величина максимальной скорости в выбранном сечении монотонно зависит от уровня в этом сечении. Средняя же скорость при $A = 1 \text{ м}^2/\text{с}$ монотонно зависит от уровня до достижения уровня поймы ($h = 10 \text{ м}$), а после чего, до $h = 12 \text{ м}$, большим значениям уровня соответствуют уже меньшие значения средней скорости. Начиная с $h = 12 \text{ м}$ большим значениям уровня опять соответствуют большие значения средней скорости, и при достижении некоторого уровня заполнения поймы ($h = 14 \text{ м}$) средняя скорость вновь достигает своего значения при $h = 10 \text{ м}$.

Таким образом, кинематический эффект торможения руслового потока пойменным здесь получается частично и только если значение коэффициента эффективной вязкости взять таким, при котором распределение скоростей наиболее близко к реальному.

Для второго же русла (см. рис. 5, 8) кинематический эффект проявляется более выраженно.

Представляется, что возможность получения в расчетах этого эффекта обусловлена более тонким учетом в выбранной модели горизонтального взаимодействия воды в потоке путем отдельного выделения в уравнениях (1)–(2) слагаемых с эффективной вязкостью, в которую включены как молекулярная вязкость, так и коэффициент турбулентного обмена. Уравнения типа (1)–(3) предлагались для моделирования движения воды в руслах в [3]. При этом отмечалось, что в пользу этих уравнений есть веские, хотя и косвенные доводы. Представленное

здесь исследование служит дополнительным доводом в пользу такого подхода. Отметим также, что при расчетах реальных русел наличие кинематического эффекта может быть определяющим в подборе коэффициента эффективной вязкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беликов В. В., Зайцев А. А., Милитеев А. Н. Численное моделирование кинематики потока на участке неразмываемого русла // Водные ресурсы. 2001. Т. 28, № 6. С. 701–710.
2. Беликов В. В., Семенов А. Ю. Построение численных методов распада разрыва для решения уравнений теории мелкой воды // Тр. Ин-та общей физики РАН. 1997. Т. 53. С. 5–43.
3. Гладышев М. Т. Численное моделирование неустановившихся течений в открытых руслах // Водные ресурсы. 1981. № 3. С. 119–125.
4. Железняков Г. В. Некоторые гидродинамические аспекты проблемы пропускной способности русел рек // Динамика и термика водохранилищ. М.: Наука, 1984. С. 5–19.
5. Барышников Н. Б., Попов И. В. Динамика русловых потоков и русловые процессы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988.
6. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Нелинейные монотонные схемы для уравнения переноса // Докл. АН СССР. 1998. Т. 361, № 1. С. 21–23.
7. Вабищевич П. Н., Егоров В. А. Численное решение задачи о растекании тяжелой вязкой жидкости по плоской поверхности // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т. 10, вып. 1. С. 119–131.
8. Егоров В. А. Тестирование разностных схем для уравнений типа «мелкой воды» при помощи точных решений // Тез. докл. Всероссийской школы-семинара студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития северных территорий в условиях рынка». Якутск, 2004. Ч. 1. С. 25–26.
9. Шугрин С. М. Движение тонкого слоя вязкой жидкости по сухой поверхности // Прикл. математика и техн. физика. 1998. Т. 39, № 2. С. 47–51.

г. Якутск

14 апреля 2008 г.

ОСОБЫЕ ТОЧКИ И БИФУРКАЦИОННЫЕ
ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ
ПОПУЛЯЦИИ

А. М. Леонов, Ю. И. Трофимцев

1. Постановка задачи. Рассматривается система двух дифференциальных уравнений, описывающая развитие популяции одновременно на охраняемой территории и вне ее:

$$\begin{cases} \dot{x} = gx + d_1(y - x) - b, \\ \dot{y} = ay + d_2(x - y) - cy^2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x и y — численность некоторой популяции вне охраняемой территории и внутри ее; $f(x) = b$ — функция, описывающая добычу популяции вне охраняемой территории; a и g — коэффициенты, равные разности коэффициентов рождаемости и смертности популяции вне охраняемой территории и внутри ее; c — коэффициент, описывающий конкуренцию внутри популяции на охраняемой территории; d_1 и d_2 — коэффициенты, описывающие влияние обмена между охраняемой территорией и остальной частью ареала популяции. Коэффициент g — любое действительное число, все остальные коэффициенты неотрицательны, причем $a \geq g$.

При $a = g$ описывается развитие популяции при наличии заповедной зоны (заповедник, национальный парк и т. п.), в которой не ведется промысел данной популяции. При $g < 0$ вымирающая популяция восстанавливается с помощью охраняемой территории. В общем случае модель описывает существование барьера окружающей среды внутри метапопуляции, когда возможны перемещения между субпопуляциями,

причем часть популяции находится в месте, не доступном для добычи (убежище).

Модель не относится к классическим описаниям взаимодействий популяций [1, 2]. Система уравнений с математической точки зрения не представляет особого интереса и исследуется как модель реального воздействия на популяцию. В модели учтены основные факторы, влияющие на ее численность. Коэффициент обмена введен в [3] при исследовании взаимодействий хищника и жертвы, причем для жертвы существовало убежище.

Целью работы является изучение возможных расположений траекторий системы (1) при различных значениях параметров системы и определение наличия в системе бифуркаций.

Основным методом решения поставленной задачи является исследование устойчивости по первому приближению особых точек системы [4–6].

Пусть (x_1, y_1) — особая точка системы (1), лежащая в первой четверти: $x_1 \geq 0, y_1 \geq 0$. Рассмотрим соответствующую линейную систему для (1):

$$\begin{cases} \dot{x} = (g - d_1)x + d_1y, \\ \dot{y} = d_2x + (a - d_2 - 2cy_1)y. \end{cases} \quad (2)$$

Характеристическое уравнение системы (2)

$$\lambda^2 - (g - d_1 + a - d_2 - 2cy_1)\lambda + (g - d_1)(a - d_2 - 2cy_1) - d_1d_2 = 0 \quad (3)$$

имеет дискриминант

$$\begin{aligned} D &= (g - d_1 + a - d_2 - 2cy_1)^2 - 4(g - d_1)(a - d_2 - 2cy_1) + 4d_1d_2, \\ D &= (g - d_1 - a + d_2 + 2cy_1)^2 + 4d_1d_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно, в системе (1) нет особых точек типа фокуса и центра. Кроме того, количество особых точек системы (1) может равняться 0, 1, 2.

2. Отсутствие добычи. Пусть в (1) $b = 0$. Это предположение не влияет на характер расположения траекторий системы, которая имеет

две особые точки — начало координат и вторую с координатами

$$x = \frac{d_1 y}{d_1 - g}, \quad y = \frac{a}{c} + \frac{d_2 g}{c(d_1 - g)}. \quad (5)$$

Рассмотрим три возможных случая.

1. При $d_1 - g = 0$ имеем только одну особую точку $(0, 0)$ и характеристическое уравнение линеаризованной системы

$$\lambda^2 - (a - d_2)\lambda - d_2 g = 0.$$

Его корни $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a - d_2 \pm \sqrt{(a - d_2)^2 + 4d_2 g})$ — действительные числа разных знаков. Особая точка $(0, 0)$ — седло.

2. При $d_1 - g < 0$ система имеет в первой четверти только особую точку $(0, 0)$, тип которой определялся знаками корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 - [(g - d_1) + (a - d_2)]\lambda + (g - d_1)(a - d_2) - d_1 d_2 = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \{ & (g - d_1) + (a - d_2) \\ & \pm \sqrt{[(g - d_1) + (a - d_2)]^2 - 4(g - d_1)(a - d_2) + 4d_1 d_2} \}. \end{aligned} \quad (7)$$

Дискриминант характеристического уравнения

$$\begin{aligned} [(g - d_1) + (a - d_2)]^2 - 4(g - d_1)(a - d_2) + 4d_1 d_2 \\ = [(g - d_1) - (a - d_2)]^2 + 4d_1 d_2 > 0, \end{aligned}$$

следовательно, корни уравнения — действительные числа. Преобразуем в дискриминанте вычитаемое:

$$(g - d_1)(a - d_2) - d_1 d_2 = a(g - d_1) - g d_2.$$

В зависимости от знака полученного выражения возможны следующие варианты.

(a) $a(d_1 - g) + g d_2 < 0$. Преобразуя первоначальное неравенство к виду $g(a - d_2) > ad_1$, получаем $d_2 - a < 0$. Таким образом, $(g - d_1) + (a - d_2) > 0$. Кроме того,

$$\sqrt{[(g - d_1) + (a - d_2)]^2 - 4(g - d_1)(a - d_2) + 4d_1 d_2} < (g - d_1) + (a - d_2).$$

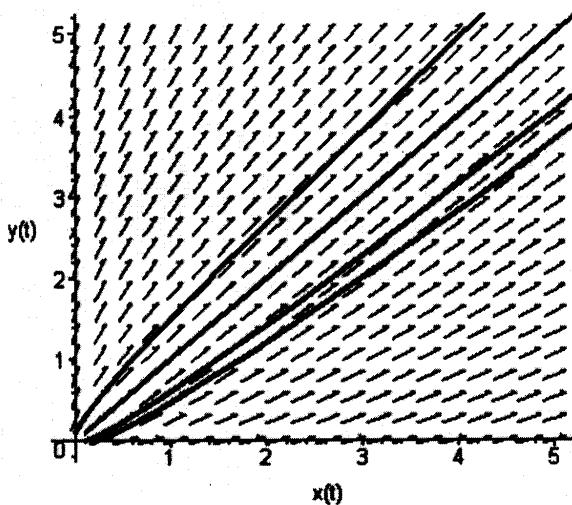


Рис. 1. Особая точка $(0; 0)$ — неустойчивый узел ($b = 0, c = 0, a = g = 6, d_1 = d_2 = 1.5$).

Тогда оба корня характеристического уравнения положительны и особая точка $(0, 0)$ является неустойчивым узлом (рис. 1).

(б) $a(d_1 - g) + gd_2 > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{[(g - d_1) + (a - d_2)]^2 - 4(g - d_1)(a - d_2) + 4d_1d_2} \\ > (g - d_1) + (a - d_2). \quad (8) \end{aligned}$$

Тогда корни характеристического уравнения имеют разные знаки. Начало координат — седло (рис. 2).

(в) $a(d_1 - g) + gd_2 = 0$. В этом случае особая точка $(0, 0)$ является вырожденным узлом (рис. 3), так как корни характеристического уравнения такие: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = (g - d_1) + (a - d_2) > 0$.

3. При $d_1 - g > 0$ в первой четверти существуют две особые точки. Начало координат является седлом, что следует из выражений (6)–(8). Во второй особой точке имеем устойчивый узел (рис. 4).

3. Основной случай. Пусть теперь все коэффициенты системы

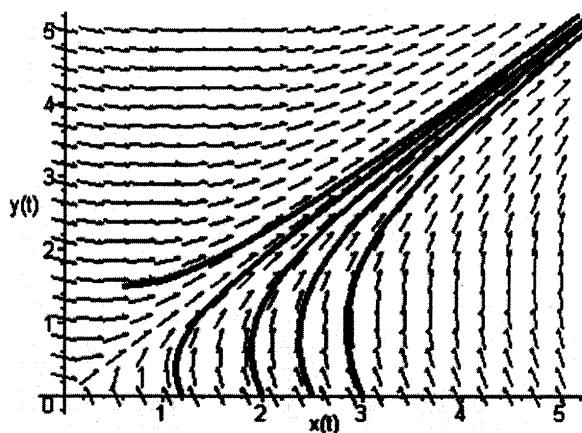


Рис. 2. Особая точка $(0;0)$ — седло ($b = 0, c = 0, a = g = 2, d_1 = d_2 = 3$).

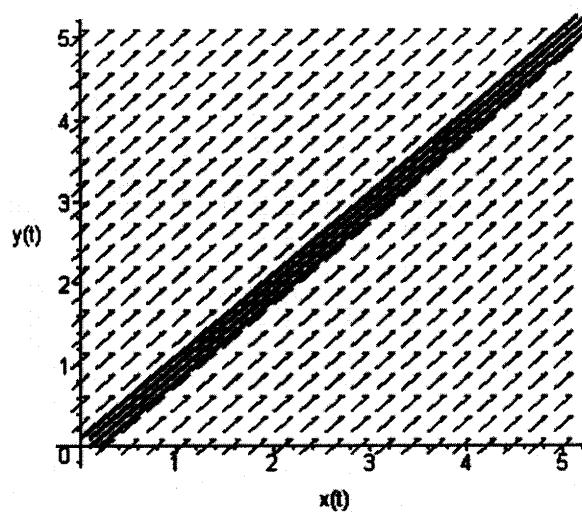


Рис. 3. Особая точка $(0;0)$ — вырожденный узел ($b = 0, c = 0, a = g = 4, d_1 = d_2 = 2$).

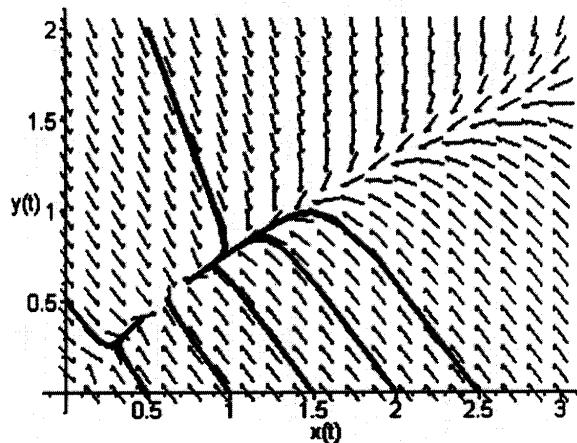


Рис. 4. Особая точка $(0;0)$ — седло; $(0.7, 0.4)$ — устойчивый узел ($b = 0$, $c = 2$, $a = g = 0.5$, $d_1 = d_2 = 3$).

не равны нулю. При $b > 0$ система (1) имеет особые точки тех же типов, что и в случае, рассмотренном выше. Однако они могут переместиться из первой четверти. Рассмотрим уравнения для нахождения особых точек:

$$\begin{cases} gx + d_1(y - x) - b = 0, \\ ay + d_2(x - y) - cy^2 = 0. \end{cases}$$

Особые точки — это точки пересечения прямой

$$x = \frac{d_1 y}{d_1 - g} - \frac{b}{d_1 - g} \quad (9)$$

и параболы

$$x = \frac{c}{d_2} y^2 + \frac{d_2 - a}{d_2} y = \frac{c}{d_2} \left(y + \frac{d_2 - a}{2c} \right)^2 - \frac{(d_2 - a)^2}{4cd_2}.$$

В зависимости от знаков разностей $d_1 - g$ и $d_2 - a$ имеем следующие случаи.

1. $d_1 - g = 0$. Система (1) имеет особую точку с координатами

$$x = \frac{b(d_2 - a)}{d_1 d_2} + \frac{cb^2}{d_1^2 d_2}, \quad y = \frac{b}{d_1}.$$

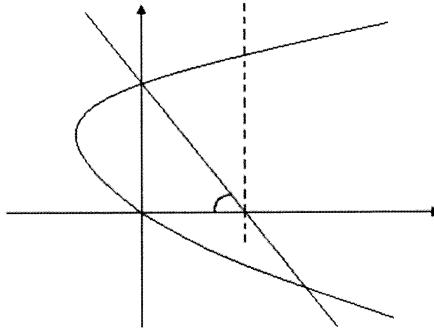


Рис. 5.

При $d_2 - a \geq 0$ и при $d_2 - a < 0$, $b \geq \frac{d_1(a-d_2)}{c}$ особая точка — седло.
При $d_2 - a < 0$, $b < \frac{d_1(a-d_2)}{c}$ особых точек нет.

2. $d_1 - g < 0$.

(а) $d_2 - a < 0$. Геометрически (рис. 5) получаем, что при

$$b \leq \frac{(a-d_2)(d_1-g)^2}{cd_1}$$

система (1) имеет одну особую точку — неустойчивый узел. При

$$b > \frac{(a-d_2)(d_1-g)^2}{cd_1}$$

особых точек нет.

(б) $d_2 - a > 0$. Система (1) имеет одну особую точку — неустойчивый узел (рис. 6).

3. $d_1 - g > 0$.

Для определения координат особых точек имеем уравнение

$$y^2 - \frac{ad_1 + gd_2 - ag}{c(d_1 - g)}y + \frac{bd_2}{c(d_1 - g)} = 0, \quad (10)$$

координата x задается выражением (9). Дискриминант уравнения (10) равен

$$\frac{(ad_1 + gd_2 - ag)^2}{4c^2(d_1 - g)^2} - \frac{bd_2}{c(d_1 - g)},$$

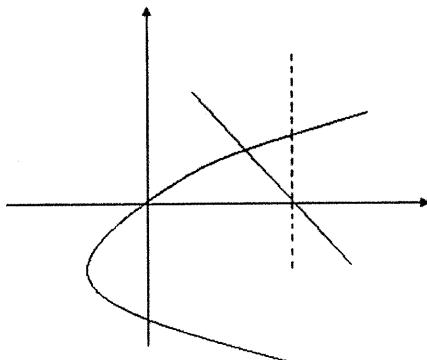


Рис. 6.

от его знака зависит количество особых точек. Кроме того, это количество зависит от значения разности $d_1y - b$, входящей в (9), причем величина y определяется из (10).

Введем обозначение

$$D = \frac{(ad_1 + gd_2 - ag)^2}{4cd_2(d_1 - g)}. \quad (11)$$

Если $b > D$, то у системы (1) в первой четверти нет особых точек.

Если $b = D$, то в первой четверти одна особая точка — седло при $d_2 - a \geq 0$ и $d_2 - a < 0$, $(a - d_2)(d_1 - g) \leq d_1d_2$ (рис. 7).

Если $d_2 - a < 0$, $(a - d_2)(d_1 - g) > d_1d_2$, то особых точек система не имеет.

Если $b < D$, то система имеет:

- две особые точки — седло и устойчивый узел — в следующих случаях:

$$\begin{aligned} d_2 - a \geq 0; \quad (a - d_2)(d_1 - g) < d_1d_2, \quad b \geq \frac{d_1(a - d_2)}{c}; \\ (a - d_2)(d_1 - g) > d_1d_2, \quad \frac{d_1(a - d_2)}{c} < b < \frac{d_1(ad_1 + gd_2 - ag)}{2c(d_1 - g)}; \end{aligned}$$

- одну особую точку — устойчивый узел, если

$$(a - d_2)(d_1 - g) < d_1d_2, \quad b < \frac{d_1(a - d_2)}{c};$$

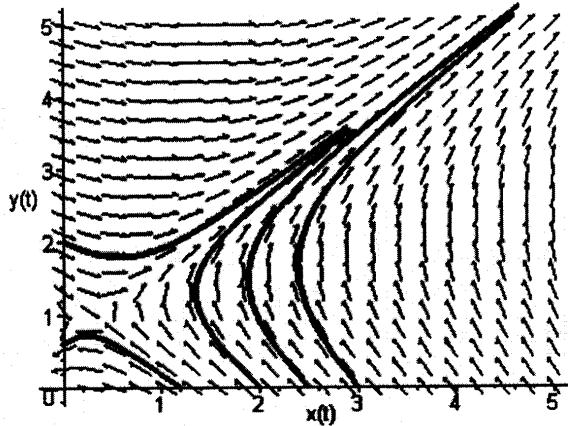


Рис. 7. Особая точка $(0.3; 0.9)$ — седло; ($b = 2.6$, $c = 0$, $a = g = 2$, $d_1 = d_2 = 3$).

$$(a - d_2)(d_1 - g) > d_1 d_2, \quad b \leq \frac{d_1(a - d_2)}{c};$$

$$(a - d_2)(d_1 - g) = d_1 d_2, \quad b = \frac{d_1(ad_1 + gd_2 - ag)}{2c(d_1 - g)};$$

- при $\frac{d_1(ad_1 + gd_2 - ag)}{2c(d_1 - g)} < b$ особых точек системы (1) в первой четверти нет.

4. Частные случаи. Уточним и обобщим некоторые результаты работ [7, 8]. Рассмотрим случай, когда часть ареала обитания популяции становится охраняемой территорией, например при охране мест нереста рыбы. Тогда в системе (1) можно принять $a = g$ и $d_1 = d_2$. Из основного рассмотрения получаем:

- если $d - a = 0$, то система имеет одну особую точку $x = \frac{cb^2}{d^3}$, $y = \frac{b}{d}$ — седло;
- если $d - a < 0$, то система имеет одну особую точку — неустойчивый узел — при $b \leq \frac{(a-d)^3}{cd}$, при $b > \frac{(a-d)^3}{cd}$ особых точек нет;
- если $d - a > 0$, то в системе нет особых точек при $b > D_1$;
- одна особая точка — седло — при $b = D_1$;

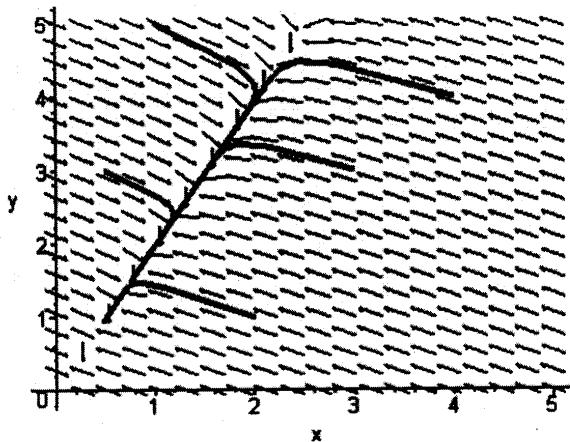


Рис. 8. Особая точка $(0.3; 0.9)$ — устойчивый узел; $(b = 0.6, c = 1, a = 1, 9, g = -1, d = 1)$.

- две особые точки — седло и устойчивый узел — при $b < D_1$.
Здесь $D_1 = \frac{a^2(2d-a)^2}{4cd(d-a)}$ получаем из (11).

Если восстанавливается вымирающая популяция ($g < 0$), то возможен только случай 3 п. 3 рассмотрения.

Наконец, рассмотрим возможность искусственного восстановления популяции, когда одна ее часть пополняется из другой без обмена. Система дифференциальных уравнений приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = gx + dy - b, \\ \dot{y} = ay - dy - cy^2. \end{cases} \quad (12)$$

Имеют место все предположения, сделанные относительно коэффициентов системы (1). Рассмотрим следующие случаи.

1. $b = 0$. Система (12) имеет две особые точки — начало координат и точку с координатами

$$x = -\frac{dy}{g}, \quad y = \frac{a-d}{c}.$$

Существует лишь одна особая точка $(0, 0)$: неустойчивый узел при $d - a < 0, g > 0$; седло, если $d - a > 0, g > 0$; устойчивый узел, если

$d - a > 0, g < 0$. При $g = a - d \neq 0$ имеем вырожденный узел. Если $g = 0$, то существуют состояния равновесия вида $x = x_0, y = 0$. При $g > 0, a = d$ начало координат является особой точкой типа седло-узел (в первой четверти выглядит как седло).

Две особые точки — устойчивый узел и седло — имеют место при выполнении условий $d - a < 0, g < 0$.

2. $c = 0$. При $g > 0$ существует одна особая точка $x = \frac{b}{g}, y = 0$, обладающая свойствами особой точки $(0, 0)$ из случая 1. При $g < 0$ особых точек нет.

3. Когда $b > 0$, в системе может иметься две особые точки: первая с координатами $x = \frac{b}{g}, y = 0$ и вторая с координатами

$$x = \frac{b}{g} - \frac{dy}{g}, \quad y = \frac{a-d}{c}.$$

В первой четверти нет особых точек при выполнении условий $d - a < 0, g < 0, b > \frac{d(a-d)}{c}$ или $d - a \geq 0, g < 0$.

Одна особая точка лежит в первой четверти, если $d - a < 0, g < 0, b \leq \frac{d(a-d)}{c}$ (вторая особая точка — устойчивый узел (рис. 8)) или $d - a < 0, g > 0, b < \frac{d(a-d)}{c}$ (первая особая точка — неустойчивый узел), или $d - a > 0, g > 0$ (первая особая точка — седло).

Две особые точки — неустойчивый узел и седло — имеют место при $d - a < 0, g > 0, b \geq \frac{d(a-d)}{c}$.

5. Заключение. По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы.

1. Разбиение популяции на две части приводит к увеличению неопределенности при прогнозе возможного развития всей популяции. При организации охраняемой территории желательно, чтобы она полностью включала в себя ареал обитания охраняемой популяции.

2. С помощью охраняемых территорий возможно увеличение общей численности популяции. Однако существуют и предельные случаи, зависящие от начальных численностей двух частей популяций, когда восстановление неохраняемой части популяции невозможно.

3. Для организации охраняемых территорий основной причиной можно назвать отрицательное, нулевое или малое положительное значение коэффициента роста популяции g .

4. Если промысел неохраняемой части популяции ведется пропорционально ее численности: $f(x) = bx$ (см., например, [9]), то число бифуркационных параметров в системе уменьшается.

5. Уменьшается неопределенность в прогнозе и при восстановлении вымирающей популяции ($g < 0$).

6. Виды фазовых портретов траекторий системы (12) в случае искусственного восстановления популяции не всегда совпадают с фазовыми портретами системы (1).

7. Коэффициент конкуренции c существенно меньше коэффициента a .

8. При отсутствии конкуренции ($c = 0$) увеличение коэффициента добывчи b отодвигает особую точку от начала координат. В этом случае увеличивается возможность вымирания неохраняемой части популяции.

9. В общем случае ($c \neq 0, b \neq 0$) увеличение коэффициента конкуренции c приближает устойчивый узел к началу координат. Тем самым численность обеих частей популяции стабилизируется на более низком уровне.

10. В системах (1) и (12) возможны особые точки типа неустойчивый узел, устойчивый узел, вырожденный узел и седло. При наличии в первой четверти двух особых точек получаем сочетание седла и устойчивого узла для систем (1) и (12), а также седла и неустойчивого узла для системы (12).

11. В рассматриваемых системах нет особых точек типа центр и фокус. Это означает, что в численности популяций периодические колебания отсутствуют. Численность популяции либо возрастает (убывает), либо со временем стабилизируется.

12. При $b = 0$ виды фазовых портретов траекторий системы (1) зависят от знака бифуркационного параметра $a(d_1 - g) + gd_2$. В свою

очередь, знак параметра зависит от знаков разностей $d_1 - g$ и $d_2 - a$. Если $d_1 - g > 0$, то возможна стабилизация численностей обеих частей популяции.

13. При $b \neq 0$ количество особых точек в (1) зависит от величины коэффициента b . Бифуркационный параметр имеет вид $(a - d_2)(d_1 - g) - d_1 d_2$ и опять-таки зависит от знаков разностей $d_1 - g$ и $d_2 - a$.

14. В системе (12) бифуркационными параметрами являются величины g , $d - a$, $b - \frac{d(a-d)}{c}$.

15. Зная значения коэффициентов g , a , c , d_1 , d_2 , можно выбрать такое значение функции добычи (параметра b), чтобы по имеющимся условиям для b определить необходимый случай дальнейшего развития популяции.

Авторы выражают глубокую благодарность Е. Т. Софонову и М. П. Григорьеву за ценные замечания, способствовавшие улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ризниченко Г. Ю. Математические модели в экологии. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2002.
2. Федоров В. Д., Гильманов Т. Г. Экология. М.: Изд-во МГУ, 1980.
3. Васильченко В. В., Мермельштейн И. Г. О влиянии недоступных для хищника участков на динамику системы «хищник-жертва» // Математическое моделирование в проблемах рационального природопользования: Тез. докл. XVII школы-семинара. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1989. С. 59.
4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1963.
5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
6. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах / М. П. Григорьев, Ю. Т. Половинкин, Н. А. Романова, Е. Т. Софонов, Ю. И. Трофимцев. М.: Вузовская книга, 2006.
7. Докторова В. А. Развитие популяции при наличии охраняемой территории // Материалы Междунар. научных чтений «Приморские зори-2007». Владивосток: Изд-во ТАНЭБ, 2007. Вып. 1. С. 131–134.
8. Толстыхин О. Н., Трофимцев Ю. И. Экологический менеджмент. Новосибирск: Наука, 1998.
9. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.

УДК 678.029.43

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
ОХЛАЖДЕНИЯ СВАРНОГО СОЕДИНЕНИЯ
ПОЛИМЕРНЫХ ТРУБ ПРИ НИЗКИХ
ТЕМПЕРАТУРАХ*)

Н. П. Старостин, О. А. Аммосова

Введение. Этап осадки — наиболее важный процесс при тепловой сварке встык полиэтиленовых труб, формирующий сварное соединение. При осадке свариваемые детали оплавленными поверхностями сближаются под давлением, создавая физический контакт. В результате сближения оплавленных торцов часть оплавленного материала вытекает наружу, образуя грат (рис. 1). Величина давления и скорость осадки при сварке должны обеспечивать полный перенос из зоны стыка в грат всех ингредиентов (газовые прослойки, окисленные слои), препятствующих взаимодействию макромолекул на поверхностях свариваемых деталей и получению высококачественного сварного соединения. За время выдержки под давлением осадки в стыке происходят сложные процессы образования надмолекулярных структур, характер которых в значительной степени определяет физико-механические свойства сварного соединения. По мере охлаждения расплава параллельно ориентированные сегменты макромолекулярных цепей объединяются в ассоциации, образуя кристаллические области. Оставшаяся часть макромолекул входит в состав аморфной фазы. Одновременно в шве нарастают остаточные температурные напряжения, вызванные усадкой

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-08-96000) и Фонда содействия отечественной науке.

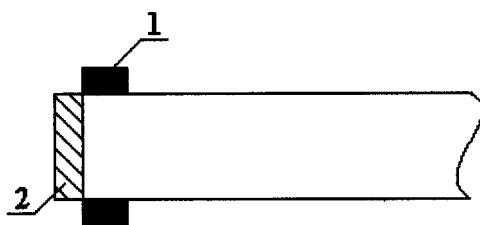


Рис. 1. Стенка трубы на этапе осадки (разрез): 1 — грат; 2 — область уходящая в грат.

материала.

Интервал кристаллизации — температурная область между точками плавления и температурой стеклования. Для полиэтилена оптимальной температурой кристаллизации является интервал 125–80°C. От степени кристалличности и размеров надмолекулярных образований зависит пластичность ПЭ труб. В свою очередь, степень кристалличности полимера зависит от режима охлаждения. Если скорость охлаждения большая, то центров кристаллизации образуется много и их рост происходит медленно, при этом образуется мелкокристаллическая структура, обуславливающая пластичность полиэтилена. При медленном охлаждении расплава формируется крупнокристаллическая структура материала, наличие которой увеличивает склонность полиэтилена к хрупкому разрушению.

Проведение этапа осадки при температуре окружающего воздуха (ОВ) ниже регламентируемой скорость охлаждения сварного соединения возрастает. Слишком быстрое охлаждение вызывает в зоне сварки значительные внутренние напряжения, которые не успевают сглаживаться до того, как к швам прикладывается дополнительные монтажные нагрузки [1]. Также при слишком быстром охлаждении процесс кристаллизации может оборваться на промежуточной стадии, тогда как при формировании структуры в условиях медленного охлаждения

разрушившиеся центры кристаллизации успевают восстанавливаться [2]. Поэтому регулирование скорости охлаждения при температурах ОВ является актуальной проблемой. При этом необходимо исследовать температурное поле в трубе при осадке. Наиболее полное исследование можно провести с помощью математического моделирования теплового процесса.

Математическая модель. Нестационарное температурное поле в сварном соединении при оплавлении получается решением методом конечных разностей двумерной задачи Стефана в цилиндрических координатах. Постановка задачи и метод решения приведены в работе [3].

Пренебрегая продолжительностью технологической паузы и временем, затрачиваемым на течение расплава при осадке, трубу считаем укороченной на величину осадки. Для упрощения расчетов принимается допущение, что поперечное сечение образующегося грата имеет прямоугольную форму, при этом труба укорачивается (см. рис. 1). Поскольку при образовании грата вытекающий расплав смешивается, распределение температуры в грите будем полагать равномерно распределенным. Осредненную температуру в грите определяли из соотношения

$$T_r = \frac{2\pi}{V} \int_0^{\xi} \int_{r_1}^{r_2} r \cdot T(r, z) dr dz, \quad (1)$$

где V — объем расплава, вытекающего в грите. В начале процесса остывания оставшаяся часть трубы имеет распределение температуры, полученное в конце этапа оплавления.

Для рассматриваемой трубы рассчитано, что величина изменения длины составляет 2,6 мм, это также подтверждено экспериментами по сварке ПЭ труб в нормальных условиях. Для величины осадки 2,6 мм поперечное сечение бралось в форме квадрата со сторонами 3 мм. Начало координат по длине трубы z смещалось на величину осадки и ставилось на месте стыка труб.

Несмотря на то, что в расчетах пренебрегается продолжительность технологической паузы, предполагается, что при отделении нагревательного инструмента от свариваемых труб и смыкании оплавленных деталей температура воздуха внутри трубы становится равной температуре окружающего воздуха и вновь повышается за счет теплоотдачи от нагретой части трубы на стадии охлаждения. При этом постановка задачи аналогична этапу оплавления, но условие на одном торце заменяется условием отсутствия теплового потока (условие симметрии температурного поля) в режиме охлаждения:

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (2)$$

На свободной поверхности грата задается условием конвективного теплообмена с окружающей средой.

Задача решалась численно методом сглаживания коэффициентов [4]. Алгоритм сквозного счета строился с использованием чисто неявных однородных схем. Получающиеся при этом нелинейные трехточечные уравнения решались методом итераций, решения на каждой итерации находились методом прогонки.

Для расчета использовались следующие данные: $r_1 = 0,0257$; $r_2 = 0,0315$ м; $l = 0,1$ м; $\lambda_1 = 0,46$; $\lambda_2 = 0,24$; $\lambda_3 = 0,0338$ Вт/(м·К); $\rho_1 = 950$; $\rho_2 = 800$; $\rho_3 = 1,2$ кг/м³; $c_1 = 2000$; $c_2 = 2400$; $c_3 = 1007$ Дж/(кг·К); $T_\Phi = 111^\circ\text{C}$, соответствующая температуре кристаллизации полиэтилена; $L = 157$ кДж/кг [5]; $\Delta = 10^\circ\text{C}$.

Результаты расчетов. Для анализа влияния грата на изменение температуры сварного соединения моделировалось также охлаждение трубы без грата, но с учетом величины осадки. На рис. 2 представлены характерные кривые изменения температуры по времени в одной точке, иллюстрирующее существенное влияние грата на динамику температурного поля стенки трубы. В начальный момент времени появление грата приводит к повышению температуры. Затем следует снижение температуры. Скорость охлаждения имеет два пика (рис. 3), соответствующие временному запаздыванию теплового воздействия грата на

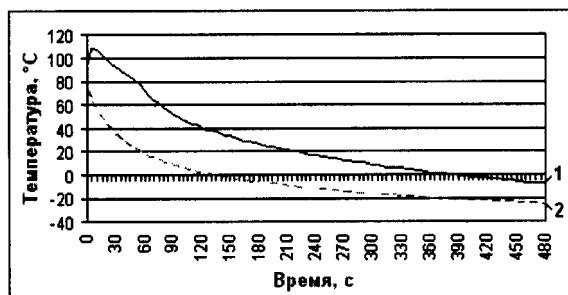


Рис. 2. Изменение температуры по времени в точке ($r = 0,0315$; $z = 0,001$) при охлаждении с учетом грата и без него: 1 — с учетом грата; 2 — без учета грата. Температура ОВ равна -40°C .

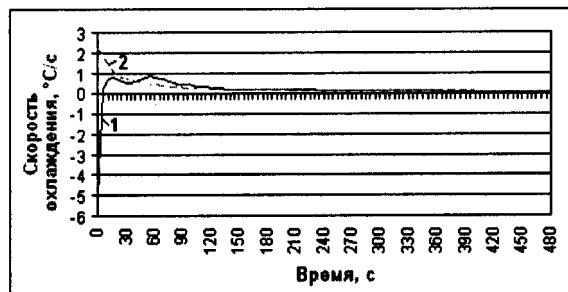


Рис. 3. Изменение скорости охлаждения по времени в точке ($r = 0,0315$; $z = 0,001$) при охлаждении с учетом грата и без него: 1 — с учетом грата; 2 — без учета грата. Температура ОВ равна -40°C .

внешней и на внутренней поверхностях трубы. Примерно через 45 секунд скорость охлаждения в рассматриваемой точке, полученная по модели с учетом грата, превышает скорость охлаждения по модели без учета грата. В дальнейшем кривые асимптотически сходятся, что свидетельствует о том, что тепловое влияние грата со временем ослабевает.

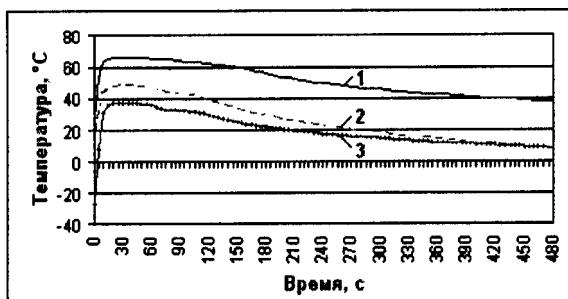


Рис. 4. Изменение температуры воздуха внутри трубы по времени в точке ($r = 0,0038$; $z = 0,001$) при различной температуре ОВ: 1 — 20°C ; 2 — -15°C ; 3 — -40°C .

Однако оно значимо в период времени охлаждения, регламентируемого нормативными документами. Таким образом, необходимо при выборе режимов сварки учитывать в математической модели теплового процесса воздействие грата на динамику температурного поля.

Исследуем динамику температурного поля в сварном соединении труб в период охлаждения при предположении, что при температуре ОВ в допустимом для сварки диапазоне $[-15, 45]^{\circ}\text{C}$ на внешних поверхностях трубы с гратором происходит конвективный теплообмен, а при температурах ОВ ниже допустимых эти поверхности идеально теплоизолированы.

На рис. 4 представлены полученные расчетом зависимости температуры воздуха внутри трубы от времени при различных температурах окружающей среды.

Такие зависимости сохраняются и в точках на расстоянии до 2 см от стыка. Расчеты показывают, что при охлаждении сварного соединения в условиях низких температур ОВ температура воздуха внутри трубы в течение первых секунд достигает максимума, затем постепенно снижается и за время охлаждения изменяется в диапазоне допустимых

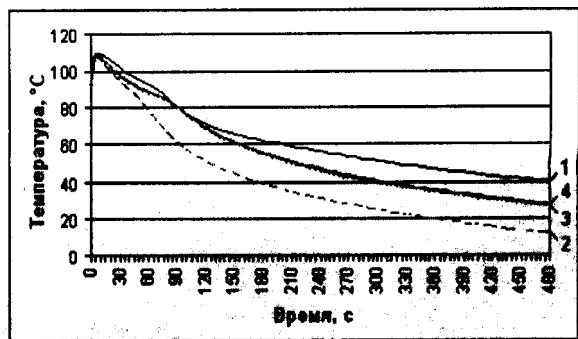


Рис. 5. Изменение температуры по времени в точке ($r = 0,0315$; $z = 0,001$) при различной температуре ОВ: 1 — 20; 2 — -15 ; 3-4 — -40°C с идеальной изоляцией на всей длине трубы и идеальной изоляцией на участке трубы соответственно.

температур ОВ. Это свидетельствует о том, что при естественно низких температурах ОВ конвективный теплообмен внутренней поверхности трубы в окрестности стыка будет происходить с воздухом с допустимой для сварки температурой.

Идеальная теплоизоляция внешней поверхности трубы при сварке в условиях температур ОВ ниже нормативных снижает скорость охлаждения сварного соединения (рис. 5) в период времени от 30 до 90 секунд с момента прижима труб. При этом температура меняется в диапазоне от 100 до 80°C , в котором интенсивно происходит фазовый переход в полиэтилене, вследствие чего может сформироваться крупнокристаллическая структура, увеличивающая склонность полимера к хрупкому разрушению [1]. Однако при отсутствии теплоизоляции внешней поверхности при низких температурах ОВ скорость охлаждения увеличивается и процесс кристаллизации может оборваться на промежуточной стадии, тогда как при формировании структуры в условиях медленного охлаждения разрушившиеся центры кристаллизации успевают восстанавливаться [2]. Поэтому существует проме-

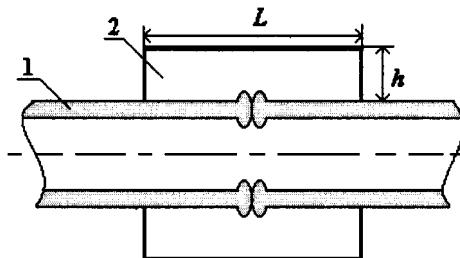


Рис. 6. Схема теплоизоляционной камеры: 1 — полиэтиленовая труба; 2 — теплоизоляционная камера; L — длина; h — высота.

жущее условие, при котором охлаждение сварного соединения будет протекать, как при допустимых температурах ОВ. Такое условие может быть создано частичной теплоизоляцией внешних поверхностей труб.

Расчеты показывают, что характер зависимости температуры от времени в трубе практически не меняется, если условие идеальной теплоизоляции оставить только в более нагретой части трубы, а в остальной части — задать условие конвективного теплообмена. Например, если идеально теплоизолирована часть трубы длиной 2 см от сварного соединения, то полученные при этом кривые изменения температуры по времени совпадают с соответствующими кривыми при теплоизоляции всей внешней поверхности трубы (рис. 5).

Следовательно, регулирование скорости охлаждения в области структурных изменений можно осуществить теплоизоляцией участка труб около сварного шва. В этих целях предлагается использовать цилиндрическую теплоизоляционную камеру, схема которой представлена на рис. 6. Размеры камеры определяются на основе теоретического моделирования процесса остывания сварного соединения с теплоизоляционной камерой из условия обеспечения допустимой скорости охлаждения.

Теоретическое моделирование процесса охлаждения сварного со-

единения при наличии теплоизоляционной камеры проводилось решением задачи Стефана. При этом принято допущение о достаточно быстрым (в пределах расчетного шага по времени) установлении однородной температуры воздуха внутри камеры. Пусть температура воздуха в камере в текущий момент времени известна. На следующем временном шаге температура воздуха в камере $T_{kam}(t)$ определяется на основе теплового баланса с учетом конвективной теплопередачи с поверхности трубы и грата в камеру, наполненную воздухом с известной температурой $\check{T}_{kam}(t)$:

$$Q = \alpha \int_{\Gamma} (T|_{\Gamma} - \check{T}_{kam}(t)) \tau d\Gamma, \quad (3)$$

где Q — количество теплоты; Γ — внешняя поверхность трубы и грата, ограниченная камерой; α — коэффициент теплоотдачи с внешней поверхности трубы и грата. За счет теплоты Q повышается температура в камере, которую определяем из соотношения

$$Q = c_3 \rho_3 V_{kam} (T_{kam} - \check{T}_{kam}(t)), \quad (4)$$

где V_{kam} — объем камеры.

О среднененная температура в камере, полученная в результате расчета, зависит от геометрических размеров теплоизоляционной камеры. Расчеты показывают, что увеличение длины камеры при фиксированной высоте способствует снижению температуры в камере, что соответствует физическому представлению. При этом увеличивается не только объем камеры, но и поверхность трубы с более низкой температурой, что приводит к снижению температуры в теплоизоляционной камере. Однако увеличение высоты (радиуса) камеры при фиксированной длине также способствует снижению температуры воздуха внутри камеры, но не столь значительно. Поэтому, принимая во внимание возможности изготовления и практическое использование теплоизоляционной камеры, один из геометрических размеров, например высоту, можно зафиксировать и, варьируя длину камеры, определить размер

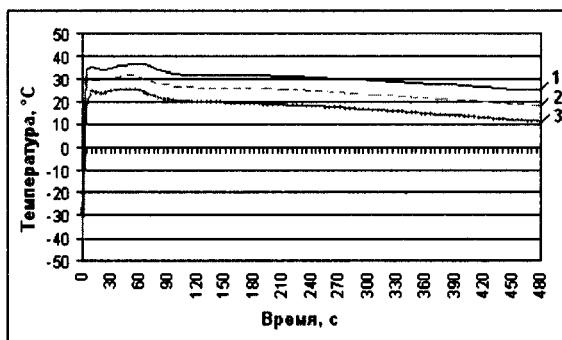


Рис. 7. Изменение температуры воздуха в теплоизоляционной камере в период охлаждения сварного соединения при различных температурах ОВ: 1 — -20 ; 2 — -30 ; 3 — -40°C .

камеры, обеспечивающий допустимую скорость охлаждения сварного соединения. При высоте камеры, равной 0,02 м, найдена полудлина камеры $L/2$, равная 0,02 м и обеспечивающая допустимую скорость охлаждения в интервале низких температур ОВ ($-45, -15$)°С.

На рис. 7 представлены расчетные изменения температуры в теплоизоляционной камере по времени при охлаждении сварного соединения при различных температурах ОВ. Температура воздуха в камере достаточно быстро становится положительной и удерживается таковой в течение периода охлаждения. Незначительное повышение температуры воздуха в камере в промежутке времени от 30 до 60 секунд, как будет показано ниже, не влияет на скорость охлаждения сварного соединения.

Характерные зависимости температуры от времени при охлаждении сварного соединения в теплоизоляционной камере при различных температурах ОВ приведены на рис. 8. Для сравнения показаны полученные расчетами предельные кривые изменения температур по времени при температурах ОВ -15 и 45°C при охлаждении соединения в естественных условиях, а также изменение температуры по времени

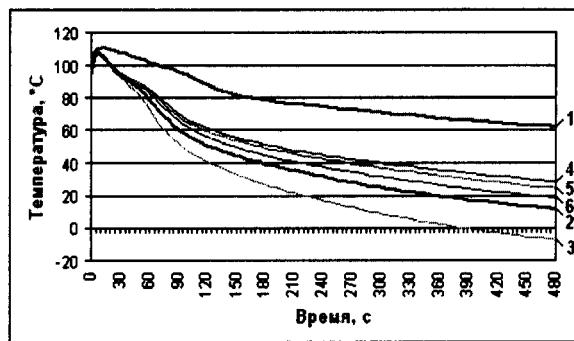


Рис. 8. Изменение температуры по времени в точке $(0, 0315; 0, 001)$ при различных температурах ОВ без (1–3) и с использованием теплоизоляционной камеры (4–6): 1 — 45; 2 — -15 ; 3 — -40 ; 4 — -20 ; 5 — -30 ; 6 — -40°C .

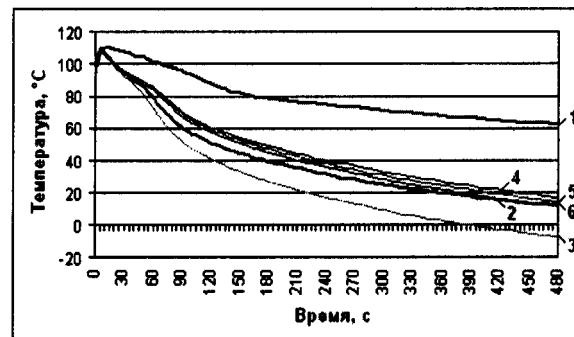


Рис. 9. Изменение температуры по времени в точке $(0, 0315; 0, 001)$ при различных температурах ОВ без (1–3) и с использованием (4–6) теплоизоляционной камеры размером $L = 3$ см, $h = 2$ см: 1 — 45; 2 — -15 ; 3 — -40 ; 4 — -50 ; 5 — -55 ; 6 — -60°C .

при температуре ОВ -40°C при естественном охлаждении. Зависимости температуры по времени при охлаждении соединения в теплоизо-

ляционной камере лежат между предельными кривыми.

Кроме того, каждой зависимости температуры от времени, полученной при охлаждении сварного соединения в камере, соответствует зависимость, получающаяся при естественном охлаждении соединения при некоторой температуре ОВ из допустимого интервала. Расчетами установлено, что охлаждение околосшовной зоны соединения в теплоизоляционной камере, например, при температуре ОВ -40°C протекает так же, как и при естественном охлаждении при температуре ОВ 0°C .

Использование камеры с найденными размерами позволяет устранить замедление скорости остывания сварного соединения в области структурных изменений, характерное для идеальной теплоизоляции внешней поверхности трубы. Следовательно, в окрестности сварного шва будет сформирована такая же структура материала, что и при сварке при допустимых температурах ОВ.

Однако при температурах ОВ -50°C и ниже найденные размеры теплоизоляционной камеры не позволяют добиться необходимой скорости охлаждения. Поэтому предлагается уменьшить длину камеры. Расчетами найдена полудлина камеры, равная $L/2 = 1,5$ см, при которой достигается необходимая скорость охлаждения.

На рис. 9 представлено изменение температуры по времени с использованием теплоизоляционной камеры размерами $L = 3$ см, $h = 2$ см. Расчеты показывают, что размеры данной камеры обеспечивают допустимую скорость остывания при температурах ОВ от -45 до -60°C . Отметим, что использование камеры с данными размерами для охлаждения сварного соединения в интервале температур ОВ $(-45, -15)^{\circ}\text{C}$ приводит к чрезмерному снижению скорости охлаждения в период времени от 30 до 90 секунд с момента прижатия труб, как в случае идеальной теплоизоляции.

Заключение. Предложена методика расчета нестационарного температурного поля стенки при сварке полимерных труб с учетом теплового воздействия грата и формоизменения на этапе охлаждения. Впервые предложена и теоретически обоснована методика определения раз-

меров теплоизоляционной камеры для сварки полиэтиленовых труб при температурах воздуха ниже нормативных на основе математического моделирования теплового процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каргин В. Ю., Шурайц А. Л. Сварка и контроль газопроводов из полимерных материалов. В помощь сварщикам и специалистам сварочного производства. М.: ОАО «Приволжск. кн. изд-во», 2003.
2. Крюкова И. М., Сквирская И. И., Ушаков В. Я., Шмаков Б. В. Влияние температуры расплава на свойства полиэтилена в крупногабаритных изделиях // Пластические массы. 1998. № 6. С. 38–39.
3. Старостин Н. П., Аммосова О. А. Моделирование теплового процесса при разработке технологии сварки полимерных труб при низких температурах атмосферного воздуха // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, вып. 2. С. 104–114.
4. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычислите. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 816–827.
5. Гориловский М. И., Калугина Е. В., Иванов А. Н., Сатдинова Ф. К. Исследование кристалличности и термостабильности в трубах, полученных из различных видов полиэтилена // Пластические массы. 2005. № 4. С. 9–12.

г. Якутск

15 апреля 2008 г.

АННОТАЦИИ

УДК 519.234

ОБ ОЦЕНКЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИ
КОРРЕЛИРОВАННОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА. В. Г. Алексеев. — Мат.
заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Строится и исследуется непараметрическая оценка математического ожидания $m(t)$ периодически коррелированного случайного процесса $X(t)$ по его реализации конечного объема. Формулируются рекомендации по выбору ключевого параметра оценки функции $m(t)$. Библиогр. 18.

УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ
ОДНОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ. И. И. Горохова, Е. Т. Софронов. —
Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Изучается устойчивость по Ляпунову состояния равновесия с положительными координатами одной системы третьего порядка с четырьмя положительными параметрами. Библиогр. 3.

УДК 517.95

О МЕТОДЕ ГАЛЁРКИНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ. И. Е. Егоров, П. И. Степанова. — Мат. заметки ЯГУ, 2008,
т. 15, вып. 2.

При определенных условиях на коэффициенты эллиптико-параболического уравнения второго порядка единственное обобщенное решение первой краевой задачи находится как предел приближенных решений, вычисляемых по методу Галёркина. Библиогр. 9.

УДК 518.9

О СПОСОБАХ ФОРМИРОВАНИЯ СТРАТЕГИЙ И ВЫИГРЫШЕЙ
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ РЕС-ЗАДАЧ. Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов. — Мат.
заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Рассмотрена проблематика РЕС-задач. Предложены и обоснованы принципы формирования компонентов РЕС-задач. Библиогр. 3.

УДК 517.946

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ В ОДНОМЕРНОМ УРАВНЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ. А. И. Кожанов.
— Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Исследуется разрешимость обратной задачи нахождения решения $u(t)$ и коэффициента $q(x)$ в нелинейном параболическом уравнении

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x} F(u_x) + q(x)u = f(x, t).$$

Устанавливаются теоремы существования и единственности регулярных решений. Библиогр. 8.

УДК 517.956

ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. Р. Р. Сафинуллова. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Исследуется разрешимость линейной обратной задачи для гиперболического уравнения второго порядка с неизвестной правой частью (неизвестным внешним воздействием), содержащей несколько неизвестных компонент. В качестве условий переопределения предлагаются условия Коши на сечении $t = \text{const}$. Доказывается существование и единственность регулярных решений. Библиогр. 19.

УДК 512.6:519.61

К ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. П. Ф. М. Федоров. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

В основном с алгебраических позиций сделана попытка построения теории для так называемых периодических бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, в отличие от регулярных, вполне регулярных и нормальных систем. На основе предлагаемой теории рассмотрены примеры замкнутого решения некоторых периодических бесконечных систем. Библиогр. 6.

УДК 621.89:536.24

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ УПРОЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В РАДИАЛЬНЫХ ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. М. А. Васильева, А. С. Кондаков, Н. П. Старостин. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Предложены расчетные методики для определения эксплуатационных параметров подшипников скольжения с вращательным и возвратно-вращательным движением вала, допускающих использование упрощенных математических тепловых моделей для тепловой диагностики трения. Ил. 5, библиогр. 7.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ В МОДЕЛЬНЫХ РУСЛАХ С ПОЙМОЙ. В. А. Егоров. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Приведены серии расчетов течений в модельных руслах с поймой при помощи плановых уравнений движения воды в руслах, в которых выделены отдельно члены, учитывающие гидравлическое трение воды об дно русла, и члены, учитывающие эффективную вязкость воды. Из серии расчетов при различном наполнении русла получаются кривые зависимости максимальной и средней скоростей в поперечном сечениях от глубины. Полученные расчетные кривые сравниваются с известными экспериментальными и натуральными данными. Ил. 8, библиогр. 9.

УДК 517. 946

ОСОБЫЕ ТОЧКИ И БИФУРКАЦИОННЫЕ ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОПУЛЯЦИИ. А. М. Леонов, Ю. И. Трофимцев. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Построена модель развития популяции при наличии охраняемой территории в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследованы особые точки системы, найдены ее бифуркационные параметры. Ил. 8, библиогр. 9.

УДК 678.029.43

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОХЛАЖДЕНИЯ СВАРНОГО СОЕДИНЕНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ ТРУБ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ. Н. П. Старостин, О. А. Аммосова. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

На основе математического моделирования разработана математическая модель теплового процесса на этапе осадки, учитывающая формоизменение трубы и образование грата на динамику температурного поля сварного соединения. Приводятся результаты расчета скорости охлаждения при низких температурах окружающего воздуха. Предлагается использование теплоизоляционной камеры на этапе осадки. Разработана методика выбора геометрических параметров теплоизоляционной камеры на основе расчетов теплового режима. Ил. 9, библиогр. 5.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

К публикации в «Математических заметках ЯГУ» принимаются оригинальные статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редакцией не рассматриваются.

В редакцию представляется рукопись в двух экземплярах объемом не более 1 авторского листа, оформленная согласно стандартным требованиям к авторским оригиналам. К рукописи должны быть приложены два экземпляра аннотации, список ключевых слов на двух языках (русском и английском), шифр УДК. Депонирование рукописи редакцией не осуществляется. Авторы обязаны указать место работы, должность и контактную информацию на двух языках. В случае возвращения статьи для переработки указываются две даты поступления — первоначальная дата и дата получения редакцией окончательного текста.

Основные требования к оформлению рукописи:

1. Текст статьи должен быть напечатан через 2 интервала на одной стороне листа белой писчей бумаги форматом 210×300 мм.
2. Рисунки и сложные диаграммы выполняются на отдельных листах с указанием на обороте фамилии автора, названия статьи и номера рисунка; их место в тексте указывается на полях статьи.
3. Формулы и математические обозначения должны быть вписаны черной пастой или чернилами черного цвета отчетливо, единообразно.
4. Пронумерованные формулы располагаются в отдельной строке. Номер формулы ставится у правого края листа.
5. Проводится дополнительная разметка формул.

6. В рукописях, подготовленных с помощью текстовых редакторов типа Word, должны быть размечены греческие, готические, латинские рукописные буквы, указано использование букв прямого начертания, а также проведена разметка индексов.

7. В авторских оригиналах, подготовленных с использованием наборных систем типа ТЕХ и выданных на лазерном принтере, разметка формул не проводится, однако на полях поясняются буквы готического алфавита.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Список литературы на двух языках печатается в конце текста на отдельном листе. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

Рукописи, оформленные не по стандартам или превышающие указанный выше объем, возвращаются.

ВНИМАНИЮ ПОДПИСЧИКОВ!

Зарубежная подписка на «Математические заметки ЯГУ» оформляется через фирмы — партнеры ЗАО «Международная книга — Периодика» или непосредственно в ЗАО «МК — Периодика» по адресу:

117049 Москва, ул. Б. Якимянка, 39, ЗАО «МК — Периодика». Тел. 238–14–85, 238–49–67, факс 238–46–34;
e-mail info@mkniga.msk.su. Internet: <http://WWW.mkniga.ru>

To effect subscription it is necessary to address to one of the partners of JSC Mezhdunarodnaya kniga — Periodica" in your country or to the JSC "MK — Periodica" directly.

Address: "MK — Periodica", ul. B. Yakimianka, 39, Moscow, 117049, Russia.

Tel.: (095) 238–14–85, 238–49–67, Fax: 238–46–34.
e-mail info@mkniga.msk.su.
Internet: <http://www.mkniga.ru>

Журнал подготовлен с использованием макро-пакета *\mathcal{AMSTeX}* ,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using *\mathcal{AMSTeX}* ,
the American Mathematical Society's *T_EX* macro system.

Журнал зарегистрирован в Министерстве Российской Федерации
по делам печати, телерадиовещания и средств массовой информации
Свидетельство о регистрации № Я 0118 от 25 ноября 2002 г.

Учредитель: ГОУ ВПО «Якутский гос. университет им. М. К. Аммосова»

Подписано в печать 19.01.2009. Формат 60 × 84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 8,4. Тираж 150 экз. Заказ № 12. Цена договорная.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.