СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. К. АММОСОВА

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ЯГУ

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1994 ГОДА ВЫХОДИТ 2 РАЗА В ГОД

Том 18, вып. 2 **Июль—Декабрь, 2011**

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Математическое моделирование

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

А. М. Абдрахманов

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0,T)$, $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $\alpha^k(x)$, $k = 1,\ldots,n$, $\alpha_0(x)$, $N(x,y)$, $f(x,y,t)$ — заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$ функции, A, B, ℓ и L — операторы, действие которых на функции $v(x,t)$ определяется равенствами

$$Av = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)v_{x_j}) + a_0(x)v,$$

$$Bv = b^{ij}(x)v_{x_ix_j} + b^i(x)v_{x_i} + b_0(x)v,$$

$$\ell v = \alpha^k(x)v_{x_k} + \alpha_0(x)v - \int\limits_{\Omega} N(x,y)v(y,t)\,dy,$$

$$Lv = Av_{tt} - Bv$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n).

Краевая задача: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$Lu = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\ell u|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Краевая задача (1)–(3) относится к классу задач с нелокальным граничным условием. Подобные задачи активно изучаются в последнее время; достаточно полное представление о состоянии дел в данной проблематике можно найти в монографиях [1, 2]. Кроме указанных монографий отметим статьи [3–8] как близкие по постановке и методам исследований. Вместе с тем заметим, что рассматриваемая автором задача с граничным условием (2), сочетающим в себе условия задачи с «косой» производной и задачи с интегральной связью граничных значений решения со значениями его же внутри области, для уравнений (1) ранее не изучалась.

Для доказательства теорем о разрешимости краевой задачи (1)–(3) нам понадобятся предварительные сведения о разрешимости и свойствах решений для одного класса интегродифференциальных уравнений первого порядка.

Обозначим

$$N_0 = \max_{\overline{\Omega}} \left(\int\limits_{\Omega} N^2(x,y)\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{mes}^{\frac{1}{2}} \Omega.$$

Далее, через $\nu = \nu(x) = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ будем обозначать вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке x.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} \alpha^k(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad k = 1, \ldots, n, \\ \alpha_0(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad N(x,y) \in C^2(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}); \end{gathered} \tag{4}$$

$$\alpha_0(x) - \frac{1}{2}\alpha^k_{x_k}(x) - N_0 \geqslant \bar{\alpha}_0 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \left[\alpha_0(x) - \frac{1}{2}\alpha^k_{x_k}(x)\right]|\xi|^2 + \alpha^k_{x_i}(x)\xi_k\xi_i\bar{\alpha}_1|\xi|^2, \\ \bar{\alpha}_1 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\left[\alpha_0(x) - \frac{1}{2}\alpha^k_{x_k}(x)\right]\sum_{i,j=1}^n \xi_{ij}^2 + \alpha^k_{x_i}(x)\xi_{kj}\xi_{ij} + \alpha^k_{x_j}(x)\xi_{ki}\xi_{ij} \geqslant \bar{\alpha}_2 \sum_{i,j=1}^n \xi_{ij}^2, \tag{7}$$

$$\bar{\alpha}_2 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i,j = 1,\dots,n;$$

$$\alpha_k(x)\nu_k \leqslant 0, \quad x \in \Gamma. \tag{8}$$

Тогда для любой функции $v(x)$ из пространства $W_2^2(\Omega)$ уравнение

$$\ell u = v$$

имеет единственное решение, принадлежащее $W_2^2(\Omega)$, причем для этого решения будут выполняться оценки

$$\begin{gathered}\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant m_0\|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant m_1\|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \\ \|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant m_2\|v\|_{W_2^2(\Omega)}\end{gathered} \tag{9}$$

с постоянными m_0, m_1 и m_2, определяющимися лишь функциями $N(x,y)$, $\alpha^k(x)$, $k = 1,\dots,n$, $\alpha_0(x)$, а также областью Ω.

Доказательство этой теоремы приведено в [9].

Вернемся к краевой задаче (1)–(3).

Определим необходимые пространства. Именно, пусть V_0 — пространство $L_2\big(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big)$,

$$V_1 = \{v(x,t) : v(x,t) \in V_0,\ v_t(x,t) \in V_0,\ v_{tt}(x,t) \in V_0\}$$

с нормой $\|v\|_{V_1} = \|v\|_{V_0} + \|v_t\|_{V_0} + \|v_{tt}\|_{V_0}$.

Пусть коэффициенты операторов A, B и ℓ настолько гладкие, насколько это необходимо (более точные условия будут даны ниже). Определим операторы A_1 и B_1:

$$A_1 u = \ell A u - A\ell u, \quad B_1 u = \ell B u - B\ell u.$$

Очевидно, что A_1 и B_1 являются интегродифференциальными операторами с частными производными не выше второго порядка. Для этих операторов на функциях $v(x,t)$ из пространства V_1 имеют место неравенства

$$\|A_1 v\|^2_{L_2(Q)} \leqslant a_1\|v\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}, \tag{10}$$

$$\|B_1 v\|^2_{L_2(Q)} \leqslant b_1 \|v\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \tag{11}$$

с некоторыми числами a_1 и b_1, определяющимися лишь функциями $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $\alpha^k(x)$, $i,j,k = 1,\dots,n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $\alpha_0(x)$ и $N(x,y)$. Далее, если выполняются условия теоремы 1, то неравенства (10) и (11) можно продолжить:

$$\|A_1 v\|^2_{L_2(Q)} \leqslant a_1 \|v\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \leqslant a_1 m_2 \|\ell v\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}, \tag{12}$$

$$\|B_1 v\|^2_{L_2(Q)} \leqslant b_1 \|v\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \leqslant b_1 m_2 \|\ell v\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}. \tag{13}$$

Пусть оператор A эллиптичен в $\overline{\Omega}$. Рассмотрим задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$Aw_{tt} = F(x,t) \tag{14}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x,t)|_S = 0, \quad w(x,0) = w(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{15}$$

Очевидно, что если дополнительно выполняется условие

$$a_0(x) \leqslant 0,$$

то при принадлежности функции $F(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ и при нужной гладкости коэффициентов $a^{ij}(x)$ и $a_0(x)$ задача (14), (15) будет разрешима в пространстве V_1. Более того, для решений задачи (14), (15) при выполнении вышеуказанных условий справедлива оценка

$$\|w\|^2_{V_1} \leqslant k_0 \|F\|^2_{L_2(Q)}, \tag{16}$$

в которой k_0 определяется лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, $a_0(x)$, а также областью Ω.

Заметим также, что для оператора B при выполнении соответствующих условий гладкости имеет место неравенство

$$\|Bv\|_{L_2(Q)} \leqslant b_0 \|v\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}. \tag{17}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (4)–(8), *а также условия*

$$\begin{gathered} a^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad b^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}),\ i,j = 1,\dots,n, \\ a_0(x) \in C(\overline{Q}), \quad b_0(x) \in C(\overline{\Omega}); \end{gathered} \tag{18}$$

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant a_0|\xi|^2, \quad a_0 > 0, \quad x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{19}$$

$$a_0(x) \leqslant 0 \quad \textit{при } x \in \overline{\Omega}; \tag{20}$$

$$k_0[(a_1 + b_1)m_2 + b_0] < 1. \tag{21}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $\ell f(x,t) \in L_2(Q)$ краевая задача (1)–(3), *имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in V_1$, $\ell u(x,t) \in V_1$.*

Доказательство. Обозначим для краткости через W множество функций

$$W = \{v(x,t) : v(x,t) \in V_1,\ \ell v(x,t) \in V_1\}.$$

Пусть $g(x,t)$ — функция из пространства $L_2(Q)$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$A(\ell u)_{tt} - B\ell u + A_1 u_{tt} - B_1 u = g(x,t) \tag{22}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3). Докажем, что эта задача имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W$. Воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$A(\ell u)_{tt} + \lambda[A_1 u_{tt} - B\ell u - B_1 u] = g(x,t) \tag{22_λ}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3). При $\lambda = 0$ эта краевая задача, как уже говорилось выше, имеет решение $w = \ell u$, принадлежащее пространству V_1 (уточним лишь, что нужные для искомой разрешимости условия содержатся в условиях (18)–(20)). Далее, согласно теореме 1 по функции $w(x,t)$ можно определить функцию $u(x,t)$, и эта функция вследствие выполнения условий (4)–(8) также будет принадлежать пространству V_1. Следовательно, краевая задача (22_0), (2), (3) имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее W. Чтобы теперь доказать, что все задачи (22_λ), (2), (3) разрешимы в классе W,

согласно теореме о методе продолжения по параметру [10] достаточно показать, что для всевозможных решений этой задачи имеет место равномерная по λ оценка

$$\|u\|_{V_1} + \|\ell u\|_{V_1} \leqslant K_0 \tag{23}$$

с постоянной K_0, определяющейся лишь функциями $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $\alpha^k(x)$, $i,j,k = 1,\dots,n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $N(x,y)$ и $g(x,t)$, а также областью Ω.

Положим

$$F(x,t) = g(x,t) - \lambda[A_1 u_{tt} - B\ell u - B_1 u], \quad w(x,t) = \ell u(x,t).$$

Оценки (16), (12), (13) и (17) дают неравенство

$$\|w\|_{V_1} \leqslant k_0\|g\|_{L_2(Q)} + (k_0 a_1 m_2 + k_0 b_0 + k_0 b_1 m_2)\|w\|_{V_1}.$$

Из этого неравенства и из условия (20) вытекает требуемая оценка (23).

Как говорилось выше, из оценки (23) следует разрешимость в пространстве V_1 всех задач (22_λ), (2), (3) при $\lambda \in [0,1]$; в частности, получаем, что и задача (21), (2), (3) будет разрешима в пространстве V_1. Рассмотрим эту задачу для специальной функции $g(x,t)$: $g(x,t) = \ell f(x,t)$. Уравнение (21) для такой функции $f(x,t)$ можно записать в виде

$$\ell(Au_{tt} - Bu - f(x,t)) = 0.$$

Отсюда и из условий теоремы 1 следует, что для функции $u(x,t)$ выполняется уравнение (1). Поскольку для функции $u(x,t)$ выполняются условия (2) и (3) и она принадлежит пространству V_1, то $u(x,t)$ будет представлять собой искомое решение краевой задачи (1)–(3).

Теорема доказана.

Приведем еще один вариант теоремы о разрешимости уравнения $\ell u = v$ и тем самым краевой задачи (1)–(3).

Обозначим

$$\ell_0 = \alpha^k(x)\frac{\partial}{\partial x_k} + \alpha_0.$$

Пусть $N_0(x,y)$ — решение уравнения

$$\ell_0 N_0(x,y) = N(x,y) \tag{24}$$

(переменная y здесь является параметром). Очевидно, что при выполнении условий (4), (6)–(8), а также условия

$$\alpha_0(x) - \frac{1}{2}\alpha^k_{xx}(x) \geqslant \bar{\alpha}_0 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{5'}$$

уравнение (24) разрешимо.

Теорема 1′. *Пусть выполняются условия* (4), (5′), (6)–(8), *и пусть интегральный оператор G, действие которого на функциях $\varphi(x)$ определяется равенством*

$$(G\varphi)(x) = \varphi(x) - \int\limits_{\Omega} N_0(x,y)\varphi(y)\,dy,$$

непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, при этом для всех функций из $L_2(\Omega)$ выполняются неравенства

$$\gamma_1\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|G\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \gamma_2\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}, \quad 0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 < +\infty.$$

Тогда для любой функции $v(x)$ из пространства $W_2^2(\Omega)$ уравнение

$$\ell u = v$$

имеет единственное решение, принадлежащее пространству $W_2^2(\Omega)$, причем для этого решения будут выполняться оценки (9).

Доказательство. Пусть $w(x)$ есть решение уравнения

$$\ell_0 w = v.$$

Определим функцию $u(x)$ как решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$u(x) - \int\limits_{\Omega} N_0(x,y)u(y) = w(x).$$

Очевидно, что при выполнении условий теоремы функция $u(x)$ корректно определена и принадлежит пространству $W_2^2(\Omega)$. Эта функция и будет искомым решением уравнения $\ell u = v$.

Теорема доказана.

Теорема 2′. *Пусть выполняются условия теоремы* (1′), *а также условия* (18)–(21). *Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $\ell f(x,t) \in L_2(Q)$, *краевая задача* (1)–(3) *имеет решение* $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in V_1$, $\ell u(x,t) \in V_1$.

Доказательство теоремы проводится вполне аналогично доказательству теоремы 2, лишь вместо теоремы 1 используется теорема 1′.

Замечание. Условие (21) теорем 2 и 2′ можно ослабить, если потребовать, чтобы оператор B был эллиптическим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. Boston, MA: Birkhäuser, 1997.
2. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
3. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными граничными условиями для гиперболического уравнения //Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892.
4. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
5. *Пулькина Л. С.* Начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для многомерного гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 8. С. 1084–1089.
6. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Мат. журн. (Казахстан). 2009. Т. 9, № 2. С. 78–92.
7. *Абдрахманов А. М., Кожанов А. И.* Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка // Изв. вузов. Математика. 2007. № 5. С. 3–12.
8. *Абдрахманов А. М.* О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнений нечетного порядка // Мат. заметки. 2010. Т. 88, вып. 2. С. 163–172.
9. *Абдрахманов А. М., Кожанов А. И.* Задача с косой производной для $(2m+1)$-параболических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, вып. 1. С. 3–11.
10. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

г. Уфа *1 августа 2011 г.*

УДК 517.956

НЕКОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. А. Алдашев

Краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены [1]. Насколько нам известно, их многомерные анологи исследованы мало [2].

1. Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$, плоскостями $t=\alpha>0$ и $t=\beta<0$, где $|x|$ — длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t>0$ и $t<0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основания области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α , Ω_β, представляющая собой множество $\{t=0,\ 0<|x|<1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим смешанное эллиптико-параболическое уравнение

$$0=\begin{cases}\Delta_x u+u_{tt}, & t>0,\\ \Delta_x u-u_t, & t<0,\end{cases}\tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots,x_m$, $m\geqslant 2$.

В дальнейшем удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m$, t к сферическим $r,\theta_1,\ldots,\theta_{m-1}$, t, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta_1<2\pi$, $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$, $i=2,3,\ldots,m-1$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_{m-1})$.

В качестве многомерной смешанной задачи рассмотрим следующую.

Задача 1. *Найти решение уравнения* (1) *в области* $\Omega_{\alpha\beta}$ *при* $t \neq 0$ *из класса* $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r,\theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \quad u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta). \tag{2}$$

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространства Соболева.

Имеет место [3]

Лемма 1. *Пусть* $f(r,\theta) \in W^l_2(S)$. *Если* $l \geqslant m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l - m + 1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Лемма 2. *Для того чтобы* $f(r,\theta) \in W^l_2(S)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (4) *удовлетворяли неравенствам*

$$\left|f^1_0(r)\right| \leqslant c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} \left|f^k_n(r)\right|^2 \leqslant c_2, \quad c_1, c_2 = \mathrm{const}\,.$$

Через $\overline{\varphi}^k_n(r)$, $\psi^k_{1n}(t)$, $\psi^k_{2n}(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (3) функций $\varphi(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$ соответственно.

Теорема 1. *Однородная задача, соответствующая задаче* 1, *имеет бесконечное множество нетривиальных решений.*

Теорема 2. *Если* $\varphi(r,\theta) \in W^l_2(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W^l_2(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in W^l_2(\Gamma_\beta)$, $l > \frac{3m}{2}$, *то задача* 1 *разрешима неоднозначно.*

2. Доказательство теорем

В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u + u_{tt} = 0, \tag{4}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{j-1})^2, \ j > 1.$$

Известно [3], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Решение задачи 1 в области Ω_α будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (4) и используя ортогональность сферических функций $Y^k_{n,m}(\theta)$ [3], имеем

$$\bar{u}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr} + \bar{u}^k_{ntt} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \ n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

при этом краевое условие (2) с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\bar{u}^k_n(r,\alpha) = \overline{\varphi}^k_n(r), \quad \bar{u}^k_n 1, t = \psi^k_{1n}(t), \quad k = \overline{1,k_n}, \ n = 0, 1, \ldots. \tag{7}$$

Произведя в (6), (7) замену $\bar{v}^k_n(r,t) = \bar{u}^k_n(r,t) - \psi^k_{1n}(t)$, получим

$$\bar{v}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{v}^k_{nr} - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\bar{v}^k_n + \bar{v}^k_{ntt} = \bar{f}^k_n(r,t), \tag{8}$$

$$\bar{v}^k_n(r,\alpha) = \varphi^k_n(r), \quad \bar{v}^k_n(1,t) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \ n = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

$$\bar{f}^k_n(r,t) = -\psi^k_{1ntt} + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi^k_{1n}, \quad \varphi^k_n(r) = \overline{\varphi}^k_n(r) - \psi^k_{1n}(\alpha).$$

С помощью замены $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$ задачу (8), (9) приведем к следующей:

$$L_1\upsilon_n^k \equiv \upsilon_{nrr}^k + \upsilon_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k = f_n^k(r,t), \tag{10}$$

$$\upsilon_n^k(r,\alpha) = \widetilde{\varphi}_n^k(r), \quad \upsilon_n^k(1,t) = 0, \quad k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots, \tag{11}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, \quad f_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t),$$

$$\widetilde{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (10), (11) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{12}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L_1\upsilon_{1n}^k = f_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\alpha) = 0, \quad \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{14}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L_1\upsilon_{2n}^k = 0, \tag{15}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\alpha) = \widetilde{\varphi}_n^k(r), \quad \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{16}$$

Решение вышеуказанных задач будем искать в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{17}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t)R_s(r), \quad \widetilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r). \tag{18}$$

Подставляя (17) в (13) и (14), с учетом (18) получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{19}$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \tag{20}$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a_{ns}^k(t), \quad 0 < t < \alpha, \tag{21}$$

$$T_s(\alpha) = 0. \tag{22}$$

Ограниченным решением задачи (19), (20) является [4]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{23}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}$ — нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (21) представимо в виде [4]

$$T_{s,n}(t) = c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t + \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi \, d\xi$$
$$- \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi \, d\xi,$$

где c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные. Учитывая условие (22), будем иметь

$$T_{s,n}(t) = c_{2s}(\operatorname{sh} \mu_{s,n} t - (\operatorname{th} \mu_{s,n} \alpha) \operatorname{ch} \mu_{s,n} t)$$
$$+ \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \left(\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi \, d\xi - \int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi \, d\xi \right)$$
$$+ \frac{(\operatorname{th} \mu_{s,n} \alpha) \operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi \, d\xi - \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi \, d\xi. \tag{24}$$

Подставляя (23) в (18), для $0 < r < 1$ получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty a_{ns}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^\infty b_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n} r). \tag{25}$$

Ряды (25) — разложения в ряды Фурье — Бесселя [5], если

$$a_{ns}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) \, d\xi,$$

$$b_{ns} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \widetilde{\varphi}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) \, d\xi, \tag{26}$$

где $\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots,$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (23), (24) получим решение задачи (13), (14) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{27}$$

где $a_{ns}^k(t)$ определяется из (26).

Далее, подставляя (17) в (15) и (16), с учетом (18) получаем

$$T_{stt} - \mu_{s,n}^2 T_s = 0, \quad 0 < t < \alpha, \tag{28}$$

$$T_s(\alpha) = b_{ns}^k. \tag{29}$$

Общее решение уравнения (28) имеет вид

$$T_{s,n}(t) = c_{1s}' \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c_{2s}' \operatorname{sh} \mu_{s,n} t. \tag{30}$$

Учитывая условие (29), получим

$$T_{s,n}(t) = c_{2s}'[\operatorname{sh} \mu_{s,n} t - (\operatorname{th} \mu_{s,n} \alpha) \operatorname{ch} \mu_{s,n} t] + b_{ns}^k (\operatorname{ch} \mu_{s,n} t) / \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha. \tag{31}$$

Из (23), (30), (31) приходим к решению задачи (15), (16)

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{32}$$

где b_{ns}^k определяется из (26).

Таким образом, решением задачи (1), (2) в области Ω_α является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{1n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{33}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (27) и (32).

Из (24), (31), (33) при $t \to +0$ имеем

$$u(r,\theta,0) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{1n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left[-c_{2s} \operatorname{th} \mu_{s,n} \alpha + \frac{\operatorname{th} \mu_{s,n} \alpha}{\mu_{s,n}} \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi \, d\xi \right.$$
$$\left. - c_{2s}' \operatorname{th} \mu_{s,n} \alpha + \frac{b_{ns}^k}{\operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha} \right] J_{\nu + \frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r). \tag{34}$$

Таким образом, мы пришли в области Ω_β к первой краевой задаче для уравнения

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_t = 0 \tag{35}$$

с условиями

$$u|_S = \tau(r,\theta), \quad u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta). \tag{36}$$

Решение задачи (35), (36) будем искать в виде (5). Подставляя (5) в (35), имеем

$$\bar{u}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr} - \bar{u}^k_{nt} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n = 0, \quad k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots, \tag{37}$$

при этом краевое условие (36) запишется в виде

$$u^k_n(r,0) = \tau^k_n, \quad u^k_n(1,t) = \psi^k_{2n}(t), \quad k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots. \tag{38}$$

Произведя в (37), (38) замену $\overline{\omega}^k_n(r,t) = \bar{u}^k_n(r,t) - \psi^k_{2n}(t)$, получим

$$\overline{\omega}^k_{nrr} - \frac{m-1}{r}\overline{\omega}^k_{nr} - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\overline{\omega}^k_n - \overline{\omega}^k_{nt} = \bar{g}^k_n(r,t), \tag{39}$$

$$\overline{\omega}^k_n(r,0) = \bar{\tau}^k_n(r), \quad \overline{\omega}^k_n(1,t) = 0, \quad k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots, \tag{40}$$

$$\bar{g}^k_n(r,t) = \psi^k_{2nt} + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi^k_{2n}, \quad \bar{\tau}^k_n(r) = \tau^k_n(r) - \psi^k_{2n}(0).$$

Произведя замену $\overline{\omega}^k_n(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}}\omega^k_n(r,t)$ приведем задачу (39), (40) к следующей:

$$L_2\omega^k_n \equiv \omega^k_{nrr} - \omega^k_{nt} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\omega^k_n = g^k_n(r,t), \tag{41}$$

$$\omega^k_n(r,0) = \tilde{\tau}^k_n(r), \quad \omega^k_n(1,t) = 0, \quad k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots, \tag{42}$$

$$g^k_n(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{g}^k_n(r,t), \quad \tilde{\tau}^k_n(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}^k_n(r).$$

Решение задачи (41), (42) ищем в виде

$$\omega^k_n(r,t) = \omega^k_{1n}(r,t) + \omega^k_{2n}(r,t) \tag{43}$$

где $\omega^k_{1n}(r,t)$ — решение задачи

$$L_2\omega^k_{1n} = g^k_n(r,t), \tag{44}$$

$$\omega_{1n}^k(r,0)=0, \quad \omega_{1n}^k(1,t)=0, \tag{45}$$

а $\omega_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L_2\omega_{2n}^k=0, \tag{46}$$

$$\omega_{2n}^k(r,0)=\widetilde{\tau}_n^k(r), \quad \omega_{1n}^k(1,t)=0, \tag{47}$$

Решение вышеуказанных задач будем искать в виде

$$\omega_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)V_s(t), \tag{17'}$$

при этом пусть

$$g_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}d_{ns}^k(t)R_s(r), \quad \tilde{\tau}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_{ns}^kR_s(r). \tag{48}$$

Подставляя (17′) в (44), (45), с учетом (48) получим задачу (19), (20), решение которой имеет вид (23), и уравнение

$$V_{st}+\mu_{s,n}^2V_s=-d_{ns}^k(t), \tag{49}$$

с условием

$$V_s(0)=0. \tag{50}$$

Решением задачи (49), (50) является [4]

$$V_{s,n}(t)=-\int\limits_0^t d_{ns}^k(\xi)\exp\big[-\mu_{s,n}^2(t-\xi)\big]\,d\xi. \tag{51}$$

Подставляя (23) в (48), получим

$$\begin{gathered} d_{ns}^k(t)=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}g_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\,d\xi, \\ e_{ns}^k=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\tau}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\,d\xi, \quad 0<r<1. \end{gathered} \tag{52}$$

Таким образом, из (17′), (23), (51) следует, что решением задачи (44), (45) является функция

$$\omega_{1n}^k(r,t) = -\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}\left\{\int\limits_0^t d_{ns}^k(\xi)\exp\big[-\mu_{s,n}^2(t-\xi)\big]\right\}J_\nu(\mu_{s,n}r), \qquad (53)$$

где d_{ns}^k определяются из (52).

Далее, подставляя (17′) в (46), (47), приходим к уравнению

$$V_{st} + \mu_{s,n}^2 V_s = 0$$

с условием $V_s(0) = e_{ns}^k$, решением которого является

$$V_{s,n}(t) = e_{ns}^k \exp\big(-\mu_{s,n}^2 t\big). \qquad (54)$$

Из (17′), (23), (54) получим

$$\omega_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}e_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n}r)\exp\big(-\mu_{s,n}^2 t\big), \qquad (55)$$

где e_{ns}^k находится из (52).

Таким образом, решением задачи (1) в области Ω_α и Ω_β является функция

$$u(r,\theta,t) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\big\{\psi_{1n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}}\big[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t)\big]\big\}Y_{n,m}^k(\theta), \ t>0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\big\{\psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}}\big[\omega_{1n}^k(r,t) + \omega_{2n}^k(r,t)\big]\big\}Y_{n,m}^k(\theta), \ t<0, \end{cases} \qquad (56)$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (27), (32), а $\omega_{1n}^k(r,t)$, $\omega_{2n}^k(r,t)$ — из (53), (55).

Из (24), (31), (34), (51), (53), (56) следует, что однородная задача,

соответствующая задаче 1, имеет нетривиальные решения вида

$$\begin{cases} u(r,\theta,t) = & \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\sum\limits_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}}(c_{2s}+c'_{2s})[\operatorname{sh}\mu_{s,n}t-(\operatorname{th}\mu_{s,n}\alpha)\operatorname{ch}\mu_{s,n}t] \\ & \times J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r)Y^k_{n,m}(\theta), \quad t>0, \\ u(r,\theta,t) = & -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\sum\limits_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}}(c_{2s}+c'_{2s})(\operatorname{th}\mu_{s,n}\alpha)\big(\exp\big(-\mu^2_{s,n}t\big)\big) \\ & \times J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r)Y^k_{n,m}(\theta), \quad t<0. \end{cases} \tag{57}$$

Учитывая формулу $2J'_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$ (см. [5]), оценки из [3,6], соотношения $J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+o\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right)$, $\nu\geqslant 0$, $|k_n|\leqslant c_1 n^{m-2}$, $\left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y^k_{n,m}(\theta)\right|\leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}$, $j=\overline{1,m-1}$, $q=0,1,\ldots$, а также ограничения на заданные функции $\varphi(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$, аналогично [7] можно показать, что полученные неоднозначные решения (56), (57) принадлежат искомому классу $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta})\cap C^2(\Omega_\alpha\cup\Omega_\beta)$.

Теоремы доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фикера Г.* К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка: // Математика. 1963. Т. 7, №6. С. 99–121.
2. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
3. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
7. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994.

г. Актобе (Казахстан) *25 июля 2011 г.*

УДК 517.956.4

ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА*)

В. И. Антипин

Введение

Работа посвящена исследованию краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений вида

$$Au \equiv Bu_t - Lu = f(x,t), \tag{1}$$

где B, L — линейные операторы, определенные в данном гильбертовом пространстве E, причем оператор B самосопряжен. В качестве краевых условий возьмем

$$P^+u(0) = u_0, \quad P^-u(T) = u_T, \tag{2}$$

где P^+, P^- — спектральные проекторы оператора B, отвечающие положительной и отрицательной частям спектра. Мы не предполагаем, что оператор B обратим; в частности, он может иметь ненулевое ядро. В случае, если операторы L, B не зависят от параметра t и спектр пучка $L + \lambda B$ содержится в одной из полуплоскостей вида $\operatorname{Re}\lambda < a$, $\operatorname{Re}\lambda > a$ или при выполнении условия $D(B) \subset D(L)$, такие уравнения обычно называют *уравнениями типа Соболева* [1, 2]. Теория полугрупп для

*) Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. по мероприятию 1.3.1 и при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (код проекта № 02.740.11.0609).

уравнения вида (1) соболевского типа в случае необратимого оператора B имеется, например, в [3]. Сошлемся также на книгу [4], где можно найти подробную библиографию и ряд результатов. Для уравнений типа Соболева корректна обычная задача Коши или задача, близкая к ней. Иная ситуация, как мы увидим, в случае, если уравнение не является уравнением типа Соболева (как правило, это означает, что спектр оператора B содержит одновременно бесконечные подмножества положительной и отрицательной полуосей). Подобные уравнения возникают во многих областях физики, в геометрии, популяционной генетике и некоторых других областях. В случае, если оператор L самосопряжен, уравнение (1) рассматривается в [5, 6]. В частности, в [5] можно найти ряд примеров, возникающих в приложениях. Оператор L называется *Като-секториальным* (см. определение в [7]), если

$$|(Lu, v)| \leqslant c\|u\|_{H_1}\|v\|_{H_1} \quad \forall u \in D(L),$$

где $\|u\|^2_{H_1} = \mathrm{Re}(-(Lu, u) + \|u\|^2)$. Обобщение на случай диссипативного оператора, удовлетворяющего условию Като-секториальности, имеется в работах С. Г. Пяткова и Н. Л. Абашеевой [8]. Краевые задачи для уравнения (1) при наших предположениях на операторы L, B в случае, если условие Като-секториальности не выполнено, по-видимому, не рассматривались. Однако в класс уравнения (1) входят многие важные классы дифференциальных уравнений в частных производных, например, в качестве оператора L можно брать операторы нечетного порядка или операторы со спектром, достаточно близко расположенным к мнимой оси.

В § 1 мы приводим некоторые вспомогательные утверждения и формулируем теорему существования решения. В § 2 приводится доказательство теоремы.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Норму и скалярное произведение в E обозначаем через $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$. Пусть вложение $H_1 \subset E$ плотно. Через H_1' обозначаем негативное

пространство, построенное как пополнение E по норме

$$\|u\|_{H_1'} = \sup_{v \in H_1, v \neq 0} |(u,v)|/\|v\|_{H_1}.$$

Если X, Y — гильбертовы пространства, то под $L(X,Y)$ понимаем пространство линейных непрерывных отображений, определенных на X со значениями в Y. Если $X = Y$, то пишем $L(X)$ вместо $L(X,X)$.

Назовем оператор $L : E \to E$ *диссипативным* (*равномерно диссипативным*), если $-\operatorname{Re}(Lu,u) \geqslant 0$ ($-\operatorname{Re}(Lu,u) \geqslant \delta\|u\|^2$, $\delta > 0$) для всех $u \in D(L)$. Здесь $D(L)$ — область определения оператора L. Оператор L называется *максимальным диссипативным*, если он совпадает с любым своим диссипативным расширением.

Через $\rho(L), \sigma(L)$ обозначаем резольвентное множество и спектр оператора L. Основные предположения об операторах L, B состоят в следующем.

I. L — максимально диссипативный оператор и найдется гильбертово пространство F_1, плотно вложенное в E, такая, что $D(L^*) \subset F_1 \subset E$ и существует постоянная $\delta_0 > 0$ такое, что $\operatorname{Re}(-L^*u,u) \geqslant \delta_0\|u\|_{F_1}^2$ для всех $u \in D(L^*)$, где L^* — сопряженный оператор.

Из условия I вытекает, что оператор L^* также максимальный диссипативный оператор и $0 \in \rho(L) \cap \rho(L^*)$ [7, предложение C.7.2], более того, $\{\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\} \subset \rho(L) \cap \rho(L^*)$.

II. Оператор B самосопряжен в E и $F_1 \subset D(|B|^{1/2})$ плотно.

Лемма 1. *При выполнении условия* II *оператор B определяет непрерывное отображение пространства F_1 в F_1', где F_1' — негативное пространство, построенное по паре F_1, E.*

Доказательство. Оператор $B : D(|B|) \to E$ (в $D(|B|)$ вводим норму графика), будучи определенным на $D(|B|)$, допускает продолжение до непрерывного отображения из $D(|B|^{1/2})$ в $(D(|B|^{1/2}))'$. Дей-

ствительно,

$$\|Bu\|_{(D(|B|^{1/2}))'} = \sup_{v\in D(|B|^{1/2})} \frac{|(Bu,v)|}{\|v\|_{D(|B|^{1/2})}}$$
$$= \sup_{v\in D(|B|^{1/2})} \frac{|(|B|^{1/2}u, |B|^{1/2}v)|}{\|v\|_{D(|B|^{1/2})}} \leqslant \sup_{v\in D(|B|^{1/2})} \frac{\||B|^{1/2}u\| \cdot \||B|^{1/2}v\|}{\|v\|_{D(|B|^{1/2})}}$$
$$\leqslant \||B|^{1/2}u\|, \quad (3)$$

или

$$\|Bu\|_{(D(|B|^{1/2}))'} \leqslant \||B|^{1/2}u\|. \quad (4)$$

Имеем естественное вложение

$$F_1 \subset D(|B|^{1/2}) \subset E \subset (D(|B|^{1/2}))' \subset F_1' \quad (5)$$

(двойственное к E отождествляется с E).

Таким образом, оператор B, определенный на $D(|B|^{1/2})$, определен и на пространстве F_1 и имеем

$$\|Bu\|_{F_1'} \leqslant c\|u\|_{(D(|B|^{1/2}))'} \leqslant c_1\|u\|_{F_1}. \quad (6)$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* I. *Тогда $D(L)$ плотно вложен в F_1 и операторы $L^{-1}, (L^*)^{-1}$ допускают продолжение до отображений класса $L(F_1', F_1)$.*

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{Re}(-L^*u, u) \geqslant \delta_0\|u\|_{F_1}^2, \quad (7)$$

$$|\mathrm{Re}(-L^*u, u)| \leqslant |(L^*u, u)| \leqslant \|L^*u\|_{F_1'}\|u\|_{F_1} \quad \forall u \in D(L^*). \quad (8)$$

Используя это неравенство в левой части (3) и сокращая на $\|u\|_{F_1}$, получим

$$\|L^*u\|_{F_1'} \geqslant \delta_0\|u\|_{F_1}.$$

Поскольку $0 \in \rho(L^*)$ [7], неравенство переписывается в виде

$$\|v\|_{F_1'} \geqslant \delta_0\|(L^*)^{-1}v\|_{F_1} \quad \forall v \in E. \quad (9)$$

Поскольку F_1 плотно вложено в E, то E плотно вложено в F_1', т. е. $F_1 \subset E \subset F_1'$, и из (9) вытекает, что $(L^*)^{-1}$ допускает продолжение до оператора класса $L(F_1', F_1)$. Имеем

$$(L^{-1}u, u) = (u, (L^*)^{-1}v) \quad \forall u, v \in E. \tag{10}$$

Далее, для любого $u \in E$ имеем

$$\begin{aligned} \|L^{-1}u\|_{F_1} &= \sup_{v\in E} \frac{|(L^{-1}u, v)|}{\|v\|_{F_1'}} = \sup_{v\in E} \frac{|(u, (L^*)^{-1}v)|}{\|v\|_{F_1'}} \\ &\leqslant \sup_{v\in E} \frac{\|u\|_{F_1'}\|(L^*)^{-1}v)\|_{F_1}}{\|v\|_{F_1'}} \leqslant \sup_{v\in H} \frac{\|u\|_{F_1'}}{\delta_0} \frac{\|v\|_{F_1'}}{\|v\|_{F_1'}}, \end{aligned} \tag{11}$$

откуда получим оценку

$$\|L^{-1}u\|_{F_1} \leqslant \frac{\|u\|_{F_1'}}{\delta_0}. \tag{12}$$

Из (12) следует, что L^{-1} допускает продолжение до оператора класса $L(F_1', F_1)$.

Рассмотрим равенство

$$(L^{-1}u, u) = (u, (L^*)^{-1}v) \quad \forall u, v \in E. \tag{13}$$

Имеем

$$|(u, (L^*)^{-1}v)| \leqslant \|(L^*)^{-1}v\|_{F_1}\|u\|_{F_1'} \leqslant c\|v\|_{F_1'}\|u\|_{F_1'}. \tag{14}$$

Если u фиксирована, то выражение $(u, (L^*)^{-1}v)$ есть антилинейный непрерывный функционал над F_1' (по v).

Существует $g \in F_1$ такой, что

$$(u, (L^*)^{-1}v) = (g, v) = (L^{-1}u, v) \quad \forall u, v \in E.$$

Таким образом, $g = L^{-1}u$, и, значит, $L^{-1}u \in F_1$ для всех $u \in E$. Возьмем $\psi \in D(L)$. Тогда $u = L\psi \in E$ и $\psi = L^{-1}u$.

Из доказанного получим $\psi \in F_1$. Таким образом, $D(L) \subset F_1$. Предположим напротив, что $D(L)$ не плотно в F_1. Тогда существует $v \in F_1'$, $v \neq 0$, такой, что

$$(L^{-1}u, v) = 0 \quad \forall u \in E.$$

Предельным переходом получим, что равенство

$$(u, (L^*)^{-1}v) = (L^{-1}u, v)$$

справедливо и для $v \in F_1'$, $u \in E$. Поскольку H плотно вложено в F_1' и $(u, (L^*)^{-1}v) = 0$, то $(L^*)^{-1}v = 0$. Отсюда следует, что $v = 0$; противоречие. Таким образом, $D(L)$ плотно вложено в F_1. Лемма 1 доказана.

Обозначим через F_2 класс функций $u \in F_1$ таких, что u представимо в виде $u = L^{-1}v$, где $v \in F_1'$, и

$$\|u\|_{F_2} = \|L^{-1}v\|_{F_1} + \|v\|_{F_1'} = \|u\|_{F_1} + \|Lu\|_{F_1'}.$$

Тогда $D(L) \subset F_2 \subset F_1$.

Пусть V — комплексное векторное пространство и B_1, B_2 — комплексные банаховы пространства. Пусть M_h $(h = 1, 2)$ — линейные отображения из V в пространство B_h.

Рассмотрим следующий вопрос. Вектор $\varphi \in B_1^*$ задан, требуется найти $\psi \in B_2^*$ такой, что

$$\langle \varphi, M_1 v \rangle = \langle \psi, M_2 v \rangle \tag{15}$$

для любого $v \in V$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают отношения двойственности между соответствующими пространствами.

Теорема А (принцип существования) [9]. *Необходимым и достаточным условием существования решения задачи* (15) *для любого* $\varphi \in B_1^*$ *является то, что найдется* $k > 0$, *для которого*

$$\|M_1 v\| \leqslant k \|M_2 v\| \quad \forall v \in V.$$

Определим пространство H как пополнение $D(|B|^{1/2})$ по норме

$$\||B|^{1/2} v\| = \|u\|_H.$$

По определению $|B|^{1/2} \in L(H, E)$.

Обозначим $H_1 = \{v \in L_2(0, T; D(L^*)),\ v_t \in L_2(0, T; F_1)\}$.

Определение 1. Функция $u \in L_2(0,T;F_1)$ называется *обобщенным решением* краевой задачи (1), (2), если найдутся $\tilde{u}_0, \tilde{u}_T \in H$ такие, что $P^-\tilde{u}_0 = \tilde{u}_0$, $P^+\tilde{u}_T = \tilde{u}_T$ и выполнено равенство

$$\int_0^T (-(Bu, v_t) - (u, L^*v))dt + (Bu_T, v(T)) - (Bu_0, v(0)) + (B\tilde{u}_T, v(T)) - (B\tilde{u}_0, v(0)) = \int_0^T (f, v)\, dt \quad (16)$$

для любого $v \in L_2(0,T;D(L^*))$, $v_t \in L_2(0,T;F_1)$.

Если u — обобщенное решение задачи (1), (2) в смысле определения 1, то u является обобщенным решением задачи (1), (2) в смысле следующего, более естественного, определения.

Определение 2. Функция $u \in L_2(0,T;F_1)$ называется *обобщенным решением краевой задачи* (1), (2), если выполнено равенство

$$\int_0^T (-(Bu, v_t) - (u, L^*v))dt + (BP^-u_T, v(T)) - (BP^+u_0, v(0)) = \int_0^T (f, v)\, dt \quad (17)$$

для любого $v \in L_2(0,T;D(L^*))$, $v_t \in L_2(0,T;F_1)$, и $P^+v(T) = 0$, $P^-v(0) = 0$.

Приведем некоторые следствия, вытекающие из определения обобщенного решения. Пусть $H_2 = D(L^*)$. Тогда если $u \in L_2(0,T;F_1)$, то выражение Lu имеет смысл и является элементом $L_2(0,T;H_2')$.

Если $v \in C_0^\infty(0,T;H_2)$, то равенство (16) перепишется в виде

$$\int_0^T (-Bu, v_t)\, dt = \int_0^T (Lu, v)\, dt + \int_0^T (f, v)\, dt \quad \forall v \in C_0^\infty(0,T;H_2). \quad (18)$$

Имеем $Lu + f \in L_2(0,T;H_2')$. Отсюда и из определения обобщенной производной вытекает, что функция Bu принадлежит $L_2(0,T;F_1')$ (по лемме 1) и имеет обобщенную производную $(Bu)_t \in L_2(0,T;H_2')$.

Поскольку $F_1' \subset H_2'$, имеем $Bu \in C([0,T]; H_2')$ после, может быть, изменения на множестве меры нуль. Из (18) вытекает, что справедливо равенство $Bu_t - Lu = f$ в пространстве $L_2(0,T; H_2')$.

Теперь рассмотрим функции $v \in C^\infty([0,T]; H_2)$ в (16). Интегрируя по частям и используя равенство $Bu_t - Lu = f$, получим

$$(B(u(T) - u_T - \tilde{u}_T), v(T)) - (B(u(0) - u_0 - \tilde{u}_T), v(0)) = 0.$$

Поскольку функции $v(T), v(0)$ могут быть произвольными, отсюда заключаем, что

$$Bu(T) = B(u_T + \tilde{u}_T), \quad Bu(0) = B(u_0 + \tilde{u}_0).$$

Равенство имеет место в H_2', поскольку $Bu \in C([0,T]; H_2')$.

Отсюда вытекает, что следы $Bu(0), Bu(T)$ существуют, принадлежат $(D(|B|^{1/2}))'$ и

$$BP^- u(T) = Bu_T, \quad BP^+ u(0) = Bu_0.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* I, II. *Тогда для любых* $f \in L_2(0,T; F_1')$, $u_0, u_T \in H$ *существует обобщенное решение* $u \in L_2(0,T; F_1)$ *краевой задачи* (1), (2) *в смысле определения* 1.

§ 2. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы существования решения. Пусть $\vec{u} = (u, \tilde{u}_0, \tilde{u}_T) \in F_1 \times H \times H$ и $\vec{f} = (f, u_0, u_T) \in L_2(0,T; F_1') \times H \times H$. Обозначим $Mv = -Bv_t - L^* v$. Далее, определим $S : H_1 \to F_1' \times H \times H$ такой, что $Sv = (Mv, P^- v(0), P^+ v(T))$, и $S_0 : H_1 \to L_2(0,T; F_1) \times H \times H$ такой, что $S_0 v = (v, P^+ v(0), P^- v(T))$.

Рассмотрим вопрос о нахождении функций $u(x) \in L_2(0,T; F_1)$, $\tilde{u}_0, \tilde{u}_T \in H : P^- \tilde{u}_0 = \tilde{u}_0, P^+ \tilde{u}_T = \tilde{u}_T$, таких, что $[\vec{u}, Sv] = [\vec{f}, S_0 v]$ для всех $v \in H_1$, где

$$[\vec{u}, Sv] = \int_0^T (u, Mv) dt + (\tilde{u}_0, P^- v(0))_H + (\tilde{u}_T, P^+ v(T))_H, \qquad (19)$$

$$[\vec{f}, S_0 v] = \int\limits_0^T (f, v)\, dt + (u_T, P^- v(T))_H + (u_0, P^+ v(0))_H. \qquad (20)$$

Здесь $(u, v)_H = (|B|u, v)$.

Возьмем $\vec{u} = (v, v(0), v(T))$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}[\vec{u}, Sv] \\
&\quad = \mathrm{Re}\left(\int\limits_0^T (u, Mv)dt + (Bu(T), P^+ v(T)) - (Bu(0), P^- v(0))\right) \\
&\qquad = \mathrm{Re}\Bigg(-\int\limits_0^T (Bu, v_t)\, dt - \int\limits_0^T (u, L^* v)\, dt \\
&\qquad\qquad + (Bu(T), P^+ v(T)) - (Bu(0), P^- v(0))\Bigg). \qquad (21)
\end{aligned}$$

Подставив $\vec{u} = (v, v(0), v(T))$ в (21), получим

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}[\vec{u}, Sv] = \mathrm{Re}\Bigg(-\int\limits_0^T (Bv, v_t)\, dt \\
&\quad - \int\limits_0^T (v, L^* v)\, dt + (Bv(T), P^+ v(T)) - (Bv(0), P^- v(0))\Bigg) \\
&\quad = \int\limits_0^T -\frac{\partial}{\partial t}\, \mathrm{Re}\, \frac{(Bv, v)}{2}\, dt - \int\limits_0^T \mathrm{Re}(v, L^* v)\, dt + (Bv(T), P^+ v(T)) \\
&\quad - (Bv(0), P^- v(0)) = -\frac{1}{2}(Bv(T), v(T)) + \frac{1}{2}(Bv(0), v(0)) \\
&\quad + (Bv(T), P^+ v(T)) - (Bv(0), P^- v(0)) + \int\limits_0^T -\mathrm{Re}(v, L^* v)\, dt \\
&= -\frac{(BP^+ v(T), P^+ v(T))}{2} - \frac{(BP^- v(T), P^- v(T))}{2} + \frac{(BP^+ v(0), P^+ v(0))}{2} \\
&\quad + \frac{(BP^- v(0), P^- v(0))}{2} + (BP^+ v(T), P^+ v(T)) - (BP^- v(0), P^- v(0))
\end{aligned}$$

$$+\int_0^T -\operatorname{Re}(v, L^*v)\,dt = \frac{1}{2}(|B|^{1/2}v(T), |B|^{1/2}v(T))$$

$$+\frac{1}{2}(|B|^{1/2}v(0), |B|^{1/2}v(0)) + \int_0^T -\operatorname{Re}(v, L^*v)\,dt. \quad (22)$$

Отсюда

$$\operatorname{Re}[\vec{u}, Sv] = \frac{1}{2}\||B|^{1/2}v(T)\|^2 + \frac{1}{2}\||B|^{1/2}v(0)\|^2 + \int_0^T -\operatorname{Re}(v, L^*v)\,dt$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\||B|^{1/2}v(T)\|^2 + \frac{1}{2}\||B|^{1/2}v(0)\|^2 + \delta\|v\|^2_{L_2(0,T;F_1)}$$

$$= \frac{1}{2}\|v(T)\|^2_H + \frac{1}{2}\|v(0)\|^2_H + \delta\|v\|^2_{L_2(0,T;F_1)}. \quad (23)$$

Имеем

$$\operatorname{Re}[\vec{u}, Sv] \leqslant (\|v(T)\|^2_H + \|v(0)\|^2_H + \|v\|^2_{L_2(0,T;F_1)})^{1/2}$$
$$\times (\|v(T)\|^2_H + \|v(0)\|^2_H + \|Mv\|^2_{L_2(0,T;F_1')})^{1/2}. \quad (24)$$

Используя это неравенство в левой части (23) и производя сокращение, получим неравенство

$$\delta_0\big(\|v(T)\|^2_H + \|v(0)\|^2_H + \|v\|^2_{L_2(0,T;F_1)}\big)^{1/2}$$
$$\leqslant 2\big(\|v(T)\|^2_H + \|v(0)\|^2_H + \|Mv\|^2_{L_2(0,T;F_1')}\big)^{1/2}, \quad (25)$$

или

$$\|S_0v\|_{L_2(0,T;F_1)\times H\times H} \leqslant c\|Sv\|_{L_2(0,T;F_1')\times H\times H}. \quad (26)$$

Итак, в силу теоремы А существует обобщенное решение задачи (1), (2) в смысле определения 1. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barbu V., Favini A.* Periodic solutions for degenerate differential equations // Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste. 1996. V. 28. P. 29–57.
2. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, №11. С. 1996–2010.

3. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
4. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. New York: Marcel Dekker, 1999. (Pure Appl. Math.; V. 215).
5. *Van der Mee C. V. M.* Semigroup and factorization methods in transport theory. Amsterdam: Math. Centrum, 1981.
6. *Karabash I. M.* Abstract kinetic equations with positive collision operators // arXiv:0708.2510v2 [math.SP]. The University of Calgary, Canada. 2 Oct. 2007. P. 1–20.
7. *Haase M.* The functional calculus for sectorial operators. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser Verl., 2006. (Operator theory: Adv. and Appl., V. 169).
8. *Пятков С. Г., Абашеева Н. Л.* Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа. // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1419–1435.
9. *Fichera G.* Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. New York: Springer-Verl. The Johns Hopkins University, Baltimore, MD: 1965.

г. Якутск *1 августа 2011 г.*

УДК 517.929.4

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ*)

Е. С. Водопьянов, Г. В. Демиденко

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \quad t > \tau, \tag{1}$$

где A, B — постоянные матрицы размера $n \times n$ такие, что нулевое решение (1) асимптотически устойчиво при любом параметре запаздывания $\tau > 0$. Задача об устойчивости решений систем вида (1) хорошо изучена (см., например, [1–3]). В частности, установлены условия на матрицы A, B, при которых имеет место асимптотическая устойчивость нулевого решения. Одним из самых популярных критериев является спектральный критерий асимптотической устойчивости, который формулируется в терминах принадлежности корней квазимногочлена

$$\det(A + e^{-\tau\lambda}B - \lambda I) = 0$$

левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$. Однако следует заметить, что на практике проверка этого критерия может оказаться очень

*) Работа выполнена при поддержке поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 16.740.11.0127), а также СО РАН (интеграционный проект № 85).

сложной задачей, поскольку для определения корней нужно применять приближенные методы, а как известно, даже в случае $B = 0$ задача нахождения корней такого уравнения является плохо обусловленной (см., например, [4]).

Еще одна интересная особенность при изучении устойчивости решений систем вида (1) может появиться в случаях, когда такие системы возникают при моделировании реальных процессов. В этих случаях элементы матриц A и B зачастую определяются неточно. Например, они могут быть получены в результате некоторых приближений громоздких выражений или измерений, которые проводятся с небольшими погрешностями, или каких-либо численных расчетов на ЭВМ. Коэффициенты могут также определяться гипотетически при отсутствии полной информации о моделируемом процессе. Поэтому при исследовании прикладных задач, изучив вопрос об устойчивости нулевого решения системы (1), очень важно определить границы для возмущений ΔA, ΔB матричных коэффициентов исходной системы, при которых нулевое решение возмущенной системы

$$\frac{d}{dt}y(t) = (A + \Delta A)y(t) + (B + \Delta B)y(t - \tau), \quad t > \tau, \tag{2}$$

будет также асимптотически устойчиво. Цель настоящей работы — получение условий на матрицы возмущений ΔA, ΔB, при которых гарантируется асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2) при любом параметре запаздывания $\tau > 0$.

Близкие вопросы рассматривались в работах [5–7].

2. Асимптотическая устойчивость решений систем с возмущением

Рассмотрим начальную задачу для системы (1)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad t > \tau, \\ x(t) = \varphi(t) \quad \text{при } t \in [0, \tau], \\ x(t) \in C[0, \infty) \cap C^1(\tau, \infty), \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi(t) \in C[0,\tau]$ — заданная вектор-функция. Известно, что решение начальной задачи (3) существует и единственно. В следующей теореме [8] приводятся достаточные условия на матрицы A и B, при которых нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво для любого $\tau > 0$, при этом устанавливается оценка решения задачи (3), характеризующая убывание решения при $t \to \infty$ с экспоненциальной скоростью.

Теорема 1. *Предположим, что существуют матрицы H, $K(s) \in C^1[0,\tau]$ такие, что*

$$H = H^* > 0, \quad K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{4}$$

при этом составная матрица

$$C = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB \\ B^*H & -K(\tau) \end{pmatrix} \tag{5}$$

положительно определена. Пусть $c_1 > 0$ — минимальное собственное значение матрицы C и $k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leqslant 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво и для решения начальной задачи (3) справедливо неравенство

$$\langle Hx(t), x(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)x(s), x(s)\rangle\, ds$$
$$\leqslant \exp\left(-\frac{\gamma(t-\tau)}{\|H\|}\right)\left[\langle H\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\langle K(\tau-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle ds\right], \ t > \tau, \tag{6}$$

где $\gamma = \min\{c_1,\ k\|H\|\}$.

Отметим, что доказательство этой теоремы проведено с использованием модифицированного функционала Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$V(t,x) = \langle Hx(t), x(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)x(s), x(s)\rangle\, ds.$$

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений с возмущенными коэффициентами (2). В следующей теореме указаны достаточные условия на матрицы возмущений ΔA и ΔB, при которых нулевое решение этой системы будет асимптотически устойчивым.

Теорема 2. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s) \in C^1[0,\tau]$, удовлетворяющие условиям* (4), *и матрица*

$$R = HA + A^*H + K(0) + HBK^{-1}(\tau)B^*H \tag{7}$$

отрицательно определена. Обозначим через $\lambda_{\max}(R)$ максимальное собственное число матрицы R. Тогда если матрицы возмущений ΔA и ΔB удовлетворяют условиям

$$\langle [H\Delta A + (\Delta A)^*H]\, v, v\rangle \leqslant r_1|\lambda_{\max}(R)|\|v\|^2, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\langle [H\Delta BK^{-1}(\tau)B^*H + HBK^{-1}(\tau)(\Delta B)^*H]v, v\rangle \\ + \langle K^{-1}(\tau)(\Delta B)^*Hv, (\Delta B)^*Hv\rangle \leqslant r_2|\lambda_{\max}(R)|\|v\|^2,\end{aligned} \tag{9}$$

$$r_j > 0, \quad r_1 + r_2 < 1, \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

то нулевое решение возмущенной системы (2) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что нулевое решение невозмущенной системы (1) асимптотически устойчиво. Действительно, рассмотрим матрицу C вида (5). Непосредственной проверкой убеждаемся, что выполнено равенство

$$\begin{pmatrix} I & D^* \\ 0 & I \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} I & 0 \\ D & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & K(\tau) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $D = K^{-1}(\tau)B^*H$. Отсюда

$$\left\langle C \begin{pmatrix} I & 0 \\ D & I \end{pmatrix} w, \begin{pmatrix} I & 0 \\ D & I \end{pmatrix} w \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & K(\tau) \end{pmatrix} w, w \right\rangle, \ w \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Поэтому учитывая условия $K(\tau) > 0$ и $R < 0$, получаем положительную определенность матрицы C. Следовательно, в силу теоремы 1 нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

По аналогии с матрицей (7) введем матрицу

$$\widetilde{R} = H(A+\Delta A) + (A+\Delta A)^* H + K(0) + H(B+\Delta B)K^{-1}(\tau)(B+\Delta B)^* H.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}\widetilde{R} &= HA + H\Delta A + A^* H + (\Delta A)^* H + K(0) + HBK^{-1}(\tau)B^* H \\ &+ H\Delta BK^{-1}(\tau)B^* H + H\Delta BK^{-1}(\tau)(\Delta B)^* H + HBK^{-1}(\tau)(\Delta B)^* H \\ &= R + H\Delta A + (\Delta A)^* H + H\Delta BK^{-1}(\tau)B^* H \\ &\quad + HBK^{-1}(\tau)(\Delta B)^* H + H\Delta BK^{-1}(\tau)(\Delta B)^* H.\end{aligned}$$

Покажем, что для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ имеет место неравенство

$$\langle \widetilde{R}v, v\rangle < 0. \tag{11}$$

Действительно, из определения матрицы $\widetilde{R}$ имеем

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{R}v, v\rangle &= \langle Rv, v\rangle + \langle [H\Delta A + (\Delta A)^* H]v, v\rangle \\ &+ \langle [H\Delta BK^{-1}(\tau)B^* H + HBK^{-1}(\tau)(\Delta B)^* H]v, v\rangle \\ &+ \langle K^{-1}(\tau)(\Delta B)^* Hv, (\Delta B)^* Hv\rangle.\end{aligned}$$

Используя условия (8), (9), а также неравенство

$$\langle Rv, v\rangle \leqslant \lambda_{\max}(R)\|v\|^2, \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

получаем

$$\langle \widetilde{R}v, v\rangle \leqslant (1 - r_1 - r_2)\lambda_{\max}(R)\|v\|^2.$$

Поскольку $r_1 + r_2 < 1$, отсюда следует (11).

Введем теперь матрицу $\tilde{c}$, являющуюся аналогом матрицы (5), следующим образом:

$$\tilde{c} = -\begin{pmatrix} H(A+\Delta A) + (A+\Delta A)^* H + K(0) & H(B+\Delta B) \\ (B+\Delta B)^* H & -K(\tau) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Пусть $\widetilde{D} = K^{-1}(\tau)(B+\Delta B)^* H$. По аналогии с равенством (10) имеем

$$\begin{pmatrix} I & \widetilde{D}^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \tilde{c} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \widetilde{D} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\widetilde{R} & 0 \\ 0 & K(\tau) \end{pmatrix}.$$

Так как $K(\tau) > 0$, в силу (11) отсюда получаем положительную определенность матрицы $\tilde{c}$. Следовательно, в силу теоремы 1 нулевое решение возмущенной системы уравнений (2) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Приведем еще одну теорему, в которой получены чуть более грубые, но легко проверяемые условия на матрицы возмущений ΔA и ΔB, при которых нулевое решение системы (2) будет асимптотически устойчивым.

Теорема 3. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s) \in C^1[0,\tau]$, удовлетворяющие условиям* (4), *и матрица* (7) *отрицательно определена. Тогда если матрицы возмущения ΔA и ΔB удовлетворяют условиям*

$$\|\Delta A\| \leqslant r_1 \frac{|\lambda_{\max}(R)|}{2\|H\|}, \tag{13}$$

$$\|\Delta B\| \leqslant \sqrt{\|B\|^2 + \frac{r_2|\lambda_{\max}(R)|}{\|H\|^2\|K^{-1}(\tau)\|}} - \|B\|, \tag{14}$$

где $r_j > 0$, $r_1 + r_2 < 1$, то нулевое решение возмущенной системы (2) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Перепишем условие (13) следующим образом:

$$2\|\Delta A\|\|H\| \leqslant r_1|\lambda_{\max}(R)|.$$

Учитывая это неравенство, для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$, очевидно, имеем

$$\begin{aligned}\langle H\Delta A v, v\rangle &+ \langle (\Delta A)^* H v, v\rangle \\ &\leqslant \|H\|\|\Delta A\|\|v\|^2 + \|(\Delta A)^*\|\|H\|\|v\|^2 \leqslant r_1|\lambda_{\max}(R)|\|v\|^2.\end{aligned}$$

Следовательно, матрица возмущения ΔA удовлетворяет условию (8) из теоремы 2.

Рассмотрим условие на матрицу возмущения ΔB. Аналогично предыдущему, учитывая, что $\|(\Delta B)^*\| = \|\Delta B\|$, $\|B^*\| = \|B\|$, для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned}\langle[H\Delta BK^{-1}(\tau)B^*H + HBK^{-1}(\tau)(\Delta B)^*H]v, v\rangle \\ + \langle K^{-1}(\tau)(\Delta B)^*Hv, (\Delta B)^*Hv\rangle \\ \leqslant [2\|\Delta B\|\|B\| + \|\Delta B\|^2]\|K^{-1}(\tau)\|\|H\|^2\|v\|^2.\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что из условия (14) вытекает неравенство

$$\left[2\|\Delta B\|\|B\| + \|\Delta B\|^2\right]\|K^{-1}(\tau)\|\|H\|^2 - r_2|\lambda_{\max}(R)| \leqslant 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\langle[H\Delta BK^{-1}(\tau)B^*H + HBK^{-1}(\tau)(\Delta B)^*H]v, v\rangle \\ + \langle K^{-1}(\tau)(\Delta B)^*Hv, (\Delta B)^*Hv\rangle \leqslant r_2|\lambda_{\max}(R)|\|v\|^2.\end{aligned}$$

Следовательно, матрица возмущения ΔB удовлетворяет условию (9) из теоремы 2.

Итак, для матриц возмущения ΔA и ΔB выполнены все условия теоремы 2. Поэтому нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

3. Оценки решений

Используя полученные результаты и рассуждая, как в [8, 9], можно получить оценки решений системы (2) на всей полуоси $\{t > \tau\}$. Для этого рассмотрим начальную задачу для возмущенной системы (2):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = (A + \Delta A)y(t) + (B + \Delta B)y(t - \tau), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t) \quad \text{при } t \in [0, \tau], \\ y(t) \in C[0, \infty) \cap C^1(\tau, \infty). \end{cases} \tag{15}$$

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2. Пусть $\tilde{c}_1 > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $\tilde{c}$, определенной в (12), и $k > 0$ — максимальное число такое, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leqslant 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Тогда для решения начальной задачи (15) *справедливо неравенство*

$$\langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds$$
$$\leqslant \exp\left(-\frac{\tilde{\gamma}(t-\tau)}{\|H\|}\right)\left[\langle H\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\langle K(\tau-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle ds\right],\ t>\tau, \tag{16}$$

где $\tilde{\gamma} = \min\{\tilde{c}_1,\ k\|H\|\}$.

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (15). Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова — Красовского

$$\widetilde{V}(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds, \tag{17}$$

введенный в работе [8]. Дифференцируя его и используя матрицу (12), нетрудно получить следующее тождество:

$$\frac{d}{dt}\widetilde{V}(t,y) + \left\langle \tilde{c}\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$- \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds \equiv 0.$$

По доказанному в предыдущем разделе матрица $\tilde{c}$ положительно определена, поэтому $\tilde{c}_1 > 0$. Следовательно, по аналогии с [8, 9] получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\widetilde{V}(t,y) + \frac{\tilde{c}_1}{\|H\|}\langle Hy(t), y(t)\rangle + k\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds \leqslant 0.$$

Отсюда, учитывая определение функционала (17), имеем

$$\frac{d}{dt}\widetilde{V}(t,y) + \frac{\tilde{\gamma}}{\|H\|}\widetilde{V}(t,y) \leqslant 0, \quad t>\tau.$$

Стало быть,

$$\widetilde{V}(t,y) \leqslant \exp\left(-\frac{\tilde{\gamma}(t-\tau)}{\|H\|}\right)\widetilde{V}(\tau,\varphi), \quad t>\tau,$$

а это неравенство совпадает с (16). Теорема доказана.

Следствие. *Предположим, что выполнены условия теоремы. Тогда для решения начальной задачи* (15) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leqslant \exp\left(-\frac{\tilde{\gamma}(t-\tau)}{2\|H\|}\right)\sqrt{\|H^{-1}\|\widetilde{V}(\tau,\varphi)}, \quad t>\tau.$$

Доказательство непосредственно вытекает из неравенства (16).

Замечание. Аналогичные результаты можно получить для систем дифференциальных уравнений *нейтрального типа*

$$\frac{d}{dt}(y(t)+(D+\Delta D)y(t-\tau)) = (A+\Delta A)y(t)+(B+\Delta B)y(t-\tau), \quad t>\tau,$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
3. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наук. Думка, 1989.
4. *Уилкинсон Дж.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
5. *Khusainov D. Ya.* Investigation of interval stability of linear systems of neutral type of Lyapunov function method // J. Appl. Math. Stochastic Anal. 2002. V. 15, N 1. P. 71–81.
6. *Kharitonov V. L.* Lyapunov–Krasovskii functionals for scalar time delay equations // Syst. Control Lett. 2004. V. 51, N 3. P. 133–149.
7. *Gu K., Kharitonov V. L., Chen J.* Stability of time-delay systems. Control engineering. Boston, MA: Birkhäuser, 2003.
8. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, вып. 3. С. 20–28.
9. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

г. Новосибирск *1 августа 2011 г.*

УДК 517.95

СТАЦИОНАРНЫЙ МЕТОД ГАЛЁРКИНА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ*)

И. Е. Егоров, Е. С. Ефимова

Параболические уравнения с меняющимся направлением времени входят в класс эллиптико-параболических уравнений. Отметим, что эллиптико-параболическим уравнениям посвящена обширная литература [1–7]. В работах [5, 6] установлено, что при определенных условиях на коэффициенты эллиптико-параболического уравнения единственное обобщенное решение первой (третьей) краевой задачи можно найти как предел приближенных решений, вычисляемых по методу Галёркина [8].

В данной работе в отличие от работ [5, 6] базисные функции строятся явным образом и приближенные решения сходятся к гладкому решению исходной краевой задачи для одного параболического уравнения с меняющимся направлением времени.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей S класса C^2, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ для $0 \leqslant t \leqslant T$, $S_T = S \times (0, T)$.

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим уравнение параболического типа

$$Lu \equiv k(x,t)u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t). \tag{1}$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно глад-

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (код проекта № 02.740.11.0609.)

кие в $\overline{Q}$, и введем следующие множества:

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0) \lessgtr 0,\ x \in \Omega\} \quad S_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T) \lessgtr 0,\ x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. *Найти решение уравнения* (1) *в области* Q *такое, что*

$$u|_{\overline{S_0^+}} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{\overline{S_T^-}} = 0. \tag{3}$$

Отметим, что краевая задача (1)–(3) является обобщением известной задачи М. Жевре [3, 4].

Через C_L обозначим класс гладких в $\overline{Q}$ функций, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3). Пусть $W_2^{m,s}(Q)$ — анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{m,s}^2 = \int\limits_Q \Big[\sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u)^2 + \big(D_t^s u\big)^2 \Big]\, dQ,$$

причем $(u,v) = \int_Q uv\, dQ$ для функций u, v из $L_2(Q)$, $\|u\|^2 = (u,u)$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие*

$$c - \frac{1}{2} k_t \geqslant 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

Тогда для любой функции $u(x,t) \in C_L$ *имеет место оценка*

$$C_1 \|u\|_{1,0}^2 \leqslant (Lu,u), \quad C_1 > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение (Lu,u) для $u \in C_L$. После интегрирования по частям с учетом краевых условий (2), (3) получим

$$(Lu,u) = \int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \left(c - \frac{1}{2} k_t\right) u^2 \right] dQ + \frac{1}{2} \int\limits_{S_T^+} k u^2\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{S_0^-} k u^2\, dx.$$

Отсюда, используя неравенство Пуанкаре — Фридрихса

$$\int\limits_Q u^2\, dQ \leqslant C_\Omega^2 \int\limits_Q \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\, dQ,$$

получаем утверждение леммы.

Всюду ниже будем предполагать, что правая часть уравнения (1) принадлежит $W_2^{0,1}(Q)$.

При $k(x,0) \geqslant 0$, $k(x,T) \leqslant 0$ в качестве базисных функций берем функции $\varphi_k(x,t)$, которые являются решением спектральной задачи

$$-\widetilde{\Delta}\varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

$$\varphi_k|_{S_T} = 0, \tag{5}$$

$$\varphi_k|_{t=0} = 0, \quad \varphi_k|_{t=T} = 0, \tag{6}$$

где $\widetilde{\Delta}u = u_{tt} + \Delta u$. При этом функции $\varphi_k(x,t)$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и образуют базис в нем, а также выполнены условия $f(x,0) = 0$ и $f(x,T) = 0$.

При $k(x,0) \geqslant 0$, $k(x,T) \geqslant 0$ краевые условия (6) имеют вид

$$\varphi_k|_{t=0} = 0, \quad \varphi_{k_t}|_{t=T} = 0,$$

а также выполнено условие $f(x,0) = 0$.

При $k(x,0) \leqslant 0$, $k(x,T) \geqslant 0$ в качестве краевых условий (6) берутся условия

$$\varphi_{kt}|_{t=0} = 0, \quad \varphi_{kt}|_{t=T} = 0.$$

При $k(x,0) \leqslant 0$, $k(x,T) \leqslant 0$ краевые условия (6) имеют вид

$$\varphi_{kt}|_{t=0} = 0, \quad \varphi_k|_{t=T} = 0,$$

кроме того, выполнено условие $f(x,T) = 0$.

Приближенные решения $u^N(x,t)$ первой краевой задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой N линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \quad l = \overline{1,N}. \tag{7}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие леммы* 1. *Тогда система* (7) *однозначно определяет приближенные решения* u^N.

Доказательство. Пусть c_k^N — решения однородной системы (7). Тогда, умножая каждое уравнение на свое c_l^N и складывая по l от 1 до N, получаем соотношение

$$(Lu^N, u^N) = 0,$$

из которого в силу леммы 1 имеем

$$0 = \|u^N\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \left(c_k^N\right)^2,$$

т. е. $c_k^N = 0$ при $k = \overline{1, N}$. Следовательно, система (7) однозначно разрешима, ибо для нее имеет место теорема единственности. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$c - \frac{1}{2}k_t \geqslant 0, \quad c + \frac{1}{2}k_t \geqslant \delta > 0, \quad f \in W_2^{0,1}(Q)$$

и имеет место один из следующих случаев:

$k(x,0) \geqslant 0$, $k(x,T) \leqslant 0$, $f(x,0) = 0$, $f(x,T) = 0$,

или $k(x,0) \geqslant 0$, $k(x,T) \geqslant 0$, $f(x,0) = 0$,

или $k(x,0) \leqslant 0$, $k(x,T) \geqslant 0$,

или $k(x,0) \leqslant 0$, $k(x,T) \leqslant 0$, $f(x,T) = 0$.

Тогда краевая задача (1)–(3) *имеет единственное решение* $u(x,t)$ *из* $W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство. Сначала для приближенных решений $u^N(x,t)$ получим оценки, не зависящие от N. Действительно, из уравнений (7) нетрудно получить соотношение

$$(Lu^N, u^N) = (f, u^N),$$

из которого в силу леммы 1 имеем оценку

$$\|u^N\|_{1,0} \leqslant C_2\|f\|, \quad C_2 > 0. \tag{8}$$

Умножим каждое уравнение из (7) на свое $c_l^N \lambda_l$, просуммируем по l от 1 до N. В результате придем к равенству

$$-(Lu^N, \widetilde{\Delta} u^N) = -(f, \widetilde{\Delta} u^N). \tag{9}$$

Рассмотрим случай

$$k(x,0) \geqslant 0, \quad k(x,T) \leqslant 0, \quad f(x,0) = 0, \quad f(x,T) = 0.$$

После интегрирования по частям с учетом краевых условий для u^N из (9) получим

$$\int\limits_Q \left[\left(c + \frac{1}{2} k_t \right) v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 + (\Delta v)^2 + v_t \sum_{i=1}^n k_{x_i} v_{x_i} \right.$$
$$\left. + k \sum_{i=1}^n v_{tx_i} v_{x_i} + c_t v_t v - c v \Delta v \right] dQ + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} k v_t^2 \, dx$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T} k v_t^2 \, dx = \int\limits_Q [f_t v_t - f \Delta v] \, dQ, \tag{10}$$

где $v = u^N$. В силу условий теоремы, неравенства Коши и оценки (8) из соотношения (10) будем иметь

$$\int\limits_Q \left[(u_t^N)^2 + \sum_{i=1}^n (u_{tx_i}^N)^2 + (\Delta u^N)^2 \right] dQ$$
$$\leqslant C_3(\|f\|^2 + \|f_t\|^2), \quad C_3 > 0. \tag{11}$$

Благодаря оценкам (8), (11) из последовательности $\{u^N\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u^{N_k}\}$, слабо сходящуюся в $W_2^{2,1}(Q)$ к некоторой функции $u(x,t)$ из $W_2^{2,1}(Q) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$. При фиксированном φ_l в (7) можно перейти к пределу по выбранной подпоследовательности $\{u^{N_k}\}$. В результате получим равенство

$$(Lu, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \quad l = 1, 2, \ldots.$$

В силу того, что $\{\varphi_l\}$ образуют базис в $L_2(Q)$, из последнего равенства следует, что уравнение (1) выполняется для почти всех $(x,t) \in Q$

и краевые условия (2), (3) удовлетворяются в среднем. Остальные три случая рассматриваются аналогичным образом. Единственность решения краевой задачи (1)–(3) из $W_2^{2,1}(Q)$ непосредственно вытекает из леммы 1. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда галёркинские приближения* $u^N(x,t)$ *при* $N \to \infty$ *слабо сходятся в* $W_2^{2,1}(Q)$ *и сходятся в норме* $L_2(Q)$ *к решению краевой задачи* (1)–(3) *из* $W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство. В доказательстве теоремы 1 показано, что существует подпоследовательность u^{N_k}, слабо сходящаяся в $W_2^{2,1}(Q)$ к $u(x,t)$ — решению краевой задачи (1)–(3) из $W_2^{2,1}(Q)$. Выбирая из $\{u^N\}$ любую другую подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой функции $v(x,t)$ из $W_2^{2,1}(Q)$, получим $v(x,t) \equiv u(x,t)$, так как решение краевой задачи (1)–(3) из $W_2^{2,1}(Q)$ единственно. Это означает, что последовательность $\{u^N\}$ имеет единственную предельную точку $u(x,t)$. Отсюда в силу слабой компактности $\{u^N\}$ в $W_2^{2,1}(Q)$ получаем, что вся последовательность $\{u^N\}$ слабо сходится к $u(x,t)$ в $W_2^{2,1}(Q)$. Второе утверждение из теоремы 2 следует из вполне непрерывного вложения пространства $W_2^{1,1}(Q)$ в $L_2(Q)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фикера Г.* К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений // Математика. 1963. Т. 7, № 6. С. 99–121.
2. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 7–252. (Итоги науки).
3. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
4. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
5. *Егоров И. Е.,* Степанова П. И. О методе Галёркина для эллиптико-параболических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, вып. 2. С. 19–26.
6. *Егоров И. Е.* Применение метода Галёркина к третьей краевой задаче для эллиптико-параболического уравнения // Мат. заметки ЯГУ. 2009. Т. 16, вып. 1. С. 22–27.
7. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
8. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

г. Якутск *6 июня 2011 г.*

УДК 518.9

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СОРТИРОВКИ И ВЫБОРА

Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов

При принятии решений в управленческой деятельности часто встречаются задачи, которые сводятся к многокритериальным задачам выбора одного или нескольких элементов (решений или объектов) из некоторого множества или к многокритериальным задачам сортировки [1, 2]. Наличие различных, несовпадающих, порой даже противоречащих друг другу, критериев делают решение такого рода задач достаточно сложным. Для их исследования используются и теоретико-игровые методы [3].

При решении таких задач в данной работе предлагаются следующие подходы, разработанные в [4–6].

Сортировка элементов по многим критериям. Пусть имеются m ($m \in \mathbb{N}$) объектов и n ($n \in \mathbb{N}$) критериев, по которым оцениваются эти объекты. Обозначим множество всех объектов через M, а множество всех критериев — через $N \rightleftharpoons \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Рассмотрим задачу сортировки объектов из M по некоторому принципу, основанному на использовании критериев из N.

Пусть имеем числа a_{ij}, являющиеся оценкой i-го объекта по критерию j ($i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$). Тогда можно рассмотреть матричную игру [3] с матрицей $A = \{a_{ij}\}$, где объекты из M интерпретируются как стратегии первого игрока, а критерии из N — как стратегии второго игрока. Первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, а второй — минимизировать.

Опишем алгоритм разбиения множества объектов на классы эквивалентности, т. е. введем отношение порядка на множестве M.

Решая матричную игру с матрицей $A_0 \rightleftharpoons A$, найдем оптимальную стратегию $u^0 = \left(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0\right)$ первого игрока. Если $u_i^0 > 0$ $(i = \overline{1,m})$, то получаем искомое разбиение на классы эквивалентности, где объекты с одинаковыми весами в векторе u^0 интерпретируются как элементы одного класса эквивалентности.

Если же в u^0 имеются нулевые компоненты, то элементы с ненулевыми весами образуют первую группу G_0, в которой объекты упорядочиваются по весам, как описано выше.

Исключая из матрицы A_0 строки, соответствующие объектам из G_0, получим матрицу A_1 размера $m_1 \times n$, $0 \leqslant m_1 < m$.

Описанный способ получения группы G_0 и матрицы A_1,, полученной из матрицы A_0, исключением строк, соответствующих объектам из G_0, назовем *A-редуцированием игры с матрицей* A_0.

Таким образом, решая A-редуцированную игру с матрицейA_1, получим некоторую группу объектов G_1 и матрицу A_2 размера $m_2 \times n$, $0 \leqslant m_2 < m_1$, полученную исключением из матрицы A_1 строк, соответствующих объектам из G_1.

Теорема 1. *Существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что, применяя последовательно A-редуцирование к матрицам $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$, получим множества групп объектов $G_0, G_1, \ldots, G_k$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) $\bigcup\limits_{i=0}^{k} G_i = M$;

2) $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \neq j$, $\quad G_i \cap G_j = \varnothing$.

PEC-задачи. Некоторые задачи выбора и принятия решений сводятся к одной или нескольким задачам выбора одной из двух возможностей: «поступить таким образом» или «не делать этого». Такого рода задачи будем называть *задачами «за и против»* или *PEC-задачами* (от латинского «pro et contra»). Для каждой PEC-задачи рассматриваются определенные наборы аргументов (доводов) в пользу той или иной

возможности.

РЕС-задача определяется как совокупность множеств P, C и матрицы A, где

$$P \rightleftharpoons \{p_1, \ldots, p_n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

есть множество аргументов «за»,

$$C \rightleftharpoons \{c_1, \ldots, c_m\}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

есть множество аргументов «против»,

$$A = \{a_{ij}\} \in [0;\, 1], \quad i = \overline{1,\, n},\ j = \overline{1,\, m}, \tag{3}$$

есть $n \times m$-матрица, состоящая из элементов a_{ij}, являющихся экспертными оценками взаимодействия p_i и c_j. Таким образом, предполагается, что каждый аргумент «за» p_i из P сравнивается с каждым аргументом «против» c_j из C, и методом экспертных оценок [1] (или каким-либо другим способом) получаются числа a_{ij}, которые мы и назвали *экспертными оценками взаимодействия* p_i и c_j. Чем больше значение a_{ij}, тем более значим и убедителен аргумент «за» p_i по сравнению с аргументом «против» c_j. Наоборот, чем меньше значение a_{ij}, тем более значим и убедителен аргумент «против» c_j по сравнению с аргументом «за» p_i.

Пусть $\widehat{A}$ — множество всех $n \times m$-матриц с элементами из $[0; 1]$ $(n, m \in \mathbb{N})$. Тогда любая РЕС-задача с множествами P (1) и C (2) определяет некоторую $n \times m$-матрицу из $\widehat{A}$, и, наоборот, любая $n \times m$-матрица A из $\widehat{A}$ определяет РЕС-задачу с множеством P (1), множеством C (2), экспертными оценками a_{ij} (3) взаимодействия p_i и c_j.

Пусть A — $n \times m$-матрица из $\widehat{A}$. Авторами ранее было показано, что для вычисления решения порождаемой ею РЕС-задачи (т. е. определения интегральной экспертной оценки) достаточно найти цену соответствующей матричной игры [3]. Поэтому, рассматривая РЕС-задачу (1)–(3), уместно говорить об игроках с множествами стратегий (аргументов, доводов) P и C, где первый (второй) игрок является максимизирующим (минимизирующим).

Многокритериальная задача выбора из двух объектов. Пусть имеются два однотипных объекта и n различных критериев, по которым сравниваются эти объекты ($n \in \mathbb{N}$). Обычно при решении многокритериальных задач сравнения двух объектов эксперты оценивают их отдельно по каждому критерию, определяют весовые коэффициенты, затем каким-либо способом получают интегрированный показатель — число, с которым уже можно работать. Здесь мы вводим в рассмотрение сравнительные оценки объектов по разным критериям, а не только по одинаковым, что и позволяет применить аппарат антагонистических игр, где матрица игры $A \rightleftharpoons \{a_{ij} \in R_1 \mid i, j = \overline{1, n}\}$ есть матрица экспертных оценок $a_{ij} \in R_1$, характеризующие значимость первого объекта по критерию i в сравнении со вторым объектом по критерию j. Сравнение производится группой специалистов путем выставления экспертных оценок по следующей схеме. Определяются числа $a_{ij} \in R_1$, характеризующие значимость первого объекта по критерию i в сравнении со вторым объектом по критерию j, где $i, j = \overline{1, n}$. Тогда имеем $n \times n$-матрицу экспертных оценок

$$A \rightleftharpoons \{a_{ij} \in R_1 \mid i, j = \overline{1, n}\} \tag{4}$$

с элементами, имеющими следующий смысл. Если $a_{ij} = 0$, то значимости первого объекта по критерию i и второго объекта по критерию j совпадают. Если $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} < 0$), то значимость первого объекта по критерию i в сравнении со значимостью второго объекта по критерию j больше (меньше) на величину $|a_{ij}|$.

авторам: я убрал имевшийся на этом месте абзац, ибо его первая половина дословно повторяет текст предыдущего абзаца, а вторая слишком тривиальна.

Теорема 2. *Пусть имеем задачу выбора по n заданным критериям из двух однотипных объектов и $n \times n$-матрицу A экспертных оценок, элементы которой удовлетворяют условиям, налагаемым на числа a_{ij}* (1), $n \in \mathbb{N}$. *Рассмотрим матричную игру с $n \times n$-матрицей A и ценой V, где первый игрок является максимизирующим, а второй — мини-*

мизирующим. Тогда первый объект предпочтительнее второго, если $V > 0$*; второй объект предпочтительнее первого, если* $V < 0$*; объекты равнозначны, если* $V = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988.

2. *Экланд И.* Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.

3. *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.

4. *Егоров Р. И., Кайгородов С. П.* Об одной задаче распределения с жеребьевками // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13., вып. 1. С. 67–71.

5. *Егоров Р. И., Кайгородов С. П., Местников С. В.* Моделирование РЕС-задач с помощью теории игр // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14., вып. 2. С. 8–12.

6. *Егоров Р. И., Кайгородов С. П.* Об одном теоретико-игровом методе решения многокритериальной задачи выбора из двух объектов // Мат. заметки ЯГУ. 2009. Т. 16., вып. 2. С. 7–10.

г. Якутск *9 июня 2011 г.*

УДК 519.172.2

2-ГРАНЕВАЯ 4-РАСКРАШИВАЕМОСТЬ ПЛОСКИХ ГРАФОВ С ОБХВАТОМ НЕ МЕНЕЕ 22*)

А. О. Иванова

1. Введение

Под графом мы понимаем неориентированный граф без петель и кратных ребер. Через $V(G)$, $E(G)$, $F(G)$, $\Delta(G)$ и $g(G)$ обозначим множества вершин, ребер, граней, максимальную степень и обхват (минимальную длину цикла) графа G соответственно (будем опускать аргумент всякий раз, когда граф ясен из контекста.)

Вершинная раскраска плоского графа называется *k-цикловой*, если любые две различные вершины, лежащие в границе грани размера не более k, раскрашены в разные цвета. Это понятие введено Оре и Пламмером [1]. Пусть σ_k — наименьшее число цветов, достаточное для k-цикловой раскраски всех плоских графов. Согласно теореме о 4-х красках (Аппель и Хакен [2]), имеем $\sigma_3 \leqslant 4$, а из результатов О. В. Бородина [3, 4] — $\sigma_4 \leqslant 6$. Кроме того, О. В. Бородин, Сандерс и Жао [5] доказали, что $\sigma_5 \leqslant 8$.

Крал, Мадараш и Шкрековски [6] предложили следующее усиление 5-цикловой раскраски. Вершинная раскраска плоского графа называется *2-граневой*, если любые две различные вершины, соединенные в обходе границы одной и той же грани путем длины не более два, раскрашены в разные цвета. Через φ_2 обозначим наименьшее число цве-

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09–01–00244 и 08–01–00673).

тов, достаточное для 2-граневой раскраски заданного графа. В частности, в [6] доказано, что каждый плоский граф имеет $\varphi_2 \leqslant 8$, откуда следует, что $\sigma_5 \leqslant 8$, поскольку каждая 2-граневая раскраска, очевидно, является 5-цикловой. Общая граница 8 в [6] была улучшена Монтасьером и Распо [7] для плоских графов с достаточно большим обхватом: $\varphi_2 \leqslant 7$, если $g \geqslant 8$, $\varphi_2 \leqslant 6$, если $g \geqslant 10$ и $\varphi_2 \leqslant 5$, если $g \geqslant 14$. Заметим, что $\varphi_2(K_{1,3}) = 4$, а $g(K_{1,3}) = \infty$. В то же время $\varphi_2(C_5) = 5$, а $g(C_5) = 5$.

Целью данной статьи является

Теорема 1. *Каждый плоский граф G с обхватом не менее 22 имеет $\varphi_2(G) \leqslant 4$.*

С другой стороны, 2-граневая раскраска связана с 2-дистанционной раскраской. Раскраска графа G называется 2-*дистанционной*, если любые две вершины на расстоянии не более два друг от друга раскрашены в различные цвета. Минимальное число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G обозначается через $\chi_2(G)$.

В 1977 г. Вегнер [8] (см. также книгу Йенсена и Тофта [9]) предположил, что для любого плоского графа: $\chi_2 \leqslant 7$, если $\Delta = 3$; $\chi_2 \leqslant \Delta + 5$, если $4 \leqslant \Delta \leqslant 7$; и $\chi_2 \leqslant \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1$ в противном случае.

Были получены следующие верхние оценки: $\lfloor \frac{9\Delta}{5} \rfloor + 2$ при $\Delta \geqslant 749$ Агнарсоном и Холдорсоном [10, 11] и $\lceil \frac{9\Delta}{5} \rceil + 1$ при $\Delta \geqslant 47$ О. В. Бородиным, Х. Брусмой, А. Н. Глебовым и Я. Ван-Ден-Хойвелом [12, 13]. Наилучшие из известных верхних оценок при больших Δ принадлежат Молою и Салаватипуру [14, 15]: $\lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 78$ при всех Δ и $\lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 25$ при $\Delta \geqslant 241$.

О. В. Бородиным и др. [16, 17] были получены достаточные условия (в терминах g и Δ) того, что 2-дистанционное хроматическое число плоского графа достигает тривиальной нижней границы $\Delta + 1$. В частности, установлено, что минимальное g такое, что $\chi_2 = \Delta + 1$, если Δ достаточно велико (в зависимости от g), равно 7.

Теорема 2. *Если G — плоский граф, то $\chi_2(G) = \Delta + 1$ в каждом из случаев* (i–viii)*:*

(i) $\Delta = 3$, $g \geqslant 24$;
(ii) $\Delta = 4$, $g \geqslant 15$;
(iii) $\Delta = 5$, $g \geqslant 13$;
(iv) $\Delta = 6$, $g \geqslant 12$;
(v) $\Delta \geqslant 7$, $g \geqslant 11$;
(vi) $\Delta \geqslant 9$, $g = 10$;
(vii) $\Delta \geqslant 15$, $g \geqslant 8$;
(viii) $\Delta \geqslant 30$, $g = 7$.

Существуют плоские графы с $g \leqslant 6$ такие, что $\chi_2 = \Delta + 2$ для произвольно больших Δ.

О. В. Бородин, А. О. Иванова и Т. К. Неустроева [18, 19] доказали, что $\chi_2 = \Delta + 1$ при всех $\Delta \geqslant 31$ для плоских графов обхвата 6 при дополнительном условии, что каждое ребро инцидентно вершине степени 2.

Дворжак, Крал, Ниедлы и Шкрековски [20] доказали, что каждый плоский граф с $\Delta \geqslant 8821$ и $g \geqslant 6$ имеет $\chi_2 \leqslant \Delta + 2$. О. В. Бородиным и А. О. Ивановой в [21, 22] условие на Δ было ослаблено до 18. А. О. Иванова [23] улучшила теорему 2 для $\Delta \geqslant 5$ следующим образом.

Теорема 3. *Если G — плоский граф, то $\chi_2(G) = \Delta + 1$ в каждом из случаев* (i–iv):
(i) $\Delta \geqslant 16$, $g = 7$;
(ii) $\Delta \geqslant 10$, $8 \leqslant g \leqslant 9$;
(iii) $\Delta \geqslant 6$, $10 \leqslant g \leqslant 11$;
(iv) $\Delta = 5$, $g \geqslant 12$.

Большое количество исследований посвящено раскраске графов с $\Delta = 3$ (называемых *субкубическими*). Для таких графов Вегнер [8] доказал, что $\chi_2 \leqslant 8$ (что также следует из $\varphi_2 \leqslant 8$ [6]). Также для субкубических плоских графов Дворжак, Шкрековски и Танцер [24] доказали, что $\chi_2 = 4$, если $g \geqslant 24$ (т. е. они независимо получили п. (i) теоремы 2) и $\chi_2 \leqslant 5$, если $g \geqslant 14$. Второй из этих результатов был также получен Монтасьером и Распо [7], что было улучшено А. О. Ива-

новой и А. С. Соловьевой [25] и Хаветом [26] до $g \geqslant 13$. О. В. Бородин и А. О. Иванова [28] доказали, что $\chi_2 = 4$, если $g \geqslant 22$.

Заметим, что для субкубических графов любая 2-граневая раскраска является 2-дистанционной, поэтому теорема 1 обобщает результат из [28]. Из упомянутых перед формулировкой теоремы 1 фактов следует, что теорема 1 неулучшаема в том смысле, что в ней меньше чем четырьмя цветами не обойтись, а ограничение на обхват отбросить нельзя.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G — контрпример к теореме 1 с наименьшим числом вершин. Очевидно, G связный. Если бы G был несвязным, то мы бы отдельно покрасили каждую компоненту связности, поскольку никакие две вершины, принадлежащие разным компонентам связности и инцидентные внешней грани, не соединяются в границе внешней грани путем длины не более 2. Кроме того, G не имеет висячих вершин. Действительно, если u — висячая вершина, то мы легко продолжим раскраску графа $G - u$ на вершину u, поскольку u в G соединяется путем длины $\leqslant 2$ не более чем с тремя вершинами.

Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ перепишем в виде $(20|E| - 22|V|) + (2|E| - 22|F|) = -44$. Отсюда

$$\sum_{v \in V} (10d(v) - 22) + \sum_{f \in F} (r(f) - 22) = -44, \tag{1}$$

где $d(v)$ — степень вершины v, а $r(f)$ — ранг грани f. *Заряд* $\mu(v)$ каждой вершины $v \in V(G)$ положим равным $10d(v) - 22$, а *заряд* $\mu(f)$ каждой грани $f \in F(G)$ — равным $r(f) - 22$. Поскольку заряд каждой грани неотрицателен, из (1) следует, что

$$\sum_{v \in V} (10d(v) - 22) < 0. \tag{2}$$

Заметим, что заряд 2-вершины равен -2, заряд 3-вершины равен 8 и т. д. Сначала опишем структурные свойства графа G, а затем,

основываясь на них, перераспределим заряды, сохраняя их сумму так, что все новые заряды $\mu^*(v)$ окажутся неотрицательными (что противоречит (2)).

2.1. Структурные свойства минимального контрпримера. Под k-*цепью* мы понимаем цепь, состоящую из в точности k вершин степени 2. Через (k, l, m) обозначим вершину степени 3, инцидентную $\geqslant k$-цепи, $\geqslant l$-цепи и $\geqslant m$-цепи.

Пару вершин (k, l, m) и (m, n, p), соединенных m-цепью, будем обозначать через $(klm - mnp)$. Аналогично, через $(klm - mnp - prs)$ обозначим тройку вершин (k, l, m), (m, n, p) и (p, r, s), где (m, n, p)-вершина соединена m-цепью и p-цепью с (k, l, m)-вершиной и (p, r, s)-вершиной соответственно.

Леммы 1–4 доказаны для 2-дистанционной раскраски, но справедливы также и для 2-граневой, поскольку в 2-дистанционной раскраске любые две вершины, находящиеся на расстоянии два друг от друга, должны быть раскрашены в разные цвета, а в 2-граневой раскраске вершины на расстоянии два красятся различно, только если они соединены путем длины не более 2 в границе одной и той же грани. Лемма 5 о $(5, 5, 5, 4)$-вершине, доказанная ниже, справедлива только для 2-граневой 4-раскраски (для 2-дистанционной раскраски 4-вершины требуется не менее 5 цветов).

Лемма 1. *В G нет*
(a) $\geqslant 6$-*цепей* [16, 24],
(b) $(1, 4, 5)$-*вершин* [16, 24],
(c) $(2, 3, 4)$-*вершин* [24] (*рис.* 1).

Лемма 2 [27]**.** *В G нет* $(3, 3, 3)$-*вершин* (*рис.* 2).

Лемма 3 [28]**.** *В G нет следующих пар вершин:*
(a) $(332 - 224)$,
(b) $(422 - 224)$,
(c) $(331 - 134)$,

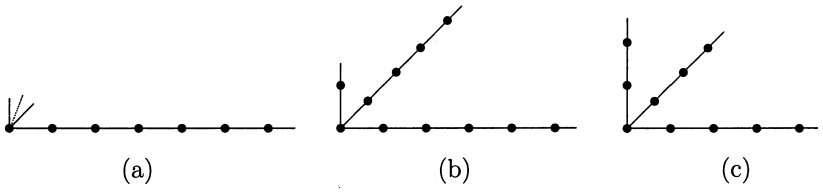

Рис. 1. Конфигурации в лемме 1.

Рис. 2. Конфигурации в лемме 2.

(d) $(421-134)$,
(e) $(512-224)$,
(f) $(420-045)$,
(g) $(330-045)$ (*рис.* 3).

Лемма 4 [28]. *В G нет следующих троек вершин:*
(a) $(550-041-133)$,
(b) $(431-141-133)$,
(c) $(422-241-133)$,
(d) $(550-050-055)$ (*рис.* 4).

Назовем $(5,5,5,4)$-*вершиной* вершину степени 4, инцидентную трем 5-цепям и еще одной $\geqslant 4$-цепи.

Лемма 5. *В G нет* $(5,5,5,4)$-*вершин.*

Доказательство. Пусть u — $(5,5,5,4)$-вершина, инцидентная цепям $uu_1u_2u_3u_4$, $uu'_1u'_2u'_3u'_4u'_5$, $uu''_1u''_2u''_3u''_4u''_5$ и $uu'''_1u'''_2u'''_3u'''_4u'''_5$ (рис. 5). Рассмотрим 2-граневую раскраску графа $G-u$ и обесцветим вершины

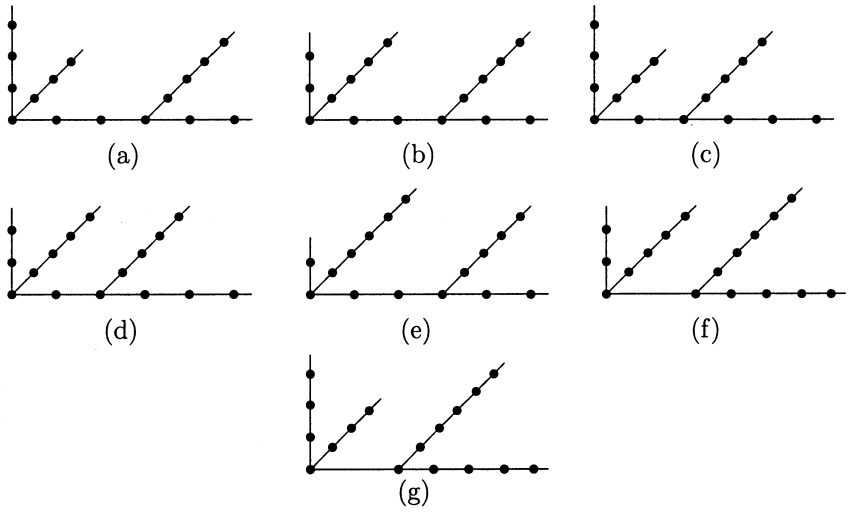

Рис. 3. Конфигурации в лемме 3.

u_1, u_2, u_3, u_1', u_2', u_3', u_4', u_1'', u_2'', u_3'', u_4'', u_1''', u_2''', u_3''', u_4''', а затем продолжим раскраску на u и обесцвеченные вершины. Отметим, что на вершинах u_3, u_4', u_4'', u_4''' имеется по два допустимых цвета, на вершинах u_2, u_3', u_3'', u_3''' — по три допустимых цвета, а на всех остальных обесцвеченных вершинах допустимы все четыре цвета.

Далее через $\varphi(v)$ будем обозначать цвет вершины v, а через $L(v)$ — множество цветов, допустимых на вершине v, в частичной 2-граневой раскраске φ графа G.

Положим $\varphi(u_3') \notin L(u_4')$, $\varphi(u_3'') \notin L(u_4'')$ и $\varphi(u_3''') \notin L(u_4''')$. Тогда вершины u_4', u_2', u_4'', u_2'', u_4''' и u_2''' можно покрасить в последнюю очередь в указанном порядке, а на вершинах u_1', u_1'' и u_1''' остается по три допустимых цвета.

Поскольку любые две тройки цветов (из четырех возможных) имеют два общих цвета, а вершины u_1' и u_1''' (а также u_1 и u_1'') не лежат в границе одной и той же грани на расстоянии меньшем 2 ввиду

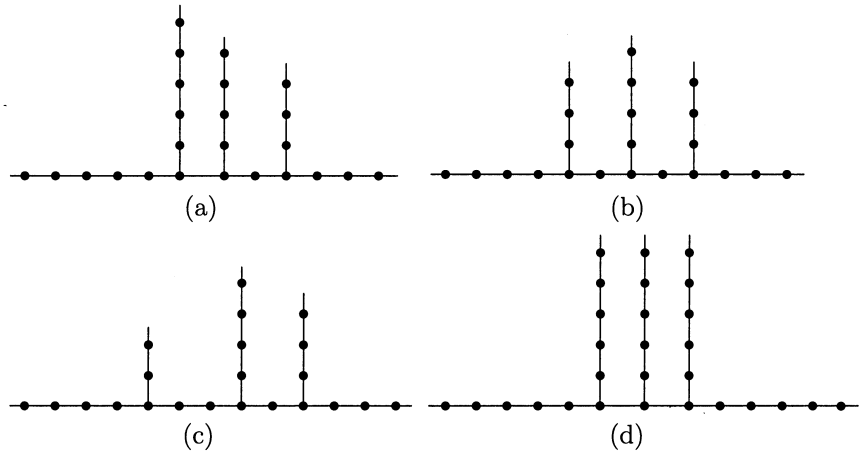

Рис. 4. Конфигурации в лемме 4.

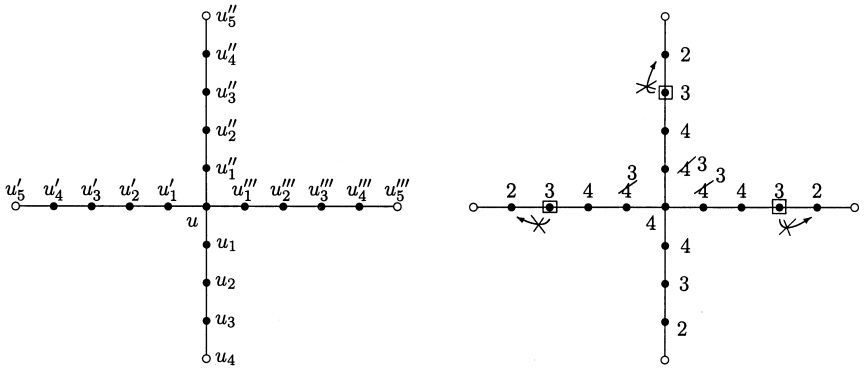

Рис. 5. Конфигурация в лемме 5.

ограничения на обхват графа, то положим $\varphi(u_1') = \varphi(u_1''')$, а затем $\varphi(u_1) = \varphi(u_1'')$. Теперь покрасим вершины u_3, u_2 и u в этом порядке.

2.2. Перераспределение зарядов. Используем следующие правила перераспределения зарядов:

R1. Каждая 2-вершина получает заряд 1 от каждого из концов инцидентной ей k-цепи.

R2. Каждая (5,5,0)-вершина получает заряд 2 от смежной $\geqslant$ 3-вершины.

R3. Каждая (5,4,0)-вершина получает заряд 1 от смежной $\geqslant$ 3-вершины.

R4. Каждая (4,4,1)-вершина и (5,3,1)-вершина получает заряд 1 от другого конца инцидентной ей 1-цепи.

R5. Каждая (5,2,2)-вершина получает заряд $\frac{1}{2}$ от другого конца каждой инцидентной ей 2-цепи.

Заметим, что каждая 3-вершина отдает заряд k вдоль каждой инцидентной k-цепи по правилу R1, а правила R2–R5 корректны благодаря лемме 3(b, c, g).

Проверим, что $\mu^*(v) \geqslant 0$ для каждой $v \in V(G)$, что противоречит (2) и завершает наше доказательство.

Если $d(v) = 2$, то $\mu^*(v) = -2 + 2 = 0$ по R1.

Пусть $d(v) = 3$. Напомним, что $\mu(v) = 8$. Заметим, что после применения правила R1 заряд каждой (5,5,0)-вершины становится равным -2, каждая из вершин (5,4,0), (5,3,1), (4,4,1) и (5,2,2) имеет заряд -1, а заряды всех остальных 3-вершин неотрицательны благодаря леммам 1 и 2.

Очевидно, все вышеперечисленные вершины после применения правил R2–R5 имеют заряд равный $\mu^*(v) = 0$. Остается проверить, что заряды всех остальных 3-вершин также неотрицательны.

Если v инцидентна двум 0-цепям, то $\mu^*(v) \geqslant 8 - 2 \times 2 - 4 = 8 - 2 - 1 - 5 = 0$ по R1–R3 и лемме 4(d).

Пусть v инцидентна одной 0-цепи и одной 1-цепи. Теперь v может отдавать заряд не более 2 своей смежной 3-вершине по правилам R2,

R3. Если v участвует в R2, то $\mu^*(v) \geqslant 8 - 2 - 6 = 0$ по лемме 4(a) и правилам R1, R4. Если же v не участвует в R2, т. е. вдоль 0-цепи от v уходит не более 1, то $\mu^*(v) \geqslant 8 - 1 - 5 - 2 = 0$ согласно R1, R3, R4 и R5.

Пусть v инцидентна одной 0-цепи, 2-цепи и не инцидентна 1-цепи; тогда $\mu^*(v) \geqslant 8 - 7\frac{1}{2} > 0$ по лемме 3(f) и правилам R1, R2, R3 и R5.

Пусть теперь v инцидентна двум 1-цепям, но не инцидентна 0-цепи; тогда v либо дважды отдает заряд 1 по R4 и инцидентна $\leqslant$ 4-цепи, либо v инцидентна 5-цепи и тогда участвует в правиле R4 не более одного раза по лемме 4(b). Отсюда следует, что $\mu^*(v) \geqslant 0$.

Предположим, что v инцидентна одной 1-цепи, 2-цепи и не инцидентна 0-цепи. Теперь v либо участвует и в R4, и в R5 и инцидентна $\leqslant$ 3-цепи, либо v инцидентна 4-цепи и участвует только в одном из правил R4 и R5 благодаря лемме 4(c), или же она инцидентна 5-цепи и не участвует в правилах R4, R5 по лемме 3(d, e). Отсюда $\mu^*(v) \geqslant 0$.

Пусть теперь v инцидентна двум 2-цепям и не инцидентна ни 0-цепи, ни 1-цепи. Если при этом v инцидентна 4-цепи, то она не участвует в R5 благодаря лемме 3(b), значит, $\mu^*(v) \geqslant 8 - 2 - 2 - 4 = 0$ по R1. Иначе $\mu^*(v) \geqslant 8 - 2 - 2 - 3 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$ по R1 и R5.

Остается предположить, что v инцидентна 3-цепи. В этом случае две другие инцидентные v цепи вместе уносят от v не более 5 единиц заряда. Действительно, v не может ни одновременно участвовать в R2 и быть инцидентной $\geqslant$ 4-цепи, ни участвовать в R3 или R2 и быть инцидентной 5-цепи согласно лемме 3(g). Точно так же v не может отдавать заряд 1 по R4 и быть инцидентной 4- или 5-цепи благодаря лемме 3(c). Наконец, v не может участвовать в R5 и при этом быть инцидентной другой $\geqslant$ 3-цепи по лемме 3(a).

Если $d(v) = 4$, то $\mu(v) = 18$ и по правилам R1–R5 вершина v отдает не более $3 \times 5 + 3 = 2 \times 5 + 2 \times 4$, поскольку по лемме 5 вершина v не может иметь на инцидентных ей цепях более 18 вершин степени 2, а вдоль 3-цепи уходит не более трех единиц заряда, откуда $\mu^*(v) \geqslant 0$.

Итак, после применения правил R1–R5 заряды всех 3- и 4-вершин

неотрицательны. Остается заметить, что каждая $\geqslant 5$-вершина v имеет $\mu^*(v) \geqslant 10d(v) - 22 - 5d(v) = 5d(v) - 22 > 0$, поскольку v отдает заряд не более 5 вдоль каждого инцидентного ребра.

Тем самым $\mu^*(v) \geqslant 0$ для каждой $v \in V$, что противоречит (2) и завершает доказательство теоремы 1.

Автор выражает благодарность О. В. Бородину за тщательную проверку доказательства и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ore O., Plummer M. D.* Cyclic coloration of plane graphs. 1969 Recent Progress in Combinatorics (Proc. Third Waterloo Conf. on Combinatorics, 1968). New York: Acad. Press, 1969. P. 287–293.
2. *Appel K., Haken W.* Every planar map is four colorable // J. Recreational Math. 1976/77. V. 9, N 3. P. 161–169.
3. *Бородин О. В.* Решение задач Рингеля о вершинно-граневой раскраске плоских графов и о раскраске 1-планарных графов // Дискрет. анализ. 1984. № 41. С. 12–26.
4. *Borodin O. V.* New proof of Six Color Theorem // J. Graph Theory. 1995. V. 19, P. 507–521.
5. *Borodin O. V., Sanders D., Zhao Y.* On cyclic colorings and their generalizations // Discrete Math. 1999. V. 203. P. 23–40.
6. *Kràl D., Madaras T., Škrekovski R.* Cyclic, diagonal and facial colorings // Eur. J. Comb. 2005. V. 26, N 3–4. P. 473–490.
7. *Montassier M., Raspaud A.* A note on 2-facial coloring of plane graphs // Inf. Process. Lett. 2006. V. 98, N 6. P. 235–241.
8. *Wegner G.* Graphs with given diameter and a coloring problem. Technical Report, University of Dortmund, Germany. 1977.
9. *Jensen T., Toft B.* Graph coloring problems. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1995. (Wiley-Interscience Series in Discrete Math. and Optimization.)
10. *Agnarsson G., Halldorsson M. M.* Coloring powers of planar graphs // Proc. SODA'00, SIAM press. 2000. P. 654–662.
11. *Agnarsson G., Halldorsson M. M.* Coloring powers of planar graphs // SIAM J. Discrete Math. 2003. V. 16, N 4. P. 651–662.
12. *Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-Ден-Хойвел Я.* Строение плоских триангуляций в терминах пучков и звезд // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 2. С. 15–39.
13. *Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-Ден-Хойвел Я.* Минимальная степень и хроматическое число квадрата плоского графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 4. С. 9–33.
14. *Molloy M., Salavatipour M. R.* Frequency channel assignment on planar networks // Mohring, R. H., Raman, R. (Eds.) Berlin: Springer-Verl., 2002. P. 736–747. (Lect. Notes Comput. Sci., V. 2461.)

15. *Molloy M., Salavatipour M. R.* A bound on the chromatic number of the square of a planar graph // J. Comb. Theory Ser. B. 2005. V. 94. P. 189–213.

16. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* 2-Дистанционная раскраска разреженных плоских графов // Сибирск. электрон. мат. изв. 2004. Т. 1. С. 76–90.

17. *Бородин О. В., Глебов А. Н., Иванова А. О., Неустроева Т. К., Ташкинов В. А.* Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta+1)$-раскрашиваемости плоских графов // Сибирск. электрон. мат. изв. 2004. Т. 1. С. 129–141.

18. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta+1)$-раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2005. Т. 12, № 3. С. 32–47.

19. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* Достаточные условия минимальной 2-дистанционной раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6 // Сибирск. электрон. мат. изв. 2006. Т. 3. С. 441–450.

20. *Dvořák Z., Kràl D., Nejedlý P., Škrekovski R.* Coloring squares of planar graphs with girth six // Eur. J. Comb. 2008. V. 29, N 4. P. 838–849.

21. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* 2-distance $(\Delta+2)$-coloring of planar graphs with girth six and $\Delta \geqslant 18$ // Discrete Math. 2009. V. 309. P. 6496–6502.

22. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* List 2-distance $(\Delta+2)$-coloring of planar graphs with girth six // Eur. J. Comb. 2009. V. 30. P. 1257–1262.

23. *Иванова А. О.* Предписанная 2-дистанционная $(\Delta+1)$-раскраска плоских графов с обхватом не менее 7 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 5. С. 22–36.

24. *Dvořák Z., Škrekovski R., Tancer M.* List-coloring squares of sparse subcubic graphs // SIAM J. Discrete Math. 2008. V. 22, N 1. P. 139–159.

25. *Иванова А. О., Соловьева А. С.* 2-Дистанционная $(\Delta+2)$-раскраска разреженных плоских графов с $\Delta=3$ // Мат. заметки ЯГУ. 2009. Т. 16, вып. 2. С. 32–41.

26. *Havet F.* Choosability of the square of planar subcubic graphs with large girth // Discrete Math. 2009. V. 309. P. 3353–3563.

27. *Бородин О. В., Иванова А. О.* 2-Дистанционная 4-раскраска плоских субкубических графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 2. С. 18–28.

28. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* 2-Distance 4-colorability of planar subcubic graphs with girth at least 22 // Discuss. Math. Graph Theory, accepted.

г. Якутск *24 мая 2011 г.*

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*)

А. И. Кожанов

Связь между нелокальными краевыми задачами для дифференциальных уравнений и обратными коэффициентными задачами хорошо известна — примеры можно найти в монографии [1], в статьях [2, 3] и в ряде других работ.

Изучаемую в настоящей работе нелокальную задачу можно представить как многомерное обобщение некоторых нелокальных краевых задач с граничным условием А. А. Самарского [4], ранее достаточно хорошо изученных в одномерном случае [5–11].

Обратная задача, по сути порожденная изучаемой нелокальной задачей, будет линейной обратной задачей с неизвестным внешним воздействием, определяющимся временной переменной. Подобные обратные задачи ранее изучались, но при иных условиях переопределения (см. [12–16]).

1. Постановка задач

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00422а) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт № 16.740.11.0127).

$\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0,T)$ — боковая граница Q. Далее, пусть $c(x,t)$, $K(x,y,t)$, $K_0(x)$, $f(x,t)$ и $h(x,t)$ суть заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$ функции.

Нелокальная краевая задача. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = \int\limits_{\Gamma} K(x,y,t)u(y,t)\,ds_y, \quad (x,t) \in S \tag{3}$$

($\nu_x = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ — вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке $x \in \Gamma$).

Обратная задача. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{4}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условия (2), *а также условий*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = 0, \quad (x,t) \in S, \tag{5}$$

$$\int\limits_{\Gamma} K_0(x)u(x,t)\,ds_x = 0, \quad t \in (0,T). \tag{6}$$

Уточним, что в рассматриваемой обратной задаче условия (2) и (5) представляют собой условия прямой задачи — именно, обычной второй начально-краевой задачи, условие же (6) есть условие переопределения интегрального граничного вида. Ранее обратные задачи с подобным условием переопределения не изучались.

2. Разрешимость нелокальной краевой задачи

Обозначим через V_1 множество

$$V_1 = \big\{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^{2,1}(Q),\ v_t(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^2(\Omega)\big)\big\}.$$

Очевидно, что оно представляет собой банахово пространство с нормой

$$\|v\|_{V_1} = \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v_t\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}.$$

Далее, пусть $K_1(x,y,t)$ — функция такая, что

$$\frac{\partial K_1(x,y,t)}{\partial \nu_x} = K(x,y,t) \quad \text{при } (x,t) \in S.$$

Определим оператор B_λ, $\lambda \in [0,1]$:

$$(B_\lambda v)(x,t) = v(x,t) - \lambda \int\limits_\Gamma K_1(x,y,t) v(y,t)\, ds_y.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x,t) \geqslant c_0 > 0, \quad c_t(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при } (x,t) \in \overline{Q}; \tag{7}$$

$$K_1(x,y,t) \in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0,T]); \tag{8}$$

для всех $\lambda \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$ оператор B_λ непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$ и для любой функции $v(x)$ из $L_2(\Gamma)$ равномерно по $\lambda \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$ выполняются неравенства

$$k_1 \|v\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \|B_\lambda v\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant k_2 \|v\|_{L_2(\Gamma)}, \quad 0 < k_1 < k_2 < +\infty; \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \nu_i \leqslant -m_0 < 0 \quad \text{при } x \in \Gamma. \tag{10}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$ нелокальная задача (1)–(3) имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty\big(0,T; W_2^2(\Omega)\big)$, $u_t(x,t) \in L_2(S)$.

Доказательство. Воспользуемся методами регуляризации и продолжения по параметру.

Пусть ε — положительное число. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t - \Delta u + c(x,t)u - \varepsilon \Delta u_t = f(x,t) \tag{1_ε}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3). Покажем, что данная задача при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ разрешима в пространстве V_1. Воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим еще одну вспомогательную задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1_ε) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условие*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = \lambda \int\limits_{\Gamma} K(x,y,t)u(y,t)\,ds_y, \quad (x,t) \in S. \tag{3_λ}$$

Как обычно делается при применении метода продолжения по параметру, обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача (1_ε), (2), (3_λ) разрешима в пространстве V_1 при фиксированном ε для любой функции $f(x,t)$ из $L_2(Q)$. Если окажется, что это множество непусто, открыто и замкнуто на отрезке $[0,1]$, то оно будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$ (см. [17]).

Тот факт, что Λ непусто, следует из принадлежности ему числа 0 (см. [1,18]). Далее, открытость и замкнутость Λ устанавливается с помощью равномерной по λ априорной оценки

$$\|u\|_{V_1} \leqslant M_0 \tag{11}$$

всевозможных решений краевых задач (1_ε), (2), (3_λ). Покажем ее наличие.

Рассмотрим интегральное тождество

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (u_\tau - \Delta u + cu - \varepsilon \Delta u_\tau) \left(\mu \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i \tau} + \mu u_\tau - \Delta u_\tau \right) dx d\tau$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f \left(\mu \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i \tau} + \mu u_\tau - \Delta u_\tau \right) dx d\tau,$$

являющееся следствием уравнения (1_ε); в этом тождестве μ — положительное число, величина которого будет уточнена ниже. Интегрируя по частям, нетрудно данное тождество преобразовать к виду

$$-\frac{\mu}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \left(\sum_{i=1}^n x_i \nu_i \right) u_\tau^2(x,\tau)\, ds_x d\tau + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega [\Delta u(x,t)]^2\, dx$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega [\mu + c(x,t)] u_{x_i}^2(x,t)\, dx + \frac{\mu}{2} \int\limits_\Omega c(x,t) u^2(x,t)\, dx$$
$$+ \frac{\mu}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_\tau^2\, dx d\tau + (1+\varepsilon\mu) \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{x_i \tau}^2\, dx d\tau - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega c_\tau u_{x_i}^2\, dx d\tau$$
$$- \frac{\mu}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega c_\tau u^2\, dx d\tau + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta u_\tau)^2\, dx d\tau$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f \left(\mu \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i \tau} + \mu u_\tau - \Delta u_\tau \right) dx d\tau$$
$$+ \mu \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i \tau} \right) \Delta u\, dx d\tau - \mu \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i \tau} \right) cu\, dx d\tau$$
$$- \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega c_{x_i} u_{x_i \tau} u\, dx d\tau + \varepsilon\mu \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i \tau} \right) \Delta u_\tau\, dx d\tau$$
$$- \lambda\mu \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma u_\tau(x,\tau) \left(\int\limits_\Gamma K(x,y,\tau) u(y,\tau)\, ds_y \right) ds_x d\tau$$

$$- \lambda(1+\varepsilon\mu)\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma u_\tau(x,\tau)\Big(\int\limits_\Gamma K(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)\,ds_y\Big)\,ds_x d\tau$$

$$- \lambda(1+\varepsilon\mu)\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma u_\tau(x,\tau)\Big(\int\limits_\Gamma K_\tau(x,y,\tau)u(y,\tau)\,ds_y\Big)\,ds_x d\tau$$

$$- \lambda\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma c(x,\tau)u(x,\tau)\Big(\int\limits_\Gamma K(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)\,ds_y\Big)\,ds_x d\tau$$

$$- \lambda\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma c(x,\tau)u(x,\tau)\Big(\int\limits_\Gamma K_\tau(x,y,\tau)u(y,\tau)\,ds_y\Big)\,ds_x d\tau. \quad (12)$$

Следствием условий (7) и (8), а также неравенств Юнга и Гёльдера является неравенство

$$\frac{\mu m_0}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma u_\tau^2(x,\tau)\,ds_x d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [\Delta u(x,t)]^2\,dx + \frac{\mu+c_0}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx$$

$$+ \frac{\mu c_0}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx + \frac{\mu}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2\,dxd\tau + \sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i\tau}^2\,dxd\tau$$

$$+ \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (\Delta u_\tau)^2\,dxd\tau \leqslant \delta\left[\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i\tau}^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2\,dxd\tau\right.$$

$$\left. + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (\Delta u_\tau)^2\,dxd\tau\right] + \varepsilon\mu^2 C_1\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i\tau}^2\,dxd\tau$$

$$+ C_2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega [u^2+(\Delta u)^2]\,dxd\tau + (C_3+C_4)\int\limits_Q f^2\,dxd\tau$$

$$+ [\delta + (1+\varepsilon\mu)N_1]\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma u_\tau^2(x,\tau)\,ds_x d\tau + N_2\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma u^2(x,\tau)\,ds_x d\tau,$$

в котором δ — произвольное положительное число, число C_1 определяется числом δ и областью Q, число C_2 определяется числом δ, об-

ластью Q, функцией $c(x,t)$ и числом μ, число C_3 определяется числом δ, областью Q и числом μ, число C_4 определяется числами δ и ε, число N_1 определяется числом a_0, число N_2 определяется числами δ, μ и a_0, функцией $c(x,t)$, а также областью Q. Зафиксируем μ так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\mu m_0}{2} = 2N_1. \tag{13}$$

Заметим далее следующее. Без ограничения общности можно считать, что для ε выполняется неравенство $\varepsilon < \varepsilon_0$ с произвольным фиксированным ε_0. Указанное ε_0 выберем изначально таким, чтобы выполнялось

$$\max(\varepsilon_0 \mu^2 C_1, \varepsilon_0 \mu N_1) < 1 \tag{14}$$

(с выбранным ранее μ). Считая теперь ε меньшим ε_0, выбираем далее δ малым и, фиксируя, получаем, что при выполнении (13) и (14) следствием (12) будет неравенство

$$\int_0^t \int_\Gamma u_\tau^2(x,\tau)\, ds_x d\tau + \int_\Omega \left\{ [\Delta u(x,t)]^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t) + u^2(x,t) \right\} dx$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega u_{x_i\tau}^2\, dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega (\Delta u_\tau)^2\, dx d\tau$$
$$\leqslant N_3 \left\{ \int_0^t \int_\Omega [(\Delta u)^2 + u^2]\, dx d\tau + \int_0^t \int_\Gamma u^2(x,\tau)\, ds_x d\tau \right\} + N_4 \int_Q f^2\, dx d\tau, \tag{15}$$

в котором N_3 определяется функцией $c(x,t)$, числом a_0, а также областью Q, а число N_4 определяется лишь параметром ε. Используя далее представление

$$u(x,\tau) = \int_0^\tau u_\xi(x,\xi)\, d\xi$$

и применяя лемму Гронуолла, из (15) получаем, что для всевозможных решений краевой задачи (1_ε), (2), (3_λ) действительно выполняется равномерная по λ априорная оценка (11).

Покажем, что из (11) следует замкнутость множества Λ. Пусть $\{\lambda_m\}$ — последовательность чисел из Λ такая, что $\lambda_m \to \lambda_0$ при $m \to \infty$, $\{u_m(x,t)\}$ — последовательность соответствующих решений краевых задач (1_ε), (2), (3_{λ_m}). Положим $w_{mk}(x,t) = u_m(x,t) - u_k(x,t)$. Имеют место равенства

$$w_{mkt} - \Delta w_{mk} + c(x,t)w_{mk} - \varepsilon\Delta w_{mkt} = 0, \quad (x,t) \in Q,$$

$$w_{mk}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial w_{mk}}{\partial \nu_x}(x,t) = \lambda_m \int\limits_\Gamma K(x,y,t)w_{mk}(y,t)\,ds_y + (\lambda_m - \lambda_k)\int\limits_\Gamma K(x,y,t)u_k(y,t)\,ds_y, \quad (x,t) \in S.$$

Повторяя теперь для семейства функций $\{w_{mk}(x,t)\}$ доказательство оценки (11) и учитывая, что имеет место равномерная по m оценка в пространстве V_1 и в пространстве $L_2(S)$ для семейства $\{u_m(x,t)\}$, получаем, что выполняется неравенство

$$\|w_{mk}\|_{V_1} \leqslant M_1|\lambda_m - \lambda_k|$$

с постоянной M_1, определяющейся лишь функциями $c(x,t)$, числом a_0, областью Q и числом ε. Из этого неравенства следует, что семейство $\{u_m(x,t)\}$ фундаментально в пространстве V_1. Поскольку V_1 банахово, из фундаментальности следует существование функции $u(x,t)$ такой, что $u_m(x,t) \to u(x,t)$ в V_1. Очевидно, что $u(x,t)$ является решением краевой задачи (1_ε), (2), (3_{λ_0}). Это и означает, что λ_0 принадлежит Λ и, далее, — что множество Λ замкнуто.

Покажем теперь, что оценка (11) дает и открытость множества Λ.

Пусть λ_0 — точка множества Λ, $\lambda = \lambda_0 + \widetilde{\lambda}$. Множество Λ будет открытым, если λ при малых $|\widetilde{\lambda}|$ также будет принадлежать Λ. Покажем, что это действительно так.

Пусть $v(x,t)$ — функция из пространства V_1. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением*

уравнения (1_ε) *и такую, что для нее выполняется условие* (2), *а также условие*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = \lambda_0 \int\limits_\Gamma K(x,y,t)u(y,t)\,ds_y + \widetilde{\lambda} \int\limits_\Gamma K(x,y,t)v(y,t)\,ds_y, \quad (x,t) \in S. \tag{$3_{\lambda,v}$}$$

Определим функцию $\psi(x,t)$ как решение уравнения

$$\psi(x,t) = \lambda_0 \int\limits_\Gamma K_1(x,y,t)\psi(y,t)\,ds_y + \widetilde{\lambda} \int\limits_\Gamma K_1(x,y,t)v(y,t)\,ds_y. \tag{16}$$

Вследствие условия (9) и принадлежности функции $v(x,t)$ пространству V_1 функция $\psi(x,t)$ определена корректно; более того, для функции $\psi(x,t)$ будут выполняться включения $\psi(x,t) \in L_2(Q)$, $\psi_t(x,t) \in L_2(Q)$, $\Delta\psi(x,t) \in L_2(Q)$ и $\Delta\psi_t(x,t) \in L_2(Q)$. В краевой задаче (1_ε), (2), $(3_{\lambda,v})$ перейдем от функции $u(x,t)$ к $w(x,t)$, положив $w(x,t) = u(x,t) - \psi(x,t)$. Очевидно, что для функции $w(x,t)$ выполняются условия (2) и (3_{λ_0}). Далее, для $w(x,t)$ выполняется уравнение

$$w_t - \Delta w + cw - \varepsilon\Delta w_t = f - \psi_t + \Delta v - c\psi + \varepsilon\Delta\psi_t. \tag{$1'_\varepsilon$}$$

Поскольку в этом уравнении правая часть принадлежит пространству $L_2(Q)$, согласно определению множества Λ краевая задача $(1'_\varepsilon)$, (2), (3_{λ_0}) будет разрешима в пространстве V_1. Разрешимость этой задачи означает, что она порождает оператор Φ, переводящий пространство V_1 в себя: $\Phi(v) = u$. Используя технику доказательства оценки (11), нетрудно установить, что для любых двух функций $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ из пространства V_1 выполняется неравенство

$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_{V_1} \leqslant M_2|\widetilde{\lambda}|\|v_1 - v_2\|_{V_1}$$

с постоянной M_2, определяющейся лишь функцией $c(x,t)$, областью Ω и числами a_0, a_1 и ε. Это неравенство означает, что при выполнении условия $M_2|\widetilde{\lambda}| < 1$ оператор Φ будет сжимающим. Но тогда этот оператор будет иметь в пространстве V_1 неподвижную точку. Эта неподвижная точка $u(x,t)$ является решением краевой задачи (1_ε), (2),

(3_λ), принадлежащим пространству V_1. А это и означает, что число λ принадлежит множеству Λ, и тем самым — что множество Λ открыто.

Итак, множество Λ непусто, открыто и замкнуто. Но тогда краевая задача (1_ε), (2), (3) будет разрешима в пространстве V_1 при всех фиксированных числах ε, для которых выполняется неравенство (14). Другими словами, при $\varepsilon < \varepsilon_0$ определено семейство функций $\{u^\varepsilon(x,t)\}$, являющихся решениями этой задачи. Покажем, что при выполнении дополнительного условия

$$f_t(x,t) \in L_2(Q)$$

для этого семейства будет иметь место оценка (11) с постоянной в правой части, не зависящей от ε.

Вновь рассмотрим равенство (12) (при $\lambda = 1$), но теперь в слагаемом, содержащем произведение $f \cdot \Delta u_\tau$, выполним интегрирование по частям по переменной τ. Используя далее условия (7) и (8), неравенства Гёльдера и Юнга, подбирая число μ с помощью равенства (13), считая, что число ε_0 настолько мало, что выполняется неравенство (14) и, наконец, применяя лемму Гронуолла, получаем, что для решений краевой задачи (1_ε), (2), (3) имеет место оценка (11), но теперь постоянная в правой части не зависит от ε.

Полученной оценки уже вполне достаточно для организации предельного перехода. Действительно, выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}$ такую, что $\varepsilon_m > 0$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Для последовательности $\{u_m(x,t)\}$ решений краевой задачи (1_{ε_m}), (2), (3) выполняется равномерная по m априоная оценка (11). Из этой оценки, свойства рефлексивности гильбертова пространства и теорем вложения [19, 20] следует, что существуют последовательность $\{m_k\}$ натуральных чисел и функция $u(x,t)$ из $W_2^{2,1}(Q)$ такие, что $u_{m_k}(x,t) \to u(x,t)$ слабо в $W^{2,1}(Q)$, $\varepsilon_{m_k}\Delta u_{m_k t} \to 0$ слабо в $L_2(Q)$, $u_{m_k}(x,t) \to u(x,t)$, $u_{m_k t}(x,t) \to u_t(x,t)$ слабо в $L_2(S)$. Из этих сходимостей и вытекает, что предельная функция $u(x,t)$ будет решением нелокальной краевой задачи (1)–(4), принадлежащим требуемому классу.

Теорема доказана.

3. Разрешимость обратной задачи

Выполним некоторые предварительные построения.

Положим

$$\varphi(t) = \int\limits_{\Gamma} K_0(x) f(x,t)\, ds_x, \quad h_0(t) = \int\limits_{\Gamma} K_0(x) h(x,t)\, ds_x.$$

Пусть выполняется условие

$$h_0(t) \neq 0 \quad \text{при } t \in [0,T]. \tag{17}$$

Умножим уравнение (4) на функцию $K(x)$, проинтегрируем по Γ и из полученного равенства вычислим функцию $q(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{h_0(t)} \left\{ \int\limits_{\Gamma} K_0(x)[c(x,t)u(x,t) - \Delta u(x,t)]\, ds_x - \varphi(t) \right\}. \tag{18}$$

Введем еще обозначения:

$$h_1(x,t) = \frac{h(x,t)}{h_0(t)}, \quad f_1(x,t) = f(x,t) - h_1(x,t)\varphi(t).$$

Рассмотрим уравнение, полученное из (4) подстановкой в него вычисленной функции $q(t)$:

$$u_t - \Delta u + c(x,t)u = f_1(x,t) + h_1(x,t) \int\limits_{\Gamma} K_0(y)[c(y,t)u(y,t) - \Delta u(y,t)]\, ds_y. \tag{4$'$}$$

Применим к этому уравнению оператор $\Delta - c(x,t)$. Получим уравнение

$$v_t - \Delta v + c(x,t)v + c_t(x,t)u = g(x,t) - h_2(x,t) \int\limits_{\Gamma} K_0(y) v(y,t)\, ds_y, \tag{4$''$}$$

в котором $v(x,t)$, $h_2(x,t)$ и $g(x,t)$ суть функции

$$v(x,t) = \Delta u(x,t) - c(x,t)u(x,t),$$

$$g(x,t) = \Delta f_1(x,t) - c(x,t) f_1(x,t), \quad h_2(x,t) = \Delta h_1(x,t) - c(x,t) h_1(x,t).$$

Далее, пусть для простоты выполняется условие

$$\frac{\partial f_1(x,t)}{\partial \nu_x} = 0 \quad \text{при } (x,t) \in S. \tag{19}$$

Обозначим

$$N(x,y,t) = \frac{\partial h_1(x,t)}{\partial \nu_x} K_0(y), \quad x \in \Gamma,\ y \in \Gamma,\ t \in (0,T).$$

Тогда из уравнения $(4')$ следует, что выполняется условие

$$\left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu_x}\right|_S = \int\limits_\Gamma N(x,y,t) v(y,t)\, ds_y. \tag{20}$$

Рассмотрим задачу: *найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения $(4'')$, в котором функция $u(x,t)$ связана с $v(x,t)$ уравнением*

$$\Delta u - c(x,t)u = v(x,t) \tag{21}$$

и при этом для $v(x,t)$ и $u(x,t)$ выполняются условия (2), (5) *и* (20). Эта задача подобна нелокальной задаче (1)–(3), и исследование ее разрешимости проводится вполне аналогично исследованию разрешимости вышеназванной задачи. Именно, вновь применяются методы регуляризацции и продолжения по параметру с тем лишь исключением, что при фиксированном ε и при $\lambda \in [0,1]$ рассматривается семейство задач

$$v_t - \Delta v + \text{см} - \varepsilon \Delta v_t = g(x,t) - \lambda \left[c_t(x,t)u + h_1(x,t) \int\limits_\Gamma K_0(y) v(y,t)\, ds_y \right],$$

$$v(x,0) = 0,$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu_x} = \lambda \int\limits_\Gamma N(x,y,t) v(y,t)\, ds_y, \quad (x,t) \in S,$$

$$\Delta u - c(x,t)u = v(x,t),$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x} = 0, \quad (x,t) \in S.$$

Разрешимость этих задач при фиксированном ε, далее осуществление предельного перехода и тем самым доказательство разрешимости краевой задачи $(4'')$, (21), (2), (5), (20) проводится с помощью априорных

оценок, получаемых методом доказательства соответствующих оценок теоремы 1. Необходимые условия на функции $c(x,t)$, $K_0(y)$, $h_2(x,t)$ и $g(x,t)$ легко указываются.

Выполним теперь обратные преобразования. Обозначим

$$w(x,t) = u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + c(x,t)u(x,t) - f_1(x,t) \\ - h_1(x,t)\int\limits_{\Gamma} K_0(y)[c(y,t)u(y,t) - \Delta u(y,t)]\,ds_y.$$

Очевидно, что выполняются равенства

$$[\Delta - c(x,t)]w = 0, \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu_x} = 0 \quad \text{при } (x,t) \in S.$$

Поскольку предполагается, что выполняется условие

$$c(x,t) \geqslant c_0 > 0 \quad \text{при } (x,t) \in \overline{Q}$$

теоремы 1, из этих равенств следует, что

$$w(x,t) \equiv 0 \quad \text{при } (x,t) \in Q.$$

Другими словами, для определенной по решению $v(x,t)$ задачи (4″), (21), (2), (5), (20) $u(x,t)$ выполняется уравнение (4′). Определим функцию $q(t)$ равенством (18). Очевидно теперь, что функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (4).

Умножим уравнение (4) на функцию $K_0(x)$ и проинтегрируем по Γ. Учитывая представление (18) функции $q(t)$, получим, что выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\Bigg(\int\limits_{\Gamma} K_0(x)u(x,t)\,ds_x\Bigg) = 0.$$

Из этого равенства и условия (2) следует, что для функции $u(x,t)$ выполняется условие переопределения (6). Другими словами, полностью показано, что функции $u(x,t)$ и $q(t)$, определенные по решению краевой задачи (4″), (21), (2), (5), (20) дают решение обратной задачи (4), (2), (5), (6).

Сформулируем доказанное в точном виде.

Пусть $N_1(x,y,t)$ — функция такая, что

$$\frac{\partial N_1(x,y,t)}{\partial \nu_x} = N(x,y,t) \quad \text{при } (x,t) \in S.$$

Определим оператор B_λ, $\lambda \in [0,1]$:

$$(B_\lambda v)(x,t) = v(x,t) - \lambda \int\limits_\Gamma N_1(x,y,t) v(y,t)\, ds_y.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (17) *и* (19), *функции* $c(x,t)$, $h(x,t)$, $f(x,t)$, $K_0(x)$ *и область* Ω *пусть будут такими, что выполняются условия* (7)– (10) *теоремы 1, и, наконец, пусть выполняются включения* $g(x,t) \in L_2(Q)$, $g_t(x,t) \in L_2(Q)$. *Тогда обратная задача* (4), (2), (5), (6) *имеет решение* $(u(x,t), q(t))$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty\big(0,T; W_2^2(\Omega)\big)$, $u_t(x,t) \in L_2(S)$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Доказательство этой теоремы следует из вышеприведенных рассуждений.

Замечание. На самом деле, функция $u(x,t)$ обладает большей гладкостью — это следует из равенства (21) и из свойств гладкости функции $v(x,t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
2. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
3. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
4. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
5. *Лажетич Н.* О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1072–1077.
6. *Lažetic N.* On classical solutions of mixed boundary problems for one-dimensional parabolic equation of second order // Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. 2000. V. 67. P. 53–75.

7. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 769–774.

8. *Кожанов А. И.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физико-математич. науки. 2004. № 30. С. 63–69.

9. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия. 2008. № 3(62). С. 165–174.

10. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Докл. РАН. 2009. Т. 427, № 6. С. 747–749.

11. *Кожанов А. И.* О разрешимости краевых задач с нелокальным условием Бицадзе — Самарского для линейных гиперболических уравнений // Докл. РАН. 2010. Т. 432, № 6. С. 738–740.

12. *Prillepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 1999.

13. *Прилепко А. И., Ткаченко Д. С.* Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 4. С. 564–572.

14. *Иванчов Н. И.* Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Укр. мат. журн. 1993. Т. 45, № 8. С. 1066–1071.

15. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: VNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; Vol. 10.)

16. *Кожанов А. И.* Задача определения решения и правой части специального вида в параболическом уравнении // Обратные задачи и информационные технологии. Югорский ин-т информационных технологий. 2002. Т. 1, № 3. С. 13–41.

17. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

18. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

19. *Соболев С. Л.* Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

20. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

г. Новосибирск *15 августа 2011 г.*

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*)

Ю. А. Кошелева

Работа посвящена исследованию разрешимости линейных обратных задач нахождения вместе с решением ультрапараболического уравнения неизвестного внешнего воздействия специального вида. Следует отметить, что как линейные, так и нелинейные обратные задачи нахождения вместе с решением неизвестного внешнего воздействия или же неизвестных коэффициентов достаточно хорошо изучены для параболических уравнений (см., например, монографии [1–5] и имеющуюся в них библиографию). В то же время обратные задачи для ультрапараболических уравнений ранее не изучались.

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты, бесконечно дифференцируемой) границей Γ, t — число из интервала $(0,T)$, $0<T<+\infty$, a — число из интервала $(0,A)$, $0<A<+\infty$, Q — цилиндр $\Omega\times(0,T)\times(0,A)$. Далее, пусть $c(x,t,a)$, $f(x,t,a)$, $h(x,t,a)$, $h_k(x,t,a)$, $k=1,\dots,m$, $N(x,t,a)$ суть заданные при $x\in\overline{\Omega}$, $t\in[0,T]$, $a\in[0,A]$ функции, $t_1,t_2,\dots,t_m$ — заданные числа такие, что $0<t_1<\dots<t_m\leqslant T$.

Обратная задача I. *Найти функции* $u(x,t,a)$, $q_1(x,a)$, $\dots$, $q_m(x,a)$,

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00422а).

связанные в цилиндре Q уравнением

$$Lu \equiv u_t + u_a - \Delta u + c(x,t,a)u = f(x,t,a) + \sum_{k=1}^{m} h_k(x,t,a)q_k(x,a) \quad (1)$$

(Δ — *оператор Лапласа по переменным* $x_1, \ldots, x_n$), *при выполнении для функции* $u(x,t,a)$ *условий*

$$u(x,0,a) = 0, \quad x \in \Omega,\ a \in (0,A), \quad (2)$$

$$u(x,t,0) = 0, \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T), \quad (3)$$

$$u(x,t,a)|_{x\in\partial\Omega,\, t\in(0,T),\, a\in(0,A)} = 0, \quad (4)$$

$$u(x,t_k,a) = 0, \quad k = 1,\ldots,m,\ x \in \Omega,\ a \in (0,A). \quad (5)$$

Обратная задача II. *Найти функции* $u(x,t,a)$, $q(x,a)$, *связанные в цилиндре* Q *уравнением*

$$Lu = f(x,t) + h(x,t,a)q(x,a), \quad (1')$$

при выполнении для функции $u(x,t,a)$ *условий* (2)–(4), *а также условия*

$$\int_0^T N(x,t,a)u(x,t,a)\,dt = 0, \quad x \in \Omega,\ a \in (0,A). \quad (6)$$

В обратных задачах I и II условия (2)–(4) суть условия обычной первой начально-краевой задачи для ультрапараболических уравнений, соотношения (5), (6) суть условия переопределения на временных слоях и интегрального переопределения; наличие этих условий обуславливается наличием дополнительных неизвестных функций $q_1(x,a)$, $\ldots$, $q_m(x,a)$ или же $q(x,a)$.

Проведем некоторые формальные (пока) построения, касающиеся вначале обратной задачи I.

Обозначим для краткости через G область $\Omega \times (0, A)$. В уравнении (1) положим последовательно $t = t_1$, $t = t_2$, $\ldots$,$t = t_m$. Получим следующую алгебраическую относительно функций $q_1(x, a)$, $\ldots$, $q_m(x, a)$ систему:

$$\begin{cases} q_1(x,a)h_1(x,t_1,a) + \cdots + q_m(x,a)h_m(x,t_1,a) = u_t(x,t_1,a) - f(x,t_1,a), \\ \vdots \\ q_1(x,a)h_1(x,t_m,a) + \ldots + q_m(x,a)h_m(x,t_m,a) = u_t(x,t_m,a) - f(x,t_m,a). \end{cases}$$

Обозначим через $d(x, a)$ определитель этой системы. Считая выполненным условие

$$|d(x,a)| \geqslant d_0 > 0 \quad \text{при } (x,a) \in \overline{G}, \tag{7}$$

выразим функции $q_k(x, a)$:

$$q_k(x,a) = \alpha_k(x,a) + \sum_{l=1}^{m} \beta_{kl}(x,a) u_l(x,t_l,a), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Подставим найденные представления в уравнение (1):

$$\begin{aligned} u_t + u_a - \Delta u + c(x,t,a)u &= f(x,t,a) \\ &+ \sum_{k=1}^{m} h_k(x,t,a) \left[\sum_{l=1}^{m} \alpha_k(x,a) + \sum_{l=1}^{m} \beta_{kl}(x,a) u_t(x,t_l,a) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} h_k(x,t,a)\alpha_k(x,a) + \sum_{k=1}^{m} h_k(x,t,a) \sum_{l=1}^{m} \beta_{kl}(x,a) u_t(x,t_l,a). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$f_1(x,t,a) = f(x,t,a) + \sum_{k=1}^{m} h_k(x,t,a)\alpha_k(x,a),$$

$$\gamma_l(x,t,a) = \sum_{k=1}^{m} h_k(x,t,a)\beta_{kl}(x,a), \quad l = 1, \ldots, m,$$

с учетом которых уравнение (1) преобразуется к виду

$$u_t + u_a - \Delta u + c(x,t,a)u = f_1(x,t,a) + \sum_{l=1}^{m} \gamma_l(x,t,a) u_l(x,t_l,a). \tag{1''}$$

Уравнение (1″) является так называемым «нагруженным» [6, 7] уравнением; разрешимость его будет исследована с помощью перехода к продифференцированному по t уравнению (см. [8, 9]).

Определим пространство

$$V = \{v(x,t,a) : v(x,t,a) \in L_2(Q),\ v_t(x,t,a) \in L_2(Q),$$
$$v_a(x,t,a) \in L_2(Q), v_{x_i}(x,t,a) \in L_2(Q),$$
$$v_{x_i x_j}(x,t,a) \in L_2(Q),\ i,j = 1,\dots,n\}.$$

Норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_V = \left(\int\limits_Q \left(v^2 + v_t^2 + v_a^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j}^2 \right) dxdtda \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим $v(x,t,a) = u_t(x,t,a)$. Введем еще обозначения:

$$g(x,t,a) = f_{1t}(x,t,a), \quad \varphi(x,a) = f_1(x,0,a),$$
$$\psi_l(x,a) = \gamma_l(x,0,a), \quad \tilde{\gamma}_l(x,t,a) = \gamma_{lt}(x,t,a), \quad l = 1,\dots,m.$$

Для функции $v(x,t,a)$ будут выполняться уравнение

$$v_t + v_a - \Delta v + c(x,t,a)v + c_t(x,t,a)u = g(x,t,a) + \sum_{l=1}^m \tilde{\gamma}_l(x,t,a)v(x,t_l,a),$$

$$u(x,t,a) = \int\limits_0^t v(x,\tau,a)\,d\tau, \tag{8}$$

и условия:

$$v(x,0,a) = \varphi(x,a) + \sum_{l=1}^m \psi_l(x,a)v(x,t_l,a), \quad u(x,0,a) = 0,\ x \in G, \tag{9}$$

$$v(x,t,0) = 0, \quad x \in \Omega,\ t \in [0,T], \tag{10}$$

$$v(x,t,a)|_{x\in\partial\Omega,\, t\in[0,T],\ a\in(0,A)} = 0 \tag{11}$$

(условие (9) выводится, если в (1″) положить $t = 0$). Именно с помощью решения краевой задачи (8)–(11) будет построено решение исходной обратной задачи I.

Краевая задача (8)–(11) является по-прежнему задачей для «нагруженного» уравнения, но при этом она также нелокальна по одной из временных переменных. Ранее подобные нелокальные задачи для «нагруженных» ультрапараболических уравнений не рассматривались, поэтому сформулируем и докажем необходимую для исследования обратной задачи теорему о ее разрешимости.

Положим $b_{l,1} = \max\limits_{(x,a)\in\overline{G}} |\psi_l(x,a)|$, $l = 1,\dots,m$, $b_{0,1} = \max\limits_{l=1,\dots,m} b_l$, $b_{l,2} = \max\limits_{\overline{Q}} |\tilde{\gamma}(x,t,a)|$, $l = 1,\dots,m$, $b_{0,2} = \max\limits_{0\leqslant l\leqslant m} b_{l,2}$.

Для функций $v(x,t,a)$ из пространства V таких, что $v = 0$ при $x \in \partial\Omega$, $t \in [0,T]$, $a \in (0,A)$, выполняются известные неравенства

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \int\limits_0^A v^2\, dxd\tau da \leqslant b_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \int\limits_0^A v_{x_i}^2\, dxd\tau da, \qquad (*)$$

$$\sum_{i,j=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v_{x_i x_j}^2\, dxd\tau da \leqslant k_1 \int\limits_0^t \int\limits_G (\Delta v)^2\, dxd\tau da + k_2 \int\limits_0^t \int\limits_G v^2\, dxd\tau da, \quad (**)$$

числа b_0, k_1, k_2 в этих неравенствах определяются лишь областью Ω.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi(x,a) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G),$$

$$\psi_l(x,a) \in \overset{\circ}{W}{}_\infty^1(G), \quad \tilde{\gamma}_l(x,t,a) \in \overset{\circ}{W}{}_\infty^1(\overline{Q}), \quad l = 1,\dots,m,$$

$$c(x,t,a) \in C^2(\overline{Q}), \quad c(x,t,a) \geqslant c_0 > 0, \quad c_t(x,t,a) \geqslant 0,$$
$$c_{tt}(x,t,a) \leqslant 0 \quad \text{при } (x,t,a) \in \overline{Q},$$

$$\left(b_{0,1}^2 m + \frac{b_{0,2}^2 T}{c_0}\right) m < 1,$$

$$g(x,t,a) \in L_2(Q), \quad g_a(x,t,a) \in L_2(Q).$$

Тогда краевая задача (8)–(11) *имеет решение* $u(x,t,a)$ *такое, что* $u(x,t,a) \in V$, $u_t(x,t,a) \in V$.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Пусть ε — положительное число. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $v(x,t,a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$v_t + v_a - \varepsilon v_{aa} - \Delta v + c(x,t,a)v + c_t(x,t,a)u = g(x,t,a) + \sum_{l=1}^{m} \tilde{\gamma}_l(x,t,a)v(x,t,a) \quad (8_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия (9)–(11), *а также условие*

$$v_a(x,t,A) = 0, \quad x \in \Omega,\ t \in [0,T]. \quad (12)$$

Определим пространство

$$V_1 = \{v(x,t,a) : v(x,t,a) \in L_2(Q),\ v_t(x,t,a) \in L_2(Q),\ v_a(x,t,a) \in L_2(Q),\ v_{aa}(x,t,a) \in L_2(Q),\ v_{x_i}(x,t,a) \in L_2(Q),\ v_{x_ix_j}(x,t,a) \in L_2(Q),\ i,j = 1,\dots,n\};$$

норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_{V_1} = \left(\int\limits_Q \left(v^2 + v_t^2 + v_a^2 + v_{aa}^2 + \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} v_{x_ix_j}^2 \right) dxdtda \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию $v(x,t,a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$v_t + v_a - \varepsilon v_{aa} - \Delta v + c(x,t,a)v = g(x,t,a) + \lambda \left[\sum_{l=1}^{m} \tilde{\gamma}_l(x,t,a)v(x,t_l,a) - c_t(x,t,a)u \right] \quad (8_{\varepsilon,\lambda})$$

и такую, что для нее выполняется условие

$$v(x,0,a) = \varphi(x,a) + \lambda \sum_{l=1}^{m} \psi_l(x,a)v(x,t_l,a), \quad x \in G, \quad (9_\lambda)$$

а также условия (10)–(12).

При $\lambda = 0$ краевая задача ($8_{\varepsilon,0}$), (9_0), (10)–(12) разрешима в пространстве V_1 (см. [10]). Согласно теореме о методе продолжения по параметру [11] для разрешимости всех задач ($8_{\varepsilon,\lambda}$), (9_λ), (10), (11) при фиксированном ε достаточно, чтобы при принадлежности функции $g(x,t,a)$ пространству $L_2(Q)$ имела место равномерная по λ априорная оценка

$$\|v\|_{V_1} \leqslant K.$$

Установим ее наличие. Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_G (v_t + v_a - \varepsilon v_{aa} - \Delta v + cv) v \, dx d\tau da$$
$$= \int_0^t \int_G \left(g + \lambda \left[\sum_{l=1}^m \tilde{\gamma}_l(x,\tau,a) v(x,t_l,a) - c_\tau(x,\tau,a) u \right] \right) v \, dx d\tau da,$$

которое нетрудно интегрированием по частям преобразовать к виду

$$\frac{1}{2} \int_G v^2(x,t,a) \, dx da + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega v^2(x,\tau,A) \, dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_G v_a^2 \, dx d\tau da$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_G v_{x_i}^2 \, dx d\tau da + \int_0^t \int_G cv^2 \, dx d\tau da + \frac{\lambda}{2} \int_G c_t(x,t,a) u^2(x,t,a) \, dx da$$
$$- \frac{\lambda}{2} \int_0^t \int_G c_{\tau\tau} u^2 \, dx d\tau da = \frac{1}{2} \int_G v^2(x,0,a) \, dx da$$
$$+ \int_0^t \int_G gv \, dx d\tau da + \lambda \sum_{i=1}^m \int_0^t \int_G \tilde{\gamma}_l(x,\tau,a) v(x,\tau,a) \, dx d\tau da. \quad (13)$$

Заметим, что вследствие условий теоремы все слагаемые в левой части равенства (13) неотрицательны. Далее, для первого слагаемого

правой части (13) имеет место представление

$$\int\limits_G v^2(x,0,a)\,dxda = \int\limits_G \left[\varphi(x,a) + \lambda \sum_{l=1}^{m} \psi_l(x,a) v(x,t_l,a)\right]^2 dxda.$$

Если обозначить

$$B = \sum_{l=1}^{m} \psi_l(x,a) v(x,t_l,a),$$

воспользоваться далее неравенством Юнга и элементарным числовым неравенством

$$(a_1 + \dots + a_m)^2 \leqslant m\big(a_1^2 + \dots + a_m^2\big),$$

то нетрудно оценить величину $\int\limits_G v^2(x,0,a)\,dxda$:

$$\int\limits_G v^2(x,0,a)\,dxda \leqslant (1+\delta^2) b_{0,1}^2 m \sum_{i=1}^{n} \int\limits_G v^2(x,t_l,a)\,dxda + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \int\limits_G \varphi^2(x,a)\,dxda,$$

где δ — произвольное положительное число.

Для второго слагаемого правой части (13) имеют место неравенства

$$\int\limits_0^t \int\limits_G gv\,dxd\tau da \leqslant \int\limits_0^t \int\limits_G |g||v|\,dxd\tau da \leqslant \frac{\delta_1^2}{2} \int\limits_0^t \int\limits_G v^2\,dxd\tau da + \frac{1}{2\delta_1^2} \int\limits_0^t \int\limits_G g^2\,dxd\tau da,$$

δ_1 здесь вновь есть произвольное положительное число.

Оценим последнее слагаемое правой части (13):

$$\lambda \sum_{l=1}^{m} \int\limits_0^t \int\limits_G \tilde{\gamma}_l(x,\tau,a) v(x,t_l,a) v(x,\tau,a)\,dxd\tau da$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{m} \int_0^t \int_G |\tilde{\gamma}_l(x,\tau,a) v(x,t_l,a)||v(x,\tau,a)|\, dx d\tau da$$

$$\leqslant \frac{\delta_2^2}{2} \int_0^t \int_G v^2\, dx d\tau da + \frac{b_{0,2}^2 T}{2\delta_2^2} \sum_{l=1}^{m} \int_0^t \int_G v^2(x,t_l,a)\, dx da.$$

Суммируя, получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \int_G v^2(x,t,a)\, dx da + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega v^2(x,\tau,A)\, dx\, d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_G v_a^2\, dx d\tau da$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \int_G v_{x_i}^2\, dx d\tau da + c_0 \int_0^t \int_G v^2\, dx d\tau da$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(1+\delta^2) b_{0,1}^2 m \sum_{l=1}^{m} \int_G v^2(x,t_l,a)\, dx da + \frac{b_{0,2}^2 T}{2\delta_2^2} \sum_{l=1}^{m} \int_G v^2(x,t_l,a) dx da$$

$$+ \frac{\delta_1^2}{2} \int_0^t \int_G v^2\, dx d\tau da + \frac{\delta_2^2}{2} \int_0^t \int_G v^2\, dx d\tau da$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \int_G \varphi^2(x,a)\, dx da + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_G g^2\, dx d\tau da.$$

Зафиксируем δ_1 и δ_2: $\delta_1 = \sqrt{\frac{c_0}{2}}$, $\delta_2 = \sqrt{c_0}$. Получим

$$\frac{1}{2} \int_G v^2(x,t,a)\, dx da + \frac{1}{2} \int_0^t \int_G v^2(x,\tau,A)\, dx\, d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_G v_a^2\, dx d\tau da$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \int_G v_{x_i}^2\, dx d\tau da + \frac{c_0}{4} \int_0^t \int_G v^2\, dx d\tau$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left[(1+\delta^2) b_{0,1}^2 m + \frac{b_{0,2}^2 T}{c_0}\right] \sum_{l=1}^{m} \int_G v^2(x,t_l,a)\, dx da$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \int_G \varphi^2(x,a)\, dx da + \frac{1}{c_0} \int_G g^2\, dx d\tau da. \quad (14)$$

Положим

$$\Phi(t) = \int\limits_G v^2(x,t,a)\,dxda.$$

Следствием (14) является неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Phi(t) \leqslant \left[(1+\delta^2)b_{0,1}^2 m + \frac{b_{0,2}^2 T}{c_0}\right] m \max_{0\leqslant t\leqslant T}\Phi(t)$$
$$+\left(1+\frac{1}{\delta^2}\right)\int\limits_G \varphi^2(x,a)\,dxda + \frac{1}{c_0}\int\limits_G g^2\,dxd\tau da.$$

Из этого неравенства и условий теоремы при выборе числа δ малым вытекает, что имеет место первая априорная оценка

$$\int\limits_G v^2(x,t,a)\,dxda \leqslant K_1, \tag{15}$$

в которой $t\in[0,T]$, число K_1 определяется лишь исходными данными задачи.

Вернемся теперь к неравенству (14). Вследствие (15) правая часть в нем конечна. Значит, конечной будет и его левая часть. Получаем, что для решений краевой задачи ($8_{\varepsilon,\lambda}$), (9_λ), (10)–(12) выполняется вторая априорная оценка:

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega v^2(x,\tau,A)\,dxd\tau + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_G v_a^2\,dxd\tau da + \sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_G v_{x_i}^2\,dxd\tau da$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_G v^2\,dxd\tau da \leqslant K_2, \tag{16}$$

в которой $t\in[0,T]$, число K_2 определяется лишь исходными данными задачи.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_G (v_t + v_a - \varepsilon v_{aa} - \Delta v + cv)(-\Delta v)\,dxd\tau da$$
$$= \int\limits_0^t\int\limits_G \left(g + \lambda\left[\sum_{l=1}^m \tilde\gamma_l(x,\tau,a)v(x,t_l,a) - c_\tau(x,\tau,a)u\right]\right)(-\Delta v)\,dxd\tau da,$$

от которого нетрудно перейти к неравенству

$$-\int_0^t\int_G v_\tau \Delta v\,dxd\tau da+\int_0^t\int_G (\Delta v)^2\,dxd\tau da+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega v_{x_i}^2(x,\tau,A)\,dx\,d\tau$$
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega v_{x_ia}^2\,dxd\tau da\leqslant\frac{(m+3)\delta^2}{2}\int_0^t\int_G(\Delta v)^2\,dxd\tau da$$
$$+\frac{1}{2\delta^2}\max_{\overline{Q}}c^2(x,t,\tau)\int_0^t\int_G v^2\,dxd\tau da+\frac{1}{2\delta^2}\int_0^t\int_G g^2\,dxd\tau da$$
$$+\frac{c^2}{2\delta^2}\int_0^t\int_G u^2\,dxd\tau da+\frac{b_{0,2}^2T}{2\delta^2}\sum_{l=1}^m\int_G v^2(x,t_l,a)\,dxda.$$

Выберем δ: $\frac{(m+3)\delta^2}{2}=\frac{1}{2}$. Тогда

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_G v_{x_i}^2(x,t,a)\,dxda-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_G v_{x_i}^2(x,0,a)\,dxda$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_G(\Delta v)^2\,dxd\tau da+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega v_{x_i}^2(x,\tau,A)\,dx\,d\tau$$
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_G v_{x_ia}^2\,dxd\tau da\leqslant\mu_1\int_0^t\int_G v^2\,dxd\tau da+\mu_2\int_0^t\int_G g^2\,dxd\tau da$$
$$+\mu_3\int_0^t\int_G u^2\,dxd\tau da+\mu_4\sum_{l=1}^m\int_0^t\int_G v^2(x,t_l,a)\,dxda\leqslant M.$$

Используя условие (9_λ) для представления функции $v_{x_i}(x,0,a)$, соображения, приведшие к (15), а также неравенство (16), нетрудно получить третью оценку:

$$\sum_{i=1}^n\int_G v_{x_i}^2(x,t,a)\,dxda\leqslant K_3, \tag{17}$$

и далее — четвертую:

$$\int_0^t \int_G (\Delta v)^2 \, dx d\tau da + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega v_{x_i}^2(x,\tau,A) \, dx d\tau$$
$$+ \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_G v_{x_i a}^2 \, dx d\tau da \leqslant K_4, \quad (18)$$

где $t \in [0,T]$, числа K_3, K_4 определяются лишь исходными данными задачи.

Если воспользоваться неравенствами $(*)$ и $(**)$, нетрудно получить пятую априорную оценку:

$$\sum_{i,j=1}^n \int_0^t \int_G v_{x_i x_j}^2 \, dx d\tau da + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_G \int_0^A v_a^2 \, dx d\tau da \leqslant K_5, \quad (19)$$

в которой $t \in [0,T]$, число K_5 определяется лишь исходными данными задачи.

Для получения следующей априорной оценки рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_G (v_t + v_a - \varepsilon v_{aa} - \Delta v + cv) v_\tau \, dx d\tau da$$
$$= \int_0^t \int_G \left(g + \lambda \left[\sum_{l=1}^m \tilde{\gamma}_l(x,\tau,a) v(x,t_l,a) - c_\tau(x,\tau,a) u \right] \right) v_\tau \, dx d\tau da,$$

которое преобразуется к виду

$$\int_0^t \int_G v_\tau^2 \, dx d\tau da + \frac{\varepsilon}{2} \int_G v_a^2(x,t,a) \, dx da = \frac{\varepsilon}{2} \int_G v_a^2(x,0,a) \, dx da$$
$$+ \int_0^t \int_G g v_\tau \, dx d\tau da + \lambda \int_0^t \int_G \sum_{l=1}^m \tilde{\gamma}_l(x,\tau,a) v(x,t_l,a) v_\tau \, dx d\tau da$$

$$- \lambda \int_0^t \int_G c_\tau(x,\tau,a) v_\tau \, dx d\tau da - \int_0^t \int_G v_a v_\tau \, dx d\tau da$$
$$+ \int_0^t \int_G \Delta v v_\tau \, dx d\tau da - \int_0^t \int_G c v v_\tau \, dx d\tau da.$$

Оценивая первое слагаемое правой части данного неравенства с помощью условия (9_λ), неравенства Юнга и оценок (16)–(19), получаем, что для решений краевой задачи $(8_{\varepsilon,\lambda})$, (9_λ), (10)–(12) выполняется шестая априорная оценка

$$\int_0^t \int_G v_\tau^2 \, dx d\tau da \leqslant K_6, \tag{20}$$

в которой $t \in [0,T]$, число K_6 определяется лишь исходными данными задачи.

Рассмотрим следующее равенство:

$$\int_0^t \int_G (v_t + v_a - \varepsilon v_{aa} - \Delta v + cv)(-\varepsilon v_{aa}) \, dx d\tau da$$
$$= \int_0^t \int_G \left(g + \lambda \left[\sum_{l=1}^m \tilde{\gamma}_l(x,\tau,a) v(x,t_l,a) - c_\tau(x,\tau,a) u \right] \right) (-\varepsilon v_{aa}) \, dx d\tau da.$$

Используя условие (9_λ), и неравенства (16) и (17), приходим к оценке

$$\varepsilon^2 \int_0^t \int_G v_{aa}^2 \, dx d\tau da \leqslant K_7, \tag{21}$$

в которой $t \in [0,T]$, число K_7 определяется лишь исходными данными задачи.

Из оценок (15)–(21) вытекает требуемая оценка

$$\|v\|_{V_1} \leqslant K,$$

и, как уже говорилось выше, разрешимость краевой задачи $(8_{\varepsilon,\lambda})$, (9_λ), (10)–(12) при фиксированном ε и при всех λ из отрезка $[0,1]$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, необходимо установить наличие дополнительных априорных оценок.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_G (v_t + v_a - \varepsilon v_{aa} - \Delta v + cv)(-v_{aa})\, dxd\tau da$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_G \left(g + \sum_{l=1}^m \tilde{\gamma}_l(x,\tau,a) v(x,t_l,a) - c_\tau(x,\tau,a) u \right)(-v_{aa})\, dxd\tau da.$$

Интегрируя по частям в этом равенстве как слева, так и справа, используя условие (9_λ) и оценки (15) и (16), получаем, что для решений краевой задачи $(8_{\varepsilon,\lambda})$, (9_1), (10)–(12) будет выполняться оценка

$$\sum_{l=1}^m \int\limits_G v_a^2(x,t_l,a)\, dxda + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_G v_{aa}^2\, dxd\tau da$$
$$+ \sum_{l=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_G v_{x_l a}^2\, dxd\tau da + \int\limits_0^t \int\limits_G v_a^2\, dxd\tau da \leqslant N_1, \quad (22)$$

в которой $t \in [0,T]$, число N_1 определяется лишь исходными данными задачи.

Оценка

$$\int\limits_0^t \int\limits_G v_\tau^2\, dxd\tau da + \sum_{i,j=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_G v_{x_i x_j}^2\, dxd\tau da \leqslant N_2, \quad (23)$$

теперь очевидным образом вытекает из неравенств (15), (16) и (22) (см. доказательство (19) и (20)).

Оценок (15), (16), (22) и (23) уже достаточно для выбора последовательностей $\{\varepsilon_m\}$ и $\{u_m(x,t,a)\}$ таких, что $u_m(x,t,a) \to u(x,t,a)$, $v_m(x,t,a) \to v(x,t,a)$ слабо в пространстве V $(v_m(x,t,a) = u_{mt}(x,t,a)$,

$v(x,t,a) = u_t(x,t,a))$, $\varepsilon_m v_{maa}(x,t,a) \to 0$ слабо в пространстве $L_2(Q)$ при $m \to \infty$. Для предельной функции $u(x,t,a)$ будут выполняться уравнение (8) и условия (9)–(11).

Теорема доказана.

Вернемся к обратной задаче.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (7), *и пусть функции* $c(x,t,a)$, $f(x,t,a)$, $h_k(x,t,a)$, $k = 1,\dots,m$, *таковы, что для определенных по ним функций* $g(x,t,a)$, $\varphi(x,a)$, $\psi_l(x,a)$, $\tilde{\gamma}_l(x,t,a)$, $l = 1,\dots,m$, *выполняются условия теоремы* 1. *Тогда обратная задача* (1)–(5) *имеет решение* $u(x,t,a)$, $q_1(x,a)$, $\dots$, $q_m(x,a)$ *такое, что* $u(x,t,a) \in V$, $u_t(x,t,a) \in V$, $q_l(x,a) \in L_2(G)$, $l = 1,\dots,m$.

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу (8)–(11). Согласно теореме 1 эта задача имеет решение $u(x,t,a)$ такое, что $u(x,t,a) \in V$, $u_t(x,t,a) \in V$.

Определим функции $q_k(x,a)$:

$$q_k(x,a) = \alpha_k(x,a) + \sum_{l=1}^{m} \beta_{kl}(x,a) u_t(x,t_l,a), \quad k = 1,\dots,m.$$

Очевидно, что эти функции связаны с $u(x,t,a)$ уравнением (1). Выполнение для функции $u(x,t,a)$ условий переопределения (5) показывается полностью аналогично тому, как это было сделано в работе [9]. Выполнение условий (2)–(4) очевидно.

Теорема доказана.

Обратимся теперь к обратной задаче II. Вновь выполним некоторые формальные построения.

Положим

$$m_0(x,a) = \int_0^T N(x,t,a) h(x,t,a)\, dt,$$

$$N_0(x,t,a) = \frac{1}{m_0(x,a)} [c(x,t,a) N(x,t,a) - N_t(x,t,a) - \\ - N_a(x,t,a) + \Delta N(x,t,a)],$$

$$N_i(x,t,a) = \frac{2N_{x_i}(x,t,a)}{m_0(x,a)}, \quad i = 1,\dots,n,$$

$$m_1(x,a) = \frac{N(x,T,a)}{m_0(x,a)}, \quad F(x,a) = \frac{1}{m_0(x,a)} \int\limits_0^T N(x,t,a) f(x,t,a)\,dt,$$

$$F_1(x,t,a) = f(x,t,a) - F(x,a)h(x,t,a), \quad m(x,t,a) = m_1(x,a)h(x,t,a),$$

$$M_0(x,t,\tau,a) = h(x,t,a)\cdot M_0(x,\tau,a), \quad M_i(x,t,\tau,a) = h(x,t,a)\cdot N_i(x,\tau,a).$$

Умножим уравнение $(1')$ на функцию $N(x,t,a)$ и проинтегрируем по переменной t от 0 до T. Предполагая, что выполняется условие

$$m_0(x,a) \neq 0 \quad \text{при } (x,a) \in \overline{G}, \tag{24}$$

вычислим из полученного равенства функцию $q(x,a)$:

$$q(x,a) = m_1(x,a)u(x,T,a) + \int\limits_0^T N_0(x,t,a)u(x,t,a)\,dt$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int\limits_0^T N_i(x,t,a)u_{x_i}(x,t,a)\,dt - F(x,a).$$

Подставим $q(x,a)$ в уравнение $(1')$:

$$u_t + u_a - \Delta u + c(x,t,a)u = F_1(x,t,a) + m(x,t,a)u(x,T,a)$$
$$+ \int\limits_0^T M_0(x,t,\tau,a)u(x,\tau,a)\,d\tau + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^T M_i(x,t,\tau,a)u_{x_i}(x,\tau,a)\,d\tau. \tag{25}$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t,a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (25) *и такую, что для нее выполняются условия* (2)–(4). Именно с помощью решения данной краевой задачи (25), (2)–(4) будет построено решение обратной задачи II.

Краевая задача (25), (2)–(4) является задачей для «нагруженного» ультрапараболического уравнения. Ранее подобные задачи не изучались. Поэтому сформулируем и докажем необходимую для исследования обратной задачи теорему о разрешимости задачи (25), (2)–(4).

Положим

$$\overline{m}_0 = \max_{\overline{Q}} |m(x,t,a)|, \quad \overline{m}_1 = \max_{\overline{Q}} \int\limits_0^T M_0^2(x,t,\tau,a)\,d\tau,$$

$$\overline{m}_2 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \max_{\overline{Q}} \int\limits_0^T M_i^2(x,t,\tau,a)\,d\tau.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,t,a) \in C^1(\overline{Q}), \quad m(x,t,a) \in W^1_\infty(Q),$$

$$M_0(x,t,\cdot,a) \in L_\infty(Q; L_2([0,T])), \quad M_{0a}(x,t,\cdot,a) \in L_2(Q; L_2([0,T])),$$

$$M_i(x,t,\cdot,a) \in L_\infty(Q; L_2([0,T])), \quad M_{ia}(x,t,\cdot,a) \in L_2(Q; L_2([0,T])),$$
$$i = 1,\dots,n;$$

$$c(x,t,a) \geqslant c_0 > 0 \quad \text{при } (x,t,a) \in \overline{Q};$$

$$2c_0 - \big(\overline{m}_0^2 + \overline{m}_1 + \overline{m}_2\big)T > 1;$$

$$F_1(x,t,a) \in L_2(Q), \quad F_{1a}(x,t,a) \in L_2(Q).$$

Тогда краевая задача (25), (2)–(4) *имеет решение* $u(x,t,a)$ *такое, что* $u(x,t,a) \in V$.

Доказательство. Вновь воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t,a)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$u_t + u_a - \varepsilon u_{aa} - \Delta u + c(x,t,a)u = F_1(x,t,a) + m(x,t,a)u(x,T,a)$$
$$+ \int\limits_0^T M_0(x,t,\tau,a)u(x,\tau,a)\,d\tau + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^T M_i(x,t,\tau,a)u_{x_i}(x,\tau,a)\,d\tau \qquad (25_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), *а также условие* (12). Разрешимость этой задачи будет установлена с помощью метода продолжения по параметру.

Пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим задачу: *найти функцию $u(x,t,a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t+u_a-\varepsilon u_{aa}-\Delta u+c(x,t,a)u=F_1(x,t,a)+\lambda\Bigg[\int\limits_0^T m(x,t,a)u(x,T,a)\,dt$$
$$+\int\limits_0^T M_0(x,t,\tau,a)u(x,\tau,a)\,d\tau+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T M_i(x,t,\tau,a)u_{x_i}(x,\tau,a)\,d\tau\Bigg] \tag{$25_{\varepsilon,\lambda}$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), (12). Покажем, что эта задача при фиксированном ε разрешима в пространстве V_1 при всех λ из отрезка $[0,1]$.

Как указано выше, краевая задача ($25_{\varepsilon,\lambda}$), (2)–(4), (12) будет разрешима в пространстве V_1, если при выполнении включения $F_1(x,t,a)\in L_2(Q)$ будет разрешима в этом же пространстве задача ($25_{\varepsilon,0}$), (2)–(4), (12), и если при выполнении того же включения выполняется равномерная по λ априорная оценка

$$\|u\|_{V_1}\leqslant R \tag{26}$$

с постоянной R, определяющейся лишь числом ε и исходными данными задачи.

Разрешимость краевой задачи ($25_{\varepsilon,0}$), (2)–(4), (12) в пространстве V_1 при фиксированном ε известна (см. [10]).

Наличие оценки (26) устанавливается с помощью техники, аналогичной той, которая была использована при доказательстве теоремы 1, с существенным использованием неравенства Юнга и условия малости.

Рассуждения, проведенные выше, дают разрешимость краевой задачи (25_ε), (2)–(4), (12) при любом фиксированном ε, но при этом число R в оценке (26) будет вести себя как ε^{-1}, что не позволит организовать предельный переход. Для получения оценки, равномерной по ε, достаточно дополнительно проанализировать равенство

$$-\int\limits_Q[u_t+u_a-\varepsilon u_{aa}-\Delta u+c(x,t,a)u]u_{aa}\,dxdtda$$

$$= -\int\limits_Q F_1(x,t,a)u_{aa}\,dxdtda - \int\limits_Q m(x,t,a)u(x,T,a)u_{aa}\,dxdtda$$
$$+\int\limits_Q \left(\int\limits_0^T M_0(x,t,\tau,a)u(x,\tau,a)\,d\tau\right) u_{aa}\,dxdtda$$
$$+\sum_{i=1}^n \int\limits_Q \left(\int\limits_0^T M_i(x,t,\tau,a)u_{x_i}(x,\tau,a)\,d\tau\right) u_{aa}\,dxdtda$$

и при этом проинтегрировать по частям как слева в данном равенстве, так и справа (см. доказательство оценки (22)).

Собственно процедура предельного перехода осуществляется стандартным образом. Предельная функция будет принадлежать пространству V и являться решением краевой задачи (25), (2)–(4).

Теорема доказана.

Вернемся к обратной задаче II.

Теорема 4. *Пусть функции $c(x,t,a)$, $N(x,t,a)$, $f(x,t,a)$, $h(x,t,a)$ таковы, что выполняется условие* (24), *для функций $c(x,t,a)$, $m(x,t,a)$, $M_0(x,t,\tau,a)$, $M_i(x,t,\tau,a)$, $i=1,\dots,n$, выполняются условия теоремы* 3 *и, кроме того, выполняются включения $m_1(x,a)\in L_2(G)$, $N_0(x,t,a)\in L_2(Q)$, $N_i(x,t,a)\in L_2(Q)$. Тогда обратная задача* II *имеет решение $\{u(x,t,a),q(x,a)\}$ такое, что $u(x,t,a)\in V$, $q(x,a)\in L_2(G)$.*

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу (25), (2)–(4). Согласно теореме 3 эта задача имеет решение $u(x,t,a)$ такое, что $u(x,t,a)\in V$. Определим функцию $q(x,a)$:

$$q(x,a) = m_1(x,a)u(x,T,a) + \int\limits_0^T N_0(x,t,a)u(x,t,a)\,dt$$
$$+\sum_{i=1}^n \int\limits_0^T N_i(x,t,a)u_{x_i}(x,t,a)\,dt - F(x,a).$$

Очевидно, что функции $u(x,t,a)$ и $q(x,a)$ связаны уравнением $(1')$. Выполнение для функции $u(x,t,a)$ условия переопределения (6) показывается аналогично тому, как это было сделано в работе [12].

Теорема доказана.

Замечание. Во всех случаях имеет место единственность решений — как для краевых задач для «нагруженных» ультрапараболических уравнений, так и для обратных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. C., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Dekker, 1999.
2. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
3. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
4. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: VNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; Vol. 10.)
5. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. New York: Springer Sci., 2006. (Appl. Math. Sci., V. 127.)
6. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995.
7. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теоретической и прикладной математики, 1995.
8. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
9. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения // Докл. РАН. 2006. Т. 409, № 6. С. 740–743.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1973.
11. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
12. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном параболическом уравнении и связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 2. С. 840–853.

г. Южно-Сахалинск *25 июля 2011 г.*

УДК 539.311

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВНЕШНИМИ НАГРУЗКАМИ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО С УСЛОВИЕМ НЕПРОНИКАНИЯ НА ТРЕЩИНЕ

Н. П. Лазарев

Введение

В математической теории трещин классический подход характеризуется линейными краевыми условиями [1–6]. При этом на кривой, соответствующей трещине, задаются условия в виде равенств. В настоящее время имеется ряд результатов [7–9], посвященных задачам теории трещин, в которых краевые условия имеют вид системы равенств и неравенств. Эти условия налагаются на кривой, соответствующей трещине, и имеют ясную физическую интерпретацию. В работах [10–13] исследуются краевые задачи с условиями типа неравенств, описывающие равновесие пластин и оболочек модели Кирхгофа — Лява.

В данной работе рассматривается вариационная задача о равновесии упругой изотропной пластины модели Тимошенко (см., например, [14]), содержащей трещину. При этом на кривой, описывающей трещину, задано нелинейное условие в виде неравенства. Доказано, что решение вариационной задачи удовлетворяет априорным оценкам, зависящим только от функции заданных внешних нагрузок и области, соответствующей пластине. Благодаря этим результатам доказана теорема о существовании решения в задаче об оптимальном управлении внешними нагрузками с функционалом качества, характеризующим деформации. Установлена разрешимость задачи оптимального управления

с функционалом качества, описывающим раскрытие трещины. Различные задачи оптимального управления можно найти в [7, 8, 15–18].

§1. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ (рис. 1), $\Gamma_c \subset \Omega$, $\Omega_c = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_c$, $\Gamma_c = \{(x, y) \mid y = g(x),\ 0 < x < 1\}$, $g(x)$ — достаточно гладкая функция, $\Gamma_c \cap \Gamma = \varnothing$.

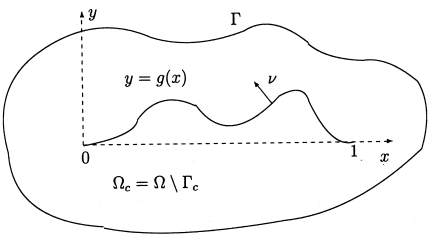

Рис. 1.

Нормаль к кривой к Γ_c обозначим через ν. Считаем, что срединная поверхность пластины совпадает с областью Ω_c. Для простоты толщину пластины считаем постоянной и равной 2. Предположим, что пластина содержит сквозную вертикальную трещину, которая описывается в срединной плоскости кривой Γ_c. Это означает, что поверхность трещины можно задать в виде $(x, y) \in \Gamma_c$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, где $|z|$ — расстояние до срединной поверхности пластины. Обозначим через $\chi = \chi(x, y) = (W, w)$ вектор перемещений точек срединной поверхности, где $W = (w^1, w^2)$ и w — горизонтальные и вертикальные перемещения соответственно. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\phi = \phi(x, y) = (\phi^1, \phi^2)$. Считаем один из берегов разреза положительным, а другой отрицательным — в соответствии с направлением ν. В случае, когда след функции v берется на положительном берегу, применяем обозначение v^+, аналогично для отрицательного берега. Скачок функции на Γ_c обозначим через $[v] = v^+ - v^-$.

Введем тензоры $\alpha(\phi) = \{\alpha_{ij}(\phi)\}$, $\varepsilon(W) = \{\varepsilon_{ij}(W)\}$, $i, j = 1, 2$, описывающие деформацию пластины [14]:

$$\alpha_{ij}(\phi) = \frac{1}{2}\big(\phi,^{i}_{j} + \phi,^{j}_{i}\big), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}\big(w,^{i}_{j} + w,^{j}_{i}\big), \quad i, j = 1, 2,$$

$$\left(v,_{i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}\right), \quad x_1 = x,\ x_2 = y.$$

Тензор моментов m_{ij}, $i, j = 1, 2$, введем по формулам:

$$m_{11}(\phi) = D(\alpha_{11}(\phi) + \kappa\alpha_{22}(\phi)), \quad m_{22}(\phi) = D(\alpha_{22}(\phi) + \kappa\alpha_{11}(\phi)),$$

$$m_{12}(\phi) = m_{21}(\phi) = D(1 - \kappa)\alpha_{12}(\phi).$$

Аналогично определим тензор усилий σ_{ij}, $i, j = 1, 2$:

$$\sigma_{11}(W) = G(\varepsilon_{11}(W) + \kappa\varepsilon_{22}(W)), \quad \sigma_{22}(W) = G(\varepsilon_{22}(W) + \kappa\varepsilon_{11}(W)),$$

$$\sigma_{12}(W) = \sigma_{21}(W) = G(1 - \kappa)\varepsilon_{12}(W), \quad \kappa = \text{const},\ 0 < \kappa < \frac{1}{2}.$$

Заметим, что согласно [14] материальные параметры G, D для однородной изотропной пластины постоянны. Возьмем значение этих множителей равными 1 — данное предположение упрощает некоторые алгебраические действия, сохраняя при этом все качественные свойства модели (поскольку мы не варьируем указанные материальные параметры).

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_c)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_c)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на Γ. Пусть

$$H(\Omega_c) = H^{1,0}(\Omega_c)^5 \quad \text{с нормой} \quad \|\cdot\|_c = \|\cdot\|_{H(\Omega_c)}.$$

Введем также пространство в области без разреза: $H(\Omega) = H^1_0(\Omega)^5$. С учетом записанных выше выражений для произвольных $\hat{\xi} = (\widehat{W}, \hat{w}, \hat{\phi}) \in H(\Omega_c)$, $\check{\xi} = (\check{W}, \check{w}, \check{\phi}) \in H(\Omega_c)$ определим следующую билинейную форму:

$$B_c(\hat{\xi}, \check{\xi}) = \langle m_{ij}(\hat{\phi}), \alpha_{ij}(\check{\phi})\rangle_c + \langle \sigma_{ij}(\hat{W}), \varepsilon_{ij}(\check{W})\rangle_c + \langle (\hat{w},_{i} + \hat{\phi}^{i}), (\check{w},_{i} + \check{\phi}^{i})\rangle_c, \tag{1}$$

здесь и далее скобками $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$ обозначается скалярное произведение в $L^2(\Omega_c)$, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Функционал потенциальной энергии деформированной пластины, занимающей область Ω_c, описываемой перемещениями $\chi = (W, w)$ и углами поворота нормальных сечений ϕ, введем с помощью билинейной формы (1):

$$\Pi(\xi) = \frac{1}{2}B_c(\xi,\xi) - \langle f, \chi\rangle_c, \quad \xi = (W, w, \phi), \tag{2}$$

вектор $f = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega)^3$ описывает воздействие на пластину внешних нагрузок [14]. На внешней границе зададим краевые условия, описывающие жесткое защемление:

$$w = 0, \quad \phi = W = \mathbf{0} \quad \text{на } \Gamma, \tag{3}$$

где $\mathbf{0} = (0, 0)$.

Выведем теперь условие непроникания на внутренней границе Γ_c. Поскольку горизонтальные перемещения в зависимости от z для модели Тимошенко выражаются следующими формулами [14]:

$$w^i(z) = w^i + z\phi^i, \quad i = 1, 2, \ |z| \leqslant 1,$$

умножая скачок вектора перемещений скалярно на нормаль к поверхности вертикальной трещины с координатами $(\nu_1, \nu_2, 0)$, имеем

$$([w^1(z)], [w^2(z)], [w]) \cdot (\nu_1, \nu_2, 0) = [W(z)] \cdot \nu = [W_\nu] + z[\phi_\nu] \geqslant 0 \quad \text{на } \Gamma_c,$$

где через W_ν, ϕ_ν обозначены скалярные произведения $W_\nu = W\nu = w^i\nu_i$, $\phi_\nu = \phi\nu = \phi^i\nu_i$. Подставив в данном неравенстве $z = 1$ и $z = -1$, получим условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины:

$$[W_\nu] \geqslant |[\phi_\nu]| \quad \text{на } \Gamma_c. \tag{4}$$

Рассмотрим множество допустимых функций

$$K = \{\xi = (W, w, \phi) \in H(\Omega_c) \mid \xi \text{ удовлетворяет (4)}\}.$$

Задачу о равновесии пластины можно сформулировать в виде задачи минимизации функционала энергии $\Pi(\xi)$ на множестве допустимых функций K:

$$\min_{\xi\in K}\Pi(\xi). \tag{5}$$

§ 2. Существование и единственность решения

В этом параграфе покажем, что для задачи (5) выполняются условия, обеспечивающие единственную разрешимость. А именно, установим коэрцитивность, слабую полунепрерывность и выпуклость функционала энергии (2), выпуклость и замкнутость множества K.

Выпишем сначала функционал энергии для $\xi = (W, w, \phi)$, $\chi = (W, w)$ в развернутом виде:

$$\Pi(\xi) = \frac{1}{2}\{\langle m_{ij}(\phi), \alpha_{ij}(\phi)\rangle_c + \langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(W)\rangle_c \\ + \langle (w_{,i} + \phi^i), (w_{,i} + \phi^i)\rangle_c\} - \langle f, \chi\rangle_c, \tag{6}$$

Коэрцитивность следует из следующей оценки значений функционала энергии:

$$\Pi(\xi) = \frac{1}{2}B_c(\xi,\xi) - \langle f, \chi\rangle_c \geqslant M\|\xi\|_c^2 - \|f\|_{L^2(\Omega_c)^3}\|\xi\|_c \tag{7}$$

$$\forall \xi = (W, w, \phi) \in H(\Omega_c),$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от ξ. Для того чтобы убедиться в справедливости соотношения (7), выпишем неравенство Коши:

$$2|\langle \phi^i, w_{,i}\rangle_c| \leqslant \epsilon\langle \phi^i, \phi^i\rangle_c + \frac{1}{\epsilon}\langle w_{,i}, w_{,i}\rangle_c = \epsilon\|\phi\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} + \frac{1}{\epsilon}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_c)^2}$$

для любого $\epsilon > 0$. Следовательно, для удвоенного третьего слагаемого в правой части выражения (6) имеет место оценка

$$\|\phi\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} + \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} - \epsilon\|\phi\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} - \frac{1}{\epsilon}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} \\ = (1-\epsilon)\|\phi\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} \leqslant \langle (w_{,i} + \phi^i), (w_{,i} + \phi^i)\rangle_c. \tag{8}$$

Выпишем теперь неравенства Корна [19], которые позволяют оценить первые два слагаемых в (6):

$$\begin{gathered}\langle m_{ij}(\phi), \alpha_{ij}(\phi)\rangle_c \geqslant C\|\phi\|^2_{H^1(\Omega_c)^2},\\ \langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(W)\rangle_c \geqslant C\|W\|^2_{H^1(\Omega_c)^2}.\end{gathered} \tag{9}$$

Имеет место также обобщенное неравенство Пуанкаре

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega_c)^2} \geqslant Q\|w\|_{H^1(\Omega_c)}. \tag{10}$$

Постоянные $C > 0$, $Q > 0$ в (9) и (10) не зависят от подынтегральных функций.

Таким образом, из (8), (9) имеем

$$\begin{aligned}&\langle m_{ij}(\phi), \alpha_{ij}(\phi)\rangle_c + \langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(W)\rangle_c + \langle (w_{,i} + \phi^i), (w_{,i} + \phi^i)\rangle_c\\ &\geqslant C\|\phi\|^2_{H^1(\Omega_c)^2} + C\|W\|^2_{H^1(\Omega_c)^2} + (1-\epsilon)\|\phi\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_c)^2},\end{aligned} \tag{11}$$

где $\epsilon > 0$ произвольно.

Положим в (11) $\epsilon = 1 + \frac{C}{2}$, применим (10) и в результате получим

$$\begin{aligned}&\langle m_{ij}(\phi), \alpha_{ij}(\phi)\rangle_c + \langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(W)\rangle_c + \langle (w_{,i} + \phi^i), (w_{,i} + \phi^i)\rangle_c\\ &\qquad \geqslant \frac{C}{2}\|\phi\|^2_{H^1(\Omega_c)^2} + C\|W\|^2_{H^1(\Omega_c)^2} + \frac{Q\cdot C}{(2+C)}\|w\|^2_{H^1(\Omega_c)}.\end{aligned}$$

Последнее неравенство вместе с очевидной оценкой

$$\langle f, \chi\rangle_c \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega_c)^3}(\|W\|^2_{H^1(\Omega_c)^2} + \|w\|^2_{H^1(\Omega_c)})^{1/2} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega_c)^3}\|\xi\|_c$$

позволяют утверждать справедливость неравенства (7).

Функционал энергии дифференцируем, т. е. для него определена производная Π'_ξ для всех $\xi \in H(\Omega_c)$. Слабая полунепрерывность и выпуклость функционала следуют из справедливости неравенства

$$(\Pi'_{\xi_1} - \Pi'_{\xi_0})(\xi_1 - \xi_0) \geqslant 0 \quad \forall \xi_1, \xi_0 \in H(\Omega_c).$$

Докажем выпуклость и замкнутость множества K. Пусть ξ_1 и ξ_2 принадлежат множеству K. Очевидно, что выпуклая комбинация

$t\xi_1 + (1-t)\xi_2$, $t \in (0,1)$, принадлежит пространству $H(\Omega_c)$. Кроме того, нетрудно видеть, что выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}[(tW_1 + (1-t)W_2)\nu] &= t[W_1\nu] + (1-t)[W_2\nu] \\ &\geqslant t|[\phi_1\nu]| + (1-t)|[\phi_2\nu]| \geqslant |t[\phi_1\nu]| + (1-t)[\phi_2\nu]| \quad \forall t \in (0,1).\end{aligned}$$

Таким образом, множество K выпукло. Рассмотрим последовательность ξ^n такую, что $\xi^n \in K$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\xi^n \to \xi^0$ сильно в $H(\Omega_c)$ при $n \to \infty$. В силу теорем вложения $[W^n\nu] \to [W^0\nu]$ сильно в $L^2(\Gamma_c)$. Выбирая при необходимости подпоследовательность, можно предполагать, что $[W^n\nu] \to [W^0\nu]$ п. в. на Γ_c. Аналогично для ϕ получим $[\phi^n\nu] \to [\phi^0\nu]$ п. в. на Γ_c. Это означает, что

$$[W^0\nu] \geqslant |[\phi^0\nu]| \quad \text{п. в. на } \Gamma_c.$$

Значит, множество замкнуто.

Выпуклость и замкнутость множества K вместе с установленными свойствами функционала энергии гарантируют существование и единственность решения задачи (5) (см., например, [20]). Обозначим решение задачи (5) через $\xi = (W, w, \phi)$.

Поскольку множество K, определяемое неравенством (4), выпукло, задача (5) в обозначениях $\tilde{\xi} = \bar{\xi} - \xi$, где $\bar{\xi}$ — произвольная пробная функция из K, эквивалентна вариационному неравенству

$$\begin{aligned}\langle m_{ij}(\phi), \alpha_{ij}(\tilde{\phi})\rangle_c + \langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(\widetilde{W})\rangle_c \\ + \langle (w_{,i} + \phi^i), (\tilde{w}_{,i} + \tilde{\phi}^i)\rangle_c - \langle f, \tilde{\chi}\rangle_c \geqslant 0. \quad (12)\end{aligned}$$

Подставляя в последнее вариационное неравенство сначала $\tilde{\xi} = (\xi + \bar{\xi}) - \xi = \bar{\xi}$, а затем $\tilde{\xi} = (\xi - \bar{\xi}) - \xi = -\bar{\xi}$ с пробной функцией $\bar{\xi}$, каждая составляющая которой принадлежит $C_0^\infty(\Omega_c)$ (далее для краткости будем применять обозначения вида $\bar{\xi} \in C_0^\infty(\Omega_c)$), получим равенство

$$\langle m_{ij}(\phi), \alpha_{ij}(\bar{\phi})\rangle_c + \langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(\overline{W})\rangle_c + \langle (w_{,i} + \phi^i), (\bar{w}_{,i} + \bar{\phi}^i)\rangle_c = \langle f, \bar{\chi}\rangle_c. \quad (13)$$

Учитывая независимость между финитными бесконечно дифференцируемыми функциями $\bar{w}^1, \bar{w}^2, \bar{w}, \bar{\phi}^1, \bar{\phi}^2$, извлечем из (13) соотношения

$$\langle m_{ij}(\phi), \alpha_{ij}(\bar{\phi})\rangle_c + \langle (w_{,i} + \phi^i), \bar{\phi}^i\rangle_c = 0 \quad \forall \bar{\phi} \in C_0^\infty(\Omega_c),\ i = 1, 2,$$

$$\langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(\overline{W})\rangle_c = \langle f_i, \bar{w}^i\rangle_c \quad \forall \overline{W} \in C_0^\infty(\Omega_c),\ i = 1, 2,$$

$$\langle (w_{,i} + \phi^i), \bar{w}_{,i}\rangle_c = \langle f_3, \bar{w}\rangle_c \quad \forall \bar{w} \in C_0^\infty(\Omega_c).$$

Заметив, что имеют место представления

$$\langle m_{ij}(\phi), \alpha_{ij}(\bar{\phi})\rangle_c = \langle m_{ij}(\phi), \bar{\phi}_{,j}^{\,i}\rangle_c, \quad \langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(\overline{W})\rangle_c = \langle \sigma_{ij}(W), \bar{w}_{,j}^{\,i}\rangle_c,$$

из предыдущих трех интегральных равенств заключаем, что в области Ω_c в смысле распределений выполнены уравнения равновесия:

$$m_{ij,j}(\phi) - (w_{,i} + \phi^i) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

$$\sigma_{ij,j}(W) = -f_i, \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

$$\phi_{,i}^{\,i} + \Delta w = -f_3. \tag{16}$$

Как известно [21], если решение $\xi = (W, w, \phi)$ вариационной задачи (5) достаточно гладкое, то оно также является решением краевой задачи, состоящей из уравнений (14)–(16) и следующих краевых условий на внешней границе Γ:

$$W = \phi = \mathbf{0}, \quad w = 0,$$

на внутренней границе Γ_c:

$$[W_\nu] \geqslant |[\phi_\nu]|, \quad [\sigma_\nu(W)] = [m_\nu(\phi)] = 0, \quad \sigma_\tau(W) = \mathbf{0}, \quad m_\tau(\phi) = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + \phi_\nu = 0, \quad \sigma_\nu(W)[W_\nu] + m_\nu(\phi)[\phi_\nu] = 0,$$

$$-\sigma_\nu(W) \geqslant |m_\nu(\phi)|, \quad \sigma_\nu(W) \leqslant 0.$$

Величины $\sigma_\nu(W)$, $\sigma_\tau(W)$, $m_\nu(\phi)$, $m_\tau(\phi)$ определяются формулами:

$$\sigma_\nu(W) = \sigma_{ij}(W)\nu_j\nu_i, \quad \sigma_\tau(W) = (\sigma_{\tau 1}(W), \sigma_{\tau 2}(W)),$$

$$\sigma_{\tau i}(W) = \sigma_{ij}(W)\nu_j - \sigma_\nu(W)\nu_i, \quad i = 1, 2,$$

$$m_\nu(\phi) = m_{ij}(\phi)\nu_j\nu_i, \quad m_\tau(\phi) = (m_{\tau 1}(\phi), m_{\tau 2}(\phi)),$$

$$m_{\tau i}(\phi) = m_{ij}(\phi)\nu_j - m_\nu(\phi)\nu_i, \quad i = 1, 2,$$

§ 3. Априорные оценки

В этом параграфе получим некоторые оценки для решений в рассматриваемых пространствах, вытекающие из вариационной постановки задачи (5).

Пусть, по-прежнему, $\xi = (W, w, \phi)$ — решение вариационной задачи (5). Положив в вариационном неравенстве (12) $\tilde{\xi} = \xi - 2\xi = -\xi$, а затем $\tilde{\xi} = \xi - 0 = \xi$, в итоге получим

$$\langle m_{ij}(\phi), \alpha_{ij}(\phi)\rangle_c + \langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(W)\rangle_c + \langle (w_{,i} + \phi^i), (w_{,i} + \phi^i)\rangle_c = \langle f, \chi\rangle_c. \tag{17}$$

Принимая во внимание неравенство (11), из (17) имеем

$$\frac{C}{2}\|\phi\|^2_{H^1(\Omega_c)^2} + C\|W\|^2_{H^1(\Omega_c)^2} + \left(\frac{C}{2+C}\right)Q\|w\|^2_{H^1(\Omega_c)} \leqslant \langle f, \chi\rangle_c. \tag{18}$$

Положив $r = \min\left\{\frac{C}{2}, \frac{C\cdot Q}{2+C}\right\}$, из (18) выведем

$$\|\xi\|^2_c \leqslant \frac{1}{r}\|f\|_{L^2(\Omega_c)^3}\left(\|W\|^2_{H^1(\Omega_c)^2} + \|w\|^2_{H^1(\Omega_c)}\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{r}\|f\|_{L^2(\Omega_c)^3}\|\xi\|_c.$$

Таким образом,

$$\|\xi\|_c \leqslant \frac{1}{r}\|f\|_{L^2(\Omega_c)^3}. \tag{19}$$

Получим еще одно неравенство, связывающее нормы $\|w\|_{H^1(\Omega_c)}$ и $\|\phi\|_{L^2(\Omega_c)^2}$. Для этого установим справедливость следующего тождества:

$$\langle (w_{,i} + \phi^i), w_{,i}\rangle_c = \langle f_3, w\rangle_c. \tag{20}$$

В самом деле, подставив в вариационное неравенство (12) пробную функцию $\bar{\xi} = (W, 2w, \phi)$, получим

$$\langle (w_{,i} + \phi^i), w_{,i}\rangle_c \geqslant \langle f_3, w\rangle_c.$$

Подставив теперь другую пробную функцию $\bar{\xi} = (W, 0, \phi)$ в (12), выведем равенство (20). Оценим снизу левую часть равенства (20). Поскольку

$$|\langle \phi^i, w_{,i}\rangle_c| \leqslant \frac{\epsilon}{2}\langle \phi^i, \phi^i\rangle_c + \frac{1}{2\epsilon}\langle w_{,i}, w_{,i}\rangle_c = \frac{\epsilon}{2}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} + \frac{1}{2\epsilon}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_c)^2}$$

для любого $\epsilon > 0$, имеем следующую оценку:

$$\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} - \frac{\epsilon}{2}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} - \frac{1}{2\epsilon}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_c)^2}$$
$$= \frac{(-\epsilon)}{2}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} + \left(1 - \frac{1}{2\epsilon}\right)\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} \leqslant \langle (w_{,i} + \phi^i), w_{,i} \rangle_c.$$

Следовательно, из (20) выведем

$$\frac{(-\epsilon)}{2}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} + \left(1 - \frac{1}{2\epsilon}\right)\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_c)^2} \leqslant \|f_3\|_{L^2(\Omega_c)}\|w\|_{L^2(\Omega_c)}.$$

Взяв в предыдущем неравенстве $\epsilon = 1$ и используя неравенство (10), имеем

$$Q\|w\|^2_{H^1(\Omega_c)} \leqslant 2\|f_3\|_{L^2(\Omega_c)}\|w\|_{L^2(\Omega_c)} + \|\phi\|^2_{L^2(\Omega_c)^2}. \tag{21}$$

Таким образом, для решения $\xi = (W, w, \phi)$ вариационной задачи (5) выполнены априорные оценки (19), (21).

Заметим, что согласно физическому смыслу задачи функции $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ задают углы поворота нормальных сечений, следовательно, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \phi_i \leqslant \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2$, в соответствии с гипотезами модели. Это означает, в свою очередь, что квадрат нормы $\|\phi\|^2_{L^2(\Omega_c)^2}$ в правой части (21) можно оценить сверху с помощью значения $\frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{mes}(\Omega_c)$.

§ 4. Оптимальное управление внешними нагрузками

Пусть $F \subset L^2(\Omega_c)^3$ — ограниченное, замкнутое и выпуклое множество. Как доказано выше, для каждого $f \in F$ существует решение $\xi \equiv \xi_f$ задачи (5). Рассмотрим функционал качества

$$J(f) = \|\xi_f - \xi_\star\|_{L^2(\Omega_c)^5},$$

где $\xi_\star \in L^2(\Omega)^5$ — заданная функция.

Задачу об оптимальном управлении сформулируем следующим образом:

$$\inf_{f \in F} J(f). \tag{22}$$

С физической точки зрения в задаче (22) ищутся внешние силы $f = (f_1, f_2, f_3)$, доставляющие решение с минимальным отклонением от заданных деформаций $\xi_\star = (W_\star, w_\star, \phi_\star)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предыдущие предположения. Тогда существует решение задачи* (22).

Доказательство. Пусть $f_n \in F$ — минимизирующая последовательность. Через ξ_n обозначим соответствующие f_n решения задачи (5) при $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку множество F ограничено, последовательность f_n также ограничена в $L^2(\Omega_c)^3$. Тогда в силу неравенства (19) имеет место оценка $\|\xi_n\|_c \leqslant c$, равномерная по n. Выбирая при необходимости подпоследовательности, можно считать, что

$$\xi_n \to \xi_0 \quad \text{слабо в } H(\Omega_c), \quad \xi_n \to \xi_0 \quad \text{сильно в } L^2(\Omega_c)^5,$$

$$f_n \to f \quad \text{слабо в } L^2(\Omega_c)^3$$

при $n \to \infty$. Установленные сходимости позволяют перейти к пределу при $n \to \infty$ в следующем вариационном неравенстве, получающемся простой заменой $\xi_n \equiv \xi$ из соотношения (12):

$$\langle m_{ij}(\phi_n), \alpha_{ij}(\tilde{\phi})\rangle_c + \langle \sigma_{ij}(W_n), \varepsilon_{ij}(\widetilde{W})\rangle_c \\ + \langle (w_{n,i} + \phi_n^i), (\tilde{w}_{,i} + \tilde{\phi}^i)\rangle_c - \langle f_n, \tilde{\chi}\rangle_c \geqslant 0, \quad (23)$$

где $\tilde{\xi} = \bar{\xi} - \xi_n$, $\bar{\xi} \in K$. В итоге слабая полунепрерывность функционала энергии позволяет вывести соотношение

$$\langle m_{ij}(\phi_0), \alpha_{ij}(\tilde{\phi})\rangle_c + \langle \sigma_{ij}(W_0), \varepsilon_{ij}(\widetilde{W})\rangle_c \\ + \langle (w_{0,i} + \phi_0^i), (\tilde{w}_{,i} + \tilde{\phi}^i)\rangle_c - \langle f, \tilde{\chi}\rangle_c \geqslant 0, \quad (24)$$

где $\tilde{\xi} = \bar{\xi} - \xi_0$, $\bar{\xi} \in K$. Справедливость полученного вариационного неравенства (24) означает, что имеет место равенство $\xi_0 = \xi_f$. Следовательно,

$$\inf_{\bar{f} \in F} J(\bar{f}) = \liminf_{n \to \infty} J(f_n) \geqslant J(f) \geqslant \inf_{\bar{f} \in F} J(\bar{f}).$$

Таким образом, функция f доставляет решение для задачи оптимального управления (22). Теорема доказана.

§ 5. Задача о трещине с минимальным раскрытием

Примем для удобства обозначения для новых математических объектов, аналогичные предыдущим. Пусть, как и выше, $F \subset L^2(\Omega_c)^3$ — ограниченное, замкнутое и выпуклое множество. Снова обозначим для произвольного $f \in F$ решение соответствующей задачи (5) через $\xi \equiv \xi_f$. Рассмотрим другой функционал качества, характеризующий раскрытие трещины [22]:

$$Y(f) = \int\limits_{\Gamma_c} |[\xi_f]| \, d\Gamma_c.$$

Задачу об оптимальных внешних нагрузках, доставляющих минимальное раскрытие трещины, сформулируем следующим образом:

$$\inf_{f \in F} Y(f). \tag{25}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены предыдущие предположения. Тогда существует решение задачи* (25).

Доказательство. Пусть $f_n \in F$ — минимизирующая последовательность для функционала $Y(\bar{f})$. Сохраним обозначение ξ_n для решения задачи (5), соответствующего f_n при $n = 1, 2, \ldots$. По условию теоремы, очевидно, последовательность f_n ограничена в $L^2(\Omega_c)^3$. Тогда в силу неравенства (19) имеет место оценка $\|\xi_n\|_c \leqslant c$, равномерная по n. Выбирая при необходимости подпоследовательности, можно считать, что

$$\xi_n \to \xi_0 \quad \text{слабо в } H(\Omega_c), \quad \xi_n \to \xi_0 \quad \text{сильно в } L^2(\Omega_c)^5,$$
$$\xi_n^{\pm} \to \xi_0^{\pm} \quad \text{сильно в } L^2(\Gamma_c)^5, \quad f_n \to f \quad \text{слабо в } L^2(\Omega_c)^3,$$

при $n \to \infty$. Установленные сходимости позволяют перейти к пределу при $n \to \infty$ в вариационном неравенстве (23). Принимая во внимание слабую полунепрерывность функционала энергии, получим предельное соотношение

$$\langle m_{ij}(\phi_0), \alpha_{ij}(\tilde{\phi})\rangle_c + \langle \sigma_{ij}(W_0), \varepsilon_{ij}(\widetilde{W})\rangle_c$$
$$+ \langle (w_{0,i} + \phi_0^i), (\tilde{w}_{,i} + \tilde{\phi}^i)\rangle_c - \langle f, \tilde{\chi}\rangle_c \geqslant 0,$$

где $\tilde{\xi} = \bar{\xi} - \xi_0$, $\bar{\xi} \in K$.

Таким образом, последнее вариационное неравенство доставляет равенство $\xi_0 = \xi_f$. Следовательно,

$$\inf_{\bar{f} \in F} Y(\bar{f}) = \liminf_{n \to \infty} Y(f_n) \geqslant Y(f) \geqslant \inf_{\bar{f} \in F} Y(\bar{f}).$$

Значит, функция f является решением задачи оптимального управления (25). Теорема доказана.

Задачи, аналогичные (22), (25), ранее исследованы для вариационных задач о равновесии пластин и оболочек модели Кирхгофа — Лява с условием непроникания на кривой, описывающей трещину, в монографиях [7, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974.
2. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
3. *Работнов Ю. И.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
4. *Слепян Л. И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981.
5. *Левин В. А., Морозов Е. М., Матвиенко Ю. Г.* Избранные нелинейные задачи механики разрушения. М.: Физматлит, 2004.
6. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
7. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* Modelling and control in solid mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser Verl., 1997.
8. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
9. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
10. *Рудой Е. М.* Асимптотика функционала энергии для смешанной краевой задачи четвертого порядка в области с разрезом // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, №2. С. 430–445.
11. *Лазарев Н. П.* Дифференцирование функционала энергии в задаче о равновесии пластины, содержащей наклонную трещину // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика. 2003. Т. 3, вып. 2. С. 62–73.
12. *Неустроева Н. В.* Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика. 2009. Т. 9, вып. 4, С. 51–64.
13. *Хлуднев А. М.* Об одностороннем контакте двух пластин, расположенных под углом друг к другу // Прикл. математика и техн. физика. 2008. Т. 49, № 4. С. 42–58.

14. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
15. *Barbu V.* Optimal control of variational inequality. Boston: Pitman, 1984. (Res. Notes Math.; V. 100.)
16. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
17. *Lions J.-L.* Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des equations aux dérivées partielles. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1968.
18. *Lions J.-L.* Contrôle des systêmes distribués singuliers. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1968.
19. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Наука, 1982.
20. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
21. *Лазарев Н. П.* Итерационный метод штрафа для нелинейной задачи о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину // Сиб. журн. вычисл. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 397–408.
22. *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989.

г. Якутск *2 декабря 2010 г.*

УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*)

Г. А. Лукина

Краевые задачи с интегральными граничными условиями для параболических и гиперболических уравнений весьма активно исследуются в последнее время (см., например, [1–8]). В то же время работ, посвященных разрешимости краевых задач с граничными условиями интегрального вида для ультрапараболических уравнений, практически нет, можно отметить лишь работы [1, 2], в которых рассматривались краевые задачи в иных, нежели в настоящей работе, постановках.

1. Постановка задач

Пусть Ω — интервал (0,1) оси Ox, $Q = \Omega \times (0, T_1) \times (0, T_2)$, $0 < T_1 < +\infty$, $0 < T_2 < +\infty$. Далее, пусть $c(x,t,\tau)$, $f(x,t,\tau)$, $K_1(x,t,\tau)$, $K_2(x,t,\tau)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T_1]$, $\tau \in [0, T_2]$.

Краевая задача I. *Найти функцию $u(x,t,\tau)$, являющуюся в параллелепипеде Q решением уравнения*

$$u_t + u_\tau - u_{xx} + c(x,t,\tau)u = f(x,t,\tau) \tag{1.1}$$

*) Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. по мероприятию 1.3.1 и при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (код проекта № 02.740.11.0609).

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0,\tau)=0, \quad x\in\Omega,\ \tau\in(0,T_2), \tag{1.2}$$

$$u(x,t,0)=0, \quad x\in\Omega,\ t\in(0,T_1), \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} u(0,t,\tau)=\int\limits_0^1 K_1(x,t,\tau)u(x,t,\tau)\,dx, \\ u(1,t,\tau)=\int\limits_0^1 K_2(x,t,\tau)u(x,t,\tau)\,dx, \quad t\in(0,T_1),\tau\in(0,T_2). \end{gathered} \tag{1.4}$$

Краевая задача II. *Найти функцию $u(x,t,\tau)$, являющуюся в параллелепипеде Q решением уравнения* (1.1) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2), (1.3), *а также условия*

$$\begin{gathered} u_x(0,t,\tau)=\int\limits_0^1 K_1(x,t,\tau)u(x,t,\tau)\,dx, \\ u_x(1,t,\tau)=\int\limits_0^1 K_2(x,t,\tau)u(x,t,\tau)\,dx, \quad t\in(0,T_1),\ \tau\in(0,T_2). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Краевая задача III. *Найти функцию $u(x,t,\tau)$, являющуюся в параллелепипеде Q решением уравнения* (1.1) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2), (1.3), *а также условия*

$$\begin{gathered} u(0,t,\tau)=\int\limits_0^1 K_1(x,t,\tau)u(x,t,\tau)\,dx, \\ u_x(1,t,\tau)=\int\limits_0^1 K_2(x,t,\tau)u(x,t,\tau)\,dx, \quad t\in(0,T_1),\ \tau\in(0,T_2). \end{gathered} \tag{1.6}$$

2. Разрешимость краевой задачи I

Обозначим для краткости $V_0=W^{2,1,1}_{2,x,t,\tau}(Q)$, $V_1=W^{2,2,1}_{2,x,t,\tau}(Q)$; нормы в пространствах V_0, V_1 суть стандартные нормы в анизотропном соболевском пространстве.

Прежде чем доказывать разрешимость задачи I, заметим, что для функций $v(x,t,\tau)$ из пространства V_1 имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{T_1} v^2(0,t,\xi)\,dtd\xi \leqslant \delta\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^1 v_x^2(x,t,\tau)\,dxdtd\xi\\
&\qquad +C_1(\delta)\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^1 v^2(x,t,\tau)\,dxdtd\xi,\\
&\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{T_1} v^2(1,t,\tau)\,dtd\xi \leqslant \delta\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^1 v_x^2(x,t,\tau)\,dxdtd\xi\\
&\qquad +C_1(\delta)\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^1 v^2(x,t,\tau)\,dxdtd\xi,
\end{aligned}\tag{2.1}$$

в которых δ — произвольное положительное число, число C вычисляется вполне определенным образом через δ.

Проведем некоторые вспомогательные построения. Пусть B_iu — интегральные операторы, действие которых определяется равенствами

$$(B_iu)(t,\tau) = \int\limits_0^1 K_i(y,t,\tau)u(y,t,\tau)\,dy, \quad i=1,2,$$

где

$$w(x,t,\tau) = u(x,t,\tau) - (1-x)(B_1u)(t,\tau) - x(B_2u)(t,\tau). \tag{2.2}$$

Умножая (2.2) поочередно на $K_i(x,t,\tau)$, $i=1,2$, и интегрируя по x в пределах от 0 до 1, получим систему относительно $(B_1u)(t,\tau)$, $(B_2u)(t,\tau)$:

$$\begin{aligned}
&\left[1-\int\limits_0^1(1-x)K_1(x,t,\tau)\,dx\right](B_1u)(t,\tau)\\
&\qquad\qquad -\int\limits_0^1 xK_1(x,t,\tau)\,dx(B_2u)(t,\tau) = (B_1w)(t,\tau),
\end{aligned}$$

$$-\int_0^1 (1-x)K_2(x,t,\tau)\,dx(B_1u)(t,\tau)$$
$$+\left[1-\int_0^1 xK_2(x,t,\tau)\,dx\right](B_2u)(t,\tau)=(B_2w)(t,\tau).$$

Обозначим через $\Delta_1(t,\tau)$ определитель этой системы. Если он не равен нулю при $(t,\tau)\in[0,T_1]\times[0,T_2]$, то имеют место равенства

$$(B_1u)(t,\tau)=a_1(t,\tau)(B_1w)(t,\tau)+a_2(t,\tau)(B_2w)(t,\tau),$$

$$(B_2u)(t,\tau)=b_1(t,\tau)(B_1w)(t,\tau)+b_2(t,\tau)(B_2w)(t,\tau),$$

где функции $a_i(t,\tau)$, $b_i(t,\tau)$ вычисляются вполне определенным образом через $K_i(x,t,\tau)$, $i=1,2$.

Из этих равенств и из (2.2) следует, что функция $u(x,t,\tau)$ имеет представление через функцию $w(x,t,\tau)$:

$$u(x,t,\tau)=w(x,t,\tau)+A_{11}(x,t,\tau)(B_1w)(t,\tau)$$
$$+A_{21}(x,t,\tau)(B_2w)(t,\tau). \quad (2.3)$$

Определим операторы B и L:

$$(Bu)(x,t,\tau)=u(x,t,\tau)-(1-x)(B_1u)(t,\tau)-x(B_2u)(t,\tau),$$

$$Lu=u_t+u_\tau-u_{xx}+c(x,t,\tau)u.$$

Определим функцию

$$\Phi(x,t,\tau,u)=\int_0^1[-(1-x)K_1(y,t,\tau)-xK_2(y,t,\tau)]u_{yy}(y,t,\tau)\,dy$$
$$+\int_0^1[-(1-x)K_{1t}(y,t,\tau)-xK_{2t}(y,t,\tau)-(1-x)K_{1\tau}(y,t,\tau)-xK_{2\tau}(y,t,\tau)$$
$$+(c(x,t,\tau)-c(y,t,\tau))(-(1-x)K_1(y,t,\tau)-xK_2(y,t,\tau))]u(y,t,\tau)\,dy.$$

Продолжая $\Phi(x,t,\tau,u)$ с помощью (2.3), получим представление:

$$\Phi(x,t,\tau,u) = \Phi_1(x,t,\tau,w)$$
$$= \int\limits_0^1 N_{11}(x,y,t,\tau)w_{yy}(y,t,\tau)\,dy + \int\limits_0^1 N_{21}(x,y,t,\tau)w(y,t,\tau)\,dy,$$

в котором $N_{i1}(x,y,t,\tau)$ есть функции, вычисляемые через функции $c(x,t,\tau)$, $K_i(x,t,\tau)$, $i=1,2$.

Интегрируя по частям, преобразуем функцию $\Phi_1(x,t,\tau,w)$ к виду

$$\Phi_1(x,t,\tau,w) = \widetilde{\Phi}_1(x,t,\tau,w)$$
$$= -\int\limits_0^1 N_{11y}(x,y,t,\tau)w_y(y,t,\tau)\,dy + \int\limits_0^1 N_{21}(x,y,t,\tau)w(y,t,\tau)\,dy$$
$$+ N_{11}(x,1,t,\tau)w_y(1,t,\tau) - N_{11}(x,0,t,\tau)w_y(0,t,\tau).$$

Используя неравенство Гёльдера, нетрудно получить оценку

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^1 \widetilde{\Phi}_1^2\,dxdtd\xi$$
$$\leqslant N_{01}\left[\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^1 w_x^2(x,t,\xi)\,dxdtd\xi + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^1 w^2(x,t,\xi)\,dxdtd\xi\right.$$
$$\left. + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^{T_1} w_x^2(1,t,\xi)\,dtd\xi + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^{T_1} w_x^2(0,t,\xi)\,dtd\xi\right], \qquad (2.4)$$

в которой постоянная N_{01} определяется функциями $c(x,t,\tau)$, $K_i(x,t,\tau)$, $i=1,2$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,t,\tau) \in C^1(\overline{Q}), \quad K_i(x,t,\tau) \in C^2(\overline{Q}),\ i=1,2; \qquad (2.5)$$

$$\Delta_1(t,\tau) \neq 0 \quad \forall t \in [0,T_1],\ \forall \tau \in [0,T_2]; \qquad (2.6)$$

$$f(x,t,\tau) \in L_2(Q), \quad f_\tau(x,t,\tau) \in L_2(Q). \qquad (2.7)$$

Тогда краевая задача I *имеет решение* $u(x,t,\tau)$, *принадлежащее пространству* V_0.

Доказательство. Пусть $g(x,t,\tau)$ — заданная функция такая, что $g(x,t,\tau) \in L_2(Q)$, $g_\tau(x,t,\tau) \in L_2(Q)$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию $w(x,t,\tau)$, являющуюся в параллелепипеде Q решением уравнения*

$$w_t + w_\tau - w_{xx} + c(x,t,\tau)w = g(x,t,\tau) + \widetilde{\Phi}_1(x,t,\tau,w) \tag{2.8}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{gathered} w(x,0,\tau) = 0, \quad x \in \Omega,\ \tau \in (0,T_2), \\ w(x,t,0) = 0, \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T_1), \\ w(0,t,\tau) = w(1,t,\tau) = 0, \quad t \in (0,T_1),\ \tau \in (0,T_2). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Разрешимость рассматриваемой краевой задачи для уравнения (2.8) докажем, используя метод регуляризации и метод продолжения по параметру.

Пусть ε — фиксированное положительное число. Рассмотрим краевую задачу с параметром ε: *найти функцию $w(x,t,\tau)$, являющуюся в параллелепипеде Q решением уравнения*

$$-\varepsilon w_{tt} + w_t + w_\tau - w_{xx} + c(x,t,\tau)w = g(x,t,\tau) + \widetilde{\Phi}_1(x,t,\tau,w) \tag{2.8_ε}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{gathered} w(x,0,\tau) = w_t(x,T_1,\tau) = 0, \quad x \in \Omega,\ \tau \in (0,T_2), \\ w(x,t,0) = 0, \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T_1), \\ w(0,t,\tau) = w(1,t,\tau) = 0, \quad t \in (0,T_1),\ \tau \in (0,T_2). \end{gathered} \tag{2.9*}$$

Пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию $w(x,t,\tau)$, являющуюся в параллелепипеде Q решением уравнения*

$$-\varepsilon w_{tt} + w_t + w_\tau - w_{xx} + c(x,t,\tau)w = g(x,t,\tau) + \lambda\widetilde{\Phi}_1(x,t,\tau,w) \tag{$2.8_{\varepsilon,\lambda}$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.9*).

Разрешимость рассматриваемой краевой задачи для уравнения ($2.8_{\varepsilon,\lambda}$) докажем с помощью теоремы о методе продолжения по параметру [9].

Обозначим через Λ множество всех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача $(2.8_{\varepsilon,\lambda})$, (2.9^*) имеет решение $w(x,t,\tau)$ такое, что $w(x,t,\tau) \in V_1$, $w_\tau(x,t,\tau) \in V_1$ при выполнении всех условий теоремы 1, фиксированном ε и любой функции $g(x,t,\tau)$ такой, что $g(x,t,\tau) \in L_2(Q)$, $g_\tau(x,t,\tau) \in L_2(Q)$. Если мы покажем, что множество Λ непусто, открыто и замкнуто, то оно, как известно (см. [9]), будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$.

Заметим, что из уравнения $(2.8_{\varepsilon,\lambda})$ вытекает принадлежность функции $w_\tau(x,t,0)$ пространству $L_2(\Omega \times [0,T_1])$.

Краевая задача $(2.8_{\varepsilon,0})$, (2.9^*) при выполнении условия (2.5) и в силу принадлежности $g(x,t,\tau)$ и $g_\tau(x,t,\tau)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $w(x,t,\tau)$ такое, что $w(x,t,\tau) \in V_1$, $w_\tau(x,t,\tau) \in V_1$ (см. [10, 11]). Из этого следует, что число 0 принадлежит Λ и тем самым множество Λ непусто.

Открытость и замкнутость множества Λ доказывается с помощью априорных оценок. Установим их наличие.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_0^1 [-\varepsilon w_{tt} + w_t + w_\xi - w_{xx} + c(x,t,\xi)w](w - w_{xx})\, dxdtd\xi$$
$$= \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_0^1 [g(x,t,\xi) + \lambda \widetilde{\Phi}_1(x,t,\xi,w)](w - w_{xx})\, dxdtd\xi.$$

Интегрируя по частям, используя указанные выше граничные и начальные условия для функции $w(x,t,\tau)$, неравенство Юнга и неравенства (2.4), (2.1), получим неравенство

$$\int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_0^1 \left[\varepsilon w_{xt}^2 + w_{xx}^2 + \varepsilon w_t^2 + w_x^2\right] dxdtd\xi$$
$$+ \int_0^{T_1} \int_0^1 \left[w^2(x,t,\tau) + w_x^2(x,t,\tau)\right] dxdt$$

$$+\int_0^\tau\int_0^1 \left[w^2(x,T_1,\xi)+w_x^2(x,T_1,\xi)\right]dxd\xi$$

$$\leqslant \widetilde{N}_{01}\left\{\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_0^1 g^2(x,t,\xi)\,dxdtd\xi+\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_0^1 w_x^2\,dxdtd\xi+\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_0^1 w^2\,dxdtd\xi\right.$$

$$\left.+\left[\delta\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_0^1 w_{xx}^2\,dxdtd\xi+C(\delta)\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_0^1 w_x^2\,dxdtd\xi\right]\right\}.$$

Далее, подбирая число δ малым и применяя неравенство Гронуолла, нетрудно получить оценку

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_0^1 \left[\varepsilon w_{xt}^2+w_{xx}^2\right]dxdtd\xi$$

$$+\int_0^{T_1}\int_0^1 \left[w^2(x,t,\tau)+w_x^2(x,t,\tau)\right]dxdt\leqslant M_1 \qquad (2.10)$$

с постоянной M_1, определяющейся функциями $c(x,t,\tau)$, $K_i(x,t,\tau)$, $i=1,2$, и $g(x,t,\tau)$.

Заметим, что из (2.10) и (2.4) следует оценка

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_0^1 \widetilde{\Phi}_1^2\,dxdtd\xi\leqslant M_2 \qquad (2.11)$$

с постоянной M_2, определяющейся функциями $c(x,t,\tau)$, $K_i(x,t,\tau)$, $i=1,2$.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_0^1 [-\varepsilon w_{tt\xi}+w_{t\xi}+w_{\xi\xi}-w_{xx\xi}$$

$$+c(x,t,\xi)w_\xi+c_\xi(x,t,\xi)w](w_\xi-w_{xx\xi})\,dxdtd\xi$$

$$=\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_0^1 [g_\xi(x,t,\xi)+\lambda\widetilde{\Phi}_{1\xi}(x,t,\xi,w)](w_\xi-w_{xx\xi})\,dxdtd\xi.$$

Вновь интегрируя по частям, используя указанные выше граничные и начальные условия для функции $w(x,t,\tau)$, от данного равенства переходим к следующему:

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_0^1 \left[\varepsilon w_{xt\xi}^2 + w_{xx\xi}^2 + \varepsilon w_{t\xi}^2 + w_{x\xi}^2 + c(x,t,\xi)w_\xi^2\right] dxdtd\xi$$
$$+\frac{3}{2}\int_0^{T_1}\int_0^1 \left[w_\tau^2(x,t,\tau) + w_{x\tau}^2(x,t,\tau)\right] dxdt$$
$$-\frac{3}{2}\int_0^{T_1}\int_0^1 \left[w_\tau^2(x,t,0) + w_{x\tau}^2(x,t,0)\right] dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\tau}\int_0^1 \left[w_\xi^2(x,T_1,\xi) + w_{x\xi}^2(x,T_1,\xi)\right] dxd\xi$$
$$=\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_0^1 [-c_\xi(x,t,\xi)ww_\xi + g_\xi(x,t,\xi)w_\xi$$
$$+\widetilde{\Phi}_{1\xi}(x,t,\xi,w)w_\xi + c(x,t,\xi)w_\xi w_{xx\xi} + c_\xi(x,t,\xi)ww_{xx\xi}$$
$$-g_\xi(x,t,\xi)w_{xx\xi} - \widetilde{\Phi}_{1\xi}(x,t,\xi,w)w_{xx\xi}]\, dxdtd\xi.$$

Повторяя действия, проделанные на предыдущем шаге, приходим к оценке

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_0^1 \left[\varepsilon w_{xt\xi}^2 + w_{xx\xi}^2\right] dxdtd\xi$$
$$+\int_0^{T_1}\int_0^1 \left[w_\tau^2(x,t,\tau) + w_{x\tau}^2(x,t,\tau)\right] dxdt \leqslant M_3 \quad (2.12)$$

с постоянной M_3, определяющейся функциями $c(x,t,\tau)$, $K_i(x,t,\tau)$, $i = 1,2$, и $g(x,t,\tau)$.

Заметим, что имеет место следующая оценка:

$$\int_0^{\tau}\int_0^{T_1}\int_0^1 \widetilde{\Phi}_{1\xi}^2\,dxdtd\xi \leqslant M_4 \tag{2.13}$$

с постоянной M_4, определяющейся функциями $c(x,t,\tau)$, $K_i(x,t,\tau)$, $i = 1,2$.

Анализируя равенство

$$\int_0^{\tau}\int_0^{T_1}\int_0^1 [-\varepsilon w_{tt\xi} + w_{t\xi} + w_{\xi\xi} - w_{xx\xi} + c(x,t,\xi)w_\xi + c_\xi(x,t,\xi)w]w_{\xi\xi}\,dxdtd\xi = \int_0^{\tau}\int_0^{T_1}\int_0^1 [g_\xi(x,t,\xi) + \lambda\widetilde{\Phi}_{1\xi}(x,t,\xi,w)]w_{\xi\xi}\,dxdtd\xi$$

и используя неравенства (2.10), (2.12), получим оценку

$$\int_0^{\tau}\int_0^{T_1}\int_0^1 w_{\xi\xi}^2\,dxdtd\xi \leqslant M_5 \tag{2.14}$$

с постоянной M_5, определяющейся функциями $c(x,t,\tau)$, $K_i(x,t,\tau)$, $i = 1,2$, и $g(x,t,\tau)$.

Рассматривая равенство

$$-\varepsilon\int_0^{\tau}\int_0^{T_1}\int_0^1 [-\varepsilon w_{tt\xi} + w_{t\xi} + w_{\xi\xi} - w_{xx\xi} + c(x,t,\xi)w_\xi + c_\xi(x,t,\xi)w]w_{tt\xi}\,dxdtd\xi = -\varepsilon\int_0^{\tau}\int_0^{T_1}\int_0^1 [g_\xi(x,t,\xi) + \lambda\widetilde{\Phi}_{1\xi}(x,t,\xi,w)]w_{tt\xi}\,dxdtd\xi$$

и используя доказанные оценки, получаем, что очевидным образом следует оценка

$$\varepsilon^2\int_0^{\tau}\int_0^{T_1}\int_0^1 w_{tt\xi}^2\,dxdtd\xi \leqslant M_6 \tag{2.15}$$

с постоянной M_6, определяющейся функциями $c(x,t,\tau)$, $K_i(x,t,\tau)$, $i = 1,2$, и $g(x,t,\tau)$.

Из (2.15) вытекает оценка

$$\varepsilon^2 \int\limits_0^{\tau} \int\limits_0^{T_1} \int\limits_0^{1} w_{tt}^2 \, dxdtd\xi \leqslant M_7 \tag{2.16}$$

с постоянной M_7, определяющейся функциями $c(x,t,\tau)$, $K_i(x,t,\tau)$, $i = 1,2$, и $g(x,t,\tau)$.

Все оценки (2.10)–(2.16) дают очевидную априорную оценку

$$\|w\|_{V_1} + \|w_\tau\|_{V_1} \leqslant M_0. \tag{2.17}$$

Как уже говорилось выше, этой оценки достаточно для применения теоремы о методе продолжения по параметру. Следовательно, при выполнении условий теоремы 1 краевая задача ($2.8_{\varepsilon,\lambda}$), (2.9*) имеет решение $w(x,t,\tau)$, принадлежащее пространству V_1, при всех значениях λ, в том числе и при $\lambda = 1$.

Априорной оценки (2.17) также вполне достаточно и для перехода в семействе решений задачи (2.8_ε), (2.9*) к пределу при $\varepsilon \to 0$, предельная функция $w(x,t,\tau)$ будет решением краевой задачи (2.8), (2.9), принадлежащим пространству V_1.

Определим теперь функцию $u(x,t,\tau)$ с помощью (2.3). Справедливо равенство

$$BLu = (Lw)(x,t,\tau) - \widetilde{\Phi}_1(x,t,\tau,w) = g(x,t,\tau). \tag{2.18}$$

Выберем $g(x,t,\tau)$ специальным образом: $g(x,t,\tau) = (Bf)(x,t,\tau)$. Следовательно, функция $u(x,t,\tau)$ есть требуемое решение краевой задачи I. Принадлежность $u(x,t,\tau)$ пространству V_0 очевидна.

Теорема 1 доказана.

3. Разрешимость краевых задач II и III

Вновь проведем некоторые вспомогательные построения. Пусть $B_i u$ суть интегральные операторы, определенные в п. 2, $w(x,t,\tau)$ —

функция

$$w(x,t,\tau) = u(x,t,\tau) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)(B_1 u)(t,\tau) - \frac{x^2}{2}(B_2 u)(t,\tau). \qquad (3.1)$$

Умножая (3.1) поочередно на $K_i(x,t,\tau)$, $i = 1,2$, и интегрируя по x в пределах от 0 до 1, получим систему относительно $(B_1 u)(t,\tau)$, $(B_2 u)(t,\tau)$:

$$\left[1 - \int\limits_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) K_1(x,t,\tau)\,dx\right](B_1 u)(t,\tau) - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2} K_1(x,t,\tau)\,dx (B_2 u)(t,\tau) = (B_1 w)(t,\tau),$$

$$-\int\limits_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) K_2(x,t,\tau)\,dx (B_1 u)(t,\tau) + \left[1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2} K_2(x,t,\tau)\,dx\right](B_2 u)(t,\tau) = (B_2 w)(t,\tau).$$

Обозначим через $\Delta_2(t,\tau)$ определитель этой системы. Если он не равен нулю при $(t,\tau) \in [0,T_1] \times [0,T_2]$, то вновь можно выразить функции $(B_i u)(t,\tau)$ через функции $(B_i w)(t,\tau)$, $i = 1,2$. Снова функция $u(x,t,\tau)$ имеет представление через функцию $w(x,t,\tau)$:

$$u(x,t,\tau) = w(x,t,\tau) + A_{12}(x,t,\tau)(B_1 w)(t,\tau) + A_{22}(x,t,\tau)(B_2 w)(t,\tau). \qquad (3.2)$$

Определим оператор B:

$$(Bu)(x,t,\tau) = u(x,t,\tau) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)(B_1 u)(t,\tau) - \frac{x^2}{2}(B_2 u)(t,\tau).$$

Определим функцию

$$\Phi(x,t,\tau,u) = \int\limits_0^1 \left[-\left(x - \frac{x^2}{2}\right) K_1(y,t,\tau) - \frac{x^2}{2} K_2(y,t,\tau)\right] u_{yy}(y,t,\tau)\,dy$$

$$+\int_0^1\Bigg[-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)K_{1t}(y,t,\tau)-\frac{x^2}{2}K_{2t}(y,t,\tau)$$
$$-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)K_{1\tau}(y,t,\tau)-\frac{x^2}{2}K_{2\tau}(y,t,\tau)$$
$$+(c(x,t,\tau)-c(y,t,\tau))\left(-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)K_1(y,t,\tau)-\frac{x^2}{2}K_2(y,t,\tau)\right)\Bigg]u(y,t,\tau)\,dy.$$

Продолжая функцию $\Phi(x,t,\tau,u)$ с помощью (3.2), получим представление:

$$\Phi(x,t,\tau,u)=\Phi_2(x,t,\tau,w)$$
$$=\int_0^1 N_{12}(x,y,t,\tau)w_{yy}(y,t,\tau)\,dy+\int_0^1 N_{22}(x,y,t,\tau)w(y,t,\tau)\,dy,$$

в котором $N_{i2}(x,y,t,\tau)$ суть функции, вычисляемые через функции $c(x,t,\tau)$, $K_i(x,t,\tau)$, $i=1,2$.

Интегрируя по частям, преобразуем функцию $\Phi_2(x,t,\tau,w)$ к виду

$$\Phi_1(x,t,\tau,w)=\widetilde{\Phi}_2(x,t,\tau,w)$$
$$=-\int_0^1 N_{12y}(x,y,t,\tau)w_y(y,t,\tau)\,dy+\int_0^1 N_{22}(x,y,t,\tau)w(y,t,\tau)\,dy.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,t,\tau)\in C^1(\overline{Q}),\quad K_i(x,t,\tau)\in C^2(\overline{Q}),\ i=1,2;$$
$$\Delta_2(t,\tau)\neq 0\quad \forall t\in[0,T_1],\ \forall\tau\in[0,T_2];$$
$$f(x,t,\tau)\in L_2(Q),\quad f_\tau(x,t,\tau)\in L_2(Q).$$

Тогда краевая задача II *имеет решение* $u(x,t,\tau)$, *принадлежащее пространству* V_0.

Данная теорема доказывается полностью аналогично доказательству теоремы 1. Именно, вновь рассматриваем вспомогательную краевую задачу: *найти функцию* $w(x,t,\tau)$, *являющуюся в параллелепипеде* Q *решением уравнения*

$$w_t+w_\tau-w_{xx}+c(x,t,\tau)w=g(x,t,\tau)+\widetilde{\Phi}_2(x,t,\tau,w)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x,0,\tau)=0, \quad x\in\Omega,\ \tau\in(0,T_2),$$

$$w(x,t,0)=0, \quad x\in\Omega,\ t\in(0,T_1),$$

$$w_x(0,t,\tau)=w_x(1,t,\tau)=0, \quad t\in(0,T_1),\ \tau\in(0,T_2).$$

Используя метод регуляризации, метод продолжения по параметру и априорные оценки, устанавливаем ее разрешимость. Выбирая функцию $g(x,t,\tau)$ специальным образом и переходя к уравнению вида (2.18), получаем требуемое решение.

Для доказательства краевой задачи III вновь проведем некоторые вспомогательные построения. Пусть B_iu — интегральные операторы, определенные в п. 2, $w(x,t,\tau)$ — функция

$$w(x,t,\tau)=u(x,t,\tau)-(B_1u)(t,\tau)-x(B_2u)(t,\tau). \tag{3.3}$$

Обозначим через $\Delta_3(t,\tau)$ определитель системы относительно $(B_1u)(t,\tau)$, $(B_2u)(t,\tau)$, полученной из (3.3) умножением поочередно на $K_i(x,t,\tau)$, $i=1,2$, и интегрированием по x в пределах от 0 до 1.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,t,\tau)\in C^1(\overline{Q}), \quad K_i(x,t,\tau)\in C^2(\overline{Q}),\ i=1,2;$$

$$\Delta_3(t,\tau)\neq 0 \quad \forall t\in[0,T_1],\ \forall\tau\in[0,T_2];$$

$$f(x,t,\tau)\in L_2(Q), \quad f_\tau(x,t,\tau)\in L_2(Q).$$

Тогда краевая задача III *имеет решение* $u(x,t,\tau)$, *принадлежащее пространству* V_0.

Данная теорема доказывается полностью аналогично доказательству теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bouziani A.* Strong solution for a mixed problem with nonlocal condition for certain pluriparabolic equation // Hiroshima Math. J. 1997. V. 27. N 3.
2. *Bouziani A.* On the solvability of nonlocal pluriparabolic problems // Electronic J. Differential Equations. 2001. N. 21. P. 1–16.
3. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача для уравнения теплопроводности // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2005. С. 231–239.
4. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, N 9. С. 1166–1179.
5. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с двумя интегральными условиями для гиперболического уравнения на плоскости // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2007. С. 232–236.
6. *Абдрахманов А. М., Кожанов А. И.* Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка // Изв. вузов. Математика. 2007. N. 5. С. 3–12.
7. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Мат. журн. Алматы. 2009. Т. 9, № 2. С. 78–92.
8. *Абдрахманов А. М.* О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнения нечетного порядка // Мат. заметки. 2010. Т. 88, вып. 2. С. 163–172.
9. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
10. *Ладыженская О.А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1973.
11. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

г. Мирный *20 июля 2011 г.*

УДК 517.946

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ*)

С. С. Павлов

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) с гладкой границей Γ, $\Gamma = \partial\Omega$, $S = \Gamma \times (0,T)$; Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$. Далее, пусть $a(x,t)$, $K(x,t)$, $f(x,t)$, $\psi(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Обратная задача I. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в Q уравнением*

$$u_{tt} - a(x,t)\Delta u + q(t)u_t = f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ начальных условий

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

граничного условия

$$u|_S = 0, \tag{3}$$

а также с условия переопределения

$$\int\limits_{\Omega} K(x,t)u(x,t)\,dx = \psi(t). \tag{4}$$

Обратная задача II. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в Q уравнением*

$$u_{tt} - \Delta u + \lambda(t)u_t + q(t)u = f(x,t), \tag{5}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации № 02.740.11.0609.

при выполнении для функции $u(x,t)$ *условий* (2)–(4).

В изучаемых обратных задачах I, II условия (2), (3) суть условия обычной первой начально-краевой задачи, условие (4) есть условие переопределения; наличие этого условия объясняется тем, что помимо неизвестного решения $u(x,t)$ требуется найти также неизвестную функцию $q(t)$. Подобные обратные задачи ранее изучались в работах И. Р. Валитова [1–3], но лишь в одномерном случае. Заметим следующее. Метод, применяемый в настоящей работе, близок к методу работ [1–3], но вместе с тем имеет и отличие. Тем самым полученные ниже теоремы существования будут новыми и для случая $n=1$.

Положим

$$C_1 = \max_{[0,T]}\Bigl(\int\limits_\Omega K_{tt}^2(x,t)\,dx\Bigr)^{\frac{1}{2}}, \quad C_2 = \max_{[0,T]}\Bigl(\int\limits_\Omega K_t^2(x,t)\,dx\Bigr)^{\frac{1}{2}},$$

$$C_3 = \max_{[0,T]}\Bigl(\int\limits_\Omega K^2(x,t)a^2(x,t)\,dx\Bigr)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, пусть c_0 — число такое, что для любой функции $v(x,t)$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_\Omega v^2(x,t)\,dx \leqslant c_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_{x_i}^2(x,t)\,dx, \tag{$*$}$$

c_0 определяется областью Ω (см. [4]).

Продолжим обозначения:

$$f_0(t) = \int\limits_\Omega K(x,t)f(x,t)\,dx, \quad \alpha(t) = f_0(t) - \psi''(t);$$

$$N_0 = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f^2(x,\tau)\,dxd\tau + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega a(x,0)u_{0\,x_i}^2(x)\,dx + \int\limits_\Omega u_1^2(x)\,dx;$$

$$a_0 = \min_{\overline{Q}} a(x,t), \quad \bar{\alpha} = \min_{[0,T]} \alpha(t), \quad k_0 = \min_{[0,T]} \psi'(t);$$

$$a_1 = \max_{i=1,\dots,n} \max_{\overline{Q}} |a_{x_i}(x,t)|, \quad b_0 = \min(1,a_0), \quad A_0 = \max_{\overline{Q}}(a^2(x,t));$$

$$N_1 = \frac{N_0}{b_0}\exp\left(\frac{1+a_1}{b_0}T\right);$$

$$N_2 = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{1x_i}^2(x)\,dx + \int\limits_{\Omega} a(x,0)\,[\Delta u_0(x)]^2\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} f^2(x,t)\,dxdt \quad (\varepsilon > 0);$$

$$K_0 = \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} f_t^2(x,t)\,dxdt + \frac{2}{a_0}\max_{[0,T]}\int\limits_{\Omega} f^2(x,t)\,dx + 2\left|\int\limits_{\Omega} f(x,0)\Delta u_0(x)\,dx\right| + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{1x_i}^2(x)\,dx + \int\limits_{\Omega} a(x,0)[\Delta u_0(x)]^2\,dx;$$

$$K_1 = \frac{1}{b_0}\exp\left(\frac{1+a_0}{b_0}T\right), \quad B_1 = K_0\exp\left(\frac{2T}{a_0}\right), \quad B_2 = B_1T + K_0;$$

$$M_1 = C_3B_1^{\frac{1}{2}} + 2C_2N_1^{\frac{1}{2}} + C_1(c_0N_1)^{\frac{1}{2}};$$

$$M_2 = C_2(c_0N_1)^{\frac{1}{2}}, \quad A_1 = \frac{1}{k_0 - M_2}\max_{[0,T]}|\alpha(t)|;$$

$$K_2 = 3\left(1 + \frac{A_0T}{\varepsilon\,a_0} + \left(A_1 + \frac{M_1}{k_0 - M_2}\right)TK_1\right);$$

$$N_3 = 3A_0N_2T + 12A_1^2N_1 + 3\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} f^2(x,t)\,dxd\tau + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{1x_i}^2\,dx;$$

$$N_4 = \frac{12C_1^2c_0}{(k_0 - M_2)^2}N_1, \quad N_5 = \frac{48C_2^2}{(k_0 - M_2)^2}N_1, \quad N_6 = \frac{3C_3^2}{(k_0 - M_2)^2}N_1.$$

Определим нужное ниже пространство:

$$V = \big\{v(x,t):\ v(x,t) \in W_2^2(Q) \cap L_2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big),\ v_t(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big)\big\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$a(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad K(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \quad \psi(t) \in C^2([0,T]);$$

$$a_0 > 0, \quad \bar{\alpha} > 0, \quad k_0 > 0, \quad a_t(x,t) \leqslant 0, \quad 0 < M_2 < k_0, \quad \bar{\alpha} \geqslant M_1,$$

$$\int\limits_{\Omega} K(x,0)u_0(x)\,dx = \psi(0),$$

$$\int\limits_{\Omega} K(x,0)u_1(x)\,dx + \int\limits_{\Omega} K_t(x,0)u_0(x)\,dx = \psi'(0).$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, и для любых функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$ таких, что $u_0(x) \in W_2^2(Q) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, $u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, обратная задача I *имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $q(t) \in L_2([0,T])$.*

Доказательство. Вначале выполним вспомогательные построения. Умножим уравнение (1) на функцию $K(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω. Получим

$$\psi''(t) - 2\int\limits_{\Omega} K_t(x,t)u_t(x,t)\,dx - \int\limits_{\Omega} K_{tt}(x,t)u(x,t)\,dx$$
$$- \int\limits_{\Omega} a(x,t)\Delta u\,dx + q(t)\left[\psi'(t) - \int\limits_{\Omega} K_t(x,t)u(x,t)\,dx\right] = f_0(t).$$

Отсюда

$$q(t) = \frac{\alpha(t) + \varphi_1(t,u)}{\psi'(t) - \varphi_2(t,u)},$$

$$\varphi_1(t,u) = \int\limits_{\Omega} K(x,t)a(x,t)\Delta u(x,t)\,dx$$
$$+ 2\int\limits_{\Omega} K_t(x,t)u_t(x,t)\,dx + \int\limits_{\Omega} K_{tt}(x,t)u(x,t)\,dx,$$

$$\varphi_2(t,u) = \int\limits_{\Omega} K_t(x,t)u(x,t)\,dx.$$

Рассмотрим новую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} - a(x,t)\Delta u + q(t,u)u_t = f(x,t) \tag{6}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Для доказательства разрешимости данной задачи воспользуемся методами регуляризации, срезок и неподвижной точки.

Определим срезающие функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$:

$$G_1(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leqslant M_1, \\ M_1, & \text{если } \xi > M_1, \\ -M_1, & \text{если } \xi < -M_1; \end{cases}$$

$$G_2(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leqslant M_2, \\ M_2, & \text{если } \xi > M_2, \\ -M_2, & \text{если } \xi < -M_2. \end{cases}$$

С помощью функций $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ по заданной функции $v(x,t)$ определим функцию $\tilde{q}(t,v)$:

$$\tilde{q}(t,v) = \frac{\alpha(t) + G_1(\varphi_1(t,v))}{\psi'(t) - G_2(\varphi_2(t,v))}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} - a(x,t)\Delta u - \tilde{q}(t,u)u_t - \varepsilon\Delta u_t = f(x,t) \tag{6_ε}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Пусть $v(x,t)$ — заданная функция из пространства V.

Рассмотрим линейную задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} - a(x,t)\Delta u + \tilde{q}(t,v)u_t - \varepsilon\Delta u_t = f(x,t) \tag{$6_{\varepsilon,v}$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Поскольку функция $\tilde{q}(t,v)$ ограничена, получаем, что краевая задача ($6_{\varepsilon,v}$) (2), (3) порождает оператор Φ, переводящий пространство V

в себя: $\Phi(v) = u$ [5, 6]. Покажем, что оператор Φ имеет в пространстве V неподвижную точку. Воспользуемся теоремой Шаудера.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega (u_{\tau\tau} - a\Delta u + \tilde{q}(\tau, v)u_\tau - \varepsilon\Delta u_\tau)u_\tau \, dxd\tau = \int_0^t \int_\Omega f u_\tau \, dxd\tau, \qquad (7)$$

являющееся следствием уравнения $(6_{\varepsilon,v})$. От этого равенства нетрудно перейти к неравенству

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx + \varepsilon\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega u_{x_i\tau}^2(x,t)\,dxd\tau$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega \tilde{q}(\tau,v)u_\tau^2(x,t)\,dxd\tau \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega u_\tau^2(x,t)\,dxd\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega f^2(x,t)\,dxd\tau$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega a(x,0)u_{0x_i}^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega u_1^2(x)\,dx$$
$$+ \frac{a_1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega u_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{a_1}{2}\int_0^t \int_\Omega u_\tau^2(x,t)\,dxd\tau. \qquad (8)$$

Учитывая, что по построению функция $\tilde{q}(t,v)$ неотрицательна, получаем неравенство

$$\int_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx$$
$$\leqslant \frac{(1+a_1)}{b_0}\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega \left(u_t^2(x,t) + u_{x_i}^2(x,t)\right)dxd\tau + \frac{N_0}{b_0}.$$

Используя далее лемму Гронуолла, приходим к оценке

$$\int_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx \leqslant N_1. \qquad (9)$$

Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (u_{\tau\tau}-a\Delta u+\tilde q(\tau,v)u_\tau-\varepsilon\Delta u_\tau)\Delta u_\tau\,dxd\tau=-\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f(x,\tau)\Delta u_\tau\,dxd\tau, \tag{10}$$

также являющееся следствием уравнения ($6_{\varepsilon,v}$). Интегрируя слева по частям и применяя неравенство Юнга, приходим к следующей оценке:

$$\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_it}^2(x,t)\,dx+a_0\int\limits_\Omega[\Delta u(x,t)]^2\,dx$$
$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[\Delta u_\tau(x,t)]^2\,dxd\tau\leqslant N_2. \tag{11}$$

Теперь рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (u_{\tau\tau}-a\Delta u+\tilde q(\tau,v)u_\tau-\varepsilon\Delta u_\tau)u_{\tau\tau}\,dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f\,u_{\tau\tau}\,dxd\tau. \tag{12}$$

Имеют место следующие неравенства:

$$-\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a(x,\tau)\Delta u(x,t)\cdot u_{\tau\tau}(x,t)\,dxd\tau\leqslant\frac{\delta^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,t)\,dxd\tau$$
$$+\frac{\max(a^2(x,t))}{2\delta^2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(\Delta u(x,t))^2\,dxd\tau\leqslant\frac{\delta^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,t)\,dxd\tau+\frac{A_0}{2\delta^2}N_2T,$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\tilde q(\tau,v)u_\tau(x,t)u_{\tau\tau}(x,t)\,dxd\tau\leqslant\frac{\delta^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,t)\,dxd\tau$$
$$+\frac{1}{2\delta^2}\int\limits_0^t\tilde q^2(\tau,v)\Bigl(\int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dx\Bigr)\,d\tau$$
$$\leqslant\frac{\delta^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau+\frac{N_1}{2\delta^2}\int\limits_0^t\tilde q^2(\tau,v)\,d\tau.$$

Далее оценим $|\tilde{q}(\tau, v)|$:

$$|\tilde{q}| \leqslant \frac{1}{k_0 - M_2}\Bigg[\max_{[0,T]}|\alpha(t)| + C_1\Bigg(\int\limits_{\Omega} v^2(x,t)\,dx\Bigg)^{\frac{1}{2}} + 2C_2\Bigg(\int\limits_{\Omega} v_t^2(x,t)\,dx\Bigg)^{\frac{1}{2}} + C_3\Bigg(\int\limits_{\Omega}[\Delta v(x,t)]^2\,dx\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg]. \quad (13)$$

Отсюда

$$\tilde{q}^2(t,v) \leqslant 4A_1^2 + \frac{4C_1^2 c_0}{(k_0 - M_2)^2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_{x_i}^2(x,t)\,dx + \frac{16C_2^2}{(k_0 - M_2)^2}\int\limits_{\Omega} v_t^2(x,t)\,dx + \frac{C_3^2}{(k_0 - M_2)^2}\int\limits_{\Omega}[\Delta v(x,t)]^2\,dx.$$

Зафиксируем δ: $\delta^2 = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_{\tau\tau}^2 \leqslant N_3 + N_4\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} v_{x_i}^2(x,t)\,dxd\tau + N_5\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} v_\tau^2(x,t)\,dxd\tau + N_6\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}[\Delta v(x,t)]^2\,dxd\tau. \quad (14)$$

Пусть

$$W = \Bigg\{v(x,t) : \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} v_{tt}^2(x,t)\,dxd\tau \leqslant R_1, \max_{0\leqslant t\leqslant T}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_{x_i}^2(x,t)\,dx\Bigg) \leqslant R_2, \max_{0\leqslant t\leqslant T}\Bigg(\int\limits_{\Omega} v_t^2(x,t)\,dx\Bigg) \leqslant R_3, \max_{0\leqslant t\leqslant T}\Bigg(\int\limits_{\Omega}[v(x,t)]^2\,dx\Bigg) \leqslant R_4, \quad \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(\Delta v_t)^2\,dx \leqslant R_5\Bigg\}.$$

Покажем, что краевая задача $(6_{\varepsilon,v})$, (2), (3) при подходящем выборе чисел R_1–R_5 переводит множество W в себя.

Заметим, что вследствие оценок (9), (11) второе, третье, четвертое и пятое неравенства из определения множества W будут выполняться для решения $u(x,t)$ краевой задачи ($6_{\varepsilon,v}$), (2), (3), если $R_1 = N_3 + TN_4N_1 + TN_5N_1 + TN_6N_2$, $R_2 = N_1$, $R_3 = N_1$, $R_4 = N_2$, $R_5 = \frac{N_2}{\varepsilon}$.

Для функции u_{tt} выполняется неравенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2 \, dxd\tau \leqslant R_1.$$

Это следует из (14). При таком выборе чисел R_1–R_5 оператор Φ будет переводить W в себя.

Докажем, что оператор Φ непрерывен. Пусть последовательность $\{v_m(x,t)\}$ сходится в пространстве V к функции $v(x,t)$. Положим $u_m = \Phi v_m, u = \Phi(v)$, $w_m(x,t) = u_m(x,t) - u(x,t)$, $F(x,t) = [\tilde{q}(t,v) - \tilde{q}(t,v_m)]u_t$.

Функции $w_m(x,t)$ представляют собой решения краевой задачи

$$w_{mtt} - a\Delta w_m - \varepsilon\Delta w_{mt} + \tilde{q}(t,v_m)w_{mt} = F(x,t),$$

$$w_m(x,0) = 0, \quad w_{mt}(x,0) = 0,$$

$$w_m(x,t)|_S = 0.$$

Для функций $w_m(x,t)$ имеют место неравенства

$$\int\limits_\Omega w_{mt}^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega w_{mx_i}^2(x,t)\,dx + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega w_{mx_i\tau}^2(x,t)\,dxd\tau \leqslant K_1 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega F^2(x,t)\,dxd\tau,$$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega w_{mx_it}^2(x,t)\,dx + a_0 \int\limits_\Omega [\Delta w_m(x,t)]^2\,dx + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta w_{m\tau}(x,t))^2\,dxd\tau \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega F^2(x,t)\,dxd\tau,$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega w_{m\tau\tau}^2(x,t)\,dxd\tau \leqslant K_2 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega F^2(x,t)\,dxd\tau.$$

Далее,

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega F^2(x,t)\,dxd\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega [\tilde q(\tau,v) - \tilde q(\tau,v_m)]^2 u_\tau^2(x,t)\,dxd\tau$$

$$= \int\limits_0^t [\tilde q(\tau,v) - \tilde q(\tau,v_m)]^2 \int\limits_\Omega u_\tau^2(x,t)\,dxd\tau \leqslant N_1 \int\limits_0^t [\tilde q(\tau,v) - \tilde q(\tau,v_m)]^2 d\tau.$$

Имеет место равенство

$$\begin{aligned}\tilde q(\tau,v) - \tilde q(\tau,v_m) = {} & \frac{1}{(\psi'(\tau) - G_2(\varphi_2(\tau,v)))(\psi'(\tau) - G_2(\varphi_2(\tau,v_m)))} \\ & \times [\alpha(\tau)[G_2(\varphi_2(\tau,v)) - G_2(\varphi_2(\tau,v_m))] - \psi'(\tau)[G_1(\varphi_1(\tau,v)) \\ & - G_1(\varphi_1(\tau,v_m))] - G_1(\varphi_1(\tau,v))G_2(\varphi_2(\tau,v_m)) \\ & + G_1(\varphi_1(\tau,v_m))G_2(\varphi_2(\tau,v))].\end{aligned}$$

Неравенство $\psi'(t) - G_2(\xi) \geqslant k_0 - M_2 > 0$, ограниченность функций $\alpha(t)$, $\psi'(t)$, $G_1(\varphi_1(\tau,v))$, $G_2(\varphi_2(\tau,v))$ и липшицевость функций $G_1(\xi)$, $G_2(\xi)$ позволяют получить неравенство

$$|\tilde q(\tau,v) - \tilde q(\tau,v_m)|^2 \leqslant M_3(|\varphi_1(\tau,v_m - v)|^2 + |\varphi_2(\tau,v_m - v)|^2)$$

с постоянной M_3, определяющейся функциями M_1 и M_2. Отсюда

$$\begin{aligned}&\int\limits_\Omega w_{mt}^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega w_{mx_i}^2(x,t)\,dx + a_0 \int\limits_\Omega [\Delta w_m(x,t)]^2\,dx \\ &+ \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega w_{mx_it}^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega w_{m\tau\tau}^2(x,t)\,dxd\tau + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta w_{m\tau})^2(x,t)\,dxd\tau \\ &\qquad \leqslant K_3 \int\limits_0^t \Bigg(\int\limits_\Omega [\Delta v_m(x,\tau) - \Delta v(x,\tau)]^2\,dx \\ &\qquad + \int\limits_\Omega [v_{m\tau}(x,\tau) - v_\tau(x,\tau)]^2\,dx + \int\limits_\Omega [v_m(x,\tau) - v(x,\tau)]^2\,dx \Bigg) d\tau, \qquad (15)\end{aligned}$$

где K_3 определяется числами N_1, K_1, K_2, ε, а также функциями $\alpha(t)$ и $\psi(t)$.

Поскольку в неравенстве (15) правая часть при $m \to \infty$ сходится к нулю (в силу сходимости $v_m(x,t)$ к $v(x,t)$ в V), то и левая часть будет сходиться к нулю. Это и означает, что $u_m(x,t) \to u(x,t)$ при $m \to \infty$ в пространстве V и что оператор Φ непрерывен.

Докажем теперь, что оператор Φ компактен в пространстве V.

Пусть $\{v_m(x,t)\}$ — ограниченная последовательность функций из пространства V, $\{u_m(x,t)\}$ — последовательность образов функций $u_m(x,t)$ при действии оператора Φ. Последовательность $\{u_m(x,t)\}$ также будет ограничена в пространстве V. Из ограниченности в пространстве V последовательностей $\{v_m(x,t)\}$ и $\{u_m(x,t)\}$, а также из теорем о вполне непрерывности вложений $W_2^2(Q) \to W_2^1(Q)$, $W_2^1(Q) \to L_2(\Gamma)$ [4, 7] и о возможности выбора из сильно сходящейся последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду (см. [4]), вытекает, что существуют подпоследовательности $\{v_{m_k}(x,t)\}$ и $\{u_{m_k}(x,t)\}$, а также функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости $v_{m_k}(x,t) \to v(x,t)$, $u_{m_k} \to u(x,t)$ слабо в пространстве $W_2^2(Q)$, $v_{m_k}(x,t) \to v(x,t)$, $v_{m_k t}(x,t) \to v_t(x,t)$, $v_{mx_i}(x,t) \to v_{x_i}(x,t)$ почти всюду в $\overline{Q}$. Указанные сходимости и представление

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t, v_m) = &-\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (K(x,t)a(x,t))_{x_i} v_{mx_i}(x,t)\,dx \\
&- \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega} K(x,t)a(x,t)v_{mx_i}(x,t)\,dxd\tau \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} K(x,0)a(x,0)v_{0mx_i}(x)\,dx \\
&+ 2\int\limits_{\Omega} K_t(x,t)v_{mt}(x,t)\,dx + \int\limits_{\Omega} K_{tt}(x,t)v_m(x,t)\,dx
\end{aligned}$$

означают, что почти всюду на отрезке $[0,T]$ имеют место сходимости $\varphi_1(t, v_{m_k}) \to \varphi_1(t,v)$, $\varphi_2(t, v_{m_k}) \to \varphi_2(t,v)$. Положим $w_k(x,t) =$

$u_{m_k}(x,t) - u(x,t)$. Поскольку для последовательности $\{w_k(x,t)\}$ выполняется оценка (15), эта последовательность будет сходиться в пространстве V к тождественно нулевой функции. Следовательно, для всякой ограниченной в пространстве V последовательности $\{v_m(x,t)\}$ из последовательности $\{\Phi(v_m(x,t))\}$ можно извлечь сходящуюся в V подпоследовательность. Это и означает, что оператор Φ компактен в пространстве V.

Итак, для оператора Φ выполняются все условия теоремы Шаудера. Согласно этой теореме существует функция $u(x,t)$, принадлежащая W и являющаяся решением краевой задачи (6_ε), (2), (3).

Установим, что для решений краевой задачи (6_ε), (2), (3) имеют место априорные оценки, равномерные по параметру ε.

Пусть теперь функция $f(x,t)$ такова, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$. Для решений краевой задачи (6_ε) (2), (3) сохраняется оценка (9). Далее, если в равенстве (10) выполнить интегрирование по частям как слева, так и справа, а затем в правой части применить неравенство Юнга, то получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_{x_i t}^2(x,t)\,dx + a_0 \int\limits_{\Omega} [\Delta u(x,t)]^2\,dx$$
$$+ \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} (\Delta u_\tau(x,t))^2\,dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \tilde{q}(\tau,u) \left(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i \tau}^2(x,t) \right) dx d\tau$$
$$\leqslant \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} (\Delta u(x,t))^2\,dx d\tau + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} f_t^2(x,t)\,dx dt$$
$$+ \delta^2 \int\limits_{\Omega} [\Delta u(x,t)]^2\,dx + \frac{1}{\delta^2} \int\limits_{\Omega} f^2(x,t)\,dx$$
$$+ \left| 2 \int\limits_{\Omega} f(x,0) \Delta u_0(x)\,dx \right| + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_{1x_i}^2(x)\,dx + \int\limits_{\Omega} a(x,0) [\Delta u_0(x)]^2\,dx,$$

в котором δ есть произвольное положительное число.

Положим $\delta^2 = \frac{a_0}{2}$. Применяя далее лемму Гронуолла, получаем

априорную оценку

$$\int\limits_{\Omega} [\Delta u(x,t)]^2\, dx \leqslant B_1. \tag{16}$$

Из (16) следует, что выполняется равномерная по ε оценка

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_{x_i t}^2(x,t)\, dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega} [\Delta u_\tau(x,t)]^2\, dx d\tau \leqslant B_2. \tag{17}$$

Из оценок (9) и (16) вытекает, что имеют место неравенства

$$|\varphi_1(\tau,u)| \leqslant M_1, \tag{18}$$

$$|\varphi_2(\tau,u)| \leqslant M_2. \tag{19}$$

Неравенства (18), (19) и условия теоремы 1 означают, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (6_ε), (2), (3) выполняются равенства

$$G_1(\varphi_1(t,u)) = \varphi_1(t,u), \quad G_2(\varphi_2(t,u)) = \varphi_2(t,u).$$

Рассмотрим равенство (12). Используя неравенство Юнга и оценки (9), (17), получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} u_{\tau\tau}^2 \leqslant B_3 \tag{20}$$

с постоянной B_3, определяющейся числами B_1, B_2, M_2, N_1 и функциями $K(x,t)$ и $f(x,t)$.

Итак, доказано, что краевая задача (6_ε), (2), (3) имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$ такое, что для семейства функций $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ выполняются равномерные по ε априорные оценки (9), (17), (20). Из данных оценок, а также из теорем о вполне непрерывности вложений $W_2^2(Q) \to W_2^1(Q)$, $W_2^1(Q) \to L_2(\Gamma)$ и о возможности выбора из сильно сходящейся последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду, а также из свойства рефлексивности гильбертова пространства [8] вытекает, что существуют последовательности $\{\varepsilon_m\}$ положительных чисел и функция $u(x,t)$ такие, что при $m \to \infty$ имеют место сходимости $\varepsilon_m \to 0$, $u^{\varepsilon_m}(x,t) \to u(x,t)$ слабо в пространстве $W_2^2(Q)$, $u^{\varepsilon_m}(x,t) \to u(x,t)$,

$u_t^{\varepsilon_m}(x,t) \to u_t(x,t)$ почти всюду в $\overline{Q}$, $\varepsilon_m\Delta$, $u_t^{\varepsilon_m}(x,t) \to 0$ слабо в пространстве $L_2(Q)$. Из указанных сходимостей следует, что почти всюду на отрезке $[0,T]$ для предельной функции $u(x,t)$ будет выполняться уравнение (6). Поскольку правая часть в уравнении (6) принадлежит пространству $L_2(Q)$, получаем, что функция $u_{tt}(x,t)$ также будет принадлежать пространству $L_2(Q)$. Но тогда функция $u(x,t)$ будет принадлежать пространству V.

Итак, доказано, что краевая задача (6), (2), (3) имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V. Покажем, что это решение и функция $q(t)$, определенная равенством $q(t) = q(t,u)$, дадут искомое решение обратной задачи I.

Умножим уравнение (6) на функцию $K(x,t)$ и проинтегрируем по Ω. Получим равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\int\limits_\Omega K(x,t)u(x,t)\,dx\Big) - 2\int\limits_\Omega K_t(x,t)u_t(x,t)\,dx$$
$$- \int\limits_\Omega K_{tt}(x,t)u(x,t)\,dx - \int\limits_\Omega K(x,t)a(x,t)\Delta u(x,t)\,dx$$
$$+ q(t)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int\limits_\Omega K(x,t)u(x,t)\,dx\Big) - \int\limits_\Omega K_t(x,t)u(x,t)\,dx\Big) = f_0(t).$$

Далее,

$$\psi''(t) - \varphi_1(t,u) + q(t,u)(\psi'(t) - \varphi_2(t,u)) = f_0(t).$$

Вычитая из одного из этих равенств другое, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\int\limits_\Omega K(x,t)u(x,t)\,dx - \psi(t)\Big)$$
$$+ q(t)\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int\limits_\Omega K(x,t)u(x,t)\,dx - \psi(t)\Big) = 0. \quad (21)$$

Обозначим

$$\nu(t) = \int\limits_\Omega K(x,t)u(x,t)\,dx - \psi(t).$$

Следствием равенства (21) является равенство

$$\frac{1}{2}[\nu'^2(t) - \nu'^2(0)] + \int\limits_0^t q(\tau)\nu'^2(\tau)\,d\tau = 0. \tag{22}$$

Из условий согласования теоремы 1 следует, что $\nu(0) = \nu'(0) = 0$. Поскольку функция $q(t)$ неотрицательна, равенство (22) означает, что функция $\nu'(t)$ тождественно нулевая. Тогда и сама функция $\nu(t)$ тождественно нулевая.

Тождественное равенство функции $\nu(t)$ нулевой функции означает, что для решения $u(x,t)$ краевой задачи (6), (2), (3) будет выполняться условие (4). Вместе с принадлежностью функций $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам все это и означает, что функция дает искомое решение обратной задачи I.

Теорема 1 доказана.

Перейдем к исследованию разрешимости обратной задачи II. Положим

$$k_1 = \min_{[0,T]} \psi(t), \quad \alpha_1(t) = \frac{\alpha(t)}{\psi(t)}, \quad \bar{\alpha}_1 = \min_{[0,T]} \alpha_1(t);$$

$$M_4 = \min\left\{2\lambda_0, \frac{2\bar{\alpha}_1}{c_0+3}\right\}, \quad \lambda_1 = \max_{[0,T]} \lambda(t);$$

$$\begin{aligned} A_3 = {} & \left(1 + \frac{1}{2\lambda_0 - M_4}\right) \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f^2(x,\tau)\,dxd\tau \\ & + 2\int\limits_0^t \int\limits_\Omega f_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau + 2(2c_0+1)\,\mathrm{vrai}\max_{[0,T]}\left[\int\limits_\Omega f^2(x,t)\,dx\right] \\ & + 2\left|\int\limits_\Omega f(x,0)\Delta u_0(x)\,dx\right| + \int\limits_\Omega u_1^2(x)\,dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{0\,x_i}^2(x)\,dx \\ & + \int\limits_\Omega \alpha_1(0)u_0^2(x)\,dx + 2\left|\int\limits_\Omega u_1(x)\Delta u_0(x)\,dx\right| \\ & + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \lambda(0)u_{0\,x_i}^2(x)\,dx + (\varepsilon_0+1)\int\limits_\Omega [\Delta u_0(x)]^2\,dx \end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{1\,x_i}^2(x)\,dx+\alpha_1(0)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{0\,x_i}^2(x)\,dx$$

(здесь $\varepsilon_0>0$ — положительное число, роль которого объяснена ниже),

$$A_4=\frac{c_0A_3}{2+\lambda_0+\bar\alpha_1(c_0+1)},\quad A_5=2c_0A_3,\quad A_6=2(2c_0+1)A_3,$$

$$A_7=\frac{1}{k_1}\big[(\lambda_1C_3+C_1)A_4^{\frac12}+2C_2A_5^{\frac12}+C_3A_6^{\frac12}\big].$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$K(x,t)\in C^2(\overline{Q}),\ \psi(t)\in C^2([0,T]);\quad k_1>0,\quad \bar\alpha_1>0,\ \lambda(t)-1\geqslant\lambda_0>0,$$

$$\alpha_1'(t)\leqslant 0,\quad \lambda'(t)\leqslant 0 \text{ при } t\in[0,T],$$

$$A_7\leqslant M_4;\quad \int\limits_{\Omega}K(x,0)u_0(x)\,dx=\psi(0);$$

$$\int\limits_{\Omega}K(x,0)u_1(x)\,dx+\int\limits_{\Omega}K_t(x,0)u_0(x)\,dx=\psi'(0).$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t)\in L_2(Q)$, $f_t(x,t)\in L_2(Q)$, и для любых функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$ таких, что $u_0(x)\in W_2^2(Q)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, $u_1(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, обратная задача II *имеет решение $\{u(x,t),q(t)\}$ такое, что $u(x,t)\in W_2^2(Q)$, $q(t)\in L_2([0,T])$.*

Доказательство. Умножим уравнение 5 на функцию $K(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω. Получим

$$\psi''(t)-2\int\limits_{\Omega}K_t(x,t)u_t(x,t)\,dx-\int\limits_{\Omega}K_{tt}(x,t)u(x,t)\,dx$$
$$-\int\limits_{\Omega}K(x,t)\Delta u\,dx+\lambda(t)\int\limits_{\Omega}K(x,t)u_t(x,t)\,dx+q(t)\psi(t)=f_0(t).$$

Отсюда

$$q(t)=\frac{\alpha(t)+\widetilde\varphi_1(t,u)}{\psi(t)}=\alpha_1(t)+\varphi_3(t,u),$$

$$\widetilde{\varphi}_1(t,u) = \int\limits_\Omega K(x,t)\Delta u(x,t)\,dx + 2\int\limits_\Omega K_t(x,t)u_t(x,t)\,dx$$
$$+ \int\limits_\Omega K_{tt}(x,t)u(x,t)\,dx - \lambda(t)\int\limits_\Omega K(x,t)u_t(x,t)\,dx,$$
$$\varphi_3(t,u) = \frac{\widetilde{\varphi}_1(t,u)}{\psi(t)}.$$

Рассмотрим новую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} - \Delta u + \lambda(t)u_t + [\alpha_1(t) - \varphi_3(t,u)]u = f(x,t) \tag{23}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Для доказательства разрешимости данной задачи вновь воспользуемся методами регуляризации, срезок и неподвижной точки.

Определим срезающую функцию $G_3(\xi)$:

$$G_3(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leqslant M_4, \\ M_4, & \text{если } \xi > M_4, \\ -M_4, & \text{если } \xi < -M_4. \end{cases}$$

С помощью $G_3(\xi)$ по заданной функции $v(x,t)$ определим функцию $\tilde{q}_1(t,v)$:

$$\tilde{q}_1(t,v) = \alpha_1(t) - G_3(\varphi_3(t,v)).$$

Пусть ε — положительное число. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} - \Delta u + \lambda(t)u_t + [\alpha_1(t) - G(\varphi_3(t,u))]u - \varepsilon\Delta u_t = f(x,t) \tag{23_ε}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Пусть $v(x,t)$ — заданная функция из пространства V.

Рассмотрим линейную задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} - \Delta u + \lambda(t)u_t + [\alpha_1(t) - G_3(\varphi_3(t,v))]u - \varepsilon\Delta u_t = f(x,t) \tag{$23_{\varepsilon,v}$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

Поскольку функция $\tilde{q}_1(t,v)$ ограничена, получаем, что краевая задача $(23_{\varepsilon,v})$, (2), (3) при фиксированном ε порождает оператор Φ, переводящий пространство V в себя: $\Phi(v) = u$ [5, 6]. Покажем, что оператор Φ имеет в пространстве V неподвижную точку. Вновь воспользуемся теоремой Шаудера.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega (u_{\tau\tau} - \Delta u + \lambda(\tau)u_\tau + [\alpha_1(\tau) - G_3(\varphi_3(\tau,v))]u - \varepsilon\Delta u_\tau)$$

$$\times\,(u_\tau - \Delta u - \Delta u_\tau)\,dx\,d\tau = \int_0^t \int_\Omega f(u_\tau - \Delta u - \Delta u_\tau)\,dxd\tau, \qquad (24)$$

являющееся следствием уравнения $(24_{\varepsilon,v})$.

От этого равенства с помощью интегрирования по частям и неравенства Юнга нетрудно перейти к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \frac{1+\lambda(t)+\alpha_1(t)}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega \lambda(\tau)u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{\alpha_1(t)}{2}\int_\Omega u^2(x,t)\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \alpha'(\tau)u^2(x,\tau)\,dxd\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega (\varepsilon + \lambda(\tau) - 1)u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega [\Delta u(x,\tau)]^2\,dxd\tau + \frac{\varepsilon+1}{2}\int_\Omega [\Delta u(x,t)]^2\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega \lambda'(\tau)u_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega [\alpha_1(\tau) + G_3(\varphi_3(\tau,\,v))]u_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$
-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\alpha_1'(\tau)u_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}[\Delta u_\tau(x,\tau)]^2\,dxd\tau
$$

$$
+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_it}^2(x,t)\,dx\leqslant\frac{M_4(c_0+1)}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau
$$

$$
+\frac{M_4+\delta_1^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau+\frac{M_4}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau
$$

$$
+\frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}[\Delta u(x,\tau)]^2\,dxd\tau+\frac{\delta_3^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}[\Delta u_\tau(x,\tau)]^2\,dxd\tau
$$

$$
+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta_1^2}+\frac{1}{\delta_2^2}+\frac{1}{\delta_3^2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}f^2(x,\tau)\,dxd\tau+\frac{\delta_4^2}{2}\int\limits_{\Omega}u_t^2(x,t)\,dx
$$

$$
+\frac{1}{2\delta_4^2}\int\limits_{\Omega}[\Delta u(x,t)]^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}u_1^2(x)\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{0\,x_i}^2(x)\,dx
$$

$$
+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\alpha_1(0)u_0^2(x)\,dx+\left|\int\limits_{\Omega}u_1(x)\Delta u_0(x)\,dx\right|+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\lambda(0)u_{0\,x_i}^2(x)\,dx
$$

$$
+\frac{\varepsilon+1}{2}\int\limits_{\Omega}[\Delta u_0(x)]^2\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{1\,x_i}^2(x)\,dx+\frac{\alpha_1(0)}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{0\,x_i}^2(x)\,dx,
$$

δ_1–δ_4 в котором — произвольные положительные числа. Далее, используя условия теоремы 2, получим

$$
\frac{1}{2}\left(1-\delta_4^2+\frac{1}{c_0}\right)\int\limits_{\Omega}u_t^2(x,t)\,dx+\frac{2+\lambda_0+\bar{\alpha}_1(c_0+1)}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_i}^2(x,t)\,dx
$$

$$
+\left(\lambda_0+1-\frac{M_4+\delta_1^2}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau
$$

$$
+\left(\varepsilon+\lambda_0-\frac{M_4}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau
$$

$$+\left(1-\frac{\delta_2^2}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[\Delta u(x,\tau)]^2\,dxd\tau+\frac{1}{2}\left(\varepsilon+1-\frac{1}{\delta_4^2}\right)\int\limits_\Omega[\Delta u(x,t)]^2\,dx$$

$$+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\left[\bar\alpha_1+G_3(\varphi_3(\tau,\,v))-\frac{M_4(c_0+1)}{2}\right]u_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+\left(\varepsilon-\frac{\delta_3^2}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[\Delta u_\tau(x,\tau)]^2\,dxd\tau$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta_1^2}+\frac{1}{\delta_2^2}+\frac{1}{\delta_3^2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f^2(x,\tau)\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_1^2(x)\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{0\,x_i}^2(x)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega\alpha_1(0)u_0^2(x)\,dx+\left|\int\limits_\Omega u_1(x)\Delta u_0(x)\,dx\right|$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega\lambda(0)u_{0\,x_i}^2(x)\,dx+\frac{\varepsilon+1}{2}\int\limits_\Omega[\Delta u_0(x)]^2\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{1\,x_i}^2(x)\,dx+\frac{\alpha_1(0)}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{0\,x_i}^2(x)\,dx.$$

Зафиксируем δ_i: $\delta_1^2=2\lambda_0-M_4$, $\delta_2=1$, $\delta_3^2=\varepsilon$, $\delta_4^2=\frac{2c_0+1}{2c_0}$. Получим оценку

$$\frac{1}{2c_0}\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx+(2+\lambda_0+\bar\alpha_1(c_0+1))\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx$$

$$+2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau+(2\varepsilon+2\lambda_0-M_4)\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[\Delta u(x,\tau)]^2\,dxd\tau+\frac{\varepsilon(2c_0+1)+1}{2c_0+1}\int\limits_\Omega[\Delta u(x,t)]^2\,dx$$

$$+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[2\bar\alpha_1+M_4(1-c_0)]u_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[\Delta u_\tau(x,\tau)]^2\,dxd\tau\leqslant C_4,\quad(25)$$

в которой число C_4 определяется функциями $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\lambda(t)$, а также числами T и ε.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(u_{\tau\tau}-\Delta u+\lambda(\tau)u_\tau+[\alpha_1(\tau)+G_3(\varphi_3(\tau,v))]u$$

$$-\varepsilon\Delta u_\tau)u_{\tau\tau}\,dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega fu_{\tau\tau}\,dx\,d\tau.\quad(26)$$

Используя неравенство Юнга и оценку (25), нетрудно из этого равенства вывести оценку

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau\leqslant C_5.\quad(27)$$

Оценки (25) и (27) дают априорную оценку решений краевой задачи (23_ε), (2), (3) в пространстве V:

$$\|u\|_V\leqslant C_6;\quad(28)$$

в оценках (27) и (28) числа C_5 и C_6 вновь определяются функциями $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\lambda(t)$, а также числами T и ε.

Из этой оценки следует, что оператор Φ переводит шар радиуса C_6 пространства V в себя. Непрерывность и компактность при фиксированном ε показывается так же, как это делалось при доказательстве теоремы 1.

Итак, для оператора Φ выполняются все условия теоремы Шаудера. Согласно этой теореме существует функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением краевой задачи (23_ε), (2), (3).

Установим, что для решений краевой задачи (23_ε), (2), (3) имеют место априорные оценки, равномерные по параметру ε.

Пусть теперь функция $f(x,t)$ такова, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$. Далее, если в равенстве (24) дополнительно выполнить интегрирование по частям в слагаемом правой части, содержащем произведение $f\Delta u_\tau$, то получим неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \frac{1+\lambda(t)+\alpha_1(t)}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \lambda(\tau)u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{\alpha_1(t)}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \alpha'(\tau)u^2(x,\tau)\,dxd\tau + \sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (\varepsilon+\lambda(\tau)-1)u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega [\Delta u(x,\tau)]^2\,dxd\tau + \frac{\varepsilon+1}{2}\int\limits_\Omega [\Delta u(x,t)]^2\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \lambda'(\tau)u_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega [\alpha_1(\tau)+G_3(\varphi_3(\tau,\,v))]u_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega \alpha_1'(\tau)u_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega [\Delta u_\tau(x,\tau)]^2\,dxd\tau + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_it}^2(x,t)\,dx$$

$$\leqslant \frac{M_4(c_0+1)}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{M_4+\delta_1^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+\frac{M_4}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{\delta_2^2+\delta_6^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega [\Delta u(x,\tau)]^2\,dxd\tau$$

$$+\frac{\delta_4^2}{2}\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx+\left(\frac{1}{2\delta_4^2}+\frac{\delta_5^2}{2}\right)\int\limits_\Omega[\Delta u(x,t)]^2\,dx$$

$$+\left(\frac{1}{2\delta_2^2}+\frac{1}{2\delta_1^2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+\frac{1}{2\delta_5^2}\int\limits_\Omega f^2(x,t)\,dx+\frac{1}{2\delta_6^2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+\left|\int\limits_\Omega f(x,0)\Delta u_0\,dx\right|+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_1^2(x)\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{0\,x_i}^2(x)\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega\alpha_1(0)u_0^2(x)\,dx+\left|\int\limits_\Omega u_1(x)\Delta u_0(x)\,dx\right|$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega\lambda(0)u_{0\,x_i}^2(x)\,dx+\frac{\varepsilon+1}{2}\int\limits_\Omega[\Delta u_0(x)]^2\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{1\,x_i}^2(x)\,dx+\frac{\alpha_1(0)}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{0\,x_i}^2(x)\,dx,$$

в котором δ_i — произвольные положительные числа. Используя условия теоремы 2, переходим к неравенству

$$\left(1+\frac{1}{c_0}-\delta_4^2\right)\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx+(2+\lambda_0+\bar\alpha_1(c_0+1))\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx$$

$$+\left(2\lambda_0+2-M_4-\delta_1^2\right)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+(2\varepsilon+2\lambda_0-M_4)\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$+(2-\delta_2^2-\delta_5^2)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[\Delta u(x,\tau)]^2\,dxd\tau+\left(\varepsilon+1-\frac{1}{\delta_4^2}-\delta_6^2\right)\int\limits_\Omega[\Delta u(x,t)]^2\,dx$$

$$+ (2\bar{\alpha}_1 + 2M_4 - M_4(c_0+1)) \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega u_{x_i}^2(x,\tau)\, dx d\tau$$

$$+ 2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega [\Delta u_\tau(x,\tau)]^2\, dx d\tau \leqslant \left(\frac{1}{\delta_2^2} + \frac{1}{\delta_1^2}\right) \int_0^t \int_\Omega f^2(x,\tau)\, dx d\tau$$

$$+ \frac{1}{\delta_5^2} \int_0^t \int_\Omega f_\tau^2(x,\tau)\, dx d\tau + \frac{1}{\delta_6^2} \operatorname*{vrai\,max}_{[0,T]} \int_\Omega f^2(x,t)\, dx + 2\left|\int_\Omega f(x,0)\Delta u_0\, dx\right|$$

$$+ \int_\Omega u_1^2(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{0\,x_i}^2(x)\, dx$$

$$+ \int_\Omega \alpha_1(0) u_0^2(x)\, dx + 2\left|\int_\Omega u_1(x)\Delta u_0(x)\, dx\right|$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \lambda(0) u_{0\,x_i}^2(x)\, dx + (\varepsilon+1) \int_\Omega [\Delta u_0(x)]^2\, dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{1\,x_i}^2(x)\, dx + \alpha_1(0) \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{0\,x_i}^2(x)\, dx,$$

Положим $\delta_1^2 = 2\lambda_0 - M_4$, $\delta_2 = 1$, $\delta_4^2 = \frac{2c_0+1}{2c_0}$, $\delta_5^2 = \frac{1}{2}$, $\delta_6^2 = \frac{1}{2(2c_0+1)}$. Пусть число ε настолько мало, что $\varepsilon < \varepsilon_0$ (поскольку в дальнейшем будет осуществляться предельный переход при $\varepsilon \to 0$, это возможно). Получим

$$\frac{1}{2c_0} \int_\Omega u_t^2(x,t)\, dx + (2 + \lambda_0 + \bar{\alpha}_1(c_0+1)) \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\, dx$$

$$+ 2\int_0^t \int_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\, dx d\tau + (2\varepsilon + 2\lambda_0 - M_4) \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\, dx d\tau$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega [\Delta u(x,\tau)]^2\, dx d\tau + \left(\varepsilon + \frac{1}{2(2c_0+1)}\right) \int_\Omega [\Delta u(x,t)]^2\, dx$$

$$+ (2\bar{\alpha}_1 - 2M_4 - M_4(c_0+1)) \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega u_{x_i}^2(x,\tau)\, dx d\tau$$

$$+ 2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega [\Delta u_\tau(x,\tau)]^2\, dx d\tau \leqslant A_3. \quad (29)$$

Далее, вновь рассмотрим равенство (26). Используя неравенство Юнга и оценку (29), получим оценку

$$\int_0^t \int_\Omega u_{\tau\tau}^2 \leqslant C_7 \quad (30)$$

с постоянной C_7, определяющейся функциями $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\lambda(t)$, а также числом T.

Из оценок (29) и (30) следует, что семейство решений $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ задачи (23_ε), (2), (3) содержит последовательность $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$, сходящуюся к решению $u(x,t)$ уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + \lambda(t) u_t + [\alpha_1(t) - G_3(\varphi_3(t,u))]u = f(x,t), \quad (31)$$

при этом для функции $u(x,t)$ будут выполняться условия (2), (3) (доказывается это так же, как делалось в теореме 1). Покажем, что с помощью предельной функции можно построить решение обратной задачи II.

Для функции $\varphi_3(t,u)$ имеет место неравенство

$$\varphi_3(t,u)| \leqslant \frac{1}{k_1}\Bigg[(\lambda_1 C_3 + C_1)\Bigg(\int_\Omega u^2(x,t)\, dx\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ 2C_2\Bigg(\int_\Omega u_t^2(x,t)\, dx\Bigg)^{\frac{1}{2}} + C_3\Bigg(\int_\Omega [\Delta u(x,t)]^2\, dx\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg].$$

Далее, справедливы неравенства (являющиеся следствием оценки (29))

$$\int_\Omega u^2(x,t)\, dx \leqslant c_0 \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\, dx \leqslant A_4.$$

$$\int\limits_{\Omega} u_t^2(x,t)\,dx \leqslant A_5, \quad \int\limits_{\Omega} [\Delta u(x,t)]^2\,dx \leqslant A_6.$$

Поэтому $|\varphi_3(t,u)| \leqslant A_7$. Полученное неравенство и условие $A_7 \leqslant M_4$ теоремы 2 означают, что выполняется равенство

$$G_3(\varphi_3(t,u)) = \varphi_3(t,u).$$

Отсюда следует, что найденная функция $u(x,t)$ является решением задачи (23), (2), (3).

Определим $q(t)$:

$$q(t) = \alpha_1(t) - \varphi_3(t,u).$$

Функции $u(x,t)$ и $q(t)$ дадут решение искомой обратной задачи (выполнение условия переопределения (4) показывается так же, как это делалось при доказательстве теоремы 1).

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Валитов И. Р., Кожанов А. И.* Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, вып. 1. С. 3–18.
2. *Валитов И. Р.* О разрешимости двух обратных задач для гиперболических уравнений // Тр. Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан. Сер. Физико-математические и технические науки / Отв. ред. К. Б. Сабитов. Уфа: Гилем, 2006. Вып. 3. С. 64–73.
3. *Валитов И. Р.* Обратные задачи для гиперболических уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Стерлитамак: Изд-во Стерлитамакской гос. пед. академии, 2009.
4. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
5. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм., 1985.
6. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
7. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

г. Якутск *1 августа 2011 г.*

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА ТРИКОМИ

И. М. Петрушко, Т. В. Капицына

Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}_n$, расположенная в полупространстве $x_n > 0$. Часть границы Γ_0 области лежит в гиперплоскости $x_n = 0$, остальную часть границы обозначим через Γ_1: $\Gamma_1 = \partial Q \cap \{x_n > 0\}$, $\overline{\Gamma}_0 \cup \Gamma_1 = \partial Q$. Будем предполагать, что граница ∂Q области Q — $(n-1)$-мерная замкнутая поверхность без края класса C^2. Тогда существует столь малое число $\delta_0 > 0$, что для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ подмножество $Q_\delta = Q \cap \{\min\limits_{y \in \partial Q} |x - y| > \delta\}$ является областью с границей ∂Q_δ класса C^2. При произвольном $\delta \in (0, \delta_0]$ для любой $x_0 \in \partial Q$ существует единственная точка x_δ поверхности ∂Q_δ, отстоящая от точки x_0 на расстояние, равное δ:

$$x_\delta = x_\delta(x_0) = x_0 - \delta\nu(x_0), \tag{1}$$

где $\nu(x_0) = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ — вектор внешней по отношению к области Q единичной нормали к ∂Q в точке x_0.

Обозначим через $r(x)$ расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q:

$$r(x) = \min_{y \in \partial Q} |x - y|. \tag{2}$$

Обозначим через Q^T цилиндр $Q \times (0, T)$.

Рассмотрим в Q^T линейное параболическое уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + x_n^m u_{x_n x_n} \right) + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f \tag{3}$$

с коэффициентами $a_{ij} = a_{ij} \in C^1(\overline{Q})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$, $a_i \in C^1(\overline{Q})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a \in C(\overline{Q})$ и постоянной m, $0 < m < 1$.

Будем предполагать уравнение (3) параболическим, т. е. для всех точек $(x, t) \in Q_\delta \times (0, T)$ существует такая постоянная $\gamma_\delta > 0$, что для всех $\xi \in R_n$

$$\Phi(x, t, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\xi_i\xi_j + x_n^m \xi_n^2 \geqslant \gamma_\delta |\xi|^2. \tag{4}$$

На границе $\partial Q \times (0, T)$ уравнение (3) вырождается.

Будем также предполагать, что существует такая постоянная γ^0, что для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ и для всех $x_0 \in \Gamma$, $t \in (0, T)$

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{a_{ij}\nu_i(x_0)\nu_j(x_0)}{x_n^m} + \nu_n^2(x_0) > \gamma_0. \tag{5}$$

Пусть p — некоторое число, $p > 1$. Введем следующие функциональные пространства: $L_p\big(Q, r(x)/x_n^m\big)$ — множество измеримых в Q функций $u_0(x)$, для которых

$$\|u_0\|^p_{L_p(Q, r(x)/x_n^m)} = \int\limits_Q |u_0(x)|^p \frac{r(x)}{x_n^m}\, dx < \infty,$$

$L_{p,1,m}$ — банахово пространство, полученное пополнением множества $C^\infty(\overline{Q}^T)$ по норме

$$\|f\|_{L_{p,1,m}(Q^T)} = \|f\|_{L_p(Q_{\delta_0} \times (0,T))} + \int\limits_0^{\delta_0} \mu \left\| \frac{f}{x_n^m} \right\|_{L_p(\partial Q_\mu \times (0,T))} d\mu + \int\limits_0^{\delta_0} \left[\int\limits_{Q_\mu} \frac{|f(x,\mu)|^p}{x_n^m} r(x) dx \right]^{1/p} d\mu.$$

Функцию $f(x, t)$, стоящую в правой части уравнения (3), будем предполагать принадлежащей пространству $L_{p,\mathrm{loc}}(Q^T) \cap L_{p,1,m}(Q^T)$.

Определение. Принадлежащая $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ функция $u(x, t)$ называется *обобщенным из* $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ *решением уравнения* (3), если она

удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q^T}\left[-u\eta_t+\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j}+u_{x_n}\left(x_n^m\eta\right)_{x_n}+\sum_{i=1}^{n}a_iu_{x_i}\eta+au\eta\right]dxdt$$
$$=\int\limits_{Q^T}f\eta\,dxdt \quad (6)$$

для всех финитных в Q^T функций $\eta(x,t)\in H_q^1(Q^T)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

Пусть $\rho(x)$ — функция, обладающая следующими свойствами:

$$\rho(x)=r(x),\quad x\in Q/Q_{\delta_0},\quad \rho(x)\in C^2(\overline{Q})$$

и существует такая постоянная $\gamma_1>0$, что для всех $x\in Q$

$$\gamma_1 r(x)\leqslant\rho(x)\leqslant\gamma_1^{-1}r(x).$$

Так как уравнение (3) параболично при $(x,t)\in Q_\delta\times(0,T)$, справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ уравнения (3) с правой частью f из $L_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$. Тогда для любых $\delta\in(0,\delta_0]$, $\beta\in(0,\delta_0]$ и для любого T' справедливо равенство*

$$\frac{1}{p}\int\limits_{Q_\delta}|u(x,T')|^p\frac{\rho(x)-\delta}{x_n^m}\,dx-\frac{1}{p}\int\limits_{Q_\delta}|u(x,\beta)|^p\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx$$
$$+(p-1)\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}|u|^{p-2}\frac{\rho(x)-\delta}{x_n^m}+u_{x_n}^2|u|^{p-2}(\rho(x)-\delta)\right]dxdt$$
$$+\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\sum_{i=1}^{n}a_iu_{x_i}|u|^{p-1}\frac{\rho(x)-\delta}{x_n^m}\,dxdt$$
$$-\frac{1}{p}\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(a_{ij}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{x_n^m}+\rho_{x_n}^2\right)\right)|u|^p\,dsdt$$
$$-\frac{1}{p}\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{(a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j}}{x_n^m}|u|^p\,dxdt+\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}a|u|^p\frac{\rho(x)-\delta}{x_n^m}|u|^p\,dxdt$$

$$= \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} f|u|^{p-1} \operatorname{sgn} u(\rho-\delta)\, dxdt.$$

Доказательство леммы 1 с некоторыми изменениями повторяет доказательство леммы 1 из [1], поэтому приводить его не будем.

Пусть $T' \in (T/2, T)$ и $\delta \in (0, \delta_0]$. Введем обозначения:

$$N_{\delta,\beta} = \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{u_{x_i} u_{x_j}}{x_n^m} + u_{x_n}^2 \right) |u|^{p-2} (\rho-\delta)\, dxdt + \int\limits_{Q_\delta} |u(x,T')|^p \frac{\rho-\delta}{x_n^m}\, dx$$

и

$$M_{\delta,\beta} = \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{\partial Q_\delta} |u|^p\, dsdt + \int\limits_{\partial Q_\delta} |u(x,\beta)|^p \frac{\rho-\delta}{x_n^m}\, dx.$$

Заметим, что в силу свойств функции $\rho(x)$, принадлежности ∂Q классу C^2 и неравенства (5) существует такая постоянная $\gamma_2 > 0$, что

$$\gamma_2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{\rho_{x_i} \rho_{x_j}}{x_n^m} + \rho_{x_n}^2 \Big|_{(x,t)\in\partial Q\times(0,T)} \leqslant \gamma_2^{-1}$$

для всех $x \in \partial Q \times (0,T)$.

Следовательно, справедливы следующие неравенства:

$$\int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{\partial Q_\delta} |u|^p\, dsdt + \int\limits_{Q_\delta} |u(x,\beta)|^p \frac{\rho-\delta}{x_n^m}\, dx \leqslant C_1 \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} |f|\, |u|^{p-1} \frac{\rho-\delta}{x_n^m}\, dxdt + N_{\delta,\beta}(u) + \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} \frac{|u|^p}{x_n^m}\, dxdt \quad (7)$$

и

$$N_{\delta,\rho}(u) + \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} u^2 \frac{\rho-\delta}{x_n^m}\, dxdt \leqslant C_2 \left[\int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} |f|\, |u|^{p-1} \frac{\rho-\delta}{x_n^m}\, dxdt \right.$$

$$+\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}|u|^p\,dsdt+\int\limits_{Q_\delta}|u(x,\beta)|^p\frac{\rho-\delta}{x_n^m}dx+\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\frac{|u|^p}{x_n^m}\,dxdt\Bigg]$$

и тем самым справедливы следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ решение уравнения* (3). *Тогда для любых $\delta\in(0,\delta_0]$, $\beta\in(0,\delta_0]$, $T'\in(T/2,T)$ справедлива оценка*

$$M_{\mu,\beta}(u)+\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}|u|^p\frac{\rho(x)-\delta}{x_n^m}\,dxdt\leqslant C\big[\|f\|^p_{L_{p,1,m}(Q^T)}+N_{\delta,\beta}(u)\big]. \qquad (8)$$

Лемма 3. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ решение уравнения* (3). *Тогда для любых $\delta\in(0,\delta_0]$, $\beta\in(0,\delta_0]$, $T'\in(T/2,T)$ справедлива оценка*

$$N_{\delta,\beta}(u)+\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}|u|^p\frac{\rho(x)-\delta}{x_n^m}\,dxdt$$
$$\leqslant C_{11}\big[\|f\|^p_{L_{p,1,m}(Q^T)}+\|u\|_{L_p(\partial Q_\delta\times(R,T'))}+\|u(x,\beta)\|^p_{L_p(Q,\rho/x_n^m)}\big]. \qquad (9)$$

Для любой функции $u(x,t)\in W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ функция

$$M(\delta)=\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}|u|^p\,dsdt+\int\limits_{Q_\delta}|u(x,\delta)|^p\,dx$$

непрерывна по $\delta\in(0,\delta_0)$.

Будем говорить, что функция $u(x,t)$ *принадлежит классу* H_p, если функция $M(\delta)$ ограничена на $(0,\delta_0)$, т. е.

$$\sup_{0<\delta<\delta_0}M(\delta)<\infty.$$

Теорема 1. *Для того чтобы обобщенное из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ решение уравнения* (3) *с $f\in L_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)\cap L_{p,1,m}(Q^T)$ принадлежало классу H_p необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}\frac{u_{x_i}u_{x_j}}{x_n^m}+u_{x_n}^2\right)|u|^{p-2}r(x)$$

была интегрируема по $Q^{T'}$, *т. е.*

$$\int\limits_0^T \int\limits_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{u_{x_i} u_{x_j}}{x_n^m} + u_{x_n}^2 \right) |u|^{p-2} r(x)\, dxdt < \infty. \tag{10}$$

Доказательство необходимости следует из леммы 3. Достаточность следует из леммы 2. Теорема доказана.

Будем говорить, что функция $u(x,t) \in W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ *принимает граничное значение*

$$u|_{\partial Q \times (0,T)} = \varphi, \quad \varphi \in L_p(\partial Q \times (0,T)), \tag{11}$$

в смысле L_p, если для любого $T' \in (T/2, T)$

$$\lim_{\delta \to +0} \int\limits_\delta^{T'} \int\limits_{\partial Q} |u(x_\delta(x),t) - \varphi(x,t)|^p\, dsdt = 0. \tag{12}$$

Будем также говорить, что функция $u(x,t) \in W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ *принимает начальное значение*

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \int\limits_Q |u_0(x)|^p \frac{r(x)}{x_n^m}\, dx < \infty, \tag{13}$$

в смысле L_p *с весом* $\frac{r(x)}{x_n^m}$, если

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{Q_\delta} |u(x,\delta) - u_0(x)|^p \frac{r(x)}{x_n^m}\, dx = 0. \tag{14}$$

Определение. Функция $u(x,t)$ является *решением из* $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ *задачи* (3), (11), (13) ($\varphi \in L_p(\partial Q \times (0,T))$, $u_0(x) \in L_p\big(\frac{r(x)}{x_n^m}, Q\big)$, $f \in L_{p,\mathrm{loc}}(Q^T) \cap L_{p,1,m}(Q^T)$), если она принадлежит $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$, является обобщенным решением уравнения (3), удовлетворяет граничному условию (11) в смысле равенства (12) и начальному условию (13) в смысле равенства (14).

Теорема 2. *При любых функциях* $\varphi(x,t) \in L_p(\partial Q \times (0,T))$, $u_0(x) \in L_p\big(\frac{r(x)}{x_n^m}, Q\big)$ *и любой функции* $f \in L_{p,\mathrm{loc}}(Q^T) \cap L_{p,1,m}(Q^T)$ *первая смешанная задача* (3), (11), (13) *имеет обобщенное решение из* $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$,

это решение единственно, и для него справедлива оценка

$$\int\limits_0^T \int\limits_Q |\nabla' u|^2 |u|^{p-2} \frac{r(x)}{x_n^m} + u_{x_n}^2 |u|^{p-2} r(x)\, dx$$

$$+ \sup_{T' \in (T/2,T)} \max_{0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0} \left[\int\limits_\delta^{T'} \int\limits_{\partial Q_\delta} |u|^p \, ds dt + \int\limits_{Q_\delta} |u(x,\delta)|^p (\rho - \delta) dx \right]$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_Q |u|^p \frac{r(x)}{x_n^m} \, dx dt \leqslant C_{13} \big[\|f\|^p_{L_{p,1,m}(Q^T)}$$

$$+ \|\varphi\|_{L_p(\partial Q \times (0,T))} + \|u_0\|^p_{L_p(r(x)/x_n^m, Q)} \big], \quad (15)$$

в котором постоянная C_{13} *зависит только от коэффициентов уравнения.*

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — обобщенное из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ решение задачи (3), (11), (13). В силу (12) и (14) $u(x,t) \in H_p$. Следовательно, по теореме 1 функция $\big(|\nabla' u|^2 \frac{\rho(x)}{x_n^m} + u_{x_n}^2 r(x)\big)|u|^{p-2}$ интегрируема по Q^T и на основании теоремы Лебега при $\delta \to 0$

$$\int\limits_\delta^T \int\limits_{Q_\delta} \left(|\nabla' u|^2 \frac{\rho - \delta}{x_n^m} + u_{x_n}^2 (\rho - \delta) \right) |u|^{p-2} \, dx dt$$

$$\to \int\limits_0^T \int\limits_Q \left(|\nabla' u|^2 \frac{\rho(x)}{x_n^m} + u_{x_n}^2 \rho(x) \right) |u|^{p-2} \, dx dt.$$

Так как из принадлежности $u(x,t)$ классу H_p вытекает, что

$$\int\limits_0^T \int\limits_Q |u|^p \frac{r(x)}{x_n^m} \, dx dt < \infty,$$

имеем

$$\int\limits_\delta^T \int\limits_{Q_\delta} |u|^p \frac{\rho - \delta}{x_n^m} \, dx dt \to \int\limits_0^T \int\limits_Q |u|^p \frac{\rho(x)}{x_n^m} \, dx dt$$

при $\delta \to +0$.

Следовательно, в неравенствах лемм 2 и 3 можно перейти к пределу при $\delta \to +0$, $\beta = \delta \to +0$. В результате получим неравенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_Q \left(|\nabla' u|^2 \frac{\rho(x)}{x_n^m} + u_{x_n}^2 \rho(x) \right) dxdt + \sup_{T' \in (T/2,T)} \max_{\delta \in (0,\delta_0)} M(\delta)$$
$$\leqslant C_{19} \left[\|f\|^p_{L_{p,1,m}(Q^T)} + \|\varphi\|^p_{L_p(\partial Q \times (0,T))} + \|u_0\|^p_{L_p(Q, r/x_n^m)} \right],$$

из которого следует оценка (15).

Перейдем теперь к доказательству существования решения. Возьмем произвольные функции $\varphi \in L_p(\partial Q \times (0,T))$, $u_0(x) \in L_p\big(Q, \frac{r(x)}{x_n^m}\big)$ и $f(x,t) \in L_{p,\mathrm{loc}}(Q^T) \cap L_{p,1,m}(Q^T)$. Пусть $\{\varphi_m\}$ — некоторая последовательность функций из $C^2(\partial Q \times [0,T])$, сходящаяся в $L_p(\partial Q \times [0,T])$ к функции $\varphi(x,t)$:

$$\|\varphi_m - \varphi\|_{L_p(\partial Q \times (0,T))} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty, \tag{16}$$

а $\{u_{0m}\}$ — некоторая последовательность функций из $C^2(\overline{Q})$, сходящаяся в $L_p\big(Q, \frac{r(x)}{x_n^m}\big)$ к функции $u_0(x)$: $\|u_{0m} - u_0\|_{L_p(Q, r/x_n^m)} \to 0$ при $m \to \infty$, и пусть $\{f_m\}$ — некоторая последовательность функций из $C^1(\overline{Q}^T)$, сходящаяся в $L_{p,1,m}(Q^T)$ к $f(x,t)$: $\|f_m - -f\|_{L_{p,1,m}(Q^T)} \to 0$ при $m \to \infty$.

Обозначим через $u_m(x,t)$ решение из $W_p^{2,1}(Q^T)$ задачи (3), (11), (13) с функциями φ_m, u_{0m}, f_m.

Так как решение из $W_{p,\mathrm{loc}}^{2,1}(Q^T)$ является также решением из $W_{p,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q^T)$, для $u_m(x,t)$ справедлива оценка (15). Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ сходится к некоторой функции $u(x,t)$ в банаховом пространстве B с нормой

$$\|u\|^p = \int\limits_0^T \int\limits_Q \left(|\nabla' u|^2 \frac{r(x)}{x_n^m} + u_{x_n}^2 r(x) \right) |u|^{p-2}\, dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_Q |u|^p \frac{r(x)}{x_n^m}\, dxdt$$
$$+ \sup_{T' \in (T/2,T)} \max_{0<\delta<\delta_0} \left[\int\limits_\delta^{T'} \int\limits_{\partial Q_\delta} |u|^p\, dsdt + \int\limits_{Q_\delta} |u(x,\delta)| \frac{\rho - \delta}{x_n^m} dx \right],$$

т. е. $\|u - u_m\|_B \to 0$ при $m \to \infty$.

Покажем, что $u(x,t)$ является обобщенным из $W_{p,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q^T)$ решением задачи (3), (11), (13).

Действительно, пусть $1 < p < 2$. В силу неравенства

$$\int\limits_0^T \int\limits_{Q'} |\nabla u|^p \, dx \leqslant C(Q') \left(\int\limits_0^T \int\limits_Q |\nabla' u|^2 \frac{r(x)}{x_n^m} + u_{x_n}^2 r(x) \right) |u|^{p-2} \, dxdt$$

$$+ \int\limits_0^{T'} \int\limits_Q |u|^p \frac{r(x)}{x_n^m} \, dxdt,$$

справедливого для любой Q', строго вложенной в Q, получаем, что последовательность $\{u_m(x,t)\}$ сходится к функции $u(x,t)$ в $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ и, следовательно, функция $u(x,t)$ является обобщенным из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ решением уравнения (3).

Пусть $p \geqslant 2$. Из соотношения $\|u - u_m\|_B \to 0$ при $m \to \infty$ следует, что для любой Q', строго вложенной в Q, последовательность $\{u_m\}$ сходится в $W_2^{1,0}(Q' \times (0,T'))$ к функции $u(x,t)$, т. е. $u(x,t)$ является обобщенным решением из $W_2^{1,0}(Q' \times (0,T'))$, и в силу принадлежности $f(x,t)$ пространству $L_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ функция $u(x_t)$ является обобщенным из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ решением уравнения (3).

Выполнение соотношений (12) и (14) очевидно. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петрушко И. М.* О граничных и начальных значениях в L_p, $p > 1$, решений параболических уравнений // Мат. сб. 125 (167), № 4. С. 489–521.
2. *Петрушко И. М.* О граничных значениях вырождающихся на границе области эллиптических уравнений // Мат. сб. 136 (178), № 2. С. 241–259.
3. *Fichera G.* On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order // Boundary Problems. Different. Equations. Madison: Univ. Wisconsin Press, 1960. P. 97–120.
4. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Математический анализ, 1969. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 7–252. (Итоги науки.)
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

г. Москва *1 августа 2011 г.*

УДК 517.946

ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ*)

А. В. Прокопьев

Целью настоящей работы является исследование разрешимости некоторых линейных обратных задач для эллиптико-параболического уравнения. Под обратной задачей здесь понимается задача, в которой вместе с решением дифференциального уравнения неизвестным является тот или иной коэффициент самого уравнения или(и) свободный член уравнения (внешнее воздействие). Подобные обратные задачи достаточно хорошо изучены для параболических уравнений [1–8], но не для эллиптико-параболических уравнений.

Перейдем к содержательной части работы.

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ, $S = \Gamma \times (0,T)$, Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $t_1, \ldots, t_m$ — заданные точки из отрезка $[0,T]$ такие, что $0 < t_1 < \cdots < t_m \leqslant T$, $a^{ij}(x)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $a(x)$, $f(x,t)$, $h_k(x,t)$, $k = 0,\ldots,m$, $\gamma(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$ соответственно.

В работе рассматривается уравнение эллиптико-параболического типа:

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + a(x)u = f(x,t) + \sum_{k=1}^{m} q_k(x)h_k(x,t), \qquad (1)$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)», рег. номер проекта 2.1.1/13607, и гранта Министерства образования и науки Российской Федерации, № 02_740.11.0609.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Обратная задача I. *Найти функции* $u(x,t)$, $q_k(x)$, $k = \overline{1,m}$, *связанные в цилиндре* Q *уравнением* (1) *и такие, что для* $u(x,t)$ *выполняются начальные и граничные условия*:

$$u(x,0) = 0, \ x \in \Omega; \quad u|_S = 0, \tag{2}$$

а также условия переопределения:

$$u(x,t_j) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Обратная задача II. *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $q(x)$, *связанные в цилиндре* Q *уравнением*

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + a(x)u = f(x,t) + q(x)h(x,t), \tag{1'}$$

такие, что для $u(x,t)$ *выполняются начальные и граничные условия* (2), *а также условие переопределения*:

$$\int_0^T \gamma(t)u(x,t)\,dt = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3'}$$

Введем пространство V — замыкание бесконечно дифференцируемых в $\overline{Q}$ функций $v(x,t)$ таких, что $v(x,t)|_S = 0$, по норме

$$\|v\|_V = \left[\int_Q v_t^2(x,t)\,dxdt + \int_Q \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}v_{x_i}v_{x_j}\,dxdt + \int_Q v^2(x,t)\,dxdt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Введем понятие обобщенного решения рассматриваемой задачи для функций $u(x,t) \in V$, $q_k(x) \in L_2(\Omega)$, $k = \overline{1,m}$.

Определение. Функции $u(x,t) \in V$, $q_k(x) \in L_2(\Omega)$, $k = \overline{1,m}$, называются *обобщенным решением задачи* (1)–(3), если

$$\int_Q \left(u_t\eta + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + au\eta\right)dxdt = \int_Q \left(f\eta + \sum_{k=1}^{m} q_k h_k \eta\right)dxdt$$

для любой $\eta \in C^\infty(\overline{Q})$, $\eta|_S = 0$.

Введем некоторые необходимые обозначения. Для простоты рассмотрим случай $m = 2$ (случай $m > 2$ отличается от случая $m = 2$ лишь более громоздкими выкладками). Обозначим

$$H(x) = \begin{pmatrix} h_1(x,t_1) & h_2(x,t_1) \\ h_1(x,t_2) & h_2(x,t_2) \end{pmatrix},$$

$$k_1(x,t) = \frac{1}{\det H}[h_{1t}(x,t)h_2(x,t_2) - h_{2t}(x,t)h_1(x,t_2)],$$

$$k_2(x,t) = -\frac{1}{\det H}[h_{1t}(x,t)h_2(x,t_1) - h_{2t}(x,t)h_1(x,t_1)],$$

$$\alpha_1(x) = -h_1(x,0)h_2(x,t_2) + h_2(x,0)h_1(x,t_2),$$

$$\alpha_2(x) = h_1(x,0)h_2(x,t_1) - h_2(x,0)h_1(x,t_1),$$

$$\alpha_0(x) = \alpha_1(x)f(x,t_1) + \alpha_2(x)f(x,t_2) + f(x,0),$$

$$\alpha = \max_{x\in\overline{\Omega},\, i=1,2} |\alpha_i(x)|, \quad \beta = \max_{x\in\overline{\Omega},\, i=1,2;\, j=\overline{1,n}} |\alpha_{ix_j}(x)|,$$

$$M_0 = \max_{\overline{Q}, i=1,2} |k_i(x,t)|, \quad \bar{a} = \max_{x\in\overline{\Omega}, k=1,2} \left[\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\alpha_{kx_i}(x)\alpha_{kx_j}(x)\right],$$

$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к границе Γ.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} h_1(x,t), h_2(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \quad a(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \\ a^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad i,j = 1,\ldots,n, \\ 0 < a_0 \leqslant a(x) \leqslant a_1, \quad \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\nu_i\nu_j > 0, \quad x \in \Gamma; \end{gathered} \tag{4}$$

$$\det H(x) \neq 0, \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{5}$$

$$\alpha^2 + \frac{M_0^2 T}{a_0} \leqslant \frac{1}{4}, \quad \alpha^2 < \frac{1}{6}, \quad \alpha_0|_\Gamma = 0; \tag{6}$$

$$f(x,t),\ f_t(x,t) \in L_2(Q), \quad f(x,t_1), f(x,t_2), f(x,0) \in W_2^2(\Omega). \tag{7}$$

Тогда существует обобщенное решение $u(x,t), q_1(x), q_2(x)$ *задачи* (1)–(3) *такое, что* $u_t(x,t) \in V$, $q_1(x), q_2(x) \in L_2(\Omega)$.

Доказательство. Вначале выполним некоторые вспомогательные построения. Положив в уравнении (1) сначала $t = t_1$, затем $t = t_2$, получим систему

$$\begin{cases} u_t(x,t_1) = f(x,t_1) + \sum\limits_{i=1}^{2} q_k(x)h_k(x,t_1), \\ u_t(x,t_2) = f(x,t_2) + \sum\limits_{i=1}^{2} q_k(x)h_k(x,t_2). \end{cases}$$

Отсюда (вследствие условия (5))

$$q_1(x) = q_{10}(x) + q_{11}(x)u_t(x,t_1) + q_{12}(x)u_t(x,t_2),$$

$$q_2(x) = q_{20}(x) + q_{21}(x)u_t(x,t_1) + q_{22}(x)u_t(x,t_2),$$

где

$$q_{10}(x) = \frac{1}{\det H}[-f(x,t_1)h_2(x,t_2) + f(x,t_2)h_2(x,t_1)],$$

$$q_{11}(x) = \frac{h_2(x,t_2)}{\det H}, \quad q_{12}(x) = -\frac{h_2(x,t_1)}{\det H},$$

$$q_{20}(x) = \frac{1}{\det H}[f(x,t_1)h_1(x,t_2) - f(x,t_2)h_1(x,t_1)],$$

$$q_{21}(x) = -\frac{h_1(x,t_2)}{\det H}, \quad q_{22}(x) = \frac{h_1(x,t_1)}{\det H}.$$

Обозначим $w = u_t$. Продифференцировав по переменной t уравнение (1), получим

$$w_t - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)w_{x_j}) + a(x)w = f_t(x,t) + h_{1t}(x,t)q_1(x) + h_{2t}(x,t)q_2(x).$$

Имеет место равенство

$$w(x,0) = \alpha_1(x)w(x,t_1) + \alpha_2(x)w(x,t_2) + \alpha_0(x).$$

Обозначим

$$\overline{w}_0(x) = \frac{\alpha_0(x)}{1 - \alpha_1(x) - \alpha_2(x)}.$$

Тогда для функции $v(x,t) = w(x,t) - \overline{w}_0(x)$ выполняется равенство $v(x,0) = \alpha_1(x)v(x,t_1) + \alpha_2(x)v(x,t_2)$, а также уравнение

$$v_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)v_{x_j}) + a(x)v(x,t) \\ = \tilde{f}(x,t) + k_1(x,t)v(x,t_1) + k_2(x,t)v(x,t_2),$$

где $\tilde{f}(x,t) = f_t(x,t) + q_{10}(x)h_{1t}(x,t) + q_{20}(x)h_{2t}(x,t) + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}\bar{w}_{0x_j}(x)) - a(x)\bar{w}_0(x)$.

Воспользуемся методом регуляризации. Пусть L_ε — оператор, действие которого определяется равенством

$$L_\varepsilon v = Lv - \varepsilon\Delta v, \quad \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу: *найти функцию $v(x,t)$, являющуюся решением уравнения*

$$L_\varepsilon v = \tilde{f}(x,t) + k_1(x,t)v(x,t_1) + k_2(x,t)v(x,t_2) \tag{9}$$

и удовлетворяющую условиям

$$v(x,0) = \alpha_1(x)v(x,t_1) + \alpha_2(x)v(x,t_2),\ x \in \Omega; \quad v(x,t)|_S = 0. \tag{10}$$

При выполнении условий теоремы вспомогательная задача разрешима при фиксированном ε в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ (см. [4, 5]). Покажем, что для этих решений имеют место равномерные по ε априорные оценки.

Нам понадобится следующее

Утверждение. *Для неотрицательной на отрезке $[0,T]$ функции $g(t)$ и неотрицательных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k < 1$, из неравенства*

$$g(t) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k g(t_k) + \beta, \quad 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leqslant T,\ t \in [0,T], \tag{11}$$

вытекает оценка

$$g(t) \leqslant \frac{\beta}{1 - \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k}. \tag{12}$$

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega L_\varepsilon v \cdot v \, dx d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega [\tilde{f}(x,\tau) + k_1(x,\tau) v(x,t_1) + k_2(x,\tau) v(x,t_2)] v \, dx d\tau,$$

где t — произвольное число из отрезка $[0,T]$.

Интегрируя, получим

$$\frac{1}{2} \int\limits_\Omega v^2(x,\tau)\, dx \Big|_0^t + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i} v_{x_j} \, dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a(x) v^2(x,\tau)\, dx d\tau$$
$$+ \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x,\tau)\, dx d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \tilde{f}(x,\tau)\, dx d\tau$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega [k_1(x,t) v(x,t_1) + k_2(x,t) v(x,t_2)]\, dx d\tau.$$

Имеет место неравенство

$$\frac{1}{2} \int\limits_\Omega v^2(x,0)\, dx \leqslant \alpha^2 \int\limits_\Omega v^2(x,t_1)\, dx + \alpha^2 \int\limits_\Omega v^2(x,t_2)\, dx.$$

Используя его, условие (4) и неравенство Юнга, получим

$$\frac{1}{2} \int\limits_\Omega v^2(x,t)\, dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i} v_{x_j} \, dx d\tau$$
$$+ \left(a_0 - \frac{\delta_0^2}{2} - \frac{\delta_1^2}{2} - \frac{\delta_2^2}{2} \right) \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v^2(x,\tau)\, dx d\tau + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x,\tau)\, dx d\tau$$
$$\leqslant \frac{1}{2\delta_0^2} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \tilde{f}(x,\tau)\, dx d\tau + \sum_{k=1}^2 \left(\alpha^2 + \frac{M_0^2 T}{2\delta_k^2} \right) \int\limits_\Omega v^2(x,t_k)\, dx. \tag{13}$$

Положим $\delta_0 = \sqrt{a_0}$, $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\sqrt{a_0}}{2}$. Тогда при выполнении условия $\alpha^2 + \frac{2M_0^2 T}{a_0} < \frac{1}{4}$ получим, что неравенство (13) есть неравенство типа (11). Оценка (12) приводит к оценке

$$\int\limits_\Omega v^2(x,t)dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i} v_{x_j}\, dxd\tau + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v^2(x,\tau)\, dxd\tau$$
$$+ \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x,\tau)\, dxd\tau \leqslant M_1 \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \tilde{f}^2(x,t)\, dxdt, \quad (14)$$

где $t \in [0,T]$, постоянная M_1 зависит лишь от чисел a_0, α, M_0.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega L_\varepsilon v \cdot v_\tau\, dxd\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega [\tilde{f}(x,\tau) + k_1(x,\tau) v(x,t_1)$$
$$+ k_2(x,\tau) v(x,t_2)] v_\tau\, dxd\tau.$$

Интегрируя по частям и используя неравенство Юнга, получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega v_\tau^2\, dxd\tau + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i} v_{x_j}\, dx \Big|_0^t + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega a(x) v^2(x,\tau)\, dx \Big|_0^t$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x,\tau)\, dx \Big|_0^t \leqslant \frac{\delta_0^2}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v_\tau^2\, dxd\tau + \frac{1}{2\delta_0^2} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \tilde{f}^2(x,\tau)\, dxd\tau$$
$$+ \frac{\delta_1^2}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v_\tau^2\, dxd\tau + \frac{M_0^2 t_1}{2\delta_1^2} \int\limits_\Omega v^2(x,t_1)\, dx + \frac{\delta_2^2}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v_\tau^2\, dxd\tau$$
$$+ \frac{M_0^2 t_2}{2\delta_2^2} \int\limits_\Omega v^2(x,t_2)\, dx.$$

Имеем

$$v_{x_i}(x,0) = \alpha_{1x_i}(x) v(x,t_1) + \alpha_1(x) v_{xi}(x,t_1)$$
$$+ \alpha_{2x_i}(x) v(x,t_2) + \alpha_2(x) v_{x_i}(x,t_2),$$

$$
\begin{aligned}
v_{x_i}^2(x,0) = {} & \alpha_{1x_i}^2(x)v^2(x,t_1) + \alpha_{2x_i}^2(x)v^2(x,t_2) + \alpha_1^2(x)v_{x_i}^2(x,t_1) \\
& + \alpha_2^2(x)v_{x_i}^2(x,t_2) + 2\alpha_{1x_i}(x)\alpha_1(x)v(x,t_1)v_{x_i}(x,t_1) \\
& + 2\alpha_{1x_i}(x)\alpha_{2x_i}(x)v(x,t_1)v(x,t_2) + 2\alpha_{1x_i}(x)\alpha_2(x)v(x,t_1)v_{x_i}(x,t_2) \\
& + 2\alpha_1(x)\alpha_{2x_i}(x)v_{x_i}(x,t_1)v(x,t_2) + 2\alpha_1(x)\alpha_2(x)v_{x_i}(x,t_1)v_{x_i}(x,t_2) \\
& + 2\alpha_{2x_i}(x)\alpha_2(x)v(x,t_2)v_{x_i}(x,t_2).
\end{aligned}
$$

Справедливы следующие неравенства:

$$
\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} a(x)v^2(x,0)\,dx \leqslant a_1\alpha^2\int\limits_{\Omega} v^2(x,t_1)\,dx + a_1\alpha^2\int\limits_{\Omega} v^2(x,t_2)\,dx,
$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}v_{x_i}(x,0)v_{x_j}(x,0)\,dx \\
& \qquad \leqslant \alpha^2\left(\frac{\delta_3^2}{2}+\frac{\delta_6^2}{2}+\frac{3}{2}\right)\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}v_{x_i}(x,t_1)v_{x_j}(x,t_1)\,dx \\
& \qquad + \alpha^2\left(\frac{\delta_4^2}{2}+\frac{\delta_5^2}{2}+\frac{3}{2}\right)\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}v_{x_i}(x,t_2)v_{x_j}(x,t_2)\,dx \\
& \qquad\qquad + M_2(\bar{a},\delta_3,\delta_4,\delta_5,\delta_6)\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2} v^2(x,t_k)\,dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2(x,0)\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\Bigg[& \alpha^2\big(2+\delta_7^2+\delta_9^2\big)\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2(x,t_1)\,dx \\
& + \alpha^2\big(2+\delta_8^2+\delta_{10}^2\big)\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2(x,t_2)\,dx\Bigg] \\
& + M_3(\beta,\delta_7,\delta_8,\delta_9,\delta_{10},\varepsilon)\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2} v^2(x,t_k)\,dx.
\end{aligned}
$$

Получим

$$\left(1-\frac{\delta_0^2+\delta_1^2+\delta_2^2}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega v_\tau^2\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}v_{x_i}(x,t)v_{x_j}(x,t)\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega a(x)v^2(x,t)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x,t)\,dx$$
$$\leqslant\alpha^2\left(\frac{\delta_3^2}{2}+\frac{\delta_6^2}{2}+\frac{3}{2}\right)\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}v_{x_i}(x,t_1)v_{x_j}(x,t_1)\,dx$$
$$+\alpha^2\left(\frac{\delta_4^2}{2}+\frac{\delta_5^2}{2}+\frac{3}{2}\right)\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}v_{x_i}(x,t_2)v_{x_j}(x,t_2)\,dx$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\left[\alpha^2\big(2+\delta_7^2+\delta_9^2\big)\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x,t_1)\,dx\right.$$
$$\left.+\alpha^2\big(2+\delta_8^2+\delta_{10}^2\big)\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x,t_2)\,dx\right]+B.$$

Вследствие оценки (12) для малых δ_i при выполнении условия $6\alpha^2<1$ получим ограниченность величины $\int\limits_\Omega\sum\limits_{i,j=1}^n a^{ij}v_{x_i}(x,t)v_{x_j}(x,t)\,dx$, а при $4\alpha^2<1$ — ограниченность $\int\limits_\Omega\sum\limits_{i=1}^n v_{x_i}^2(x,t)\,dx$. Отсюда

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega v_\tau^2\,dxd\tau+\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}v_{x_i}(x,t)v_{x_j}(x,t)\,dx$$
$$+\varepsilon\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x,t)\,dx\leqslant M_4\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\tilde f^2(x,t)\,dxdt.\qquad(15)$$

Суммируя оценки (14), (15), получаем, что для решений нашей задачи

выполняется неравенство

$$\int_0^t \int_\Omega v^2\,dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega v_\tau^2\,dxd\tau + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2\,dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i} v_{x_j}\,dxd\tau \leqslant M_5 \|\tilde{f}\|^2_{L_2(Q)}, \quad (16)$$

где M_5 зависит от $a_0, a_1, \bar{a}, \alpha, \beta, M_0$.

Из (16) следует аналогичное соотношение для $w(x,t)$:

$$\int_0^t \int_\Omega w^2\,dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega w_\tau^2\,dxd\tau + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2\,dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} w_{x_i} w_{x_j}\,dxd\tau \leqslant M_6. \quad (17)$$

Поскольку на самом деле функция $w(x,t)$ определяется также параметром ε, из семейства $\{w_\varepsilon(x,t)\}$ можно получить семейство функций $\{u_\varepsilon(x,t)\}$ с помощью равенств

$$u_{\varepsilon t}(x,t) = w_\varepsilon(x,t), \quad u_\varepsilon(x,0) = 0.$$

Далее, имеем

$$\int_0^t \int_\Omega u_\varepsilon^2\,dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega u_{\varepsilon\tau}^2\,dxd\tau + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{\varepsilon x_i}^2\,dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{\varepsilon x_i} u_{\varepsilon x_j}\,dxd\tau \leqslant M_7. \quad (18)$$

В целом получаем оценку

$$\int_0^t \int_\Omega u_\varepsilon^2\,dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega u_{\varepsilon\tau}^2\,dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega u_{\varepsilon\tau\tau}^2\,dxd\tau$$
$$+\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{\varepsilon x_i}^2\,dxd\tau + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{\varepsilon x_i \tau}^2\,dxd\tau$$
$$+\int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{\varepsilon x_i} u_{\varepsilon x_j}\,dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{\varepsilon x_i \tau} u_{\varepsilon x_j \tau}\,dxd\tau \leqslant M_8. \quad (19)$$

Интегрируя вспомогательное уравнение от 0 до t и учитывая условие $u_\varepsilon(x,0)=0$, получим

$$u_{\varepsilon t}(x,t) - \varepsilon\Delta u_\varepsilon(x,t) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{\varepsilon x_j}(x,t))$$
$$+ a(x)u_\varepsilon(x,t) - f(x,t) - h_1(x,t)q_{1\varepsilon}(x) - h_2(x,t)q_{2\varepsilon}(x)$$
$$= u_{\varepsilon t}(x,0) - f(x,0) - h_1(x,0)q_{1\varepsilon}(x) - h_2(x,0)q_{2\varepsilon}(x), \quad (20)$$

где

$$q_{1\varepsilon}(x) = q_{10}(x) + q_{11}(x)u_{\varepsilon t}(x,t_1) + q_{12}(x)u_{\varepsilon t}(x,t_2),$$
$$q_{2\varepsilon}(x) = q_{20}(x) + q_{21}(x)u_{\varepsilon t}(x,t_1) + q_{22}(x)u_{\varepsilon t}(x,t_2).$$

Правая часть (20) равна

$$u_{\varepsilon t}(x,0) - f(x,0) - h_1(x,0)q_{1\varepsilon}(x) - h_2(x,0)q_{2\varepsilon}(x)$$
$$= w_\varepsilon(x,0) - f(x,0) - h_1(x,0)q_{1\varepsilon}(x) - h_2(x,0)q_{2\varepsilon}(x)$$
$$= \alpha_1(x)w_\varepsilon(x,t_1) + \alpha_2(x)w_\varepsilon(x,t_2) + \alpha_0(x)$$
$$- f(x,0) - h_1(x,0)q_{1\varepsilon}(x) - h_2(x,0)q_{2\varepsilon}(x) = 0. \quad (21)$$

Отсюда

$$u_{\varepsilon t} - \varepsilon\Delta u_\varepsilon - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{\varepsilon x_j}) + a(x)u_\varepsilon$$
$$= f(x,t) + h_1(x,t)q_{1\varepsilon}(x) + h_2(x,t)q_{2\varepsilon}(x). \quad (22)$$

Подставляя $t = t_1$ и $t = t_2$ в (22), получим уравнения

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{\varepsilon x_j}(x,t_1)) + a(x)u_\varepsilon(x,t_1) = 0,$$

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{\varepsilon x_j}(x,t_2)) + a(x)u_\varepsilon(x,t_2) = 0,$$

которые являются эллиптическими. В силу того, что $a(x) \geqslant a_0 > 0$ и $u_\varepsilon(x,t_1) = u_\varepsilon(x,t_2) = 0$ при $x \in \Gamma$, получаем, что $u_\varepsilon(x,t_i) = 0$ при $x \in \Omega$, $i = 1,2$.

Умножаем (22) на пробную функцию $\eta(x,t)$ и интегрируем по Q:

$$\int\limits_Q \left(u_{\varepsilon t}\eta + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} u_{\varepsilon x_i}\eta_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{\varepsilon x_i}\eta_{x_j} + au_\varepsilon\eta \right) dxdt$$
$$= \int\limits_Q \left(f\eta + \sum_{k=1}^{2} q_{\varepsilon k}h_k\eta \right) dxdt.$$

Из оценки (19) следует, что можно выбрать подпоследовательности $\{\varepsilon_m\}$ и $\{u_m(x,t)\}$ такие, что при $m \to \infty$

$$\varepsilon_m \to 0,$$

$$u_m(x,t) \to u(x,t), \quad u_{mt}(x,t) \to u_t(x,t),$$
$$a^{ij}u_{mx_i}(x,t) \to a^{ij}u_{x_i}(x,t) \ \text{ слабо в } L_2(Q),$$
$$u_{mt}(x,t_k) \to u_t(x,t_k), \ k = 1,2, \ \text{ слабо в } L_2(\Omega),$$
$$\varepsilon_m u_{mx_i}(x,t) \to 0 \ \text{ слабо в } L_2(Q).$$

В пределе получим нужное нам обобщенное решение.

Теорема 1 доказана.

Перейдем к обратной задаче II.

Введем обозначения:

$$f_0(x) = \int\limits_0^T \gamma(t)f(x,t)\,dt, \quad h_0(x) = \int\limits_0^T \gamma(t)h(x,t)\,dt, \quad \gamma_0 = \int\limits_0^T (\gamma'(t))^2\,dt,$$

$$h_1(x,t) = \frac{h(x,t)}{h_0(x)}, \quad H = \max_{\overline{Q}} h_1^2(x,t), \quad a_0 = \min_{\overline{\Omega}} a(x),$$

$$k = \frac{HT(1+a_0)}{a_0}, \quad \varphi(x,v) = \gamma(T)v(x,T) - \int_0^T \gamma'(t)v(x,t)\,dt,$$

где $v(x,t)$ — заданная функция.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$h(x,t) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad a(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad a^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

$$a_0 > 0, \quad \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\nu_i\nu_j > 0, \quad x \in \Gamma; \tag{23}$$

$$a_0 + 1 - 4k\gamma^2(T) > 0, \quad a_0 - 4k\gamma_0 > 0; \tag{24}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q). \tag{25}$$

Тогда существует обобщенное решение $u(x,t) \in V$, $q(x) \in L_2(\Omega)$ *задачи* $(1')$, (2), $(3')$.

Доказательство. Умножим $(1')$ на $\gamma(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. После несложных выкладок можем вычислить $q(x)$:

$$q(x) = \frac{1}{h_0(x)}\left[\gamma(T)u(x,T) - \int_0^T \gamma'(t)u(x,t)\,dt - f_0(x)\right]$$
$$= \frac{1}{h_0(x)}\varphi(x,u) - \frac{f_0(x)}{h_0(x)}.$$

Подставив выражение для $q(x)$ в уравнение $(1')$, получим

$$u_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}(x,t)) + a(x)u(x,t) = \tilde{f}(x,t) + h_1(x,t)\varphi(x,u),$$

где $\tilde{f}(x,t) = f(x,t) - h_1(x)f_0(x)$.

Воспользуемся методом регуляризации, как и в предыдущей задаче. Пусть ε — положительное число. Рассмотрим вспомогательную задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся решением уравнения*

$$L_\varepsilon u = \tilde{f}(x,t) + h_1(x,t)\varphi(x,u)$$

и удовлетворяющую условиям

$$u(x,0)=0,\ x\in\Omega;\quad u(x,t)|_S=0.$$

При выполнении условий теоремы вспомогательная задача разрешима при фиксированном ε в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ (см. [4, 5]). Покажем, что для этих решений имеют место равномерные по ε априорные оценки.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega L_\varepsilon u\cdot u\,dxd\tau=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega[\tilde f(x,t)+h_1(x,t)\varphi(x,u)]u\,dxd\tau. \tag{26}$$

Интегрируя, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx\Big|_0^T+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega a(x)u^2(x,t)\,dxdt$$
$$+\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t)\,dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\tilde f(x,t)u(x,t)\,dxdt$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega h_1(x,t)\varphi(x,u)u(x,t)\,dxdt.$$

Используя неравенство Юнга, начальное условие (2) и условия теоремы, приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx+\varepsilon\int\limits_Q\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t)\,dxdt+\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^n a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dxdt$$
$$+a_0\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt\leqslant\frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_Q\tilde f^2(x,t)\,dxdt$$
$$+\frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt+\frac{HT}{2\delta_2^2}\int\limits_\Omega\varphi^2(x,u)\,dx, \tag{27}$$

в котором δ_1 и δ_2 — произвольные положительные числа.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega L_\varepsilon u \cdot u_t \, dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega [\tilde{f}(x,t) + h_1(x,t)\varphi(x,u)] u_t \, dxdt. \qquad (28)$$

Интегрируя по частям, используя неравенство Юнга и условия теоремы, получим неравенство

$$\int\limits_Q u_t^2 \, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i}(x,T) u_{x_j}(x,T) \, dx + \frac{a_0}{2} \int\limits_\Omega u^2(x,T) \, dx$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,T) \, dx \leqslant \frac{\delta_3^2}{2} \int\limits_Q u_t^2 \, dxdt + \frac{1}{2\delta_3^2} \int\limits_Q \tilde{f}^2(x,t) \, dxdt$$
$$+ \frac{\delta_4^2}{2} \int\limits_Q u_t^2 \, dxdt + \frac{HT}{2\delta_4^2} \int\limits_\Omega \varphi^2(x,u) \, dx, \qquad (29)$$

в котором δ_3 и δ_4 — произвольные положительные числа.

Сумма (27) и (29) даст неравенство

$$\frac{a_0+1}{2} \int\limits_\Omega u^2(x,T) \, dx + \left(a_0 - \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{2}\right) \int\limits_Q u^2(x,t) \, dxdt$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i}(x,T) u_{x_j}(x,T) \, dx + \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \, dxdt$$
$$+ \left(1 - \frac{\delta_3^2 + \delta_4^2}{2}\right) \int\limits_Q u_t^2 \, dxdt + \varepsilon \int\limits_Q \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \, dxdt + \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,T) \, dx$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{2\delta_1^2} + \frac{1}{2\delta_3^2}\right) \int\limits_Q \tilde{f}^2(x,t) \, dxdt + \left(\frac{HT}{2\delta_2^2} + \frac{HT}{2\delta_4^2}\right) \int\limits_\Omega \varphi^2(x,u) \, dx. \qquad (30)$$

Далее,

$$\int\limits_\Omega \varphi^2(x,u) \, dx \leqslant \int\limits_\Omega \left[2\gamma^2(T) u^2(x,T) \, dx + 2 \left(\int\limits_0^T \gamma'(t) u(x,t) \, dt \right)^2 \right] dx$$
$$\leqslant 2\gamma^2(T) \int\limits_\Omega u^2(x,T) \, dx + 2\gamma_0 \int\limits_Q u^2(x,t) \, dxdt. \qquad (31)$$

Положим $\delta_1^2 = \delta_2^2 = \frac{a_0}{2}$ и $\delta_3^2 = \delta_4^2 = \frac{1}{2}$. Тогда из неравенства (30) и оценки (31) получим

$$\frac{a_0 + 1 - 4k\gamma^2(T)}{2} \int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx + \frac{a_0 - 4k\gamma_0}{2} \int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i}(x,T) u_{x_j}(x,T)\,dx + \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} u_{x_j}\,dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_Q u_t^2\,dxdt$$

$$+ \varepsilon \int\limits_Q \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t)\,dxdt + \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,T)\,dx \leqslant \frac{a_0+1}{a_0} \|\tilde{f}\|_{L_2(Q)}^2. \quad (32)$$

Поскольку на самом деле функция $u(x,t)$ определяется также параметром ε, для семейства $\{u_\varepsilon(x,t)\}$ в целом имеем оценку:

$$\int\limits_\Omega u_\varepsilon^2(x,T)\,dx + \int\limits_Q u_\varepsilon^2(x,t)\,dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{\varepsilon x_i}(x,T) u_{\varepsilon x_j}(x,T)\,dx$$

$$+ \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{\varepsilon x_i} u_{\varepsilon x_j}\,dxdt + \int\limits_Q u_{\varepsilon t}^2\,dxdt + \varepsilon \int\limits_Q \sum_{i=1}^n u_{\varepsilon x_i}^2\,dxdt$$

$$+ \varepsilon \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{\varepsilon x_i}^2(x,T)\,dx \leqslant N \|\tilde{f}\|_{L_2(Q)}^2. \quad (33)$$

Умножив вспомогательное уравнение на $\gamma(t)$ и проинтегрировав его по отрезку $[0,T]$, с учетом условия $u_\varepsilon(x,0) = 0$ получим

$$-\varepsilon\Delta \left(\int\limits_0^T \gamma(t) u_\varepsilon(x,t)\,dt \right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij}(x) \left(\int\limits_0^T \gamma(t) u_\varepsilon(x,t)\,dt \right)_{x_j} \right)$$

$$+ a(x) \int\limits_0^T \gamma(t) u_\varepsilon(x,t)\,dt = 0. \quad (34)$$

Обозначим $\mu_\varepsilon(x) = \int\limits_0^T \gamma(t) u_\varepsilon(x,t)\,dt$. Тогда (34) перепишется в виде:

$$-\varepsilon\Delta\mu_\varepsilon - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)\mu_{\varepsilon x_j}) + a(x)\mu_\varepsilon = 0. \quad (35)$$

Это уравнение является эллиптическим. В силу того, что $a(x) \geqslant a_0 > 0$ и $\mu_\varepsilon(x) = 0$, $x \in \Gamma$, получаем, что $\mu_\varepsilon(x) = 0$ при $x \in \Omega$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны выполненным при доказательстве теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Исходное уравнение (1) может иметь и более общий вид, например, такой:

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}(x,t) + a(x,t)u = f(x,t) + \sum_{k=1}^{m} q_k(x)h_k(x,t)$$

с условием переопределения (3) или

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}(x,t) + a(x,t)u = f(x,t) + q(x)h(x,t)$$

с условием переопределения (3′).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. C., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Dekker, 1999.
2. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. New York: Springer Sci., 2006. (Appl. Math. Sci., V. 127.)
3. *Кожанов А. И.* Задача определения решения и правой части специального вида в параболическом уравнении // Обратные задачи и информационные технологии. Югорский институт информационных технологий, 2002. Т. 1, №3. С. 13–41.
4. *Кожанов А. И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 51–60.
5. *Kozhanov A. I., Safuillova R. R.* Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations // J. Inverse Ill-posed Probl. 2010. V. 18, N 1. P. 1–24.
6. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for parabolic equations // J. Inverse Ill-posed Probl. 1993. V. 1, N 4. P. 283–305.
7. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
8. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: VNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; Vol. 10.)

г. Якутск *20 июня 2011 г.*

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕИЗВЕСТНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ*)

Л. А. Телешева

Задача, которая будет изучаться в настоящей работе, относится к классу коэффициентных обратных задач, т. е. задач, в которых вместе с решением дифференциального уравнения неизвестными являются тот или иной (иные) коэффициент(ы) и (или) правая часть. Обратные задачи для параболических уравнений в различных постановках исследовались в многочисленных работах; как наиболее близкие к тематике данной статьи можно отметить монографии [1–5] и статьи [6–12].

Один из наиболее часто применяемых в последнее время методов доказательства разрешимости обратных задач — сведение обратной задачи к новой краевой задаче для «нагруженного» уравнения [13, 14], существование решения которого дает существование решения исходной обратной задачи.

Перейдем к содержательной части. В работе рассматривается разрешимость обратной задачи для параболических уравнений высокого порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени.

Функции $f(x,t)$, $u_0(x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $K(x)$, $c(x,t)$ известны и заданы при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БГУ-2010.

Обратная задача I. *Найти функции* $\{u(x,t), p(t)\}$, *связанные в прямоугольнике* $Q = \{(x,t) : (0,1) \times (0,T)\}$, $T < \infty$, *уравнением*

$$p(t)u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ *начального условия*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

краевых условий

$$\begin{cases} u(0,t) = \varphi_0(t), \\ u(1,t) = \psi_0(t), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \varphi_1(t), \\ u_x(1,t) = \psi_1(t), \end{cases} \tag{4}$$

а также условия переопределения

$$\int\limits_0^1 K(x)u(x,t)\,dx = \mu(t). \tag{5}$$

В условиях (3)–(5) t *есть точка интервала* $(0,T)$.

Обратная задача II. *Найти функции* $\{u(x,t), p(t)\}$, *связанные в прямоугольнике* Q *уравнением* (1), *при выполнении для функции* $u(x,t)$ *условий* (2), (3), (5), *а также условий*

$$\begin{cases} u_{xx}(0,t) = \varphi_1(t), \\ u_{xx}(1,t) = \psi_1(t). \end{cases} \tag{6}$$

Для простоты изложения дальнейших выкладок введем некоторые обозначения. Здесь и далее считаем, что функция $c(x,t)$ представима в виде $c(x,t) = c_1(x,t) + c_2(x,t)$.

Пусть p_0, p_1, μ_0 — положительные числа, роль которых будет объяснена ниже. Положим, что

$$\begin{gathered} \bar{u}(x,t) = [\psi_1(t) + \varphi_1(t) - 2\psi_0(t) + 2\varphi_0(t)]x^3 \\ + [3\psi_0(t) - 3\varphi_0(t) - 2\varphi_1(t) - \psi_1(t)]x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t), \\ w_0(x) = u_0(x) - \bar{u}(x,0), \\ a(x,t) = K^{(4)}(x) + c(x,t)K(x), \\ F(t) = \frac{1}{\mu'(t)} \int\limits_0^1 K(x)f(x,t)\,dx - \frac{1}{\mu'(t)} \int\limits_0^1 c(x,t)\bar{u}(x,t)K(x)\,dx, \end{gathered}$$

$$\varphi(t,v) = \int\limits_0^1 K(x)v_{xxxx}\,dx + \int\limits_0^1 K(x)c(x,t)v(x,t)\,dx,$$

$v(x,t)$ — заданная функция,

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - c(x,t)\bar{u}(x,t) - F(t)\bar{u}_t(x,t),$$

$$M_0 = p_1\mu_0, \quad M_1 = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^1 a^2(x,t)\,dx,$$

$$m_1 = \max_{\bar{Q}}|\bar{u}_t(x,t)|, \quad m = \max_{\bar{Q}}|c^2(x,t)|, \quad m_2 = \max_{\bar{Q}}|c_2(x,t)|,$$

$$C = \max\left(\frac{m}{p_0}, \frac{M_1}{\mu_0^2 p_0}\right),$$

$$K_1 = \frac{3}{p_0}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \bar{f}^2(x,\tau)\,dxd\tau + \int\limits_0^1 w_0''^2(x)\,dx + \int\limits_0^1 c_1(x,0)w_0^2(x)\,dx,$$

$$K_2 = \frac{3m_1^2M_1}{p_0\mu_0^2} + \frac{3m_2^2}{p_0}, \quad R_1 = [K_1M_1\exp(K_2T)]^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$f(x,t) \in L_2(\overline{Q}), \quad c(x,t) \in C^1(\overline{Q}),$$

$$\mathrm{c}_2(x,t) \in C^2(\overline{Q})\mu(t) \in C^1([0,T]), \quad K(x) \in C^4([0,1]),$$

$$\varphi_0(x) \in C^1([0,1]), \quad \varphi_1(x) \in C^1([0,1]),$$

$$\psi_0(x) \in C^1([0,1]), \quad \psi_1(x) \in C^1([0,1]), \quad u_0(x) \in W_2^4(Q),$$

$$|\mu'(t)| \geqslant \mu_0 \quad \textit{при } t \in [0,T],$$

$$F(t) \geqslant p_0 + p_1 \quad \textit{при } t \in [0,T],$$

$$c_1(x,t) \geqslant 0, c_{1t}(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при}(x,t) \in \overline{Q},$$

$$\int\limits_0^1 K(x)u_0(x)\,dx = \mu(0).$$

Кроме того, пусть выполняются условия

$$K(0) = K(1) = K'(0) = K'(1) = 0, \quad R_1 \leqslant M_0,$$

а также условия согласования

$$u_0(0) = \varphi_0(0), \quad u_0(1) = \psi_0(1), \quad u_0' = \varphi_1(0), \quad u_0'(1) = \psi_1(1).$$

Тогда для обратной задачи I *существует решение* $u(x,t)$, $p(t)$ *такое что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(\overline{Q})$, $p(t) \in L_\infty([0,T])$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую в прямоугольнике* Q *уравнению*

$$\left[\frac{1}{\mu'(t)}\int\limits_0^1 K(x)f(x,t)\,dx - \frac{1}{\mu'(t)}\varphi(t,u)\right]u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t) \quad (7)$$

и условиям (2)–(4).

Решение данной задачи будем искать в виде $u(x,t) = \bar{u}(x,t) + w(x,t)$. Тогда данная задача сведется к обратной задаче с однородными краевыми условиями, при этом начальное условие преобразуется к аналогичному для $u(x,t)$ условию. Более точно, имеем задачу: *найти функцию* $w(x,t)$, *являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения*

$$\left[F(t) - \frac{1}{\mu'(t)}\varphi(t,w)\right]w_t + w_{xxxx} + c(x,t)w = \bar{f}(x,t) + \frac{1}{\mu'(t)}\varphi(t,w)\bar{u}_t \quad (1')$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x,0) = w_0(x), \quad x \in (0,1), \quad (2')$$

$$\begin{cases} w(0,t) = 0, & t \in (0,T), \\ w(1,t) = 0, & t \in (0,T), \end{cases} \quad (3')$$

$$\begin{cases} w_x(0,t) = 0, & t \in (0,T), \\ w_x(1,t) = 0, & t \in (0,T). \end{cases} \quad (4')$$

Определим срезающую функцию $G(\xi)$:

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leqslant M_0, \\ M_0, & \text{если } \xi > M_0, \\ -M_0, & \text{если } \xi < -M_0. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение

$$\left[F(t) - \frac{1}{\mu'(t)}G(\varphi(t,w))\right]w_t + w_{xxxx} + c(x,t)w = \bar{f}(x,t) + \frac{1}{\mu'(t)}\varphi(t,w)\bar{u}_t \quad (1_G)$$

и краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1_G) и такую, что для нее выполняются условия $(2')$–$(4')$.*

Для доказательства разрешимости этой задачи воспользуемся методом линеаризации и методом продолжения по параметру.

Пусть $\lambda \in [0,1]$, $v(x,t)$ — заданная функция из $W_2^{4,1}(Q)$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$\left[F(t) - \frac{1}{\mu'(t)}G(\varphi(t,v))\right]w_t + w_{xxxx} + c(x,t)w = \bar{f}(x,t) + \frac{\lambda}{\mu'(t)}\varphi(t,w)\bar{u}_t \quad (1_{G,v,\lambda})$$

и такую, что для нее выполняются условия $(2')$–$(4')$.

Поскольку и для метода продолжения по параметру, и для метода неподвижной точки необходимы «хорошие» априорные оценки, покажем их наличие.

В дальнейшем систематически будет использоваться неравенство

$$\int_0^1 w^2(x,t)\,dx \leqslant \int_0^1 w_{xx}^2(x,t)\,dx, \tag{8}$$

справедливое при выполнении условий $(3')$ и $(4')$.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_0^1 \left\{\left[F(\tau) - \frac{1}{\mu'(\tau)}G(\varphi(\tau,v))\right]w_\tau + w_{xxxx} + c(x,\tau)w\right\}w_\tau\,dxd\tau$$
$$= \int_0^t\int_0^1 \left[\bar{f}(x,\tau) + \frac{\lambda}{\mu'(\tau)}\varphi(\tau,w)\bar{u}_\tau\right]w_\tau\,dxd\tau,$$

являющееся следствием уравнения $(1_{G,v,\lambda})$.

Используя интегрирование по частям, условия теоремы, неравенство (8), неравенство Юнга и Гёльдера, приходим к неравенству

$$p_0 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_\tau^2 \, dxd\tau + \int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)\, dx \leqslant K_1 + K_2 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,\tau)\, dxd\tau.$$

Применяя далее лемму Гронуолла, получаем первые оценки:

$$\int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,t)\, dx \leqslant K_1 \exp(K_2 T), \tag{9}$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{xx}^2(x,\tau)\, dxd\tau \leqslant T K_1 \exp(K_2 T), \tag{10}$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_\tau^2(x,\tau)\, dxd\tau \leqslant \frac{K_2 K_1 T}{p_0} \exp(K_2 T) + K_1. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 \left\{ \left[F(\tau) - \frac{1}{\mu'(\tau)} G(\varphi(\tau,v)) \right] w_\tau + w_{xxxx} + c(x,\tau) w \right\} w_{xxxx}\, dxd\tau$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \left[\bar{f}(x,\tau) + \frac{\lambda}{\mu'(\tau)} \varphi(\tau,w) \bar{u}_\tau \right] w_{xxxx}\, dxd\tau,$$

также являющееся следствием уравнения $(1_{G,v,\lambda})$.

Интегрирование по частям, неравенство Юнга и оценки (9)–(11) позволяют из этого равенства вывести оценку

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_{xxxx}^2(x,\tau)\, dxd\tau \leqslant M$$

с постоянной M, определяющейся функциями $c(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ и числом T.

Из полученных оценок следует, что норма функции $w(x,t)$ в пространстве $W_2^{4,1}(Q)$ ограничена постоянной, зависящей только от исход-

ных данных:

$$\|w\|_{W_2^{4,1}(Q)} \leqslant K_0. \tag{12}$$

Из доказанной оценки и теоремы о методе продолжения по параметру вытекает, что задача $(1_{G,v,\lambda})$, $(2')$–$(4')$ разрешима при $\lambda = 1$ [15].

Рассмотрим уравнение

$$\left[F(t) - \frac{1}{\mu'(t)}G(\varphi(t,v))\right]w_t + w_{xxxx} + c(x,t)w = \bar{f}(x,t) + \frac{1}{\mu'(t)}\varphi(t,w)\bar{u}_t. \tag{$1_{G,v}$}$$

Краевая задача $(1_{G,v})$, $(2')$–$(4')$ порождает оператор $\Phi(v)$, ставящий в соответствие функции $v(x,t)$ из пространства $W_2^{4,1}(Q)$ решение $w(x,t)$, принадлежащее этому же пространству. Покажем, что данный оператор имеет неподвижные точки.

Пусть R_0 — число такое, что $R_0 \geqslant K_0$, и пусть B — множество:

$$B = \big\{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^{4,1}(Q),$$
$$v(0,t) = v(1,t) = v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0,\ \|v(x,t)\|_{W_2^{4,1}(Q)} \leqslant R_0\big\}.$$

Пусть $v(x,t) \in B$. Тогда из полученных априорных оценок и выбора числа R_0 следует, что оператор Φ переводит множество B в себя.

Покажем непрерывность оператора Φ на множестве B. Пусть последовательность функций $v_n(x,t)$ сходится к функции $\bar{v}(x,t)$ в $W_2^{4,1}(\overline{Q})$, функции $w_n(x,t)$ и $\overline{w}(x,t)$ — образы функций $v_n(x,t)$, $\bar{v}(x,t)$ соответственно при действии оператора Φ, $W_n(x,t)$ есть функция $w_n(x,t) - \overline{w}(x,t)$.

Для последовательности $\{v_n(x,t)\}$ и функции $\overline{w}(x,t)$ выполняется оценка (12). Функции $W_n(x,t)$ представляют собой решения краевой задачи

$$\left[F(t) - \frac{1}{\mu(t)}G(\varphi(t,\bar{v}))\right]W_{nt} + W_{nxxxx} + c(x,t)W_n$$
$$= [G(\varphi(t,v_n)) - G(\varphi(t,\bar{v}))]\frac{w_{nt}}{\mu'(t)} + \frac{\bar{u}_t}{\mu'(t)}\varphi(t,W_n),$$
$$W_n(x,0) = 0, \quad W_n(0,t) = W_n(1,t) = W_{nx}(0,t) = W_{nx}(1,t) = 0.$$

Повторяя доказательство оценки (12), получаем, что для функции

$W_n(x,t)$ выполняется неравенство

$$\|W_n\|^2_{W_2^{4,1}(Q)} \leqslant N_1 \int\limits_0^T \int\limits_0^1 [G(\varphi(t,v_n)) - G(\varphi(t,\bar{v}))]^2 \frac{w_{nt}^2}{\mu'^2(t)}\, dxdt$$

$$\leqslant \frac{N_1}{\mu_0^2} \max_{0\leqslant t\leqslant T} [G(\varphi(t,v_n)) - G(\varphi(t,\bar{v}))]^2 \int\limits_0^T \int\limits_0^1 w_{nt}^2\, dxdt.$$

Так как функция $G(\varphi(t,v))$ удовлетворяет условию Липшица и для функции $w_n(x,t)$ выполняется оценка (12) равномерно по n, то

$$\|W_n\|^2_{W_2^{1,4}(Q)} \leqslant N_2 \max_{0\leqslant t\leqslant T} |\varphi(t,v_n) - \varphi(t,\bar{v})|^2$$

$$\leqslant N_3 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_0^1 [v_n(x,t) - \bar{v}(x,t)]^2\, dx. \quad (13)$$

Полученное неравенство и сходимость последовательности $\{v_n(x,t)\}$ в пространстве $W_2^{1,4}(Q)$ к функции $\bar{v}(x,t)$ означают, что оператор Φ непрерывен.

Покажем теперь, что оператор Φ компактен на множестве B.

Пусть $v_n(x,t)$ — ограниченное семейство функций множества B, функции $w_n(x,t)$ — образы функций $v_n(x,t)$ при действии оператора Φ. Семейство функций $\{v_n(x,t)\}$ равномерно ограничено в $W_2^{4,1}(\overline{Q})$. Тогда из этого семейства можно извлечь подпоследовательность $v_{n_k}(x,t)$ такую, что $v_{n_k}(x,t)$ сходится почти всюду, причем почти всюду равномерно к некоторой функции $v(x,t)$ [16, 17]. Из свойств рефлексивности гильбертова пространства следует, что можно еще раз перейти к подпоследовательности такой, что последовательности $v_{n_{k_l}x}(x,t)$, $v_{n_{k_l}xx}(x,t)$, $v_{n_{k_l}xxx}(x,t)$, $v_{n_{k_l}xxxx}(x,t)$, $v_{n_{k_l}t}(x,t)$ сходятся слабо в пространстве $L_2(Q)$ соответственно к функциям $v_x(x,t)$, $v_{xx}(x,t)$, $v_{xxx}(x,t)$, $v_{xxxx}(x,t)$, $v_t(x,t)$. При этом функция $v(x,t)$ будет удовлетворять условиям $v(0,t) = v(1,t) = v_x(0,1) = v_x(1,t) = 0$ и включению $v(x,t) \in W_2^{4,1}(Q)$.

Обозначим через $w(x,t)$ образ функции $v(x,t)$ при действии оператора Φ. Повторяя доказательство непрерывности оператора Φ, полу-

чим, что последовательность образов $\{w_{n_{k_l}}(x,t)\}$ сходится к функции $w(x,t)$ в пространстве $W_2^{4,1}(Q)$. Это и означает компактность оператора Φ.

Непрерывность и компактность оператора Φ на множестве B, а также тот факт, что оператор Φ переводит выпуклое замкнутое множество B в себя, означают, что выполняются все условия теоремы Шаудера. Согласно этой теореме оператор Φ имеет неподвижную точку $w(x,t)$, очевидно являющуюся решением краевой задачи (1_G), $(2')$–$(4')$.

Далее заметим, что имеет место неравенство

$$|\varphi(t,w)| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left(\int\limits_0^1 a^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^1 w^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая неравенство (8) и оценку (12), имеем

$$|\varphi(t,w)| \leqslant R_1.$$

Вследствие условия $R_1 \leqslant M_0$ получаем $G(\varphi(t,w)) = \varphi(t,w)$. Другими словами, функция $w(x,t)$ является решением краевой задачи $(1')$, $(2')$–$(4')$.

Вернемся к функции $u(x,t)$: $u(x,t) = \bar{u}(x,t) + w(x,t)$. Очевидно, что для функции $u(x,t)$ выполняются начальные и краевые условия (2)–(4). Далее очевидно, что функция $u(x,t)$ будет решением уравнения (7).

Положим

$$p(t) = \frac{1}{\mu'(t)} \int\limits_0^1 K(x) f(x,t)\,dx - \frac{1}{\mu'(t)} \varphi(t,u).$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $p(t)$ в прямоугольнике Q связаны уравнением (1). Умножим уравнение (1) на функцию $K(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,1]$. После несложных выкладок придем к равенству

$$p(t)\Psi'(t) = 0, \quad \Psi(t) = \mu(t) - \int\limits_0^1 K(x) u(x,t)\,dx. \tag{14}$$

Так как функция $p(t)$ строго положительна и $\Psi(t)$ обращается в нуль при $t = 0$, из равенства (14) следует, что для функции $u(x,t)$ будет выполняться условие (5). Это и означает, что построенные функции $u(x,t)$ и $p(t)$ дают решение обратной задачи I.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\{u_1(x,t), p_1(t)\}$, $\{u_2(x,t), p_2(t)\}$ — решения обратной задачи* I *такие, что функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ из пространства $W_2^{4,1}(Q)$, функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ из пространства $L_\infty([0,T])$. Пусть также выполнены следующие условия:*

$$p_1(t) \geqslant p_0 > 0, \quad p_2(t) \geqslant p_0 > 0 \quad \text{при } t \in [0,T],$$
$$K(0) = K(1) = K'(0) = K'(1) = 0.$$

Тогда эти решения совпадают.

Доказательство. Пусть $\{u_1(x,t), p_1(t)\}$ и $\{u_2(x,t), p_2(t)\}$ — решения обратной задачи I такие, что $p_1(t) \in L_\infty([0,T])$, $p_2(t) \in L_\infty([0,T])$, $u_1(x,t) \in W_2^{4,1}(\overline{Q})$, $u_2(x,t) \in W_2^{4,1}(\overline{Q})$. Тогда для них выполняются равенства

$$p_1(t)u_{1t} + u_{1xxxx} + c(x,t)u_1 = f(x,t),$$
$$p_2(t)u_{2t} + u_{2xxxx} + c(x,t)u_2 = f(x,t).$$

Обозначим $u(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$. Получим, что при $(x,t) \in Q$ выполняются уравнение

$$p_1(t)u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = (p_1(t) - p_2(t))u_{2t}, \tag{15}$$

начальное условие

$$u(x,0) = 0, x \in (0,1)$$

и граничные условия при $t \in [0,T]$:

$$\begin{cases} rlu(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u_x(0,t) = 0, \\ u_x(1,t) = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что функции $p_i(t)$ имеют вид

$$p_i(t) = \frac{1}{\mu'(t)} \int\limits_0^1 K(x) f(x,t)\, dx - \frac{1}{\mu'(t)} \varphi(t, u_i),$$

уравнение (15) можно записать следующим образом:

$$p_1(t)u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = \frac{1}{\mu'(t)} \int\limits_0^1 a(x,t)u(x,t)\,dx \cdot u_{2t}(x,t). \qquad (16)$$

Покажем, что $u(x,t) \equiv 0$. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 (p_1(\tau)u_\tau + u_{xxxx} + c(x,\tau)u)u_\tau\,dxd\tau$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \frac{1}{\mu'(t)} \left(\int\limits_0^1 a(y,\tau)u(y,\tau)\,dy \right) u_{2\tau}(x,\tau)u_\tau\,dxd\tau.$$

Применяя формулу интегрирования по частям и неравенство Юнга, получим неравенство

$$p_0 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau + \int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx \leqslant \frac{\delta_1^2}{2} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau$$
$$+ \frac{\delta_2^2}{2} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau + \frac{1}{2\delta_1^2} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 c^2(y,\tau)u^2\,dxd\tau$$
$$+ \frac{1}{2\delta_2^2} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \frac{u_{2\tau}^2}{\mu'^2(\tau)} \left(\int\limits_0^1 a(y,\tau)u(y,\tau)\,dy \right)^2 dxd\tau.$$

Положим $\delta_1 = \delta_2 = \sqrt{\frac{p_0}{2}}$. Учитывая (8), приходим к неравенству

$$\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx \leqslant C \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \left(\left(1 + u_{2\tau}^2\right) dx \int\limits_0^1 u_{xx}^2\,dx \right) d\tau.$$

Поскольку функция $\int\limits_0^1 \left[1 + u_{2t}^2(x,t)\right] dx$ суммируема на $[0,T]$, из леммы Гронуолла следует $u(x,t) \equiv 0$, т. е. $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ и $p_1(t) \equiv p_2(t)$.

Теорема доказана.

Пусть V_1 и V_2 — пространства:

$$V_1 = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^{4,1}(Q),\ v_{xxxxt}(x,t) \in L_2(Q),$$
$$v(0,t) = v(1,t) = v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0 \text{ при } t \in [0,T]\},$$

$$V_2 = \{v(x,t) : v(x,t) \in V_1,\ v_{xxxx}(x,t) \in V_1\};$$

нормы в этих пространствах определим естественным образом:

$$\|v\|_{V_1} = \|v\|_{W_2^{4,1}(Q)} + \|v_{xxxxt}\|_{L_2(Q)}, \quad \|v\|_{V_2} = \|v\|_{V_1} + \|v_{xxxx}\|_{V_1}.$$

Положим

$$M_2 = \int\limits_0^1 K^2(x)\,dx,$$

$$C_1 = \left(\int\limits_0^1 u_0^{(4)\,2}(x)\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f^2(x,\tau)\,dxd\tau\right)\exp\left(\frac{m}{\varepsilon}\right),$$

$$C_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^1 u_0^{(4)2}(x)\,dx + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f^2(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{m}{\varepsilon^2}TC_1$$

(ε — положительное число, роль которого будет пояснена ниже),

$$K_3 = \left(\int\limits_0^1 u_0''^2(x)\,dx + \int\limits_0^1 c_1(x,0)u_0^2(x)\,dx + \frac{2}{p_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f^2(x,\tau)\,dxd\tau\right)\exp\left(\frac{2m_2^2}{p_0}\right),$$

$$K_4 = p_0\int\limits_0^1 u_0''^2(x)\,dx + \frac{1}{p_0}\int\limits_0^1 c_1(x,0)u_0^2(x)\,dx + \frac{2}{p_0^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f^2(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{2m_2^2}{p_0^2}TK_3,$$

$$N_0 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7\sqrt{5}}+1\right)\left(\frac{2}{7\sqrt{5}}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right],$$

$$N_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[u_0^{(6)}(x)\right]^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 c_1(x,0)\left[u_0^{(4)}(x)\right]^2 dx + \frac{5}{p_0}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_{xxxx}^2\,dxd\tau,$$

$$N_2 = N_1 + \frac{15}{2p_0} K_3 T \max_{\overline{Q}}\big(c_x^2(x,t)\big) + \frac{20}{p_0} \max_{\overline{Q}}\big(c_{xx}^2(x,t)\big) K_3 T$$
$$+ \frac{15}{p_0} \max_{\overline{Q}}\big(c_{xxx}^2(x,t)\big) T K_3 + \frac{5}{p_0} \max_{\overline{Q}}(c_{xxxx}^2(x,t)) T K_3,$$
$$N_3 = \frac{15}{p_0} \max_{\overline{Q}}\big(c_x^2(x,t)\big) N_0 + \frac{1}{p_0} \max_{\overline{Q}}\big(c_2^2(x,t)\big), \quad K_5 = 2N_2 \exp(2N_3),$$
$$K_6 = \frac{2}{p_0}(N_2 + N_2 N_3 T \exp(2N_3)),$$
$$R_2 = \left(\int_0^1 K^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} [\sqrt{K_5} + \sqrt{mK_3}].$$

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия:* $f(x,t) \in L_2(\overline{Q})$, $f_t(x,t) \in L_2(\overline{Q})$, $f_{xxxx}(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{xxxxt}(x,t) \in L_2(Q)$, $c(x,t) \in C^4(\overline{Q})$, $\mu(t) \in C^1([0,T])$, $K(x) \in C^1([0,T])$, $u_0(t) \in W_2^6([0,1])$,

$$|\mu'(t)| \geqslant \mu_0 \quad \text{при } t \in [0,T],$$
$$F(t) \geqslant p_0 + p_1 \quad \text{при } t \in [0,T],$$
$$\varphi_0(t) = \varphi_1(t) = \psi_0(t) = \psi(t) = 0 \quad \text{при } t \in [0,T],$$
$$R_2 \leqslant M_0, \quad \int_0^1 K(x) u_0(x)\,dx = \mu(0);$$
$$f(0,t) = f(1,t) = f_x(0,t) = f_x(1,t) = 0 \quad \text{при } t \in [0,T].$$
$$u_0(0) = u_0(1) = u_0'(0) = u_0'(1) = u_0^{(4)}(0) = u_0^{(4)}(1) = u_0^{(5)}(0) = u_0^{(5)}(1) = 0.$$
$$c_1(x,t) \geqslant 0, \quad c_{1t}(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при } (x,t) \in \overline{Q}.$$

Тогда для обратной задачи I *существует решение* $\{u(x,t), p(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(\overline{Q})$, $p(t) \in L_\infty([0,T])$.

Доказательство. Вновь рассмотрим вспомогательную краевую задачу (7), (2)–(4). Ее разрешимость установим с помощью методов срезки, регуляризации и неподвижной точки. Рассмотрим краевую задачу (7_G), (2)–(4). Пусть $v(x,t)$ — заданная функция из пространства

V_2, ε — фиксированное число. Рассмотрим следующую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую в прямоугольнике* Q *уравнению*

$$\left[F(t) - \frac{1}{\mu'(t)}G(\varphi(t,v))\right]u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u + \varepsilon u_{xxxxt} = f(x,t) \quad (7_{G,v,\varepsilon})$$

и условиям (2)–(4) (*уточним, что здесь* $\bar{u}(x,t) = 0$). Разрешимость задачи $(7_{G,v,\varepsilon})$, (2)–(4) в пространстве V_2 при $\varepsilon > 0, f(x,t) \in L_2(Q)$ известна [18]. Докажем наличие «хороших» априорных оценок для решений этой задачи.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_0^1 \left(\left[F(\tau) - \frac{1}{\mu'(t)}G(\varphi(\tau,v)\right)\right]u_\tau + u_{xxxx} + cu + \varepsilon u_{xxxx\tau})u_{xxxx\tau}\,dxd\tau = \int_0^t \int_0^1 f u_{xxxx\tau}\,dxd\tau.$$

Применим к левой части интегрирование по частям и условия теоремы, а к правой — неравенство Юнга. Получим следующее неравенство:

$$p_0 \int_0^t \int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dxd\tau + \frac{1}{2}\int_0^1 u_{xxxx}^2(x,t)\,dx + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 u_{xxxx\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 u_0^{(4)2}(x)\,dx + \frac{\delta_1^2}{2}\int_0^t \int_0^1 u_{xxxx\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau + +\frac{1}{2\delta_1^2}\int_0^T \int_0^1 f^2(x,\tau)\,dxd\tau$$
$$+ \frac{\delta_2^2}{2}\int_0^t \int_0^1 u_{xxxx\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{1}{2\delta_2^2}\int_0^t \int_0^1 c^2(x,\tau)u^2(x,\tau)\,dxd\tau.$$

Положим $\delta_1 = \delta_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$. Учитывая ограниченность функции $c(x,t)$, введенные выше обозначения и неравенство (8), приходим к неравен-

ству

$$\int_0^1 u_{xxxx}^2(x,t)\,dx \leqslant \int_0^1 u_0^{(4)2}(x)\,dx$$
$$+\frac{2}{\varepsilon}\int_0^T\int_0^1 f^2(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{2m}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^1 u_{xxxx}^2(x,\tau)\,dxd\tau.$$

Используя лемму Гронуолла, имеем оценки

$$\int_0^1 u_{xxxx}^2(x,t)\,dx \leqslant C_1,$$

$$\int_0^t\int_0^1 u_{xxxx}^2(x,\tau)\,dxd\tau \leqslant TC_1, \quad \int_0^t\int_0^1 u_{xxxx\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau \leqslant C_2.$$

Из полученных оценок следует, что функция $u(x,t)$ ограничена по норме пространства V_1, т. е. выполняется неравенство

$$\|u(x,t)\|_{V_1} \leqslant C_0 \tag{17}$$

с постоянной C_0, определяющейся лишь исходными данными и числом ε.

Продифференцируем $(7_{G,v,\varepsilon})$ четырежды по x. Получим равенство

$$\left[F(t)-\frac{1}{\mu'(t)}G(\varphi(t,v))\right]U_t+U_{xxxx}+c(x,t)U+\varepsilon U_{xxxxt}=H(x,t,u), \tag{18}$$

в котором

$$U(x,t)=u_{xxxx}(x,t),$$

$$H(x,t,u)=f_{xxxx}(x,t)-3c_x(x,t)u_{xxx}$$
$$-4c_{xx}(x,t)u_{xx}-3c_{xxx}(x,t)u_x-c_{xxxx}(x,t)u.$$

Заметим, что имеют места равенства

$$u_{xxxx}(0,t)=u_{xxxx}(1,t)=u_{xxxxx}(0,t)=u_{xxxxx}(1,t)=0 \quad \text{при } t\in[0,T].$$

Повторяя выкладки, которые привели к оценке (17), нетрудно показать, что вследствие условий теоремы, равенств (19), а также в силу самой оценки (17) для решения уравнения (18) имеет место неравенство

$$\|U\|_{V_1} \leqslant C_0'$$

с постоянной C_0', определяющейся лишь исходными данными и числом ε. Из этой оценки следует, что для решений краевой задачи ($7_{G,v,\varepsilon}$), (2)–(4) выполняется оценка

$$\|u\|_{V_2} \leqslant C_0''$$

с постоянной C_0'', определяющейся лишь данными задачи и числом ε.

Пусть R_0 — число такое, что $R_0 \geqslant C_0''$, множество B — шар в пространстве V_2 радиуса R_0. Краевая задача ($7_{G,v,\varepsilon}$), (2)–(4) порождает оператор Φ, ставящий в соответствие функции $v(x,t)$ из пространства V_2 решение $u(x,t)$, принадлежащее этому же пространству. Компактность и непрерывность оператора Φ доказываются аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 1. Согласно теореме Шаудера существует функция $u(x,t)$ из пространства V_1, являющаяся решением краевой задачи ($7_{G,u,\varepsilon}$), (2)–(4).

Покажем, что имеют место равномерные по ε оценки, позволяющие перейти к пределу. Рассмотрим следующее равенство:

$$\int_0^t\int_0^1\Bigg(\left[F(\tau)-\frac{1}{\mu'(\tau)}G(\varphi(\tau,v))\right]u_\tau+u_{xxxx}+c(x,\tau)u$$
$$+\varepsilon u_{xxxx\tau}\Bigg)u_\tau\,dxd\tau=\int_0^t\int_0^1 f(x,\tau)u_\tau\,dxd\tau.$$

Используя интегрирование по частям, неравенство Юнга и введенные выше обозначения, получим неравенство

$$\frac{p_0}{2}\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2\,dx+\varepsilon\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dxd\tau\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1 u_0''^2(x)\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 c_1(x,0)u_0^2(x)\,dx++\frac{1}{p_0}\int_0^t\int_0^1 f^2(x,\tau)\,dxd\tau+\frac{m_2^2}{p_0}\int_0^t\int_0^1 u_{xx}^2\,dxd\tau.$$

Из этого равенства вследствие леммы Гронуолла имеем

$$\int_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx\leqslant K_3,\quad \int_0^t\int_0^1 u_\tau^2(x,t)\,dxd\tau\leqslant K_4,$$

$$\int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx \leqslant K_3, \quad \int\limits_0^t\int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dxd\tau \leqslant TK_3,$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_x^2(x,t)\,dxd\tau \leqslant TK_3.$$

Для получения следующей оценки рассмотрим равенство, являющееся следствием уравнения ($7_{G,u,\varepsilon}$):

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1\Bigg(\Bigg[F(\tau)-\frac{1}{\mu'(\tau)}G(\varphi(\tau,u))\Bigg]U_\tau$$
$$+U_{xxxx}+cU+\varepsilon U_{xxxx\tau}\Bigg)U_\tau\,dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 H(x,\tau,u)U_\tau\,dxd\tau.$$

Применяя интегрирование по частям, неравенство Юнга и учитывая вид функции $H(x,t,u)$ и условия теоремы, получаем неравенство

$$\frac{p_0}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 U_\tau^2\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 U_{xx}^2(x,t)\,dx+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1 U_{xx\tau}^2\,dxd\tau$$
$$\leqslant N_1+\frac{1}{p_0}\Bigg[\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_2^2U^2\,dxd\tau+15\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_x^2u_{xxx}^2\,dxd\tau+20\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_{xx}^2u_{xx}^2\,dxd\tau$$
$$+15\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_{xxx}^2u_x^2\,dxd\tau+5\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_{xxxx}^2u^2\,dxd\tau\Bigg]. \quad (19)$$

Для оценки функции $u_{xxx}(x,t)$ воспользуемся равенством

$$\int\limits_0^1 u_{xxx}^2(x,t)\,dx=u_{xx}(1,t)u_{xxx}(1,t)-u_{xx}(0,t)u_{xxx}(0,t)-\int\limits_0^1 u_{xx}u_{xxxx}\,dx.$$

Имеем соотношения

$$u_{xx}(1,t) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x y^2 U(y,t)\,dy \right) dx, u_{xx}(0,t)$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x (1-y)^2 U(y,t)\,dy \right) dx,$$

$$u_{xxx}(1,t) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x y^2 U(y,t)\,dy \right) dx$$

$$- \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x (1-y)^2 U(y,t)\,dy \right) dx + \int\limits_0^1 yU(y,t)\,dy,$$

$$u_{xxx}(0,t) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x y^2 U(y,t)\,dy \right) dx$$

$$- \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x (1-y)^2 U(y,t)\,dy \right) dx - \int\limits_0^1 (1-y)U(y,t)\,dy.$$

Из этих соотношений легко выводятся оценки для функций $u_{xx}(0,t)$, $u_{xxx}(0,t)$, $u_{xx}(1,t)$ и $u_{xxx}(1,t)$. Имея эти оценки, нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_0^1 u_{xxx}^2(x,t) \leqslant N_0 \int\limits_0^1 U^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx. \tag{20}$$

Возвращаясь к неравенству (19) и используя полученные выше оценки для функций $u(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ и неравенство (20), имеем

$$\frac{p_0}{2} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 U_\tau^2\,dxd\tau + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 U_{xx}^2(x,t)\,dx$$

$$+ \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_0^1 U_{x\tau}^2\,dxd\tau \leqslant N_2 + N_3 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 U_{xx}^2\,dxd\tau.$$

Лемма Гронуолла дает нам оценки

$$\int_0^t \int_0^1 u_{xxxx}^2 \, dx d\tau \leqslant K_5 T, \quad \int_0^t \int_0^1 u_{xxxx\tau}^2 \, dx d\tau \leqslant K_6. \tag{21}$$

Из выведенных оценок следует, что норма функции $u(x,t)$ в пространстве V_1 ограничена постоянной, не зависящей от ε:

$$\|u(x,t)\|_{V_1} \leqslant K_0$$

. Теорема о рефлексивности гильбертова пространства означает существование последовательности $\{u_k(x,t)\}$ такой, что $u_k(x,t) \to u(x,t)$, $u_{kt}(x,t) \to u_t(x,t)$, $u_{kxxxx}(x,t) \to u_{xxxx}(x,t)$, $\sqrt{\varepsilon} u_{kxxxxt} \to 0$ слабо в L_2.

Переходя, если нужно, еще раз к подпоследовательности, можно считать, что для $\{u_k(x,t)\}$ выполняются сходимости $u_{kxx}(x,t) \to u_{xx}(x,t), u_{kx}(x,t) \to u_x(x,t), u_k(x,t) \to u(x,t)$ почти всюду в V_1 [17].

Вследствие непрерывности $G(\varphi(t,u))$ и указанных сходимостей почти всюду имеет место сходимость $G(\varphi(t,u_k)) \to G(\varphi(t,u))$. Из всех данных сходимостей следует, что функция $v(x,t)$ является решением уравнения

$$\left[F(t) - \frac{1}{\mu'(t)} G(\varphi(t,v))\right] u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t)$$

и что для нее выполняются условия (2)–(4).

Из оценок для функций $u(x,t)$ и $u_{xxxx}(x,t)$ (при фиксированном t) вытекает, что имеет место неравенство

$$|\varphi(t,u)| \leqslant R_2.$$

Учитывая условие $R_2 \leqslant M_0$, получаем $G(\varphi(t,u)) = \varphi(t,u)$. Другими словами, функция $u(x,t)$ является решением краевой задачи (7), (2)–(4).

Положим

$$p(t) = \frac{1}{\mu'(t)} \int_0^1 K(x) f(x,t) \, dx - \frac{1}{\mu'(t)} \varphi(t,u).$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $p(t)$ в прямоугольнике Q связаны уравнением (1). Умножим уравнение (1) на функцию $K(x)$ и про-

интегрируем по отрезку $[0,1]$. После несложных выкладок придем к равенству

$$p(t)\Psi'(t) = 0.$$

Так как функция $p(t)$ строго положительна и функция $\Psi(t)$ обращается в нуль при $t = 0$, из предыдущего равенства следует, что для функции $u(x,t)$ будет выполняется условие (5). Это и означает, что построенные функции $u(x,t)$ и $p(t)$ дают решение первой обратной задачи.

Теорема доказана.

Для следующей теоремы положим

$$\bar{u}(x,t) = \varphi_0(t) + \left[\psi_0(t) - \frac{1}{6}\psi_1(t) - \frac{1}{3}\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\right]x + \frac{1}{2}\varphi_1(t)x^2 + \frac{1}{6}[\psi_1(t) - \varphi_1(t)]x^3,$$

$$w_0(x) = u_0(x) - \bar{u}(x,o), \quad M_3 = \int\limits_0^1 K_{xx}^2(x)\,dx, \quad M_2 = \int\limits_0^1 K^2(x)\,dx,$$

$$K_7 = \int\limits_0^1 c_1(x,o)w_0^2(x)\,dx + \int\limits_0^1 w_0''^2(x)\,dx + \frac{4}{p_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \bar{f}^2(x,\tau)\,dxd\tau,$$

$$K_8 = \frac{2m_2^2}{p_0} + \frac{4m_1^2}{p_0\mu_0^2}[M_3 + mM_2], \quad R_3 = 2[M_3 + mM_2]K_7\exp(K_8T).$$

Теорема 4. *Пусть выполняются условия*

$$f(x,t) \in L_2(\overline{Q}), \quad c(x,t) \in C(\overline{Q})c_1(x,t) \in C^1(\overline{Q}),$$

$$\mu(t) \in C^1([0,T]), \quad K(x) \in C^2([0,1]),$$

$$\varphi_0(x) \in C^1([0,1]), \quad \varphi_1(x) \in C^1([0,1]),$$

$$\psi_0(x) \in C^1([0,1]), \quad \psi_1(x) \in C^1([0,1]), \quad u_0(x) \in W_2^4(Q),$$

$$|\mu'(t)| \geqslant \mu_0 \ \ \textit{при} \ \ t \in [0,T], \quad F(t) \geqslant p_0 + p_1 \ \ \textit{при} \ \ t \in [0,T],$$

$$c_1(x,t) \geqslant 0, \quad c_{1t}(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \ \ (x,t) \in \overline{Q},$$

$$\int\limits_0^1 K(x)u_0(x)\,dx = \mu_0.$$

Кроме того, пусть выполняются условия

$$K(0) = K(1) = 0, \quad R_3 \leqslant M_0.$$

Тогда для обратной задачи II *существует решение* $u(x,t), p(t)$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{4,1}(\overline{Q})$, $p(t) \in L_\infty([0,T])$.

Доказательство теоремы проводится вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Аналогичные результаты можно получить и для уравнений следующего вида:

$$p(t)u_t + (-1)^{2m+1}\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}} + c(x,t)u = f(x,t),$$

где m — целое положительное число, $m > 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. C., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Dekker, 1999.
2. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: VNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; Vol. 10.)
3. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
4. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. New York: Springer-Verl., 2006. (Appl. Math. Sci., V. 127).
5. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
6. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2005. Т.45, № 12. С. 2168–2184.
7. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 2. С. 840–853.
8. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2005. Т. 12. С. 2168–2184.
9. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
10. *Кириллова Г. А.* Обратная задача для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при решении в случае интегрального переопределения // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т. 10, вып. 1. С. 34–35.
11. *Кожанов А. И., Кириллова Г. А.* О некоторых обратных задачах для параболического уравнения четвертого порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, вып. 1. С. 35–48.

12. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for parabolic equations // J. Inverse Ill-posed Probl. 1993. V. 1, N 4. P. 283–305.
13. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. школа, 1995.
14. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теоретической и прикладной математики, 1995.
15. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.
16. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
17. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
18. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

г. Улан-Удэ *1 августа 2011 г.*

УДК 512.6:519.61

ЗАМЕЧАНИЯ О ГАУССОВЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (БСЛАУ)

Ф. М. Федоров

В работах автора [1–3] введены и исследованы гауссовы и периодические БСЛАУ. В них по аналогии с конечными системами с верхней (нижней) треугольной матрицей дается определение гауссовой бесконечной системы.

Определение 1. Если матрица $A = (a_{i,j})$ бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} x_j = b_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

имеет элементы $a_{i,j} = 0$ для всех $i > j$ (или $i < j$), причем элементы главной диагонали не равны нулю, т. е. $a_{j,j} \neq 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то говорим, что такая бесконечная система линейных алгебраических уравнений (1) задана в *гауссовой форме*.

В работе [4] Куком введено понятие верхних и нижних бесконечных треугольных матриц подобно определению 1. Вместе с тем в случае, когда $a_{i,j} = 0$ для всех $i > j$ и i ограничен, данная матрица имеет бесконечное число столбцов, поэтому она никак не ассоциируется с верхней треугольной матрицей. Такую матрицу только условно можно называть верхней треугольной. Матрица, у которой $a_{i,j} = 0$ для всех $i < j$, вполне соответствует понятию нижней треугольной матрицы. Тем самым в этом случае исходную бесконечную матрицу можно называть просто треугольной матрицей.

Также Куком введено определение обратной матрицы для бесконечных матриц.

Определение 2. Если $AB = I$, то B называется *правосторонней обратной матрицей для* A, а A — *левосторонней обратной для* B, где I — единичная бесконечная матрица.

В этом определении операция умножения матриц вводится так же, как и для конечных матриц, но с оговоркой сходимости соответствующих рядов.

В соответствии с определением 2 правосторонняя обратная для A матрица является решением X линейного матричного уравнения $AX = I$.

Для гауссовых систем (1) с треугольной матрицей Куком доказана следующая

Теорема 1 [4]. *Гауссова система* (1) *с треугольной матрицей имеет правостороннюю обратную матрицу, которая будет треугольной матрицей, и все ее элементы, лежащие на главной диагонали, соответственно равны* $\frac{1}{a_{i,i}}$.

Из доказательства теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Если* $a_{i,i} = 0$ *хотя бы для одного значения* i, *то матрица системы* (1) *не имеет правосторонней обратной матрицы.*

Поскольку систему (1) можно записать в матричной форме $AX = B$, имеет место

Следствие 2. *У гауссовой системы* (1) *с треугольной матрицей существует единственное решение, которое имеет вид* $X = A^{-1}B$, *где* A^{-1} *– правосторонняя обратная матрица.*

Таким образом, под гауссовой системой преимущественно понимаем систему (1) как бы с верхней треугольной матрицей, где все элементы главной диагонали не равны нулю. В настоящее время разработка теории гауссовых систем еще не завершена. В работе [3] частично изучены некоторые классы гауссовых систем: периодические и почти периодические.

Пусть задана гауссова бесконечная однородная система

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где коэффициенты $a_{j,j+p}$ имеют специальный вид

$$\frac{a_{j,j+p}}{a_{j+p,j+p}} = a_p, \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Определение 3. *Периодической* бесконечной системой линейных алгебраических уравнений будем называть гауссову бесконечную систему (2) с коэффициентами, удовлетворяющими соотношению (3).

Из определения 1 следует, что для гауссовых систем справедливо еще одно существенное допущение: $a_{j,j} \neq 0$ для всех $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Предположим, что в матрице системы (2) элементы некоторого конечного множества на главной диагонали равны нулю, т. е. $a_{j_k,j_k} = 0$, $k < \infty$. Пусть $k_0 - 1$ — максимальный номер элемента с нулевым значением на главной диагонали. Предполагаем также, что, начиная со строки с номером $j \geqslant k_0$, гауссова система имеет хотя бы одно нетривиальное решение. Очевидно, такие системы существуют — этим свойством обладают, например, периодические или почти периодические системы.

В этом случае по аналогии с понятиями квазирегулярных [5] и квазипериодических [3] можно ввести понятие квазигауссовых систем. Будем называть *квазигауссовыми* системы, в которых условие гауссовости выполнено лишь во всех строках, начиная с некоторой $j = k_0$, т. е.

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = 0, \quad j = k_0, k_0 + 1, \ldots, \ k_0 > 0, \tag{4}$$

где $a_{j,j} \neq 0$ для всех $j \geqslant k_0$.

Кроме того, задается конечная неоднородная, не обязательно гауссова, система уравнений с бесконечным числом неизвестных:

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_{i,p} x_p = b_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant k_0 - 1, \tag{5}$$

причем на коэффициенты $c_{i,p}$ при $i < k_0$, $p \geqslant k_0$ должны налагаться определенные условия, а при $i < k_0$, $p < k_0$ они могут быть и произвольными вещественными числами. В частности, в случае, когда матрица системы (5) имеет как бы верхний треугольный вид, некоторые элементы главной диагонали должны быть равны нулю.

Теорема 2. *Решение квазигауссовой системы* (4), (5) *сводится к решению конечной системы, если выполнено условие* (8).

Доказательство. Распишем конечную систему (5) следующим образом:

$$\sum_{p=0}^{k_0-1} c_{i,p}x_p + \sum_{p=k_0}^{\infty} c_{i,p}x_p = b_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant k_0 - 1. \tag{6}$$

По предположению гауссова система (4) имеет хотя бы одно нетривиальное решение $\{\bar{x}_i\}_0^\infty$. Подставляя ее во вторую сумму в левой части выражения (6), получим в общем случае конечную систему k_0 уравнений с k_0 неизвестными:

$$\sum_{p=0}^{k_0} c_{i,p}x_p = b_i - \sum_{p=k_0}^{\infty} c_{i,p}\bar{x}_p, \quad 0 \leqslant i \leqslant k_0 - 1. \tag{7}$$

Предположим, что

$$\sum_{p=k_0}^{\infty} c_{i,p}\bar{x}_p < \infty, \quad 0 \leqslant i \leqslant k_0 - 1, \tag{8}$$

т. е. ряд в правой части системы (7) сходится. При выполнении условия (8) вопрос существования решения квазигауссовой системы (4) и (5) сводится к вопросу существования решения конечной системы (7). Если эта конечная система имеет решение, то, очевидно, найдется решение первоначальной системы.

Если гауссова система (4) имеет только тривиальное решение, то, очевидно, конечная система (5) имеет только конечное число неизвестных.

Замечание 1. Квазигауссова система (4), (5) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда гауссова система (4) имеет только тривиальное решение, а порядок системы (5) и ранг ее основной и

расширенной матриц равны k_0. Квазигауссова система (4), (5) может иметь бесконечно много решений и в случае, когда гауссова система (4) имеет только тривиальное решение.

Замечание 2. Естественно квазипериодические и почти квазипериодические системы являются квазигауссовыми системами.

Вернемся к понятию метода редукции в широком смысле [3].

Определение 3. Если при построении метода редукции для решения бесконечных систем алгебраических уравнений количество неизвестных и количество уравнений остаются одинаковыми в усеченной системе, то говорим, что метод редукции *понимается в узком смысле*, а если количество неизвестных остается большим, чем количество уравнений, то говорим, что метод редукции *понимается в широком смысле.*

Рассмотрим гауссову систему (2) с общими коэффициентами. В соответствии с определением 3 систему (2) урезаем до конечной системы:

$$\sum_{p=0}^{n-j} a_{j,j+p} \overset{n}{x}_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{9}$$

где $\overset{n}{x}_i$ — n-е приближение решения x_i, при этом число уравнений все время на одно меньше, чем число неизвестных, при возрастании n.

Не нарушая общности, всегда полагаем, что $a_{0,0} = 1$. Для решения конечной системы (9) поступаем следующим образом. Из последнего уравнения системы (9) получаем (при этом верхний индекс n у неизвестных $\overset{n}{x}_i$ опускаем):

$$x_{n-1} = -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} x_n = -s_1 x_n; \quad s_1 = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}.$$

Предпоследнее уравнение в (9) дает

$$\begin{aligned} a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n \\ = a_{n-2,n-2}x_{n-2} + \left(a_{n-2,n-1} - \frac{a_{n-2,n}}{s_1}\right) x_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$x_{n-2} = -s_2 x_{n-1}, \quad \text{где } s_2 = \frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-2,n-2}} - \frac{a_{n-2,n}}{a_{n-2,n-2} s_1}.$$

Продолжая таким образом, по индукции получим

$$x_{n-i} = -s_i x_{n-i+1}, \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered} s_i = \frac{a_{n-i,n-i+1}}{a_{n-i,n-i}} + \sum_{p=2}^{i} \frac{(-1)^{p+1} a_{n-i,n-i+p}}{a_{n-i,n-i} \prod\limits_{k=1}^{p-1} s_{i-k}}, \\ s_1 = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}, \quad i = \overline{2, n-1}, \end{gathered} \tag{11}$$

Теорема 3. *Решением конечной гауссовой однородной системы* (9) *является выражение*

$$x_i = \frac{(-1)^i x_0}{\prod\limits_{k=1}^{i} s_{n-i+k}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

где s_{n-i+k} *определяется соотношением* (11), x_0 *— произвольное вещественное число.*

Доказательство. Сделав замену индекса $n-i$ на i в рекуррентном уравнении (10), т. е.

$$x_i = -s_{n-i} x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{13}$$

и решив (13) в обратном порядке, очевидно, получим (12).

Если вернуться к системе (9), как урезанной от бесконечной системы (2), то, очевидно, вместо выражений (12) и (13) соответственно будем иметь:

$$\overset{n}{x}_i = \frac{(-1)^i x_0}{\prod\limits_{k=1}^{i} s_{n-i+k}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

и

$$\overset{n}{x}_i = -s_{n-i} \overset{n}{x}_{i+1}, \quad i = 0, 1, , \ldots, n-1. \tag{15}$$

Замечание 3. Из (14) можем заключить, что

$$\lim_{n\to\infty} \overset{n}{x}_i = \frac{(-1)^i x_0}{\prod\limits_{k=1}^{i} \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-i+k}}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Отсюда очевидным образом следует, что если последовательность s_n имеет предел, то и последовательность решений урезанных систем $\overset{n}{x}_i$ имеет предел при стремлении n к бесконечности.

Замечание 4. На самом деле сходимость последовательности s_n указывает только на то, что метод редукции в широком смысле сходится и дает нетривиальное решение однородной гауссовой системы (2) в виде (16).

Замечание 5. В действительности предельный переход в выражении (11) не всегда осуществим, но однородная гауссова (например, периодическая) система (2) будет иметь нетривиальное решение типа (16). В случае периодической системы все зависит от характеристики системы. Если характеристика имеет нули, то периодическая система имеет соответствующее этим нулям решение типа (16). Они были названы фундаментальными решениями периодической системы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров Ф. М.* К теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. I // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, № 2. С. 78–92.
2. *Федоров Ф. М.* К теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. II // Мат. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, № 1. С. 125–140.
3. *Федоров Ф. М.* Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.
4. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Физматгиз, 1960.
5. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: ГИТТЛ, 1952.

г. Якутск *14 января 2011 г.*

УДК 512.6:519.61

К ТЕОРИИ ГАУССОВЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (БСЛАУ)

Ф. М. Федоров

Пусть задана следующая неоднородная БСЛАУ в гауссовой форме [1]:

$$\begin{aligned} a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 + a_{0,2}x_2 + a_{0,3}x_3 + a_{0,4}x_4 + \cdots &= b_0, \\ a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 + \cdots &= b_1, \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 + \cdots &= b_2, \\ a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 + \cdots &= b_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_{j,j} \neq 0$ для любого j.

В краткой записи неоднородная гауссова система (1) запишется так:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p}x_{j+p} = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

При решении бесконечных систем методом редукции в широком смысле [1] бесконечная система (1) (или (2)) урезается до конечной так, чтобы число неизвестных было на одно больше, чем число уравнений. Поэтому рассмотрим урезанную систему (1) (или (2)), т. е. конечную систему из n первых уравнений с $(n+1)$ неизвестными $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Для таких конечных систем в работах [1, 2] получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть задана конечная СЛАУ*

$$\sum_{p=0}^{n-j} a_{j,j+p} x_{j+p} = b_j, \quad a_{j,j} \neq 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{3}$$

Тогда неизвестные x_i выражаются через x_0 следующим образом:

$$x_i = B_{n-i} + \frac{(-1)^{i+1} B_n}{\prod\limits_{p=1}^{i} S_{n-i+p}} + \frac{(-1)^i x_0}{\prod\limits_{p=1}^{i} S_{n-i+p}}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

где

$$B_j = \frac{b_{n-j}}{a_{n-j,n-j}} - \sum_{p=1}^{j-1} \frac{a_{n-j,n-p}}{a_{n-j,n-j}} B_p, \quad B_1 = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}}, \quad j = \overline{2, n}, \tag{5}$$

и

$$\begin{gathered} S_j = \frac{a_{n-j,n-j+1}}{a_{n-j,n-j}} + \sum_{p=2}^{j} \frac{(-1)^{p+1} a_{n-j,n-j+p}}{a_{n-j,n-j} \prod\limits_{k=1}^{p-1} S_{j-k}}, \\ S_1 = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}, \quad j = \overline{2, n}, \end{gathered} \tag{6}$$

здесь x_0 — произвольное вещественное число.

Следствие 1. *В системе* (3) *соседние неизвестные связаны друг с другом следующим образом:*

$$x_i = B_{n-i} + S_{n-i} B_{n-i-1} - S_{n-i} x_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{7}$$

Заметим, что в случае бесконечных систем (1) в выражениях (4) и (7) под x_i понимаются приближенные значения $\overset{n}{x}_i$ неизвестных величин x_i из системы (1).

Очевидно, рекуррентные соотношения (5) и (6) можно переписать соответственно в виде (8) и (9):

$$B_{n-j} = \frac{b_j}{a_{j,j}} - \sum_{p=1}^{n-j-1} \frac{a_{j,n-p}}{a_{j,j}} B_p, \quad B_1 = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}}, \quad j = \overline{0, n-2}, \tag{8}$$

$$S_{n-j} = \frac{a_{j,j+1}}{a_{j,j}} + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^{p+1} a_{j,j+p}}{a_{j,j} \prod\limits_{k=1}^{p-1} S_{n-j-k}},$$
$$S_1 = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}, \quad j = \overline{0, n-2}. \tag{9}$$

Если предположить, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-j} = S(j)$ и возможен предельный переход в выражении (9), то имеет место следующее равенство для каждого j:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_{j,j+p}}{a_{j,j} \prod\limits_{k=0}^{p-1} S(j+k)} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где для унификации обозначений принято $\prod\limits_{k=0}^{-1} S(j+k) = 1$ для любого j.

Рассмотрим приведенную систему (1):

$$\begin{aligned} a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 + a_{0,2}x_2 + a_{0,2}x_3 + a_{0,2}x_4 + \cdots &= 0, \\ a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 + \cdots &= 0, \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 + \cdots &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \end{aligned} \tag{11}$$

которая в краткой записи имеет вид (2) при $b_j = 0$.

Сформулируем и докажем основную теорему существования нетривиального решения произвольных однородных бесконечных гауссовых систем.

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения однородной гауссовой системы* (11) *является выполнение условий* (10) *для каждого* j. *При удовлетворении условий* (10) *решением системы* (11) *являются выражения вида*

$$x_i = \frac{(-1)^i x_0}{\prod\limits_{k=0}^{i-1} S(k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где x_0 *— произвольное вещественное число,* $S(k)$ *удовлетворяют уравнению* (10) *для каждого* j.

Доказательство. Необходимость. Пусть y_i — любое решение гауссовой системы (11). Так как y_i — решение, система (11) удовлетворяется и перепишем ее в виде

$$\begin{aligned}
a_{0,0}y_0 + a_{0,1}y_1 + a_{0,2}y_2 + a_{0,3}y_3 + \cdots + a_{0,N}y_N &= -\sum_{p=N+1}^{\infty} a_{0,p}y_p = b_0^N, \\
a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + a_{1,3}y_3 + \cdots + a_{1,N}y_N &= -\sum_{p=N+1}^{\infty} a_{1,p}y_p = b_1^N, \\
a_{2,2}y_2 + a_{2,3}y_3 + \cdots + a_{2,N}y_N &= -\sum_{p=N+1}^{\infty} a_{2,p}y_p = b_2^N, \\
a_{3,3}y_3 + \cdots + a_{3,N}y_N &= -\sum_{p=N+1}^{\infty} a_{3,p}y_p = b_3^N, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
a_{N-1,N-1}y_{N-1} + a_{N-1,N}y_N &= -\sum_{p=N+1}^{\infty} a_p y_p = b_{N-1}^N, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{13}$$

Отметим, что поскольку y_i удовлетворяет каждому уравнению системы (11), то $\lim\limits_{N\to\infty} b_j^N = 0$ независимо от j.

Как и при использовании метода редукции систему (13) урезаем, оставляя N уравнений с $N+1$ неизвестными. Связывая соседние неизвестные, получим соотношение (7), но с той разницей, что в (7) стоят точные значения неизвестных, а не приближенные решения $\overset{n}{x}_i$.

Исследуем выражение (5) и для этого введем определитель m-го

порядка:

$$B_m^N = \begin{vmatrix} \frac{b_{N-m}^N}{a_{N-m,N-m}} & \frac{b_{N-m+1}^N}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{b_{N-m+2}^N}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & \frac{b_{N-1}^N}{a_{N-1,N-1}} \\ \frac{a_{N-m,N-m+1}}{a_{N-m,N-m}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{N-m,N-m+2}}{a_{N-m,N-m}} & \frac{a_{N-m+1,N-m+2}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{a_{N-m,N-m+j}}{a_{N-m,N-m}} & \frac{a_{N-m+1,N-m+j}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-m+j}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{a_{N-m,N-2}}{a_{N-m,N-m}} & \frac{a_{N-m+1,N-2}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-2}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & 0 \\ \frac{a_{N-m,N-1}}{a_{N-m,N-m}} & \frac{a_{N-m+1,N-1}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-1}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \tag{14}$$

где $B_1^N = b_{N-1}^N / a_{N-1,N-1}$.

Найдем разложение определителя (14) по алгебраическим дополнениям $A_{j,1}^N$ первого столбца, т. е.

$$B_m^N = \frac{b_{N-m}^N}{a_{N-m,N-m}} A_{1,1}^N + \sum_{j=2}^{m} \frac{a_{N-m,N-m+j-1}}{a_{N-m,N-m}} A_{j,1}^N, \tag{15}$$

где $A_{j,1}^N = (-1)^{j+1} M_{j,1}^N$, $M_{j,1}^N$ — минор j-й строки определителя (14).

Необходимо найти соответствующие миноры $M_{j,1}^N$. Очевидно, первые миноры имеют вид $M_{1,1}^N = 1$, $M_{2,1}^N = B_{m-1}^N$. Найдем минор третьей

строки:

$$M_{3,1}^N = \begin{vmatrix} \frac{b_{N-m+1}^N}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{b_{N-m+2}^N}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & \frac{b_{N-1}^N}{a_{N-1,N-1}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{N-m+1,N-m+3}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{a_{N-m+1,N-m+j}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-m+j}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{a_{N-m+1,N-2}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-2}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & 0 \\ \frac{a_{N-m+1,N-1}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-1}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \qquad (16)$$

Разлагая этот определитель по второй строке, легко убеждаемся, что $M_{3,1}^N = -B_{m-2}^N$. Найдем минор последней строки:

$$M_{m,1}^N = \begin{vmatrix} \frac{b_{N-m+1}^N}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{b_{N-m+2}^N}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & \frac{b_{N-1}^N}{a_{N-1,N-1}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{N-m+1,N-m+2}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \quad \cdot \\ \frac{a_{N-m+1,N-m+j}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-m+j}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{a_{N-m+1,N-2}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-2}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & 0 \end{vmatrix}, \qquad (17)$$

Разлагаем этот определитель по второй строке, затем получаемое при этом алгебраическое дополнение разлагаем опять же по второй строке и, продолжая этот процесс, через $m-3$ шага разложения найдем

$$M_{m,1}^N = (-1)^{m-3} \begin{vmatrix} b_{N-2}^N & b_{N-1}^N \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m-2} b_{N-1}^N = (-1)^m B_1^N.$$

Остальные миноры при $3 < j < m$ имеют вид

$$M_{j,1}^N = \begin{vmatrix} \frac{b_{N-m+1}^N}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{b_{N-m+2}^N}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & \frac{b_{N-2}^N}{a_{N-2,N-2}} & \frac{b_{N-1}^N}{a_{N-1,N-1}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{N-m+1,N-m+3}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{N-m+1,N-m+j-2}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-m+j-2}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{N-m+1,N-m+j}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-m+j}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{N-m+1,N-m+j+1}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-m+j+1}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{N-m+1,N-2}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-2}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & 1 & 0 \\ \frac{a_{N-m+1,N-1}}{a_{N-m+1,N-m+1}} & \frac{a_{N-m+2,N-1}}{a_{N-m+2,N-m+2}} & \dots & \frac{a_{N-2,N-1}}{a_{N-2,N-2}} & 1 \end{vmatrix}, \tag{18}$$

Для вычисления определителя (18) разлагаем его по второй строке, затем полученное алгебраическое дополнение $(m-2)$-го порядка разлагаем опять же по второй строке и продолжаем этот процесс до j-й строки и последнее разложение осуществляем по этой строке. Тогда получим $M_{j,1}^N = (-1)^{j-2} B_{m-j-1}^N$.

Разложение (15) с учетом вычисленных значений миноров $M_{j,1}^N$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} B_m^N &= \frac{b_{N-m}^N}{a_{N-m,N-m}} - \frac{a_{N-m,N-m+1}}{a_{N-m,N-m}} B_{m-1}^N - \frac{a_{N-m,N-m+2}}{a_{N-m,N-m}} B_{m-2}^N \\ &\quad - \sum_{j=4}^{m-1} \frac{a_{N-m,N-m+j-1}}{a_{N-m,N-m}} B_{m-j+1}^N - \frac{a_{N-m,N-1}}{a_{N-m,N-m}} B_1^N \\ &= \frac{b_{N-m}^N}{a_{N-m,N-m}} - \sum_{p=1}^{m-1} \frac{a_{N-m,N-m+p}}{a_{N-m,N-m}} B_{m-p}^N, \quad B_1^N = \frac{b_{N-1}^N}{a_{N-1,N-1}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Если в (19) заменить индекс $m-p$ индексом p, то получим, что рекуррентные соотношения (5) и (19) совпадают, при этом начальные значения B_1 и B_1^N одинаковы в (5) и (19). Таким образом, $B_j^N \equiv B_j$, т. е. соотношение (5) есть на самом деле определитель (14). Следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} B_{N-i}^N = 0$, так как предел определителя (14) будет по построению бесконечным определителем с нулевой первой строкой, поскольку $\lim\limits_{N\to\infty} b_i^N = 0$ независимо от i. Учитывая этот предел, легко

убедиться, что вместо выражения (7) будем иметь

$$y_i = -S_{N-i} y_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-2}. \tag{20}$$

Переходя в (20) к пределу при $N \to \infty$, убеждаемся, что существует предел $\lim\limits_{N\to\infty} S_{N-i} = S(i)$. Решая рекуррентное уравнение (20) в обратном порядке, получим

$$y_i = \frac{(-1)^i y_0}{\prod\limits_{k=0}^{i-1} S(k)}, \tag{21}$$

где y_0 – произвольное вещественное число, $\prod\limits_{k=0}^{-1} S(k) = 1$.

Подставляя (21) в исходную систему (11), придем к необходимому условию (10) для каждого j, тем самым доказана необходимость.

Достаточность. Пусть числа $S(i)$ являются решениями уравнений (10) для каждого j. Тогда составим числа x_i вида (21):

$$x_i = \frac{(-1)^i x_0}{\prod\limits_{k=0}^{i-1} S(k)}.$$

Подставляя эти значения в систему (11), убеждаемся, что все уравнения системы (11) удовлетворяются, поскольку выполнены условия (10).

Следствие 2. *Для нетривиальной разрешимости гауссовой системы* (11) *необходимым и достаточным условием является существование предела выражения* (9), *удовлетворяющего уравнениям* (10).

Доказательство следствия 2 очевидным образом следует из соответствующих доказательств необходимости и достаточности теоремы 2.

Сделаем два весьма важных замечания.

Замечание 1. При решении произвольной гауссовой системы (11) методом редукции в широком смысле один и тот же рекурсивный процесс (9) участвует при решении двух совершенно разных задач. Во-первых, он применяется при решении бесконечной системы (11) в виде

(12), при этом он всегда сходится при условии существования нетривиального решения системы (11); во-вторых, он участвует при решении уравнений (10) для конкретных j, в этом случае существенную роль играет передельный переход в выражении (9), что будет более ясно при рассмотрении конкретных гауссовых систем, например, периодических.

Замечание 2. Доказательство теоремы 2 можно провести проще, сделав следующую замену неизвестных: $x_i/x_{i+1} = -S(i)$. Но в этом случае существенные выводы замечания 1 выпадут, в частности, не совсем ясным будет вопрос: каким образом можно решить уранения (10) относительно неизвестных $S(i)$? С другой стороны, именно вышеизложенное доказательство теоремы 2 наталкивает на мысль проведения такой замены.

Таким образом, каждому решению $\{x_i\}_0^\infty$ гауссовой однородной бесконечной системы (11) соответствует множество чисел $\{S(i)\}$, которое может быть пустым, конечным или бесконечным. Множество чисел $\{S(i)\}$ удовлетворяет системе уравнений (10), в общем случае бесконечной.

Систему уравнений (10) назовем *характеристикой* соответствующего решения (12) системы (11), а множество чисел $\{S(i)\}$ – *характеристическими числами* данного решения. Таким образом, если както найдены характеристические числа $\{S(i)\}$, то решение бесконечной гауссовой системы (11) имеет простой вид (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров Ф. М.* Периодические бесконечные смстемы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.
2. *Федоров Ф. М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.
3. *Егоров И. Е., Федоров Ф. М.* О полной системе фундаментальных решений периодических бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 1. С. 8–17.

г. Якутск *28 марта 2011 г.*

УДК 517.95

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ*)

В. В. Шубин

Краевые задачи для уравнений нечетного порядка вида

$$\mathscr{D}_y^{2m+1}u + \mathscr{M}u = f,$$

где $\mathscr{M}$ — некоторый эллиптический оператор, рассматривались в работах [1–3]. Краевые задачи для уравнений третьего порядка со сменой направления эволюции, но с непрерывными коэффициентом, рассматривались в [4]. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнения

$$h(y)u_{yyy} - Au + c(x,y)u = f(x,y),$$

где $h(y)$ — разрывная функция.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $Y > 0$. Рассмотрим цилиндр $Q = \Omega \times (-Y, Y) = \{(x,y) \mid x \in \Omega, -Y < y < Y\}$ и в этом цилиндре — уравнение

$$h(y)u_{yyy} - Au + c(x,y)u = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$h(y) = \begin{cases} h_1, & y > 0, \\ -h_2, & y < 0, \end{cases}$$

*) Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0127).

$h_1, h_2 > 0$, $Au = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$, $a^{ij}(x)$ — некоторые фукнции. Здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Рассмотрим следующие задачи:

Краевая задача I. *Найти функцию $u(x,y)$ определенную в области Q, удовлетворяющую уравнению* (1), *краевым условиям*

$$u(x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad u(x,Y) = u_y(x,Y) = 0, \quad u(x,-Y) = u_y(x,-Y) = 0, \tag{2}$$

и условиям сопряжения:

$$u(x,+0) = \alpha u(x,-0), \quad \beta u_y(x,+0) = u_y(x,-0). \tag{3}$$

Краевая задача II. *Найти функцию $u(x,y)$ определенную в области Q, удовлетворяющую уравнению* (1), *краевым условиям*

$$\begin{gathered} a^{ij}(x)u_{x_i}(x,y)\nu_j(x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad u(x,Y) = u_y(x,Y) = 0, \\ u(x,-Y) = u_y(x,-Y) = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

и условиям сопряжения (3).

Здесь $\nu(x)$ — внешняя нормаль к границе области Ω.

Краевая задача III. *Найти функцию $u(x,y)$ определенную в области Q, удовлетворяющую уравнению* (1), *краевым условиям*

$$\begin{gathered} u(x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad u_y(x,Y) = u_{yy}(x,Y) = 0, \\ u_y(x,-Y) = u_{yy}(x,-Y) = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

и условиям сопряжения (3).

Краевая задача IV. *Найти функцию $u(x,y)$ определенную в области Q, удовлетворяющую уравнению* (1), *краевым условиям*

$$\begin{gathered} a^{ij}(x)u_{x_i}(x,y)\nu_j(x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad u_y(x,Y) = u_{yy}(x,Y) = 0, \\ u_y(x,-Y) = u_{yy}(x,-Y) = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

и условиям сопряжения (3).

Введем обозначения $Q^+ = Q \cap \{y > 0\}$, $Q^- = Q \cap \{y < 0\}$. Пусть $l \in \mathbb{N}$. Введем пространство $F = \{f : Q \to \mathbb{R} \mid \int_Q |y| f^2(x,y)\,dxdy < \infty\}$ с

нормой $\|f\|_F = \int_Q |y| f^2(x,y)\,dxdy$ и пространство V^l. Будем говорить, что функция $u : Q \to \mathbb{R}$ *принадлежит пространству* V^l, если $u(x,y)$ измерима, имеет все смешанные обобщенные производные до порядка l включительно по переменным x и функции $u|_{Q^+}$ и $u|_{Q^-}$ имеют обобщенные производные по y до третьего порядкка включительно, причем существуют интегралы

$$\int\limits_Q |y| \mathscr{D}_x^I u(x,y)\,dxdy \quad \text{для всех мультииндексов } I \geqslant 0 : |I| \leqslant l,$$

$$\int\limits_{Q^+} |y| \mathscr{D}_y^k u(x,y)\,dxdy, \quad \int\limits_{Q^-} |y| \mathscr{D}_y^k u(x,y)\,dxdy \quad \forall k \in \mathbb{N} : 1 \leqslant k \leqslant 3.$$

Норму в пространстве V^l введем следующим образом:

$$\|u\|_{V^l} = \sum_{I \geqslant 0 : |I| \leqslant l} \int\limits_Q |y| \mathscr{D}_x^I u(x,y)\,dxdy + \sum_{k=1}^{3} \Bigg(\int\limits_{Q^+} |y| \mathscr{D}_y^k u(x,y)\,dxdy + \int\limits_{Q^-} |y| \mathscr{D}_y^k u(x,y)\,dxdy \Bigg)$$

Очевидно, что пространства F и V^l полные.

Функцию $u \in V^2$ будем называть *решением краевой задачи* I (II–IV), если она в слабом смысле удовлетворяет уравнению, условиям сопряжения (3) и краевым условиям (2) ((4)–(6) соответственно).

Лемма 1. *Пусть функция $u \in V^2$ удовлетворяет условиям* (3) *и какому-либо из условий* (2), (4)–(6), *и пусть $\alpha\beta \neq 0$ и $a^{ij}(x) \in C^1(\Omega)$. Тогда справедливы следующие равенства:*

$$\int\limits_{Q^+} y u_{yyy}(x,y) u(x,y)\,dxdy + \frac{\alpha}{\beta} \int\limits_{Q^-} y u_{yyy}(x,y) u(x,y)\,dxdy = \frac{3}{2} \Bigg(\int\limits_{Q^+} u_y^2(x,y)\,dxdy + \frac{\alpha}{\beta} \int\limits_{Q^-} u_y^2(x,y)\,dxdy \Bigg)$$

$$\int\limits_\Omega Au \cdot u\,dx = \int\limits_\Omega a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j}\,dxdy.$$

Доказательство следует из формулы интегрирования по частям и соответствующих условий. □

Полученные равенства позволяют установить некоторые, в том числе весовые, оценки решений задач I–IV.

Лемма 2. *Пусть $u \in V^2$ — решение краевой задачи* I (*или* II, III), *и пусть $\alpha\beta > 0$, $c(x,y) \in L_\infty(Q)$, $c(x,y) \geqslant 0$ для почти всех $(x,y) \in Q$, $f(x,y) \in F$, $a^{ij}(x) \in C^1(\Omega)$, причем существует число $\mu_1 > 0$ такое, что $a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \mu_1|\xi|^2$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда справедлива оценка:*

$$\int\limits_Q \Big(u_y^2(x,y) + |y|\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,y) + |y|u^2(x,y)\Big)\,dxdy \leqslant C\int\limits_Q |y|f^2(x,y)\,dxdy. \tag{7}$$

Доказательство. Так как $u(x,y)$ является решением, верно равенство

$$\int\limits_{Q^+} (h_1u_{yyy}(x,y) - Au(x,y) + c(x,y)u(x,y))yu(x,y)\,dxdy-$$
$$-\frac{\alpha h_1}{\beta h_2}\int\limits_{Q^-} \big(-h_2u_{yyy}(x,y) - Au(x,y) + c(x,y)u(x,y)\big)yu(x,y)\,dxdy =$$
$$= \int\limits_{Q^+} f(x,y)yu(x,y)\,dxdy - \frac{\alpha h_1}{\beta h_2}\int\limits_{Q^-} f(x,y)yu(x,y)\,dxdy.$$

Заметим, что если $u(x,y)$ — решение задачи I или II, то справедливо равенство

$$u(x,y) = \begin{cases} -\int\limits_y^a u_\eta(x,\eta)\,d\eta, & y > 0,\\ \int\limits_{-a}^y u_\eta(x,\eta)\,d\eta. & y < 0,\end{cases}$$

из которого сразу следует неравенство

$$\int\limits_Q u^2(x,y)\,dxdy \leqslant \widetilde{C}_1\int\limits_Q u_y^2(x,y)\,dxdy.$$

Для решения задачи III справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_Q u^2(x,y)\,dxdy \leqslant \widetilde{C}_2 \int\limits_Q \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,y)\,dxdy.$$

Пользуясь одним из этих неравенств, неравенством Юнга вида

$$\int\limits_{Q^+} f(x,y)yu(x,y)\,dxdy \leqslant \frac{\delta^2}{2}\int\limits_{Q^+} yu^2(x,y)\,dxdy + \frac{1}{2\delta^2}\int\limits_{Q^+} yf^2(x,y)\,dxdy,$$

а также равенствами из леммы 1 и условиями данной леммы, получим оценку (7). □

Следствие. *Краевые задачи* I, II *и* III *имеют не более одного решения.*

Замечание. Оценка (7) написана в таком виде для общности. На самом деле для краевых задач I и II справедлива более сильная оценка

$$\int\limits_Q \left(u_y^2(x,y) + |y|\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,y) + u^2(x,y)\right) dxdy \leqslant C\int\limits_Q |y|f^2(x,y)\,dxdy. \tag{7'}$$

Лемма 3. *Пусть* $u(x,y) \in V^2$ *— решение задачи* IV, *и пусть выполнены условия леммы* 2, *причем существует число* $c_0 > 0$ *такое, что* $c(x,y) \geqslant c_0$ *для почти всех* $(x,y) \in Q$. *Тогда задача* IV *имеет не более одного решения и справедлива оценка*

$$\int\limits_Q \left(u_y^2(x,y) + |y|\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,y) + u^2(x,y)\right) dxdy \leqslant C\int\limits_Q |y|f^2(x,y)\,dxdy. \tag{7'}$$

Доказательство. Дословное повторение рассуждений доказательства леммы 2. □

Перейдем к доказательству существования решений краевых задач I–IV.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Тогда задачи* I, II *и* III *имеют решение* $u(x,y)$ *принадлежащее пространству* V^2, *причем справедлива оценка*

$$\|u(x,y)\|_{V^2} \leqslant C\|f(x,y)\|_F.$$

Доказательство. Докажем разрешимость задачи I. Рассмотрим пространство $\widetilde{V} = \{u \in V^4 \mid \mathscr{D}_x^I u \in V^0 \ \forall I \ |I| = 4\}$ с нормой $\|u\|_{\widetilde{V}} = \|u\|_{V^4} + \sum_{I:|I|=4} \|\mathscr{D}_x^I u\|_{V^0}$. Отметим, что в силу свойств пространства $\widetilde{V}$ и второго основного неравенства для эллиптических операторов [5] данная норма эквивалентна следующей:

$$\|u\|_{\widetilde{V}} = \int\limits_Q |y|u^2\,dxdy + \int\limits_Q |y|u_{yyy}^2\,dxdy + \int\limits_Q |y|(Au)^2\,dxdy + \int\limits_Q |y|(A^2u_{yyy})^2\,dxdy.$$

Определим оператор $\mathscr{L}^\varepsilon : \widetilde{V} \to F$, действующий по правилу

$$\mathscr{L}^\varepsilon u = \varepsilon h(y)A^2u_{yyy} + h(y)u_{yyy} - Au + c(x,y)u.$$

Рассмотрим задачу: найти функцию $u \in \widetilde{V}$ такую, что она удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{L}^\varepsilon u = f(x,y), \tag{1_ε}$$

краевым условиям (2), условию

$$\Delta u(x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0 \tag{$2'$}$$

и условиям сопряжения (3).

Докажем разрешимость этой задачи для всех $\varepsilon > 0$. Для этого воспользуемся методом продолжения по параметру. Рассмотрим оператор

$$\mathscr{L}^\varepsilon(\lambda)u = \varepsilon h(y)A^2u_{yyy} + h(y)u_{yyy} - \lambda(Au - c(x,y)u)$$

и задачу: найти функцию $u \in \widetilde{V}$, удовлетворяющую уравнению

$$\mathscr{L}^\varepsilon(\lambda)u = f(x,y), \tag{$1_{\varepsilon,\lambda}$}$$

краевым условиям (2), (2′) и условиям сопряжения (3).

Пусть Λ — множество чисел λ из отрезка $[0,1]$ таких, что задача $(1_{\varepsilon,\lambda})$, (2), (2′), (3) разрешима. Докажем, что Λ непусто, открыто и замкнуто.

Пусть $\lambda = 0$. Рассмотрим сначала уравнение

$$h(y)u_{yyy} = v(x,y) \tag{8}$$

с краевыми условиями

$$u(x,Y) = u_y(x,Y) = 0, \quad u(x,-Y) = u_y(x,-Y) = 0 \tag{9}$$

и условиями склейки (3). Решением задачи (8), (9), (3) является функция

$$u(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{2h_1}\int\limits_y^T (y-\eta)^2 v(x,\eta)\,d\eta + (T-y)^2 a(x), & y > 0, \\ \frac{1}{2h_2}\int\limits_{-T}^y (y-\eta)^2 v(x,\eta)\,d\eta + (T+y)^2 b(x), & y < 0, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$a(x) = \frac{1}{2h_1(1+\alpha\beta)}\int\limits_0^T \frac{\eta}{T}\left(\alpha\beta + \frac{\eta}{T}\right) v(x,\eta)\,d\eta + \\ + \frac{\alpha}{2h_2(1+\alpha\beta)}\int\limits_{-T}^0 \frac{\eta}{T}\left(1 + \frac{\eta}{T}\right) v(x,\eta)\,d\eta,$$

$$b(x) = \frac{\beta}{2h_1(1+\alpha\beta)}\int\limits_0^T \frac{\eta}{T}\left(1 - \frac{\eta}{T}\right) v(x,\eta)\,d\eta + \\ + \frac{1}{2h_2(1+\alpha\beta)}\int\limits_{-T}^0 \frac{\eta}{T}\left(\alpha\beta - \frac{\eta}{T}\right) v(x,\eta)\,d\eta.$$

Согласно равенству (10) если $v(x,y)$ такова, что для любого мультииндекса $I \geqslant 0$ такого, что $|I| \leqslant 4$, существует обобщенная производная $\mathscr{D}_x^I v(x,y) \in F$, то $u(x,y) \in \widetilde{V}$. Из равенства (10) также следует

неравенства

$$\|u\|_F \leqslant C_1 \|u_{yyy}\|_F, \quad \|Au\|_F \leqslant C_1' \|Au_{yyy}\|_F \tag{11}$$

для некоторых $C_1, C_1' > 0$, не зависящих от u.

Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения

$$A^2 v + \frac{1}{\varepsilon} v = f(x, y),$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_{\partial\Omega} = Av|_{\partial\Omega} = 0.$$

Если $f \in F$, то данная задача имеет единственное решение, принадлежащее пространству $\{u \mid \forall I \geqslant 0 : |I| \leqslant 4 \quad \mathscr{D}_x^I u \in F\}$.

Таким образом установлена разрешимость задачи $(1_{\varepsilon,0})$, (2), $(2')$, (3).

Получим априорные оценки решений задачи $(1_{\varepsilon,\lambda})$, (2), $(2')$, (3). Из леммы 1 следует, что из равенств

$$\int\limits_{Q^+} |y| \mathscr{L}^\varepsilon(\lambda) u \cdot u \, dxdy + \frac{\alpha h_1}{\beta h_2} \int\limits_{Q^-} |y| \mathscr{L}^\varepsilon(\lambda) u \cdot u \, dxdy$$
$$= \int\limits_{Q^+} |y| f(x, y) u \, dxdy + \frac{\alpha h_1}{\beta h_2} \int\limits_{Q^-} |y| f(x, y) u \, dxdy,$$

$$\int\limits_{Q^+} |y| \mathscr{L}^\varepsilon(\lambda) u \cdot Au \, dxdy + \frac{\alpha h_1}{\beta h_2} \int\limits_{Q^-} |y| \mathscr{L}^\varepsilon(\lambda) u \cdot Au \, dxdy$$
$$= \int\limits_{Q^+} |y| f(x, y) Au \, dxdy + \frac{\alpha h_1}{\beta h_2} \int\limits_{Q^-} |y| f(x, y) Au \, dxdy,$$

следуют соответственно неравенства

$$\lambda^2 \int\limits_Q |y| c^2(x, y) u^2(x, y) \, dxdy \leqslant C_2 \int\limits_Q |y| f^2(x, y) \, dxdy,$$

$$\lambda^2 \int\limits_Q |y| \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x, y) \, dxdy \leqslant C_3 \int\limits_Q |y| f^2(x, y) \, dxdy,$$

для некоторых чисел $C_2, C_3 > 0$, не зависящих от $u(x,y)$ и $f(x,y)$. Из этих неравенств в силу тождеств

$$\int\limits_Q y\mathscr{L}^\varepsilon(\lambda)u \cdot u_{yyy}\,dxdy = \int\limits_Q yf(x,y)u_{yyy}\,dxdy,$$

$$\varepsilon\int\limits_Q y\mathscr{L}^\varepsilon(\lambda)u \cdot A^2u_{yyy}\,dxdy = \varepsilon\int\limits_Q yf(x,y)A^2u_{yyy}\,dxdy$$

и леммы 1 следует оценка

$$\varepsilon\|A^2u_{yyy}\|_F + \sqrt{\varepsilon}\|Au_{yyy}\|_F + \|u_{yyy}\|_F \leqslant K_1\|f\|_F, \tag{12}$$

где $K_1 > 0$ — число, определяемое числами α, β, h_1, h_2 и областью Q. Из оценки (12) в силу неравенств (11) следует оценка

$$\varepsilon\|A^2u\|_F + \sqrt{\varepsilon}\|Au\|_F + \|u\|_F \leqslant K_2\|f\|_F \tag{13}$$

для некоторого $K_2 > 0$, не зависящего от ε, u и f.

Из оценок (12), (13) в силу теоремы о продолжении по параметру [6] следует, что $\Lambda = [0,1]$. Таким образом доказана разрешимость задачи (1_ε), (2), (2'), (3) для любого $\varepsilon > 0$.

Докажем, что при $\varepsilon \to 0$ решение этой задачи стремится к решению задачи (1)–(3). Для этого получим еще одну оценку. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q^+} |y|\mathscr{L}^\varepsilon u \cdot Au\,dxdy + \frac{\alpha h_1}{\beta h_2}\int\limits_{Q^-} |y|\mathscr{L}^\varepsilon u \cdot Au\,dxdy$$
$$= \int\limits_{Q^+} |y|f(x,y)Au\,dxdy + \frac{\alpha h_1}{\beta h_2}\int\limits_{Q^-} |y|f(x,y)Au\,dxdy.$$

В силу леммы 1 и оценок (12), (13) получим оценку

$$\|Au\|_F \leqslant K_3\|f\|_F, \tag{14}$$

где $K_3 > 0$ не зависит от ε, u, f. В силу оценок (12)–(14) верно неравенство

$$\|u\|_{V^2} \leqslant K\|f\|_F. \tag{15}$$

Рассмотрим последовательность $\varepsilon_l \to 0$ при $l \to \infty$. Получаем последовательность $\{u^l\}_{l\in\mathbb{N}} \subset V^2$, где u^l — решение задачи (1_{ε_l}), (2), (2'), (3). В силу оценки (15) эта последовательность ограничена в гильбертовом пространстве V^2 (с естественно введенным скалярным произведением — интеграл от произведения функций с весом $|y|$, которое порождает рассмотренную норму) и, следовательно, из нее можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $u^{l_k} \to u \in V^2$ при $k \to \infty$. В силу оценки (12) последовательность $\varepsilon_{l_k} A^2 u^{l_k}_{yyy}$ ограничена в F. Выберем слабо сходящуюся в F подпоследовательность $\varepsilon_{l_{k_m}} A^2 u^{l_{k_m}}_{yyy} \to w \in F$ при $m \to \infty$. Переобозначим для удобства индексы последовательностей: $\varepsilon_m \to 0$, $u^m \to u$ слабо в V^2, $\varepsilon_m A^2 u^m_{yyy} \to w$ слабо в F при $m \to \infty$. Если мы докажем, что $w = 0$, то теорема будет доказана. Рассмотрим $\varphi(x,y) \in C_0^\infty(Q)$ и следующее выражение

$$\left|\int\limits_Q |y|\varepsilon_m A^2 u^m_{yyy}\varphi(x,y)\,dxdy\right| = \left|\int\limits_Q |y|\varepsilon_m A\,u_{yyy} A\,\varphi(x,y)\,dxdy\right|$$

$$\leqslant \varepsilon_m \left(\int\limits_Q |y|(A\varphi)^2(x,y)\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q |y|(Au_{yyy})^2\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M_1\sqrt{\varepsilon_m} \to 0.$$

Последнее неравенство справедливо в силу оценки (12). С другой стороны,

$$\int\limits_Q |y|\varepsilon_m A^2 u^m_{yyy}\varphi\,dxdy \to \int\limits_Q |y| w\varphi\,dxdy$$

при $m \to \infty$ для всех $\varphi \in F$. Таким образом, $\int_Q |y| w\varphi\,dxdy = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty$. В силу плотности $C_0^\infty(Q)$ в F получаем, что $w = 0$. Теорема доказана.□

Замечание. Докажем, что $C_0^\infty(Q)$ всюду плотно в F. Пусть $\varepsilon > 0$ и $f(x,y) \in F$. Тогда $\sqrt{y}f(x,y) \in L_2(Q^+)$ и $\sqrt{-y}f(x,y) \in L_2(Q^-)$. Так как $C_0^\infty(Q^\pm)$ всюду плотно в $L_2(Q^\pm)$, существуют функции $\varphi_1 \in C_0^\infty(Q^+)$ и $\varphi_2 \in C_0^\infty(Q^-)$ такие, что

$$\|\sqrt{y}f(x,y) - \varphi_1(x,y)\|_{L_2(Q^+)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|\sqrt{-y}f(x,y) - \varphi_2(x,y)\|_{L_2(Q^-)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как φ_1, φ_2 финитны, то $\rho(supp\varphi_i, \{y=0\}) > 0$ при $i = 1, 2$ и, следовательно, функции $\psi_1 = \frac{\varphi_1}{\sqrt{y}}$ и $\psi_2 = \frac{\varphi_2}{\sqrt{-y}}$ принадлежат соответственно $C_0^\infty(Q^+)$ и $C_0^\infty(Q^-)$. Рассмотрим

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \psi_1(x,y), & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ \psi_2(x,y), & y < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\psi(x,y) \in C_0^\infty(Q)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|f - \psi\|_F &= \|\sqrt{y}(f - \psi_1)\|_{L_2(Q^+)} + \|\sqrt{-y}(f - \psi_2)\|_{L_2(Q^-)} \\ &= \|\sqrt{y}f - \varphi_1\|_{L_2(Q^+)} + \|\sqrt{-y}f - \varphi_2\|_{L_2(Q^-)} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия леммы 3. Тогда задача IV имеет единственное решение, принадлежащее пространству V^2. При этом справедлива оценка*

$$\|u(x,y)\|_{V^2} \leqslant C\|f(x,y)\|_F.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубинский Ю. А.* Квазилинейные эллиптико-параболические уравнения // Мат. сб. 1968. Т. 88. № 3. С. 470–496.
2. *Дубинский Ю. А. Краевые задачи для некоторых классов* дифференциально-операторных уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 1. С. 32–34.
3. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2007. № 2. С. 18–26.
4. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка // Новосибирск: Вычислительный центр СО РАН. 1995.
5. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.

г. Новосибирск *14 октября 2011 г.*

УДК 621.791.01:536.2:517.944

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА МУФТОВОЙ СВАРКИ ПОЛИЭТИЛЕНОВЫХ ТРУБ С УЧЕТОМ ДВУХФАЗНОЙ ОБЛАСТИ*)

Н. П. Старостин, В. В. Сивцева

Согласно нормативным документам сварку полиэтиленовых труб для газопроводов можно проводить при температурах окружающего воздуха (ОВ) от минус 15 °C до плюс 45 °C [1]. При более широком интервале температур сварочные работы рекомендуется выполнять в помещениях (укрытиях), обеспечивающих соблюдение заданного температурного интервала. Однако такая сварка связана с большими энергетическими, непроизводительными затратами и длительной подготовкой, что недопустимо в аварийных ситуациях. Актуальной проблемой является разработка методов и средств оперативной сварки полиэтиленовых труб в зимних условиях в регионах с холодным климатом, где температуры ОВ достигают значений ниже минус 15 °C.

В работе [2] предложен способ стыковой сварки полиэтиленовых труб при температурах ниже нормативных. При низких температурах ОВ технологические режимы, обеспечивающие такую же динамику температурного поля, что и при допустимых температурах ОВ, определяются на основе математического моделирования теплового процесса сварки [3, 4]. Перспективным является развитие предложенного подхода регулирования динамикой температурного поля с использованием математического моделирования тепловым процессом для электро-

*) Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. по мероприятию 1.3.1.

муфтовой сварки. Эффективность технологических режимов, найденных на основе такого подхода, во многом определяется адекватностью математической модели реальному тепловому режиму. Динамика температурного поля при электромуфтовой сварке теоретически изучена недостаточно. Работы по ее изучению носят преимущественно экспериментальный характер. Теоретические результаты расчетов динамики температур хорошо совпадают с экспериментальными данными только на этапе нагрева [5], на этапе охлаждения достоверных сопоставлений теоретических и экспериментальных данных в литературе не приводится, что свидетельствует о недостаточной изученности процесса остывания при электромуфтовой сварке, при котором происходит формирование сварного соединения. Для учета теплоты фазового перехода обычно используют классическую постановку задачи Стефана. В этой постановке предполагается, что фазовый переход происходит на четко выраженной границе раздела твердой и жидкой фаз [6]. В полиэтилене не существует такой четко выраженной границы, фазовый переход происходит в интервале температур. Целью данной работы является математическое моделирование теплового процесса при электромуфтовой сварке полиэтиленовых труб с учетом фазового перехода в интервале температур.

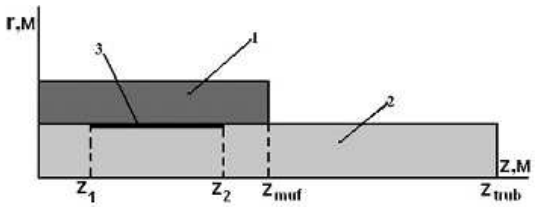

Рис. 1. Расчетная схема трубы с муфтой: 1 — муфта; 2 — стенка трубы; 3 — нагревательный элемент.

Сначала рассмотрим классическую постановку задачи Стефана и сопоставим ее решение с экспериментальными данными. Расчетная схема трубы с муфтой представлена на рис. 1. Не теряя общности,

будем считать, что муфта и труба изготовлены из одного и того же материала. В силу симметрии рассматривается одна из половин соединения муфты с отрезком трубы. Предполагается, что распределение температуры по окружности любого поперечного сечения трубы и муфты однородное. Математическая задача ставится следующим образом. Область Ω, занятая муфтой и отрезком трубы, в момент времени $t > 0$ разбивается некоторой гладкой поверхностью $\Gamma(\mathrm{t})$, подлежащей определению, на две подобласти $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$, занятые соответственно жидкой и твердой фазами материала трубы и муфты. В каждой из областей $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$ температура $T(r,z,t)$ удовлетворяет двумерному уравнению теплопроводности в цилиндрических координатах:

$$C(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z},$$

$$0 < t < t_m,\ r_1 < r < r_3,\ 0 < z < z_{\mathrm{muf}},\ r_1 < r < r_2,\ z_{\mathrm{muf}} < z < z_{\mathrm{trub}},$$

где удельная теплоемкость $C(T)$, плотность $\rho(T)$ и коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$ берутся различными в жидкой и твердой фазах: для твердой фазы с индексом 1, для жидкой — с индексом 2. Нагревательный элемент рассматривается как сосредоточенный источник тепла. В месте расположения источника тепла решение задачи удовлетворяет условиям сопряжения:

$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r_M-0} - \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r_M+0} = Q(t), \quad z_1 \leqslant z \leqslant z_2,$$

$$T|_{r_M-0} = T|_{r_M+0}, \quad z_1 \leqslant z \leqslant z_2,$$

где $Q(t)$ — мощность источника тепла. На границе трубы и муфты задается условие идеального теплового контакта:

$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r_2-0} = \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r_2+0}, \quad T(r_2-0,z,t) = T(r_2+0,z,t).$$

На левой границе рассматриваемой области выполняется условие симметрии:

$$\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0,$$

на правой — условие первого рода:

$$T(r, L_1, t) = T_{\text{okr}}.$$

На свободных поверхностях выполняются условия теплообмена с окружающей средой с температурой T_{okr}:

$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_G = -a(T|_G - T_{\text{okr}}).$$

В начальный момент времени распределение температуры однородное:

$$T(r, z, 0) = T_{\text{okr}}.$$

На границе раздела фаз кроме равенства температуры материала температуре фазового перехода

$$T|_{\Gamma(t)} = T_f$$

задается условие Стефана

$$(\lambda_1 \operatorname{grad} T - \lambda_2 \operatorname{grad} T, \operatorname{grad} \Phi) - L\rho\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

где $\Phi(r, z, t)$ определяет положение границы раздела фаз $\Gamma(t)$ в момент времени t; L, T_f — удельная теплота и температура фазового перехода соответственно.

Задача Стефана в двумерной постановке решалась методом конечных разностей с использованием экономичной схемы сквозного счета [7] при следующих исходных данных: $z_1 = 0,012$; $z_2 = 0,03$; $z_{\text{muf}} = 0,048$; $z_{\text{trub}} = 0,2$; $r_1 = 0,025$ — внутренний радиус трубы; $r_2 = 0,0315$; $r_3 = 0,0395$ — внешний радиус муфты; $r_M = 0,03175$ м; $\lambda_1 = 0,46$; $\lambda_2 = 0,24$ Вт/(м·К); $\rho_1 = 950$; $\rho_2 = 800$; $c_1 = 2000$; $c_2 = 2400$ Дж/(кг·К); температура плавления $T_{\text{pl}} = 128°$ С; температура кристаллизации $T_{\text{krist}} = 111°$С; $L = 177$ кДж/кг.

Мощность источника тепла вычислялась по формуле:

$$Q(t) = \frac{U^2}{R \cdot (1 + \beta(T(r_M, z, t) - 20))S},$$

где U — сварочное напряжение; R — сопротивление спирали при температуре 20°C; β — температурный коэффициент сопротивления; S — площадь поверхности источника тепла; $U = 32,8$ В; $R = 1,6$ Ом; $\beta = 0,00433\frac{1}{^\circ C}$. Полуинтервал сглаживания выбирался различным так, чтобы область определения дельтаобразной функции охватывала 2–3 соседних узла расчетной сетки. Для сопоставления теоретических и экспериментальных температурных зависимостей проведена сварка труб ПЭ 100 ГАЗ SDR11 $63 \times 5,8$ ГОСТ Р 50838-95 с помощью муфты с закладным нагревателем ПЭ 100 SDR 11 при комнатной температуре. Значения температур в муфте и трубе регистрировались в 8 точках медь-константановыми термопарами ∅ 0,2 мм с помощью многоканального программного регулятора температуры с графическим дисплеем ТЕРМОДАТ–17Е3. Результаты расчетов показывают, что теоретические зависимости температуры от времени, полученные решением задачи Стефана в классической постановке, сильно отличаются от экспериментальных (рис. 2, кривые 1 и 2).

Во-первых, максимальная температура, достигаемая в конце этапа нагрева, существенно превышает значение температуры, полученное в эксперименте, что свидетельствует о том, что при математическом моделировании теплового процесса недостаточно учитывается поглощение теплоты при плавлении свариваемых материалов. Во-вторых, на стадии охлаждения в расчетной кривой температура после плато достаточно резко падает, чего не наблюдается в экспериментальной зависимости температуры от времени. Такое изменение температуры указывает на то, что процесс кристаллизации резко не обрывается, а продолжается с меньшей интенсивностью. Причина расхождения теоретических и экспериментальных зависимостей температуры заключается в том, что при решении классической задачи Стефана считается, что на границе фазового перехода поглощается при температуре плавления T_{pl} и выделяется при температуре кристаллизации T_{krist} теплота с удельным количеством L, равная усредненному значению удельной теплоты фазового перехода в интервале температур. Как показывают исследования плавления и кристаллизации полиэтилена методом диф-

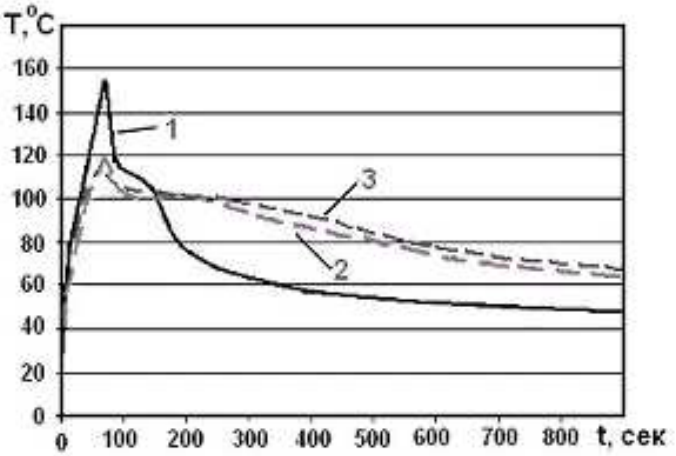

Рис. 2. Экспериментальные и расчетные зависимости температур от времени: 1, 3 — расчетные зависимости, полученные решением задачи Стефана традиционным методом и предлагаемым способом соответственно, 2 — экспериментальные зависимости

ференциальной сканирующей калориметрии (ДСК), фазовый переход происходит в интервале температур (T_S, T_L) шириной примерно 50°C [8]. Это явление называют частичным плавлением [9], которое объясняется распределением кристаллитов по размерам, обусловленным кинетическими факторами. Физической причиной такой зависимости является влияние размеров на температуру плавления кристаллитов. Меньшие по размеру кристаллиты плавятся при более низкой температуре по сравнению с более крупными, что и приводит к широкому температурному интервалу плавления полимера. Кристаллизация полимерных расплавов при нормальном давлении приводит к образованию набора неравновесных (метастабильных) кристаллитов, средний размер которых зависит от температуры кристаллизации. Причем размер кристаллитов возрастает с увеличением температуры кристаллизации. Кроме того, на ширину интервала фазового перехода влияют процессы рекристаллизации и реорганизации [9]. За температуру плавления

и кристаллизации обычно берутся значения температур, при которых достигаются пики теплового потока. В случае фазового перехода в интервале температур в математической модели необходимо учитывать промежуточную фазу между твердым и жидким веществом, называемую двухфазной зоной, поскольку в этой зоне вещество находится как в твердом, так и в жидком состоянии [10]. Границы двухфазной зоны определяются температурами солидуса T_S и ликвидуса T_L. В работах [6, 10] температурное поле в этом случае предлагается определять из уравнения теплопроводности с эффективным коэффициентом теплоемкости:

$$\widetilde{C}(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

$$0 < t < t_m,\ r_1 < r < r_3,\ 0 < z < z_{\text{muf}},\ r_1 < r < r_2,\ z_{\text{muf}} < z < z_{\text{trub}},$$

где

$$\widetilde{C}(T) = \begin{cases} C_1, & T \leqslant T_S, \\ C_1 - L\frac{d\Psi}{dT}, & T_S < T < T_L, \\ C_2, & T \geqslant T_L, \end{cases}$$

$\Psi(T)$ — объемная доля твердой фазы. При предположении прямой пропорциональности объема расплавленного полиэтилена количеству выделившейся теплоты, $\Psi(T)$ определяется по формуле

$$\Psi(T) = 1 - \frac{\int\limits_{T_S}^{T} q(u)\,du}{\int\limits_{T_S}^{T_L} q(u)\,du},$$

где $q(T)$ — зависимость теплового потока от температуры, отнесенная к единице массы вещества, регистрируемая дифференциальным сканирующим калориметром.

Так как удельная теплота фазового перехода L определяется по формуле

$$L = \frac{(t_1 - t_2)\int\limits_{T_S}^{T_L} q(u)\,du}{(T_L - T_S)},$$

то

$$L\frac{d\Psi}{dT} = -\frac{q(T)(t_1 - t_2)}{(T_L - T_S)},$$

где t_1, t_2 — время начала и время окончания фазового перехода. Эффективный коэффициент теплоемкости вычислим по формуле:

$$\widetilde{C}(T) = \begin{cases} C_1, & T \leqslant T_S, \\ C_1 - \frac{q(T)}{\Delta}, & T_S < T < T_L, \\ C_2, & T \geqslant T_L, \end{cases}$$

где $\Delta = \frac{(T_L - T_S)}{(t_1 - t_2)}$ — скорость нагрева, варьируемая в ДСК.

В практических расчетах зависимость $q(t)$ теплового потока от температуры достаточно взять для одной характерной для исследуемого процесса скорости нагрева. Затем значение Δ уточняется сопоставлением расчетных и экспериментальных температурных данных.

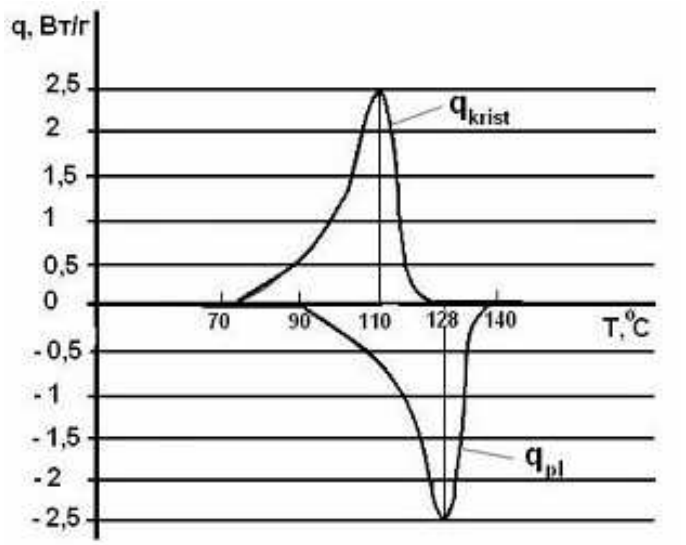

Рис. 3. Зависимости теплового потока при кристаллизации и плавлении полиэтилена от температуры

На рис. 3 представлены использованные в расчетах зависимости теплового потока при кристаллизации $q_{krist}(T)$ и плавлении $q_{pl}(T)$ полиэтилена от температуры, зарегистрированные NETZSCH DSC 204 F1 при скорости нагрева 20°C/мин. Коэффициент теплопроводности в интервале фазового перехода изменялся линейно от значения λ_1 до λ_2.

Различие в значениях температур плавления и кристаллизации и протекания фазового перехода в интервале температур приводят к тому, что в некоторых точках сварного соединения максимальная температура не достигает значения температуры окончания плавления и соответственно в математической модели имитируется поглощение меньшего количества теплоты. В то же время при охлаждении температура изменяется почти на всем интервале температур кристаллизации и выделяется значительно больше теплоты. Поэтому для сохранения теплового баланса вводится коэффициент k_{tb}, на который умножается функция $q_{\mathrm{krist}}(T)$. Коэффициент k_{tb} вычисляется по следующей формуле:

$$k_{tb} = \frac{\int\limits_{T_{\mathrm{pl}}-40}^{T^*} q_{pl}(T)\,dT}{\int\limits_{T_{\mathrm{krist}}-40}^{T^*} q_{\mathrm{krist}}(T)\,dT},$$

где T^* — значение максимальной температуры. Если $T^* < T_{\mathrm{pl}} - 40$, то при охлаждении кристаллизация не происходит и $k_{\mathrm{tb}} = 0$, если $T^* > T_{\mathrm{pl}} + 10$, то тепловой поток при плавления равен тепловому потоку при кристаллизации и $k_{\mathrm{tb}} = 1$.

Задача с фазовым переходом в интервале температур решалась методом конечных разностей по тому же алгоритму, что и классическая задача Стефана. На рис. 2 теоретическая зависимость температуры от времени (кривая 3), полученная с помощью изложенного способа учета теплоты фазового перехода, с удовлетворительной для практического использования точностью описывает экспериментальную кривую. Такие же результаты получены и для других экспериментальных данных, что свидетельствует об адекватности предлагаемой математической модели реальному тепловому процессу при электромуфтовой сварке полиэтиленовых труб.

Вывод. При математическом моделировании теплового процесса сварки полиэтиленовых труб для газопроводов с помощью муфт с закладными нагревателями необходимо учитывать протекание фазового перехода в интервале температур.

ЛИТЕРАТУРА

1. *СП 42-103-2003.* Проектирование и строительство газопроводов из полиэтиленовых труб и реконструкция изношенных газопроводов. М.: Полимергаз, ФГУП ЦПП, 2004.
2. *Старостин Н. П., Герасимов А. И., Аммосова О. А.* Пат. РФ № 2343331 RU F16L 13/00, 47/00. Способ сварки полимерных труб. Ин-т проблем нефти и газа СО РАН. 2006144681/06; заявл. 14.12.2006; опубл. 10.01.2009, Бюл. № 1.
3. *Старостин Н. П., Аммосова О. А.* Контактная сварка полимерных труб оплавлением при низких температурах окружающей среды. Ч. 1. Математическое моделирование теплового процесса // Сварочное производство. 2007. №4. С. 17–20.
4. *Старостин Н. П., Аммосова О. А.* Контактная сварка полиэтиленовых труб оплавлением при низких температурах окружающей среды. Ч. 2. Исследование процесса охлаждения // Сварочное производство. 2008. №9. С. 31–34.
5. *Гориславец В. М., Таран А. Г., Обвинцев В. И., Гисер Е. Ш.-М.* Динамика плавления полиэтилена в сварном соединении, получаемом при помощи муфты с закладным нагревательным элементом // Автоматическая сварка. 1984. №10. С. 28–32.
6. *Вабищевич П. Н.* Численные методы решения задач со свободной границей. М.: Изд-во МГУ, 1987.
7. *Самарский А. А., Моисеенко Б. Д.* Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, №5. С. 816–827.
8. *Гориловский М. П., Калугина Е. В., Иванов А. Н., Сатдинова Ф. К.* Исследование кристалличности и термостабильности в трубах, полученных из различных видов полиэтилена // Пластические массы. 2005. №5. С. 9–12.
9. *Годовский Ю. К.* Теплофизические методы исследования полимеров. М.: Химия, 1976.
10. *Авдонин Н. А.* Математическое описание процессов кристаллизации. Рига: Зинатне, 1980.

г. Якутск *28 июня 2011 г.*

АННОТАЦИИ

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
С ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА.
А. М. Абдрахманов. — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Исследована разрешимость краевой задачи с интегродифференциальным граничным условием для уравнений

$$Au_{tt} - Bu = f(x,t)$$

с эллиптическим оператором A второго порядка. Доказаны теоремы существования и единственности. Библиогр. 10.

Ключевые слова: уравнение составного типа, краевая задача с интегродифференциальным граничным условием, регулярное решение.

УДК 517.956

НЕКОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. *С. А. Алдашев.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

В цилиндрической области изучается смешанная задача для многомерного эллиптико-параболического уравнения. Показано, что однородная задача имеет бесконечное множество нетривиальных решений, а неоднородная задача разрешима неоднозначно. Библиогр. 7.

Ключевые слова: некорректность, смешанная задача.

УДК 517.956.4

ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА. *В. И. Антипин.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Исследованы краевые задачи для операторно-дифференциального уравнения вида

$$Bu_t - Lu = f(x,t),$$

где B, L — линейные операторы, определенные в данном гильбертовом пространстве E, причем оператор B самосопряжен. Устанавливается и доказывается теорема существования обобщенного решения. Библиогр. 13.

Ключевые слова: краевая задача, операторно-дифференциальное уравнение, обобщенное решение.

УДК 517.929.4

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ. *Е. С. Водопьянов, Г. В. Демиденко.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Изучается асимптотическая устойчивость решений систем линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}y(t) = (A + \Delta A)y(t) + (B + \Delta B)y(t - \tau), \quad t > \tau,$$

где A, B — постоянные матрицы размера $n \times n$, ΔA, ΔB — матрицы возмущения, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. Получены условия асимптотической устойчивости нулевого решения, установлены равномерные оценки решений на полуоси $\{t > \tau\}$. Библиогр. 9.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, возмущение коэффициентов, асимптотическая устойчивость, оценки решений.

УДК 517.95

СТАЦИОНАРНЫЙ МЕТОД ГАЛЁРКИНА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ. *И. Е. Егоров, Е. С. Ефимова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Стационарный метод Галёркина применяется к решению первой краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени в цилиндрической области. При этом базисные функции выбираются как решения спектральной задачи для уравнения Лапласа. Исследуется слабая и сильная сходимость приближенных решений к регулярному решению. Библиогр. 8.

Ключевые слова: метод Галёркина, приближенное решение, параболическое уравнение, оценка.

УДК 518.9

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СОРТИРОВКИ И ВЫБОРА. *Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Рассматриваются различные подходы к решению задач сортировки и выбора, которые разрабатывались авторами в предыдущих выпусках журнала. Библиогр. 6.

Ключевые слова: участник, объект, распределение, жеребьевка, разбиение.

УДК 519.172.2

2-ГРАНЕВАЯ 4-РАСКРАШИВАЕМОСТЬ ПЛОСКИХ ГРАФОВ С ОБХВАТОМ НЕ МЕНЕЕ 22. *А. О. Иванова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Правильная вершинная раскраска плоского графа называется 2-граневой, если любые две различные вершины, соединенные путем длины два в обходе границы грани, раскрашены различно.

Очевидно, для 2-граневой раскраски 5-цикла C_5 требуется 5 цветов, а обхват (длина минимального цикла) C_5 равен 5, тогда как 3-звезда $K_{1,3}$ имеет бесконечный обхват и требует 4 цвета для 2-граневой раскраски. Мы доказываем 2-граневую 4-раскрашиваемость плоских графов с обхватом не менее 22. Ил. 5, библиогр. 28.

Ключевые слова: плоский граф, 2-дистанционная раскраска, 2-граневая раскраска, обхват.

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. *А. И. Кожанов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Исследована разрешимость нелокальных краевых задач с граничным условием Самарского, а также соответствующих линейных обратных задач с граничным интегральным переопределением для многомерных параболических уравнений. Доказаны теоремы существования и единственности. Библиогр. 20.

Ключевые слова: многомерное параболическое уравнение, нелокальная задача, граничное условие Самарского, обратная задача с граничным интегральным переопределением.

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. *Ю. А. Кошелева.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Исследована разрешимость линейных обратных задач для некоторых классов ультрапараболических уравнений. Доказаны теоремы существования и единственности. Библиогр. 12.

Ключевые слова: ультрапараболическое уравнение, линейная обратная задача, регулярное решение.

УДК 539.311

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВНЕШНИМИ НАГРУЗКАМИ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО С УСЛОВИЕМ НЕПРОНИКАНИЯ НА ТРЕЩИНЕ. *Н. П. Лазарев.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Рассматривается вариационная задача о равновесии упругой изотропной пластины модели Тимошенко, содержащей трещину. При этом на кривой описывающей трещину задано нелинейное условие в виде неравенства. Доказано, что решение вариационной задачи удовлетворяет априорным оценкам, зависящим только от функции заданных внешних нагрузок и области соответствующей пластине. Благодаря этим результатам доказана теорема о существовании решения в задаче об оптимальном управлении внешними нагрузками с функционалом качества, характеризующим деформации. Доказана разрешимость задачи оптимального управления с функционалом качества, описывающим раскрытие трещины. Ил. 1, библиогр. 22.

Ключевые слова: оптимальное управление, трещина, функционал энергии, вариационное неравенство, пространства Соболева.

УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. *Г. А. Лукина.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Для ультрапараболических уравнений $u_t + u_\tau - u_{xx} + c(x,t,\tau)u = f(x,t,\tau)$ исследуются краевые задачи с заданием граничных условий интегрального вида. Доказываются теоремы разрешимости в классах регулярных решений. Библиогр. 11.

Ключевые слова: ультрапараболическое уравнение, интегральные граничные условия, регулярное решение, существование и единственность.

УДК 517.946

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ. *С. С. Павлов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Исследуется вопрос о резрешимости задач для многомерных гиперболических уравнений в случае неизвестных коэффициентов с интегральными условиями переопределения. Библиогр. 8.

Ключевые слова: обратная задача, условия переопределения, гиперболическое уравнение, волновое уравнение, априорная оценка.

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА ТРИКОМИ. *И. М. Петрушко, Т. В. Капицына.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Изучается разрешимость первой спешанной задачи для параболических уравнений со слабым вырождением типа Трикоми на границе и начальными условиями из L_p. Библиогр. 5.

Ключевые слова: параболическое уравнение, слабое вырождение типа Трикоми.

УДК 517.946

ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. *А. В. Прокопьев.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Рассматриваются вопросы разрешимости некоторых линейных обратных задач для эллиптико-параболического уравнения. Неизвестными являются решение и правая часть специального вида, в которой неизвестными являются функции $q_k(x)$. Эллиптико-параболическое уравнение дополняется также условиями первой

начально-краевой задачи и условиями переопределения. Найдены условия разрешимости задачи, сформулированы теоремы существования обобщенных решений эллиптико-параболического уравнения при различных условиях переопределения. Библиогр. 8.

Ключевые слова: эллиптико-параболическое уравнение, линейная обратная задача, обобщенная разрешимость, априорные оценки, внешнее воздействие.

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕИЗВЕСТНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ. *Л. А. Телешева.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Исследована разрешимость нелинейной обратной задачи для некоторых классов параболических уравнений высокого порядка. Доказаны теоремы существования и единственности решений. Библиогр. 18.

Ключевые слова: параболическое уравнение высокого порядка, нелинейная граничная задача, интегральное условие переопределения.

УДК 512.6:519.61

ЗАМЕЧАНИЯ О ГАУССОВЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (БСЛАУ). *Ф. М. Федоров.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Сделаны некоторые уточнения понятия гауссовых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Исследованы «квазигауссовы» бесконечные системы. Библиогр. 5.

Ключевые слова: бесконечные системы, гауссовы системы, линейные уравнения, метод редукции в широком смысле.

УДК 512.6:519.61

К ТЕОРИИ ГАУССОВЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (БСЛАУ). *Ф. М. Федоров.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Найдены необходимые и достаточные условия существования решений гауссовых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. При выполнении указанных условий получены замкнутые решения этих систем. Библиогр. 3.

Ключевые слова: гауссовы системы, бесконечные системы, линейные алгебраические уравнения, метод редукции.

УДК 517.95

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. *В. В. Шубин.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

Рассматриваются краевые задачи для уравнения $h(y)u_{yyy} + Au + c(x,y)u = f(x,y)$, где $h(y) = h_1$ при $y > 0$, $h(y) = -h_2$ при $y < 0$, причем $h_1, h_2 > 0$ и A — эллиптический оператор второго порядка. Задачи рассматриваются в цилиндре $Q = \Omega \times (-T, T)$, где Ω — ограниченная область с гладкой границей и $T > 0$. Для уравнения ставятся условия сопряжения на множестве $\Omega \times \{0\}$. Доказываются теоремы существования и единственности решений поставленных задач в весовых пространствах с весом $|y|$. Библиогр. 6.

Ключевые слова: уравнение с частными производными, уравнение третьего порядка, уравнение составного типа, уравнение с переменным направлением эволюции, уравнение с разрывными коэффициентами.

УДК 621.791.01:536.2:517.944

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА МУФТОВОЙ СВАРКИ ПОЛИЭТИЛЕНОВЫХ ТРУБ С УЧЕТОМ ДВУХФАЗНОЙ ОБЛАСТИ. *Н. П. Старостин, В. В. Сивцева.* — Мат. заметки ЯГУ, 2011, т. 18, вып. 2.

В математической модели теплового процесса муфтовой сварки полиэтиленовых труб для газопроводов предлагается учитывать фазовый переход в интервале температур. Сопоставлением теоретических зависимостей температур от времени с экспериментальными показана эффективность такого подхода определения динамики температурного поля в сварном соединении. Ил.3, библиогр. 10.

Ключевые слова: муфтовая сварка, двухфазная область, задача Стефана.

REFERATS

UDC 517.95

On the solvability of boundary value problem with integrodifferential boundary condition for some classes of composite type equations. *A. M. Abdrakhmanov* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

The article is devoted to study the solvability of the boundary value problem with integrodifferential boundary condition for the equation

$$Au_{tt} - Bu = f(x,t)$$

with an elliptic operator A of second order. The existence and uniqueness theorems are proved. Bibliogr. 10.

KEYWORDS: composite type equations, boundary value problem with integrodifferential condition, regular solution.

UDC 517.946.4

Ill-posedness of the mixed problem for a multi-dimensional elliptic-parabolic equation *S. A. Aldashev* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

This paper studies the mixed problem for a multi-dimensional elliptic-parabolic equation in the cylindrical domain. We show that the homogeneous problem has infinitely many non-trivial solutions, while the non-homogeneous problem is uniquely solvable. Bibliogr. 7.

KEYWORDS: ill-posedness, mixed problem, equation, solutions.

UDC 517.956.4

Generalized solvability of boundary value problem for operator-differential equations of mixed type. *V. I. Antipin* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

In this paper we study the solvability of boundary value problems for operator-differential equations of the

$$Bu_t - Lu = f(x,t).$$

form, where B, L - linear operators defined in the Hilbert space E, and the operator B is selfadjoint. An existence theorem for generalized solutions is formulated and proved. Bibliogr. 13.

KEY WORDS: boundary value problems, operator-differential equations, generalized solution.

UDC 517.929.4

Asymptotic stability of solutions to linear delay differential equations under perturbations of coefficients. *E. S. Vodop′yanov, G. V. Demidenko* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

We study asymptotic stability of solutions to the systems of linear delay differential equations

$$\frac{d}{dt}y(t) = (A + \Delta A)y(t) + (B + \Delta B)y(t - \tau), \quad t > \tau,$$

where A, B are $n \times n$ constant matrices, ΔA, ΔB are matrix perturbations, $\tau > 0$ is time delay. We obtain conditions of asymptotic stability of the zero solution and establish uniform estimates for solutions on $\{t > \tau\}$. Bibliogr. 9.

KEY WORDS: delay differential equations, perturbations of coefficients, asymptotic stability, estimates for solutions.

UDC 517.956

A stationary Galerkin method for parabolic equations with changeable direction of time. *I. E. Egorov, E. S. Efimova* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

Stationary Galerkin method is used to the solution of the first boundary value problem for parabolic equation with changeable direction of time. In this case basic functions are chose as a solution of the spectral problem for Laplace equations. Weak and strong convergence of approximate solutions to the regular solution is investigated. Bibliogr. 8.

KEY WORDS: Galerkin method, approximate solutions, parabolic equation, estimation.

UDC 518.9

On some approaches to solving problems of sorting and selection. *R. I. Egorov, S. P. Kaĭgorodov* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

This paper discusses various approaches to solving problems of sorting and selecting, which were developed by the authors in previous editions of the magazine. Bibliogr. 6.

KEY WORDS: participant, object, distribution, sortition, partition.

UDC 519.172.2

2-Facial 4-colorability of planar graphs with girth at least 22 *A. O. Ivanova* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

A proper vertex coloring of a planar graph is 2-facial if any two different vertices joined by a facial walk of length two are colored differently. Clearly, a 2-facial coloring of the 5-cycle C_5 requires 5 colors, and the girth (the minimum length of a cycle) of C_5 is 5, while the 3-star $K_{1,3}$ has the infinite girth and requires 4 colors for a 2-facial coloring. We prove the 2-facial 4-colorability of the planar graphs with girth at least 22. Il. 5, bibliogr. 28.

KEYWORDS: planar graph, 2-distance coloring, 2-facial coloring, girth.

UDC 517.946

Solvability of some nonlical and related inverse problems for parabolic equations. *A. I. Kozhanov* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

The article is devoted to study solvability of some nonlocal boundary value problem with Samarskii condition, and solvability of the related linear inverse problem with boundary integral overdetermination for multidimentional parabolic equations. The existence and uniqueness theorems are proved. Bibliogr. 20.

KEY WORDS: multidimentional parabolic equation, nonlocal problem, Samarskii condition, inverse problem with boundary integral overdetermination, regular solution.

UDC 517.946

On the solvability of some linear inverse problems for ultraparabolic equations. *Yu. A. Kosheleva* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

The article is devoted to study solvability of linear inverse problems for some classes of ultraparabolic equations. The existence and uniqueness theorems are proved. Bibliogr. 12.

KEY WORDS: ultraparabolic equation, linear inverse problem, regular solution.

UDC 539.311

Optimal control of exterior forces in equilibrium problem for Timoshenko-type plate with non-penetration conditions at the crack faces. *N. P. Lazarev* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

We consider equilibrium problem for Timoshenko-type plate. The problem is formulated as variational one. The plate is assumed to have a vertical crack. The nonpenetration condition imposed on crack faces is formulated in the form of inequality. We obtain a priori estimates for solutions. We consider two different cost functionals and corresponding optimal control problems. For this problems we prove the existence of an optimal solution over the control set. Il. 1, bibliogr. 22.

KEY WORDS: optimal control, crack, energy functional, variational inequality, Sobolev spaces.

UDC 517.946

Boundary value problems with integral conditions for the ultraparabolic equations. *G. A. Lukina* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

Considering the boundary value problems with integral conditions for the ultraparabolic equations $u_t + u_\tau - u_{xx} + c(x,t,\tau)u = f(x,t,\tau)$. We prove the existence and uniqueness theorems. Bibliogr. 11.

KEY WORDS: ultraparabolic equation, integral conditions, regular solution, existence, uniqueness.

UDC 517.946

Nonlinear inverse problem for a multidimensional hyperbolic equations with integral overdetermination. *S. S.Pavlov* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

The question of the solvability of inverse problems for multidimensional hyperbolic equations with unknown coefficients integral conditions override. Bibliogr. 8.

KEY WORDS: inverse problem, condition of redefinition, hyperbolic equation, wave equation, a priori estimate.

UDC 517.946

On the solvability of the first mixed problem for parabolic equations with weak degeneracy of Tricomi type. *I. M. Petrushko, T. V. Kapitsyna* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

The paper deals with the solvability of the first mixed problem for parabolic equations with weak degeneracy of Tricomi type of boundary and initial conditions belonging to the spaces of type L_p. Bibliogr. 5.

KEY WORDS: parabolic equation, weak degeneration Tricomi type.

UDC 517.946

Linear inverse problem for elliptic-parabolic equation. *A. V. Prokop'ev.* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

In this paper the problem of solvability of some linear inverse problems for elliptic-parabolic equation is considered. The unknown functions are the solution of the equation and functions $q_k(x)$ in the right part of the equation. The solution of elliptic-parabolic equation also should satisfy to a first initial-boundary problem conditions and to a redefinition condition. Conditions are found for solvability of the problem, the existence theorems of generalized solutions of elliptic-parabolic equation under various conditions of the redefinition formulated and proved. Bibliogr. 8.

KEY WORDS: elliptic-parabolic equation, linear inverse problem, the generalized solvability, a priori estimates, the external impact.

UDC 517.946

On the solvability of an inverse problem for higher order parabolic equation with an unknown coefficient of the time derivative. *L. A. Telesheva* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

The article is devoted to study solvability of nonlinear inverse problems for some classes of higher parabolic equations. The existence and uniqueness theorems are proved. Bibliogr. 18.

KEY WORDS: higher order parabolic equation, nonlinear inverse problem, integral overdetermination solution.

UDC 512.6:519.61

A remark of Gauss infinite systems of linear algebraic equations (ISLAE). *F. M. Fedorov* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

Some improvements of concert of Gauss infinite systems of linear algebraic equations are done, Quasi-Gauss infinite systems are considered. Bibliogr. 5.

KEY WORDS: infinite systems, Gauss systems, linear equations, method of reduction in the wide meaning.

UDC 512.6:519.61

To the theory of Gaussian infinite systems of linear algebraic equations. *F. M. Fedorov*

The necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of the Gaussian infinite systems of linear algebraic equations are found. Under these conditions closed solutions of these systems are got. Bibliog. 3.

KEY WORDS: Gaussian systems, infinite systems, linear, algebraic equations, reduction method.

UDC 517.95

Weighted estimates of solutions of boundary value problems for third order equation with discontinuous coefficient. *V. V. Shubin*

In the work we consider boundary value problems for the equation $h(y)u_{yyy} + A\,u + c(x,y)u = f(x,y)$, where $h(y) = h_1$ if $y > 0$, $h(y) = -h_2$ if $y < 0$ and $h_1, h_2 > 0$. Here A is second order elliptic operator. We consider these problems in the cylinder $Q = \Omega \times (-T, T)$, where Ω is open connected set with smooth boundary and $T > 0$. We prove theorems of existence and uniqueness of solutions in weighted spaces. Weight of these spaces is equal to $|y|$. Bibliogr. 6.

KEY WORDS: partial differential equations, third order equations, equations of composite type, equations with variable direction of evolution, equations with discontinuous coefficients.

UDC 621.791.01:536.2:517.944

Modeling of thermal process of socket welding of polyethylene pipes taking into account diphasic area. *N. P. Starostin, Sivtseva V. V.* — Math. notes of YSU. 2011. Vol. 18. No. 2.

In mathematical model of thermal process of socket welding of polyethylene pipes for gas pipelines it is offered to consider phase transition in the range of temperatures. By comparison of theoretical dependences of temperatures from time with experimental data efficiency of such approach of definition of dynamics of a temperature field in welded connection is shown. Il. 3, bibliog. 10.

KEY WORDS: socket welding, diphasic area, Srefan's problem.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Математика

Абдрахманов Айдар Максутович
Уфимский государственный авиационный техничесвий университет
ул. К. Маркса, 12, Уфа 450000
abdrai@mail.ru

Алдашев Серик Аймурзаевич
Институт прикладной математики и информатики Актюбинского государственного университета имени К. Жубанова
ул. Бр. Жубановых, 263, Актобе 030000, Казахстан
телефон: 8 (713) 2-59-53-37

Антипин Василий Иванович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, кафедра математического анализа
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
antvasiv@mail.ru

Водопьянов Евгений Сергеевич
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
aclimit@gmail.com

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090,
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru

Егоров Иван Егорович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
niipmi@sitc.ru

Ефимова Елена Сергеевна
Северо-восточный Федеральный университет им. М. К. Аммосова
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
oslamE@mail.ru

Егоров Родион Иванович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
тел.: 8-4112-45-01-04
spkay@rambler.ru

Кайгородов Степан Петрович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
spkay@rambler.ru

Иванова Анна Олеговна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
shmgnanna@mail.ru

Кожанов Александр Иванович
Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Кошелева Юлия Анатольевна
Южно-Сахалинский институт экономики, права и информатики
Коммунистический пр., 72, Южно-Сахалинск 693000
ynuta@yandex.ru

Лазарев Нюргун Петрович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
nyurgun@ngs.ru

Лукина Галина Александровна
Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федеральног университета им. М. К. Аммосова в г. Мирном
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678174
lukina-g@mail.ru

Павлов Степан Степанович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, Институт математики и информатики
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
StStepMath@mail.ru

Петрушко Игорь Мелетьевич
Московский энергетический институт (технический университет)
ул. Красноказарменная, 14, Москва 111250
PetrushkoIM@mpei.ru, petrushko@mail.ru

Капицына Татьяна Владимировна
Московский энергетический институт (технический университет)
ул. Красноказарменная, 14, Москва 111250
Kapitsyna@mpei.ru

Прокопьев Алексей Васильевич
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, кафедра математического анализа
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
vale_cl@mail.ru

Телешева Любовь Александровна
Бурятский государственный университет
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 670000
love_20_09@mail.ru

Федоров Фома Михайлович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
тел.: 8 924 660 39 74
niipmi@sitc.ru

Шубин Владислав Валерьевич
Новосибирский государственный университет, механико-математический факультет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vlad.v.shubin@gmail.com

Математическое моделирование

Старостин Николай Павлович
Институт проблем нефти и газа СО РАН, лаборатория клинических испытаний
ул. Автодорожная, 20, Якутск 677007, Республика Саха(Якутия)
nikstar56@mail.ru

Сивцева Виктория Владимировна
Северо-восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, институт математики и информатики, кафедра дифференциальных уравнений
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха(Якутия),
v01s12@mail.ru

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

К публикации в «Математических заметках ЯГУ» принимаются оригинальные статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

В редакцию представляется рукопись в двух экземплярах объемом не более 1 авторского листа, оформленная согласно стандартным требованиям к авторским оригиналам. К рукописи должны быть приложены два экземпляра аннотации, список ключевых слов на двух языках (русский и английский), шифр УДК. Депонирование рукописи редакцией не осуществляется. Авторы обязаны указать место работы, должность и контактную информацию на двух языках. В случае возвращения статьи для переработки указываются две даты поступления — первоначальная дата и дата получения редакцией окончательного текста.

Основные требования к оформлению рукописи:

1. Текст статьи должен быть напечатан через 2 интервала на одной стороне листа белой писчей бумаги форматом 210×300 мм.

2. Рисунки и сложные диаграммы выполняются на отдельных листах с указанием на обороте фамилии автора, название статьи и номера рисунка; их место в тексте указывается на полях статьи.

3. Номер формулы ставится у правого края листа.

4. Рукописи желательно подготовить с использованием наборных систем типа TEX.

5. В рукописях, подготовленных с помощью текстовых редакторов типа Word, должны быть размечены греческие, готические, латинские рукописные буквы, указано использование букв прямого начертания, а также проведена разметка индексов.

6. В авторских оригиналах, подготовленных с использованием наборных систем типа TEX и выданных на лазерном принтере, разметка формул не проводится, однако на полях поясняются буквы готического алфавита.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Список литературы на двух языках печатается в конце текста на отдельном листе. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

Рукописи, оформленные не по стандартам или превышающие указанный выше объем, возвращаются.

Журнал подготовлен с использованием макро-пакета $\mathcal{AMS}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro system.

Журнал зарегистрирован в Министерстве Российской Федерации
по делам печати, телерадиовещания и средств массовой информации
Свидетельство о регистрации № Я 0118 от 25 ноября 2002 г.

Учредитель: ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный
федеральный университет имени М. К. Аммосова»

Подписано в печать 31.10.2011. Формат $60 \times 84\,{}^{1}/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 15. Тираж 200 экз. Заказ № 202. Цена договорная.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.